ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Տողանյան Վահան Համլետի

ԲՈՒԼՅԱՆ ԵՎ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա. 01. 09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան - 2008

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Тоганян Ваган Гамлетович

БУЛЕВЫ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван - 2008

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Յու. Մ. Մովսիսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Բ. Մարանջյան

ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ա. Շ. Մալխասյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2008 թ. հունիսի 10 – ին ժամը 16.00 - ին ԲՈՀ-ի՝ Երևանի պետական համալսարանում գործող թիվ 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ Երևան 0025, Ա. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2008 թ. մայիսի 10 - ին

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Վ. Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском гасударственном университете

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук Ю. М. Мовсисян

Официальные опоненты: доктор физ.-мат. наук Г. Б. Маранджян

кандидат физ.-мат. наук А. Ш. Малхасян

Ведущая организация: Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Защита состоится 10 июня 2008 г. в 16.00 часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика и математическая логика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 10 мая 2008 г.

Ученый секретарь специализированного совета.
кандидат физ.-мат. наук В. Ж. Думанян

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

<u>Թեմայի հրատապությունը:</u> Ներկայումս ստոխաստիկ և բուլյան համակարգերն ունեն լայն կիրառություն, թե մաթեմատիկայի տարբեր ճյուղերում և թե կոմպյուտերային գիտության մեջ: Վերջին տարիներին բավականին լայն օգտագործում են գտել բիկավարները, որպես հիմնային տրամաբանություն տարբեր արհեստական բանականությունների հետ կապված ուսումնասիրություններում[1–5]: Մանրամասն ուսումնասիրվել են տրամաբանական ծրագրավորման պրոցեդուրային սեմանտիկաները, օգտագործելով որպես հիմնային տրամաբանություն՝ բիկավարները: Այս տեսանկյունից բավականին ակտուալ է դառնում նաև ավելի ընդհանուր հանրահաշիվների օգտագործումը բիկավարների փոխարեն, մասնավորապես 2-բիմոնոիդների օգտագործումը, քանի որ 2-բիմոնոիդը հանդիսանում է բիկավարի նույնատիպ ընդհանրացումը ինչպիսին բիկավարն է կավարի համար:

<u>Աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները:</u> Ատենախոսական աշխատանքի նպատակն է նկարագրել ստոխաստիկ և բուլյան համակարգերի այն հիմնական դասերը, որոնք ունեն էական կիրառական նշանակություն: Եվ հիմնվելով ստացված արդյունքների վրա կառուցել տրամաբանական ծրագրավորման լեզու, որը մասնավոր դեպքում կհամընկնի բիկավարների վրա հիմնված լեզվի հետ, իսկ ընդհանուր դեպքում կլինի նրա ընդլայնումը: Այս ամենի հետ կապված դրվել են հետևյալ խնդիրները.

- նկարագրել դիսկրետ, հաշվելի, տեղափոխական կամ ալտերնատիվ տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշիվները;
- նկարագրել մասնակի տեղափոխական, նորմալ, քվազինորմալ կամ առանց զրոյի բաժանարարների երկտեղ հանրահաշիվները;
- նկարագրել բիմոնոիդները և 2-բիմոնոիդները;
- կառուցել անշարժ կետի և պրոցեդուրային սեմանտիկանները 2 – բիմոնոիդների վրա հիմնված տրամաբանությունների համար, ապացուցել փակության և լրիվության թեորեմները:

---

1 M. C. Fitting, Bilattices in logic programming, in The Twentieth International Symposium on Multiple-Valued Logic, G. Epstein editor, IEEE (1990) pp. 63-70.

2 M. C. Fitting, Bilattices and semantics of logic programming, Journal of Logic Programming, 11(1991) pp. 91-116.

3 M. L. Ginsberg, Multi-valued logics, a uniform approach to reasoning in artificial intelligence, Computational Intelligence, 4(1988) pp. 265-316.

4 B. Mobasher, J. Leszczylowski, G. Slutzki, and D. Pigozzi, Negation as Partial Failure, inProceedings of the Second International Workshop on Logic Programming and Non-monotonic Reasoning, L. M. Pereira and A. Nerode editors, MIT Press (1993) pp. 244-262.

5 B. Mobasher, J. Leszczylowski, D. Pigozzi, and G. Slutzki, A knowledge-based procedural semantics for logic programming, Technical Report TR#93-15, Department of Computer Science, Iowa State University, May 1993.

Հետազոտման օբյեկտը: Ատենախոսության հետազոտման օբյեկտներն են. 1) ստոխաստիկ և բուլյան համակարգերը՝ մասնավորապես դիսկրետ, հաշվելի, տեղափոխական կամ ալտերնատիվ տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշիվները; 2) մասնակի տեղափոխական, նորմալ, քվազինորմալ կամ առանց զրոյի բաժանարարների երկտեղ հանրահաշիվները; 3) բիմոնոիդները և 2-բիմոնոիդները; 4) անշարժ կետի և պրոցեդուրային սեմանտիկանները:
Հետազոտման մեթոդները: Ատենախոսության մեջ օգտագործվում են ինչպես հանրահաշվական, այնպես էլ տրամաբանական մեթոդներ: Մասնավորապես, կիրառվում է ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող հանրահաշիվների միջոցով, ամբողջ դասը նկարագրելու մեթոդը:

Արդյունքների գիտական նորությունը: Հիմք վերցնելով ստոխաստիկ և բուլյան համակարգերի հետ կապված ուսումնասիրությունները և ունենալով տրամաբանական ծրագրավորման լեզու, որի հիմնային բազմություն վերցրած են բիկավարները, ատենախոսության մեջ նկարագրվել են դիսկրետ, հաշվելի, տեղափոխական կամ ալտերնա$_{տ}$իվ տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշիվները, մասնակի տեղափոխական, նորմալ, քվազինորմալ կամ առանց զրոյի բաժանարարների երկտեղ հանրահաշիվները և բիմոնոիդները և 2-բիմոնոիդները: Բիմոնոիդները և 2-բիմոնոիդները հանդիսանում են համապատասխանաբար դե Մորգանի հանրահաշիվների և բիկավարների ընդհանրացումները: Արդյունքում կառուցվել է տրամաբանական ծրագրավորման լեզու, հիմքում ունենալով 2 – բիմոնոիդները, որոնք հանդիսանում են էապես շատ ավելի լայն դաս քան բիկավարներն են:

Ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը: Ատենախոսական աշխատանքի 2 – 4 գլուխներում ստացված արդյունքները կիրառվում են 5 – րդ գլխում կառուցված անշարժ կետի և պրոցեդուրային սեմանտիկաններում:

Պաշտպանությանը ներկայացվացվում են հետևյալ դրույթները:
1. դիսկրետ, հաշվելի, տեղափոխական կամ ալտերնատիվ տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշիվների նկարագրությունները.
2. մասնակի տեղափոխական, նորմալ, քվազինորմալ կամ առանց զրոյի բաժանարարների երկտեղ հանրահաշիվների նկարագրությունները.
3. բիմոնոիդների և 2-բիմոնոիդների նկարագրությունները:

1, 2 և 3 կետերում բնութագրվել են նշված դասերի ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող համակարգերը, որը համաձայն Բիրկհոֆի դասական թեորեմի հանգեցնում է տվյալ դասերի նկարագրությանը: Ըստ որում t-ստոխաստիկ համակարգերի համար ապացուցվել է նաև Բիրկհոֆյան տիպի թեորեմ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող համակարգերի համար:

4. անշարժ կետի և պրոցեդուրային սեմանտիկաների կառուցումը 2 – բիմոնոիդների վրա հիմնված տրամաբանությունների համար, փակության և լրիվության թեորեմների ապացույցները:

<u>Ստացված արդյունքների ապրոբացիան:</u> Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ – ի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի հանրահաշվի և երկրաչափության ամբիոնի գիտական սեմինարներում և միջազգային գիտաժողովներում (CSIT 2003, CSIT 2007 Yerevan, Armenia; International algebraic conferance dedicated to the centennial of the birthday of *P.G.Kontorovich* and to the 70th birthday of *L.N.Shevrin,Ural,* 2005 *State University (USU)* Ekaterinburg, Russia):

<u>Հրատարակությունները:</u> Ատենախոսության արդյունքների շրջանակում հրատարակվել են վեց աշխատություն, որոնց ցանկը բերված է սեղմագրի վերջում:

<u>Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը:</u> Ատենախոսությունը ներառում է ներածություն, հինգ գլուխ և օգտագործված գրականության ցանկ:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ներածության մեջ հիմնավորվում են ատենախոսության թեմայի արդիականությունը և հրատապությունը, ձևակերպվում են աշխատանքի նպատակները, խնդիրները և պաշտպանության ներկայացված հիմնական դրույթները:

Առաջին գլխում ներմուծվում և ձևակերպվում են նախնական գաղափարները և արդյունքները: Տրված են ստոխաստիկ հանրահաշվի, բաշխական քվազիկավարի, դե Մորգանի հանրահաշվի և բիկավարի սահմանումներ: Ձևակերպված են ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող ստոխաստիկ հանրահաշիվների, բաշխական քվազիկավարների, դե Մորգանի հանրահաշիվների և բիկավարների դասերը նկարագրող ներկայիս արդյունքները:

(A,Ω) հանրահաշիվը կոչվում է բինար(երկտեղ), եթե նրա բոլոր գործողությունները բինար(երկտեղ) են:

(A,Ω) բինար հանրահաշիվը կոչվում է ստոխաստիկ հանրահաշվ (ուռուցիկ հանրահաշիվ կամ կոնվեկսոր), եթե նրա գործողությունները կարելի է համարակալել $(0,1)$ միջակայքի թվերով (այդ պատճառով կարելի է ընդունել, որ $\Omega=(0,1)$) և որը բավարարում է հետևյալ նույնություններին: $\alpha(x,x)=x$, $\alpha(x,y)=(1-\alpha)(y,x)$, $\alpha(\beta(x,y),z)=\alpha\beta\left(x,\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}(y,z)\right)$, որտեղ $\alpha,\beta\in(0,1)$ և $x,y,z\in Q$:

Այս նույնությունները հանդիսանում են պրեդիկատային հաշվի երկրորդ կարգի բանաձևեր: Ավելի ճիշտ, առաջին հավասարությունը գերնույնություն է, իսկ երկրորդ և երրորդ հավասարությունները $\forall\exists(\forall)$ - բանաձևեր են, որոնք երկրորդ կարգի(աստիճանի) բանաձևեր են:
Հարմարության համար՝ $\forall X_1...X_m \forall x_1...x_n (W_1 = W_2)$ գերնույնությունը, գրվում է նաև այսպես՝ $W_1 = W_2$, առանց քվանտորների, որտեղ $X_1,...,X_m$- ը ֆունկցիոնալ փոփոխականներն են, իսկ $x_1,...,x_n$- ը առարկայական փոփոխականներն են՝ W_1, W_2 բառերում: m - ը կոչվում է ֆունկցիոնալ ռանգ, իսկ n - ը առարկայական ռանգ գերնույնության համար: Դիցուք $T \subseteq \mathbb{N}, T \neq \varnothing$: Գերնույնությունը կոչվում է T- գերնույնություն, եթե $\{|X_1|,...,|X_m|\} \subseteq T$: $A = (Q, \Sigma)$ հանրահաշիվը կոչվում է T թվաբանական տիպով հանրահաշիվ կամ T- հանրահաշիվ, եթե $T = \{|F| \mid F \in \Sigma\}$: Կասենք որ T-գերնույնությունը տեղի ունի $A = (Q, \Sigma)$ T- հանրահաշվում, եթե տեղի ունի $W_1 = W_2$ հավասարությունը, երբ յուրաքանչյուր առարկայական փոփոխական փոխարինվում է Q - ի ցանկացած տարրով, իսկ յուրաքանչյուր ֆունկցիոնալ փոփոխական փոխարինվում է Σ- ի ցանկացած (համապատասխան տեղայնության) գործողությամբ:

$A(\wedge,\vee)$ հանրահաշիվը կոչվում է բաշխական քվազիկավար, եթե նրանում բավարարվում են հետևյալ նույնությունները՝ $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$, $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$:

Թեորեմ 1.1 (Kalman): Ցանկացած $A(\wedge,\vee)$ բաշխական քվազիկավար, որը պարունակում է մեկից ավել տարր, իզոմորֆ է G, G', G'' հանրահաշիվների ենթուղիղ արտադրյալին:
Այստեղ $G = \{0,1,\infty\}\{\wedge,\vee\}$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող բաշխական քվազիկավար է, որն ունի հետևյալ գործողությունների աղյուսակը՝

$\wedge$	0	1	∞
0	0	0	∞
1	0	1	∞
∞	∞	∞	∞

$\vee$	0	1	∞
0	0	1	∞
1	1	1	∞
∞	∞	∞	∞

Իսկ $G' = \{0,1\}\{\wedge,\vee\}$ և $G'' = \{0,\infty\}\{\wedge,\vee\}$ հանրահաշիվները այդ G հանրահաշվի ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող ենթահանրահաշիվներն են:
Թեորեմ 1.2 (Movsisyan): Եթե բինար և ունար գործողություններով $A = (Q, \Sigma)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող հանրահաշիվը բավարարում է հետևյալ գերնույնություններին՝

$$X(x,x) = x, \tag{1}$$

$$X(x,y) = X(y,x), \tag{2}$$

$$X(X(x,y),z) = X(x, X(y,z)), \tag{3}$$

$$X(x, Y(y,z)) = Y(X(x,y), X(x,z)), \tag{4}$$

$$F(F(x)) = x, \tag{5}$$

$$X\left(F(x),y\right)=X\left(F(X(x,y)),y\right), \tag{6}$$
$$F(X\left(F(X(x,y)),F(X(x,F(y)))\right)), \tag{7}$$

ապա ունար գործողությունների բազմությունը մեկ տարրանի է, բինար գործողությունների բազմության հզորությունը ոչ ավելին է քան երկուսը և $|Q|\le 3$: Մասնավորապես, եթե բինար հանրահաշիվը բավարում է առաջին չորս գերնույնություններին, ապա $|\Sigma|\le 2$ և $|Q|\le 3$:

Սահմանում 1.1: $A(+,\cdot,')$ հանրահաշիվը կոչվում է դե Մորգանի հանրահաշիվ, եթե նա բավարարում է հետևյալ նույնություններին՝ $x+x=x$, $x\cdot x=x$, $x+y=y+x$, $x\cdot y=y\cdot x$, $(x+y)+z=x+(y+z)$, $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot y\cdot z$, $x\cdot(x+y)=x$, $x+x\cdot y=x$, $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$, $x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)$, $(x+y)'=x'\cdot y'$, $(x\cdot y)'=x'+y'$, $(x')'=x$:

Դե Մորգանի հանրահաշվի z տարրին կանվանենք զրոյական տարր, եթե $z=z'$: Չորս տարր և երկու զրոյական տարր պարունակող դե Մորգանի հանրահաշիվը նշանակենք D - ով: Դե Մորգանի հանրահաշիվը, որը իրենից ներկայացնում է n տարրանի շխթա՝ նշանակենք D_n - ով:

Թեորեմ 1.3 (Kalman): Դիցուք տրված է $A(+,\cdot,',0,1)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող դե Մորգանի հանրահաշիվը, որտեղ 0-ն և 1- ը համապատասխանաբար մեծագույն և փոքրագույն տարրերն են: Այդ դեպքում $A(+,\cdot,',0,1)$ - ն իզոմորֆ է D_1, D_2, D_3 կամ D հանրահաշիվներից, որևէ մեկին:

Սահմանում 1.2: Բիկավարը այնպիսի $B=(B,+,\cdot,0_1,1_1\vee,\wedge,0_2,1_2,')$ հանրահաշիվ է, որտեղ

1. $B_1=(B,+,\cdot,0_1,1_1)$ - ը և $B_2=(B,\vee,\wedge,0_2,1_2)$ - ը սահմանափակ կավարներ են և
2. $'$- ը $'B:\to B$ մեկ տեղանի գործողություն է, որը բավարարում է հետևյալ նույնություններին՝ $(x')'=x$, $(x+y)'=x'\cdot y'$, $(x\cdot y)'=x'+y'$, $(x\vee y)'=x'\vee y'$, $(x\wedge y)'=x'\wedge y'$:

Երկրորդ գլխում դիտարկվում են տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշիվները: Առաջին անգամ Սկոռնյակովի կողմից խնդիր է դրվել նկարագրել ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող ստոխաստիկ հանրահաշիվները[6]: Իգնատովի կողմից[7] նկարագրվել են վերջավոր ծնված ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող ստոխաստիկ հանրահաշիվները: Սակայն ընդհանուր դեպքում, այս խնդրի լուծումը մնում է բաց: Ատենախոսության ներկա գլխում Սկոռնյակովի խնդիրը լուծվում է տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշիվների մի շարք դասերի համար:

2.1 պարագրաֆում նեմուծվում են t-ստոխաստիկ հանրահաշվի կամ տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշվի և t-ստոխաստիկ հանրահաշվի հիմնային տարածության վրա սահմանված L_1 սահմանային ֆունկցիայի գաղափարները:

[6] Скорняков Л. А. Стохастическая алгебра. Изв. Вузов. Матем. 1985, №7, с. 3 – 11.

[7] Игнатов В. В. Квазимногообразия конвесоров. - Изв. Вузов. Матем. 1985, №7, с. 12 – 14.

Սահմանում 2.1.1: $\left(A,\{\alpha,\alpha\in(0,1)\}\right)$ ստոխաստիկ հանրահաշիվը կոչվում է t-ստոխաստիկ հանրահաշիվ կամ տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշիվ, եթե A - ն Հաուսդորֆյան տոպոլոգիական տարածություն է, $\alpha(x,y)$ - ով որոշվող $(0,1)\times A^2\to A$ արտապատկերումը անընդհատ է և գոյություն ունեն հետևյալ սահմանները՝

a) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ \alpha\to 1}}\alpha(x,y)$-ը ցանկացած $x_0,y\in \mathrm{A}$ տարրերի համար, այսինքն՝

$\exists z\in A,\ \forall U_z\subset A,\ \exists\delta>0\ \&\ \exists U_{x_0}\subset A\ \ (0<1-\alpha<\delta,\ x\in U_{x_0}\to\alpha(x,y)\in U_z)$

b) $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ \alpha\to 1}}\alpha(x,y)$-ը ցանկացած $x,y_0\in \mathrm{A}$ տարրերի համար, այսինքն՝

$\exists z\in A,\ \forall U_z\subset A,\ \exists\delta>0\ \&\ \exists U_{y_0}\subset A\ \ (0<1-\alpha<\delta,\ y\in U_{y_0}\to\alpha(x,y)\in U_z)$:

Որտեղ U_{x_0} – ով նշանակված է x_0 – ի շրջակայքը:

t-ստոխաստիկ հանրահաշվի A տարածության վրա սահմանենք L_1 սահմանային ֆունկցիան հետևյալ կերպ. , $L_1(x,y)=\lim\limits_{\alpha\to 1}\alpha(x,y)$, ցանկացած $x,y\in A$ տարրերի համար:

Սահմանում 2.1.2: A-ի վրա որոշված L բինար ֆունկցիան կոչվում է տրիվյալ, եթե տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը ՝ $\forall x\ L(x,y)=x$, բացի գուցե որևէ մեկ y – ից:

2.2 պարագրաֆում ուսումնասիրվում է ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող t-ստոխաստիկ հանրահաշվի L_1 սահմանային ֆունկցիան և ապացուցվում Բիրկհոֆյան տիպի թեորեմ:

Թեորեմ 2.2.1: Ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող t-ստոխաստիկ հանրահաշվի L_1 սահմանային ֆունկցիան տրիվյալ է:

(c) $\left(A,\{\alpha,\alpha\in(0,1)\}\right)$ հիմքային տարածությունը կարելի է մետրիզացնել:

Նշանակենք $\rho(a,b)$ - ով $a,b\in A$ տարրերի հեռավորությունը և

$\varphi_i: A\to A_i \quad i\in I$ այն արտապատկերումը, որը A – ի ցանկացած տարրին համապատասխանեցնում է իր i – րդ կորդինատը:

(d) $\left(A,\{\alpha,\alpha\in(0,1)\}\right)$ բավարարում է՝

1. (c) պայմանին
2. Ցանակացած ֆիքսած $x_i,y_i\in A_i$ տարրերի համար $\exists x,y\in A\ st\ \ \varphi_i(x)=x_i,\ \varphi_i(y)=y_i$ և ցանկացած $x^1,y^1\in A$ տարրերի համար, որտեղ $\varphi_i(x^1)=x_i, \varphi_i(y^1)=y_i$ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը $0<\rho(x,y)\le\rho(x^1,y^1)$:

Թեորեմ 2.2.2: (d) պայմանին բավարարող ցանկացած տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշիվ կարելի է ներկայացնել (c) պայմանին բավարարող ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշիվների ենթաուղիղ արտադրյալի տեսքով:

2.3 պարագրաֆում նկարագրվում են դիսկրետ և հաշվելի հիմքային բազմությամբ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող t-ստոխաստիկ հանրահաշիվները:

Թեորեմ 2.3.1: Դիցուք տրված է $\left(A,\{\alpha,\alpha\in(0,1)\}\right)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող t-ստոխաստիկ հանրահաշիվը, որի հիմքային տարածության վրա որոշված տոպոլոգիան դիսկրետ է, այդ դեպքում՝ $|A|\le 2$:

Թեորեմ 2.3.2: Դիցուք տրված է $\left(A,\{\alpha,\alpha\in(0,1)\}\right)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող t-ստոխաստիկ հանրահաշիվը և A - ի հզորությունը ոչ ավել է քան հաշվելի, այդ դեպքում՝ $|A|\le 2$:

Հետևանք 2.3.1: Դիցուք $\left(A,\{\alpha,\alpha\in(0,1)\}\right)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող t-ստոխաստիկ հանրահաշիվը պարունակում է $\left(E,\{\alpha,\alpha\in(0,1)\}\right)$ հաշվելի ստոխաստիկ ենթահանրահաշիվը, և գոյություն ունի E-ի կուտակման կետ պատկանող A/E-ին, , այդ դեպքում՝ $|A|\le 2$:

2.4 պարագրաֆում նկարագրվում են տեղափոխական և ալտերնատիվ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող t-ստոխաստիկ հանրահաշիվները:

Սահմանում 2.4.1 $\left(A,\{\alpha,\alpha\in(0,1)\}\right)$ t-ստոխաստիկ հանրահաշիվը կոչվում է տեղափոխական t-ստոխաստիկ հանրահաշիվ, եթե նրանում բավարարվում է հետևյալ նույնությունը՝ $\alpha(x,y)=\alpha(y,x)$, որտեղ $\alpha\in(0,1)$ և $x,y\in Q$:

Թեորեմ 2.4.1 Դիցուք տրված է $\left(A,\{\alpha,\alpha\in(0,1)\}\right)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող տեղափոխական t-ստոխաստիկ հանրահաշիվը, այդ դեպքում՝ $|A|\le 2$:

Սահմանում 2.4.1 $\left(A,\{\alpha,\alpha\in(0,1)\}\right)$ t-ստոխաստիկ հանրահաշիվը կոչվում է ալտերնատիվ t-ստոխաստիկ հանրահաշիվ, եթե նրանում բավարարվում է հետևյալ նույնությունը՝ $\alpha(x,y)=\alpha(\alpha(x,y),y)$, որտեղ $\alpha\in(0,1)$ և $x,y\in Q$:

Թեորեմ 2.4. Դիցուք տրված է $\left(A,\{\alpha,\alpha\in(0,1)\}\right)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող ալտերնատիվ t-ստոխաստիկ հանրահաշիվը, այդ դեպքում՝ $|A|\le 2$:

2.5 պարագրաֆում ապացուցվում է, որ նախորդ պարագրաֆներում դիսկրետ, հաշվելի, տեղափոխական և ալտերնատիվ տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշիվների վերաբերյալ ստացված արդյունքները ճշմարիտ են նաև ընդլայնված տոպոլոգիական ստոխաստիկ հանրահաշիվների դեպքում:

Երրորդ գլխում դիտարկվում են մասնակի տեղափոխական, նորմալ, քվազինորմալ, առանց զրոյի բաժանարարների ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող հանրահաշիվները:

3.1 պարագրաֆում նկարագրվում են ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող մասնակի տեղափոխական հանրահաշիվներ:

Սահմանում 3.1.1: Կասենք, որ երկտեղ $A=(Q,\Sigma)$ հանրահաշիվը մասնակի տեղափոխական է, եթե գոյություն ունի $S\subseteq Q$ ոչ դատարկ ենթաբազմություն, որ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը $X(t,x)=X(x,t)$ $\quad x\in Q,\ t\in S,\ X\in\Sigma$:

Թեորեմ 3.1.1: Դիցուք ունենք $A=(Q,\Sigma)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող մասնակի տեղափոխական հանրահաշիվը, որում տեղի ունեն (1), (3) , (4) և

$$X(Y(x,y),z)=Y(X(x,z),X(y,z)) \tag{8}$$

գերնույնությունները և $|S|\geq 3$: Այդ դեպքում, եթե $A=(Q,\Sigma)$ հանրահաշվի յուրաքանչյուր ենթահանրահաշիվ նույնպես ենթաուղիղ վերլուծություն չունի, ապա $A\cong G$:

Հետևանք 3.1.1: Եթե բինար և ունար գործողություններով $A=(Q,\Sigma)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող հանրահաշիվը բավարարում է (1), (3) - (7), (8) գերնույնություններին և գոյություն ունեն $a,b,c\in A$ զույգ առ զույգ միմյանցից տարբեր տարրեր այնպիսին, որ $X(t,x)=X(x,t)$, $x\in Q,\ t\in\{a,b,c\},\ X\in\Sigma$:

Ապա ունար գործողությունների բազմությունը մեկ տարրանոց է, բինար գործողությունների բազմության հզորությունը ոչ ավելին է քան երկուսը և $|Q|\leq 3$:

3.2 պարագրաֆում նկարագրվում են ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող նորմալ հանրահաշիվներ:

Սահմանում 3.2.1: Կասենք, որ երկտեղ $A=(Q,\Sigma)$ հանրահաշիվը նորմալ է, եթե նրանում տեղի ունի հետևյալ

$$X(u,X(x,X(y,v)))=X(u,X(y,X(x,v))) \tag{9}$$

գերնույնությունը:

Թեորեմ 3.2.1: Դիցուք ունենք $A=(Q,\Sigma)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող նորմալ հանրահաշիվը, որում տեղի ունեն (1), (3) , (4) և (8) գերնույնությունները և հետևյալ

$$(x=X(X(x,y),x)\ \&\ y=X(X(y,x),y))\rightarrow x=y \tag{10}$$

քվազիգերնույնությունը: Այդ դեպքում $A=(Q,\Sigma)$ հանրահաշիվը իզոմորֆ է G,G',G'' հանրահաշիվներից որևէ մեկին:

Հետևանք 3.2.1: Եթե բինար և ունար գործողություններով $A=(Q,\Sigma)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող հանրահաշիվը բավարարում է (1), (3) - (7), (8) և (9) գերնույնություններին և (10) քվազիգերնույնությանը, ապա ունար գործողությունների բազմությունը մեկ տարրանոց է, բինար գործողությունների բազմության հզորությունը ոչ ավելին է քան երկուսը և $|Q| \le 3$:

Թեորեմ 3.2.2: Դիցուք ունենք $A=(Q,\Sigma)$ նորմալ հանրահաշիվը, որում տեղի ունեն (1), (3), (4), (8) և

$$X\left(X\left(x,y\right),x\right)=X\left(X\left(y,x\right),y\right) \qquad (11)$$

գերնույնությունները: Այդ դեպքում $A=(Q,\Sigma)$ հանրահաշիվը իզոմորֆ է G,G',G'' հանրահաշիվների ենթաուղիղ արտադրյալին:

Հետևանք 3.2.2: Եթե բինար և ունար գործողություններով $A=(Q,\Sigma)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող հանրահաշիվը բավարարում է (1), (3) - (7), (9) և (11) գերնույնություններին, ապա ունար գործողությունների բազմությունը մեկ տարրանոց է, բինար գործողությունների բազմության հզորությունը ոչ ավելին է քան երկուսը և $|Q| \le 3$:

3.3 պարագրաֆում նկարագրվում են ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող քվազինորմալ հանրահաշիվներ:

Սահմանում 3.3.1: Կասենք, որ երկտեղ $A=(Q,\Sigma)$ հանրահաշիվը քվազինորմալ է, եթե նրանում տեղի ունի հետևյալ

$$X(u,X(Y(x,y),v))=X(u,X(Y(y,x),v)) \qquad (12)$$

գերնույնությունը:

Թեորեմ 3.3.1: Դիցուք ունենք $A=(Q,\Sigma)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող քվազինորմալ հանրահաշիվը, որում տեղի ունեն (1), (3) , (4), (8), գերնույնությունները և հետևյալ

$$(x=Y(X(X(x,y),x),x)\ \&\ y=Y(X(X(y,x),y)),y)\to x=y \qquad (13)$$

քվազիգերնույնությունը: Այդ դեպքում $A=(Q,\Sigma)$ հանրահաշիվը իզոմորֆ է G,G',G'' հանրահաշիվներից որևէ մեկին:

Հետևանք 3.3.1: Եթե բինար և ունար գործողություններով $A=(Q,\Sigma)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող հանրահաշիվը բավարարում է (1), (3) - (7), (8) և (12) գերնույնություններին և (13) քվազիգերնույնությանը, ապա ունար գործողությունների բազմությունը մեկ տարրանի է, բինար գործողությունների բազմության հզորությունը ոչ ավելին է քան երկուսը և $|Q| \le 3$:

Թեորեմ 3.3.2: Դիցուք ունենք $A=(Q,\Sigma)$ քվազինորմալ հանրահաշիվը, որում տեղի ունեն (1), (3), (4), (8), (12) գերնույնությունները և ցանկացած $X\in\Sigma$- ի համար գոյություն ունի $Y_X\in\Sigma$ այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ

$$Y_X(X(X(x,y),x),x)=Y_X(X(X(y,x),y),y) \qquad (14)$$

պայմանը: Այդ դեպքում, $A=(Q,\Sigma)$ հանրահաշիվը իզոմորֆ է G,G',G'' հանրահաշիվների ենթաուղիղ արտադրյալին:

Հետևանք 3.3.2: Եթե բինար և ունար գործողություններով $A=(Q,\Sigma)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող հանրահաշիվը բավարարում է (1), (3) - (7), (8) գերնույնություններին և ցանկացած $X\in\Sigma$- ի համար գոյություն ունի $Y_X\in\Sigma$

այնպիսին, որ տեղի ունի (14) պայմանը, ապա ունար գործողությունների բազմությունը մեկ տարրանոց է, բինար գործողությունների բազմության հզորությունը ոչ ավելին է քան երկուսը և $|Q| \le 3$:

3.4 պարագրաֆում նկարագրվում են առանց զրոյի բաժանարարների ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող հանրահաշիվներ

Սահմանում 3.4.1: Կասենք, որ երկտեղ $A=(Q,\Sigma)$ հանրահաշիվը զրոյի բաժանարարներ չունի, եթե $X(a,b)=0_Y \rightarrow a=0_Y$ կամ $b=0_Y$, ցանկացած $Y \in \Sigma$ գործողության 0_Y զրոյի համար:

Թեորեմ 3.4.1: Դիցուք ունենք $A=(Q,\Sigma)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող առանց զրոյի բաժանարարների հանրահաշիվը, որում տեղի ունեն հետևյալ գերնույնությունները (1), (3) , (4) և

$$X(u, X(Y(x,y),v)) = X(u, X(Y(y,x),v)): \qquad (15)$$

Այդ դեպքում ցանկացած $Y \in \Sigma$- ի համար գոյություն ունի $0_Y \in Q$ և $|Q| \le |\Sigma+1|$:

Չորրորդ գլխում ուսումնասիրված են բիմոնոիդները և 2 – բիմոնոիդները, որոնք հանդիսանում են դե Մորգանի հանրահաշիվների և բիկավարների ընդհանրացումները:

4.1 պարագրաֆում ներմուծվում և ձևակերպվում են բիկավարների վրաբերյալ նախնական գաղափարները և արդյունքները:

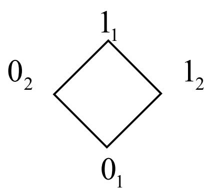
Սահմանում 4.1.2: $B=(B,+,\cdot,0_1,1_1\vee,\wedge,0_2,1_2,')$ բիկավարը կոչվում է P – բիկավար, եթե B - ում տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները՝

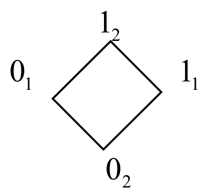
$$((x\wedge y)\cdot z)\wedge(y\cdot z)=(x\wedge y)\cdot z, \quad ((x\cdot y)\wedge z)\cdot(y\wedge z)=(x\cdot y)\wedge z,$$
$$((x\wedge y)+z)\wedge(y+z)=(x\wedge y)+z, \; ((x+y)\wedge z)+(y\wedge z)=(x+y)\wedge z:$$

Սահմանում 4.1.3: $B=(B,+,\cdot,0_1,1_1\vee,\wedge,0_2,1_2,')$ բիկավարը կոչվում է բաշխական, եթե նրա ցանկացած երկու երկտեղ գործողություններ կապված են բաշխական օրենքով:

Թեորեմ 4.1.1: Դիցուք $B=(B,+,\cdot,0_1,1_1\vee,\wedge,0_2,1_2,')$ - ն բաշխական բիկավար է: Այդ դեպքում, որպեսզի $B=(B,+,\cdot,0_1,1_1\vee,\wedge,0_2,1_2,')$ - ն չունենա ենթաուղիղ վերլուծություն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $B=(B,+,\cdot,0_1,1_1\vee,\wedge,0_2,1_2,')$- ն լինի իզոմորֆ B_4 բիկավարին:

Ամենափոքր ոչ տրիվյալ B_4 բիկավարի տրման դիագրամները բերված են ստորև:





4.2 պարագրաֆում նկարագրվում են ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող բիմոնոիդներ:

Սահմանում 4.2.1: Բիմոնոիդը դա այնպիսի $A\left(+,\cdot,0,1,',^{-}\right)$ հանրահաշիվ է, որտեղ $A_1=\left(A,+,\cdot,0,1,'\right)$ - ը և $A_2=\left(A,+,\cdot,0,1,^{-}\right)$ - ը սահմանափակ դե Մորգանի հանրահաշիվներ են և տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝ $(\overline{x'})=(\overline{x})'$, այսինքն՝ $A\left(+,\cdot,0,1,',^{-}\right)$ հանրահաշվում տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները՝

$$x+x=x, \quad x\cdot x=x, \tag{16}$$

$$x+y=y+x, \quad x\cdot y=y\cdot x, \tag{17}$$

$$(x+y)+z=x+(y+z), \quad (x\cdot y)\cdot z=x\cdot y\cdot z, \tag{18}$$

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z, \quad x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z), \tag{19}$$

$$x\cdot(x+y)=x, \quad x+x\cdot y=x, \tag{20}$$

$$(x+y)'=x'\cdot y', \quad (x\cdot y)'=x'+y', \tag{21}$$

$$(\overline{x+y})=\overline{x}\cdot\overline{y}, \quad (\overline{x\cdot y})=\overline{x}+\overline{y}, \tag{22}$$

$$(x')'=x, \quad (\overline{\overline{x}})=x, \tag{23}$$

$$(\overline{x'})=(\overline{x})', \tag{24}$$

$$x+1=1, \quad x\cdot 1=x,\ x+0=x, \quad x\cdot 0=0: \tag{25}$$

Սահմանում 4.2.2: $A\left(+,\cdot,0,1,',^{-}\right)$ բիմոնոիդի միջուկ՝ կոչվում է հետևյալ $K_A=\{x\in A \mid x'=\overline{x}\}$ ենթահանրահաշիվը:

Թեորեմ 4.2.2: Դիցուք տրված է $A\left(+,\cdot,0,1,',^{-}\right)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող բիմոնոիդը, որի միջուկը ենթաուղիղ վերլուծություն չունի և $\alpha'\overline{\alpha}=0$ հավասարությունը ունի միայն տրիվյալ $\alpha=1$ լուծումը , այդ դեպքում՝ $|A|\le 4$:

Թեորեմ 4.2.3: Դիցուք տրված է $A\left(+,\cdot,0,1,',^{-}\right)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող բիմոնոիդը, որում տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները՝ $(x+\overline{x})\cdot y=y, \quad x\cdot\overline{x}+y=y,$ այդ դեպքում՝ $|A|\le 4$:

4.3 պարագրաֆում նկարագրվում են ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող 2-բիմոնոիդներ:

Սահմանում 4.3.1: 2 - բիմոնոիդը դա այնպիսի $B\left(+,\cdot,0_1,1_1,\vee,\wedge,0_2,1_2,',^{-}\right)$ հանրահաշիվ է, որտեղ $B_1=B\left(+,\cdot,0_1,1_1,\vee,\wedge,0_2,1_2,'\right)$ - ը և $B_2=B\left(+,\cdot,0_1,1_1,\vee,\wedge,0_2,1_2,^{-}\right)$ - ը բիկավարներ են և տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝ $(\overline{x'})=(\overline{x})'$, այսինքն՝ $B\left(+,\cdot,0_1,1_1,\vee,\wedge,0_2,1_2,',^{-}\right)$ հանրահաշվում տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները՝ (16) – (24) և

$$x\vee x=x, \quad x\wedge x=x, \tag{26}$$

$$x\vee y=y\vee x, \quad x\wedge y=y\wedge x, \tag{27}$$

$$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z), \quad (x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z), \tag{28}$$

$$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x, \tag{29}$$

$$(x \vee y)' = x' \vee y', \quad (x \wedge y)' = x' \wedge y', \tag{30}$$

$$\overline{(x \vee y)} = \overline{x} \vee \overline{y}, \quad \overline{(x \wedge y)} = \overline{x} \wedge \overline{y}, \tag{31}$$

$$x + 1_1 = 1_1, \quad x \cdot 1_1 = x,\ x + 0_1 = x, \quad x \cdot 0_1 = 0_1 \tag{32}$$

$$x \vee 1_2 = 1_2, \quad x \wedge 1_2 = x,\ x \vee 0_2 = x, \quad x \wedge 0_2 = 0_2 : \tag{33}$$

Սահմանում 4.3.2: $B\left(+,\cdot,0_1,1_1,\vee,\wedge,0_2,1_2,',^{-}\right)$ 2 - բիմոնոիդը կոչվում է բաշխական, եթե նրա ցանկացած երկու երկտեղ գործողություններ կապված են բաշխական օրենքով:
Թեորեմ 4.3.1: Դիցուք տրված է $B\left(+,\cdot,0_1,1_1,\vee,\wedge,0_2,1_2,',^{-}\right)$ ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող 2-բիմոնոիդը, որի համապատասխան $B\left(+,\cdot.0_1,1_1,',^{-}\right)$ բիմոնոիդի միջուկը ենթաուղիղ վերլուծություն չունի և $\alpha'\overline{\alpha} = 0_1$ հավասարությունն ունի միայն տրիվյալ $\alpha = 1_1$ լուծումը , այդ դեպքում՝ $|A| \le 4$:

Հինգերորդ գլխում տրվել են անշարժ կետի և պրոցեդուրային սեմանտիկանները 2 – բիմոնոիդների վրա հիմնված տրամաբանությունների համար և ապացուցվել են փակության և լրիվության թեորեմները

5.1 պարագրաֆում կառուցվում է լեզու հիմնային բազմություն վերցնելով 2-բիմոնոիդները:
Մեր լեզուն նշանակենք L -ով: Որպես ճշմարիտ արժեքների բազմություն վերցնենք $\mathrm{B}\left(\vee,\wedge,0,1,\otimes,\oplus,\mathrm{T},\perp,\neg,^{-}\right)$ 2-բիմոնոիդը: Ինչպես դասական տրամաբանական ծրագրավորման մեջ՝ այնպես էլ այստեղ, L- ի այբուբենը պարունակում է՝ փոփոխականների բազմություն, հաստատուններ, պրեդիկատային սիմվոլներ և ֆունկցիոնալ սիմվոլներ: Այս ամենին ավելացնենք անվերջ քանակությամբ նոր հաստատուններ, որոնց կանվանենք ընդհանուր(generic, общий) հաստատուններ: Այս հաստատունները տարբերվում են լեզվի մնացած հաստատուններից նրանով, որ նրանք չեն մասնակցում որևէ պայմանում(clause, условие): L-ը նաև պարունակում է հետևյալ կապակցողները (connective, связка) $\leftarrow, -, \neg, \wedge, \vee, \otimes$ և $\oplus$:
Նշանակենք Π և Σ - ով համապատասխանաբար $\otimes$ և $\oplus$ գործողությունների անվերջ տարբերակները:
Թերմի և գլխավոր թերմի գաղափարները տրվում են ինչպես դասական տրամաբանական ծրագրավորման մեջ: Բոլոր գլխավոր թերմերի բազմությունը նշանակվում է U_L - ով և կոչվում է Էրբրանի ունիվերս (Herbrand universe):
Ատոմը դա կամ $b \in \mathrm{B} \setminus \{\mathrm{T}, \perp\}$ կամ $p(t_1, t_2, ..., t_n)$ տիպի արտահայտություն է, որտեղ p-ն n- րդ կարգի պրեդիկատային սիմվոլ է, $t_1, t_2, ..., t_n$ - ը թերմեր են, B-ն որպես ճշմարիտ արժեքների բազմություն վերցրած 2-բիմոնոիդի հիմնային բազմությունն է, իսկ T - ն և $\perp$ -ն այդ 2-բիմոնոիդի մեծագույն և փոքրագույն

արժեքներն են 2-բիմոնոիդի ⊗ և ⊕ գործողություններին համապատասխան կավարում: Ատոմը, որն իր մեջ չի պարունակում փոփոխականներ կոչվում է գլխավոր ատոմ:

Բանաձևը(formula, формула) դա ատոմ է կամ արտահայտություն, որն ունի հետևյալ տեսքը. $\bar{A}, \neg A, A\wedge B, A\vee B, A\otimes B$ կամ $A\oplus B$: Բանաձևը կոչվում է կոմպլեքս, եթե ատոմ չէ: A- բանաձևի մեջ մասնակցող փոփոխականների բազմությունը նշանակենք vars(A):

Պայման(clause, условие) կոչվում է հետևյալ տեսքի արտահայտությունը. $\Pi_{x_1,x_2,\ldots,x_n}(A\leftarrow\Sigma_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(G))$, որտեղ A-ն այնպիսի ատոմ է, որ $A\notin \mathrm{B}$, G-ն բանաձև է. $x_1,x_2,\ldots,x_n$-ը A-ում մասնակցող փոփոխականներն են, իսկ $y_1,y_2,\ldots,y_m$-ը G-ում մասնակցող այն փոփոխականներն են, որոնք չեն մասնակցում A-ում: A-ն կանվանենք պայմանի գլուխ, իսկ G-ն մարմին: Սովորաբար մենք կօգտագործենք $A\leftarrow G$ նշանակումը՝ փոխարեն հետևյալ $\Pi_{x_1,x_2,\ldots,x_n}(A\leftarrow\Sigma_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(G))$ պայմանի, կնշանակենք Π - ով, A -ի փոփոխականները և Σ-ով G - ի այն փոփոխականները, որոնք չեն մասնակցում A-ում:

Ծրագիրը դա վերջավոր քանակությամբ այնպիսի պայմանների բազմություն է, որոնք չեն պարունակում ընդհանուր հաստատուններ:

Նպատակ(goal, цель) կոչվում է այն բանաձևը, որը չի պարունակում ընդհանուր հաստատուններ:

Էրբրանի հիմք (Herbrant Base) կոչվում է P-ի բոլոր գլխավոր ատոմների բազմությունը, որոնք օգտագործում են միայն հաստատուններ, ֆունկցիաներ, պրեդիկատներ և ընդհանուր հաստատուններ և նշանակվում B_P - ով:

Մենք նաև ենթադրելու ենք, որ ցանկացած ծրագրում, եթե ունենք $A\leftarrow G$ պայմանը, ապա vars(A) $\subseteq$vars(G) կամ $G\in B.$ Ցանկացած ծրագիր, որը չի բավարարի վերը նշված հատկությանը հեշտորեն կձևափոխվի համարժեք ծրագրի, որում բավարարվում է վերը նշված հատկությունը: Սա կատարվում է հետևյալ կերպ, $A\leftarrow G$ պայմանը, որը չի բավարարում վերը նշված հատկությանը փոխվում է $A\leftarrow G\otimes E(x_1,x_2,..,x_n)$-ով, որտեղ $\{x_1,x_2,..,x_n\}=$ vars(A) -vars(G) , E-ն նոր պրեդիկատային սիմվոլ է և ավելացնում ենք հետևյալ $E(x_1,x_2,..,x_n)\leftarrow \mathrm{T}$ նոր պայմանը:

5.2 պարագրաֆում տրված են տեղադրության, տեղադրությունների արտադրյալի, արտահայտությունների վերջավոր բազմության ունիֆիկատորի, ընդհանուր հաստատունների տեղադրության, տեղադրությունների բազմության ունիֆիկատորի և տեղադրությունների ունիֆիկացվող բազմության սահմանումները: Ապացուցված են տեխնիկական լեմմաներ, որոնք օգտագործվում են լրիվության թեորեմի ապացույցում:

Սահմանում 5.2.1: Տեղադրություն կոչվում է փոփոխականներից դեպի թերմեր այն θ արտապատկերումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին. $v\theta \neq v$ միայն վերջավոր քանակությամբ v-րի համար:
Ցանկացած տեղադրություն նկարագրվում է հետևյալ տեսքի վերջավոր բազմությամբ $\theta = \left\{ \frac{v_1}{t_1}, \frac{v_2}{t_2}, ..., \frac{v_n}{t_n} \right\}$, որտեղ ցանկցած v_i փոփոխական է, իսկ ցանկացած t_i թերմ է՝ v_i - ից տարբեր, և $v_1, v_2, ..., v_n$-ը իրարից տարբեր են: $\frac{v_1}{t_1}, \frac{v_2}{t_2}, ..., \frac{v_n}{t_n}$-րը, որոնց համար $v_i \neq t_i$ կոչվում է կապողներ(bindings, связывающий) v_i-ի համար:

Սահմանում 5.2.2: Դիցուք ունենք $\theta = \left\{ \frac{u_1}{s_1}, \frac{u_2}{s_2}, ..., \frac{u_m}{s_m} \right\}$ և $\sigma = \left\{ \frac{v_1}{t_1}, \frac{v_2}{t_2}, ..., \frac{v_n}{t_n} \right\}$ տեղադրությունները: θ և σ տեղադրությունների $\theta\sigma$ արտադրյալ կոչվում է հետևյալ կապողներով տրվող տեղադրությունը. Վերցնում ենք $\left\{ \frac{u_1}{s_1\sigma}, \frac{u_2}{s_2\sigma}, ..., \frac{u_m}{s_m\sigma}, \frac{v_1}{t_1}, \frac{v_2}{t_2}, ..., \frac{v_n}{t_n} \right\}$ կապողների բազմությունը և նրանից հեռացնում այն $\frac{u_i}{s_i\sigma}$ կապողները, որոնց համար $u_i = s_i\sigma$ և այն $\frac{v_i}{t_i}$ կապողները, որոնց համար $v_i \in \{u_1, u_2, ..., u_m\}$:
Կասենք որ θ - ն հանդիսանում է η-ի օրինակը(instance, пример) և կգրենք $\eta \leq \theta$, եթե $\exists\alpha$ տեղադրություն, որ $\theta = \eta\alpha$: Այս դեպքում կասենք, որ θ - ն հանդիսանում է η-ի օրինակը ըստ α - ի:

Սահմանում 5.2.3: Դիցուք S - ը արտահայտությունների վերջավոր բազմություն է: θ տեղադրությունը կոչվում է ունիֆիկատոր(unifer, унификатор) S - ի համար, եթե $S\theta$-ն ունի ընդամենը մեկ տարր: S - ի θ տեղադրությունը կոչվում է ամենից ընդհանուր ունիֆիկատոր(mgu) S - ի համար, եթե S - ի $\forall\sigma$ ունիֆիկատորի համար $\theta \leq \sigma$: S - ը արտահայտությունների վերջավոր բազմությունը կոչվում է ունիֆիկացվող, եթե S - ը ունի ունիֆիկատոր:

Սահմանում 5.2.4: Տեղադրությունը կոչվում է ընդհանուր հաստատունների(generic constant, общих постоянних) տեղադրություն կամ ուղակի gc – տեղադրություն, եթե նա ունի հետևյալ տեսքը. $\delta = \left\{ \frac{x_1}{\alpha_1}, \frac{x_2}{\alpha_2}, ..., \frac{x_m}{\alpha_m} \right\}$, որտեղ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$-ը իրարից տարբեր ընդհանուր հաստատուններ են: Եթե E-ն արտահայտություն է, ապա δ տեղադրությունը gc – տեղադրություն է E-ի համար, եթե $dom(\delta) = \mathrm{vars}(E)$:

Սահմանում 5.2.5: Դիցուք S- ը տեղադրությունների բազմություն է: γ տեղադրությունը կոչվում է S- ի տեղադրությունների բազմության ունիֆիկատոր(S-unifer, S- унификатор), եթե հետևյալ $S\gamma = \{\sigma\gamma : \sigma \in S\}$ բազմությունը մեկ տարրանոց է: Եթե գոյություն ունի այդպիսի γ տեղադրություն, ապա S-ը կոչվում է ունիֆիկացվող: γ - ն կոչվում է mgs, S - ի համար, եթե $\exists\eta$ տեղադրություն, որ $\delta = \gamma\eta$: S - ի բոլոր mgs - ի բազմությունը կնշանակենք $mgsu(S)$:

Սահմանում 5.2.6: Դիցուք S - ը տեղադրությունների ունիֆիկացվող բազմություն է: δ տեղադրությունը կոչվում է տեղադրության ունիֆիկատոր S - ի համար, եթե $\delta = \sigma\gamma$, որտեղ $\gamma \in mgsu(S)$ որևէ ունիֆեր է, իսկ $\sigma \in S$ որևէ տեղադրություն է: S տեղադրությունների բազմության ունիֆիկատորների բազմությունը նշանակենք $\odot S$:

Այսինքն ցանկացած $\sigma \in S$ - համար $\odot S = \{\sigma\tau \,|\, \tau \in mgsu(S)\} = \sigma mgsu(S)$:

Երբ ունենք երկու հատ σ և τ տեղադրություններ, այդ դեպքում մենք կօգտագործենք հետևյալ նշանակումը: σ և τ տեղադրությունների բազմության $mgsu$ - ը նշանակենք $mgsu(\sigma,\tau)$, իսկ տեղադրության բոլոր ունիֆիկատորների բազմություն $\sigma \odot \tau$:

5.3 պարագրաֆում տրված են մեկնաբանության, սեմանտիկ օպերատորի սահմանումները: Ապացուցված են անշարժ կետի վերաբերյալ և տեխնիկական լեմմաներ, որոնք օգտագործվում են լրիվության և փակության թեորեմների ապացույցներում:

Սահմանում 5.3.1: Մեկնաբանություն P ծրագրի համար կոչվում է $\mathrm{I}: B_p \to B$ արտապատկերումը: I մեկնաբանությունը գլխավոր բանաձևերի վրա տարածվում է բնական ճանապարհով. $\mathrm{I}(b) = b$, ցանկացած $b \in B \setminus \{\mathrm{T}, \perp\}$, $\mathrm{I}(\neg A) = \neg \mathrm{I}(A)$, $\mathrm{I}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{I}(A)}$ և $\mathrm{I}(A \square B) = \mathrm{I}(A) \square \mathrm{I}(B)$, $\square \in \{\wedge, \vee, \otimes, \oplus\}$: I մեկնաբանությունն ոչ գլխավոր բանաձևերի վրա տարածվում է հետևյալ կերպ.

$\mathrm{I}(G) = \Pi\{\mathrm{I}(G\sigma) \,|\, \sigma$ -ն դա գլխավոր տեղադրություն է G - ի փոփոխականների համար $\}$

Սահմանում 5.3.2: Սեմանտիկ օպերատոր կոչվում է մեկնաբանություններից դեպի մեկնաբանություններ Φ_p արտապատկերումը, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

1. $\Phi_p(\mathrm{I})(A) = A$, եթե $A \in B \setminus \{\mathrm{T}, \perp\}$,
2. $\Phi_p(\mathrm{I})(A) = \Sigma\{\mathrm{I}(G\sigma) \;|\; A' \leftarrow G \in P,\ A = A'\sigma,$ որտեղ σ - ն գլխավոր տեղադրություն է $\}$ հակառակ դեպքում:

Սահմանում 5.3.3: Ծրագրի նախնական I_0 մեկնաբանությունը սահմանվում է հետևյալ կերպ: Ցանկացած $A \in B_p$ ատոմի համար.

$$\mathrm{I}_0(A) = \begin{cases} A, & A \in B \setminus \{\mathrm{T}, \perp\} \\ \perp, & A \notin B \setminus \{\mathrm{T}, \perp\} \end{cases}$$

Նշենք, որ ցանկացած G ատոմիկ բանաձևի և ցանկացած $c \in B \setminus \{\mathrm{T}, \perp\}$ տարրի համար, եթե $\mathrm{I}_0(G) \geq_k c$, ապա $G = d$, որևէ $d \in B$ որտեղ $d \geq_k c$:

Սահմանում 5.3.4: Φ_p - ի դեպի վեր ուղղված իտերացիան սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$\Phi_p \uparrow \alpha = \begin{cases} I_0 & , \alpha = 0 \\ \Phi_p\left(\Phi_p \uparrow (\alpha-1)\right) & , \alpha \in N \\ \Sigma\left\{\Phi_p \uparrow \beta \mid \beta < \alpha\right\} & , \alpha \notin N : \end{cases}$$

Որտեղ N - ով նշանակված է բնական թվերի բազմությունը:
Ամենափոքր թիվը, որի ժամանակ այս հաջորդականությունը տալիս է ամենափոքր անշարժ կետը կոչվում է եզրափակող թիվ և նշանակվում է ω:

Լեմմա 5.3.2: Դիցուք ունենք որևէ G բանաձև և G - ի որևէ σ gs-տեղադրություն, այդ դեպքում՝ $(\Phi_p \uparrow n)(G\sigma) = (\Phi_p \uparrow n)(G)$, ցանկացած $n < \omega$ համար:

Լեմմա 5.3.3: Դիցուք ունենք α և β տեղադրությունները, I մեկնաբանությունը և F բանաձևը: Այդ դեպում, եթե α - ն β - ի օրինակն է, ըստ F - ի, ապա $I(F\alpha) = I(F\beta)$:

Լեմմա 5.3.4: Դիցուք ունենք I մեկնաբանությունը և G_1, G_2 բանաձևերը: Այդ դեպում, ցանկացած $\square \in \{\otimes, \oplus, \wedge, \vee\}$ գործողության համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $I(G_1) \square I(G_2) \leq_k I(G_1 \square G_2)$:

Լեմմա 5.3.5: Դիցուք ունենք α և β տեղադրությունները, I մեկնաբանությունը և F բանաձևը: Այդ դեպում՝

1. եթե $\alpha < \beta$, ապա $I(F\alpha) \leq_k I(F\beta)$ և
2. $I(F\alpha) \leq_k I(F\alpha\beta)$

Լեմմա 5.3.6: Դիցուք ունենք α և β տեղադրությունները, I մեկնաբանությունը և F բանաձևը: Այդ դեպում, եթե α - ն և β - ն ունիֆիկացվող են, ապա՝

$I(F\alpha) \leq_k I(F(\alpha \odot \beta))$ և $I(F\beta) \leq_k I(F(\alpha \odot \beta))$:

Լեմմա 5.3.7: Դիցուք $A \leftarrow G \in P$: Այդ դեպքում ցանկացած I մեկնաբանության և ցանկացած θ տեղադրության համար՝ $\Phi_p(I)(A\theta) \geq_k I(G\theta)$:

Լեմմա 5.3.8: Դիցուք $A \leftarrow G \in P$: Այդ դեպքում ցանկացած, θ տեղադրության համար՝
$(\Phi_p \uparrow \omega)(A\theta) \geq_k (\Phi_p \uparrow \omega)(G\theta)$:

5.3 պարագրաֆում ուսումնասիրվում է պրոցեդուրային սեմանտիկան և ապացուցվում է լրիվության և փակության թեորեմները:

Սահմանում 5.4.1: Դիցուք B-ն բաշխական 2-բիմոնոիդ է և $b \in B$. P-ն ծրագիր է իսկ G - ն նպատակ է: Այդ դեպքում կասենք, որ G - ն ունի b- դուրսբերում(derivation, вывод) ըստ θ պատասխանի, եթե.

1. $G = c$, որտեղ $c \in B \setminus \{T, \perp\}$, $b \leq_k c$, և θ -ն նույնական ε տեղադրությունն է, կամ
2. G-ն ատոմ A- ն է, ապա գոյություն ունի $B \leftarrow G' \in P$ պայման, որտեղ $\sigma = mgu(A, B)$, այնպես որ $G'\sigma$ - ն ունի b- դուրսբերում ըստ θ' պատասխանի, որտեղ $\theta = (\theta'\sigma)_G$, կամ
3. G - ն դա $\neg G'$ - ն է և G' - ը ունի $\neg b$- դուրսբերում ըստ θ պատասխանի, կամ

4. G - ն դա $\bar{G}'$ - ն է և G' - ը ունի $\bar{b}$ - դուրսբերում ըստ θ պատասխանի, կամ
5. G - ն դա $G_1 \square G_2$ - ն է, որտեղ $\square \in \{\wedge, \vee, \otimes, \oplus\}$ և գոյություն ունեն այնպիսի $c, d \in \mathrm{B}$, որ G_1-ն ունի c- դուրսբերում ըստ θ_1 պատասխանի, իսկ G_2-ն ունի d- դուրսբերում ըստ θ_2 պատասխանի, $\theta = \left(\theta_1' \odot \theta_2'\right)_G$ և $b = c \square d$, որտեղ θ_i' - ը θ_i - ի տարբերակն է ըստ G_i - ի $(i = 1, 2)$:

Թեորեմ 5.4.1 (Soundness): Դիցուք B-ն բաշխական 2-բիմոնոիդ է և $b \in \mathrm{B}$. P-ն ծրագիր է իսկ G - ն նպատակ է, և θ - ն տեղադրություն է G - ի փոփոխականների համար: Այդ դեպքում, եթե G - ն ունի b- դուրսբերում ըստ θ պատասխանի, ապա $\left(\Phi_p \uparrow \omega\right)(G\theta) \geq_k b$:

Լեմմա 5.4.1 (Lifting Lemma): Դիցուք B-ն բաշխական 2-բիմոնոիդ է և $b \in \mathrm{B}$. P-ն ծրագիր է իսկ G - ն նպատակ է և θ - ն տեղադրություն է G - ի փոփոխականների համար: Ենթադրենք նաև, որ $G\theta$ - ն ունի b- դուրսբերում ըստ η պատասխանի: Այդ դեպքում G - ն ունի b- դուրսբերում ըստ σ պատասխանի, այնպես որ $G\theta\eta = G\sigma\gamma$, որևէ γ տեղադրության համար:

Թեորեմ 5.4.2 (Completeness): Դիցուք B-ն բաշխական 2-բիմոնոիդ է և $b \in \mathrm{B}$. P-ն ծրագիր է իսկ G - ն նպատակ է և θ - ն տեղադրություն է G - ի փոփոխականների համար (առանց ընդհանուր հաստատունների): Այդ դեպքում, եթե $\left(\Phi_p \uparrow \omega\right)(G\theta) \geq_k b$, ապա G - ն ունի b- դուրսբերում ըստ σ պատասխանի, այնպես որ $G\theta = G\sigma\gamma$ որևէ γ տեղադրության համար:

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսության մեջ կատարված ուսումնասիրությունների արդյունքում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները:

- Ներմուծվել է t-ստոխաստիկ հանրահաշվի L_1 սահմանային ֆունկցիայի գաղափարը: Ապացուցվել է Բիրկհոֆյան տիպի թեորեմ t-ստոխաստիկ հանրահաշիվների համար: Նկարագրվել են ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող դիսկրետ, հաշվելի, տեղափոխական և ալտերնատիվ t-ստոխաստիկ հանրահաշիվների դասերը:
- Նկարագրվել են ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող մասնակի տեղափոխական, նորմալ, քվազինորմալ, առանց զրոյի բաժանարարների հանրահաշիվները:
- Նկարագրվել են ենթաուղիղ վերլուծություն չունեցող բիմոնոիդները և 2-բիմոնոիդները, որոնց միջուկը նույնպես ենթաուղիղ վերլուծություն չունի, որի արդյունքում հիմնավորվել է, որ 2-բիմոնոիդները հանդիսանում են էապես շատ ավելի լայն դաս քան բիկավարները:
- Արդյունքում տրվել են անշարժ կետի և պրոցեդուրային սեմանտիկանները 2 – բիմոնոիդների վրա հիմնված տրամաբանությունների համար և ապացուցվել են փակության և լրիվության թեորեմները:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅԻ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՏԱՐԱԿՎԱԾ ԱՇԽԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՑԱՆԿ

1. V. Toghanyan, Subdirectly irreducible normal and quasinormal algebras, Algebra, Geometry and their Applications, Seminar Proceeding. 2002. №2 p. 32-38.
2. Тоганян В. Г., Подпрямо неразложимые частично коммутативные, нормальные и квазинормальные алгебры, Ученые Записки ЕГУ, 2003 №2 с. 30-37.
3. Yu. Movsisyan and V. Toghanyan, On topological stochastic algebras, Computer Science and Information Technologies, September 22-26, 2003, Yerevan, Armenia, pp. 75-77.
4. V. Toghanyan, Subdirectly irreducible algebras with various equations, Aequationes Mathematicae 68(2004) 98-107.
5. Yu. Movsisyan and V. Toghanyan, On topological subdirectly irreducible Stochastic Algebras, International algebraic conferance dedicated to the centennial of the birthday of *P.G.Kontorovich* and to the 70th birthday of *L.N.Shevrin,Ural,* August 29 - September 03, 2005 *State University (USU)* Ekaterinburg, Russia, pp 151.
6. Yu. Movsisyan and V. Toghanyan, On DeMorgan Bimonoids, Computer Science and Information Technologies, September 24-28, 2007, Yerevan, Armenia, pp. 57-58.

Тоганян Ваган Гамлетович

БУЛЕВЫ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследований проведенных в диссертации были получены следующие основные результаты.

- Было введено понятие предельной функции t-стохастической алгебры L_1. Была доказана теорема типа Биркгофа для t-стохастических алгебр. Были описаны подпрямо неразложимые дискретные, транзитивные и альтернативные классы t-стохастических алгебр.

- Были описаны подпрямо неразложимые частично транзитивные, нормальные, квазинормальные и не имеющие нулевых делителей алгебры.

- Были описаны подпрямо неразложимые бимоноиды и 2- бимоноиды, ядра которых так же подпрямо неразложимы, в результате чего было обосновано, что 2-бимоноиды являются значительно широким классом чем бирешётки.

- В результате были даны процедурная семантика и семантика неподвижной точки для логики, которая в качестве базового множества использует 2-бимоноиды. Были доказаны теоремы о замкнутности и о полноте.

Vahan Toghanyan

Boolean and stochastic systems and their applications