ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ճիտոյան Արման Սամվելի

ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ ԱՐՏԱԾՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՐԴՈՒԹՅԱՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՃՇԳՐՏՈՒՄԸ

Ատենախոսություն

Ա.01.09. <<Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն>> մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման համար

Գիտական ղեկավար՝

Ֆիզ.մաթ.գիտ.դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Ա. Չուբարյան

Երևան 2018

Բովանդակություն

Ներածություն

Սույն ատենախոսությունում ուսումնասիրված են արտածումների բարդության բնութագրիչների գնահատականները ասույթային հաշվի տարբեր համակարգերում:

Թեմայի արդիականությունը. Արտածումների բարդության տեսությունը ուսումնասիրում է բարդության գաղափարը տրամաբանության տեսանկյունից: Թեորեմի ապացուցման բարդության մեծությունը կարելի է նկարագրել տարբեր եղանակներով՝ ինչպիսին են տրված համակարգում նրա կարճագույն ապացույցի երկարությունը (size), քայլերի քանակը (steps), օգտագործված տարածության մեծությունը (space), յուրաքանչյուր քայլում օգտագործված պնդումների մեծագույն երկարությունը (width): Բնական է, որ ապացույցի օպտիմալությունը էապես կախված է այն համակարգից, որում կատարվում է ապացույցը: Ֆորմալ տեսություններից ամենապարզ՝ ասույթային հաշվի արտածման բարդության հետազոտումների թվացյալ պարզությունը և հետևաբար նաև ոչ այնքան կարևոր լինելը կտրականապես հերքեց Կուկի և Ռեքաուի [17] հոդվածն, որտեղ ապացուցվել էր, որ ասույթային արտածումների երկարությունների և հաշվարկելիության բարդության դասերի տարանջատման միջև առկա է ֆունդամենտալ կապ՝ NP դասը փակ է լրացման նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի **ասույթային հաշվի** այնպիսի արտածման համակարգ, որում բոլոր նույնաբանությունների արտածումների երկարությունները բազմանդամորեն սահմանափակ են (այդպիսի համակարգը հեղինակները անվանում են **սուպեր** համակարգ): Այդ դիտակետից առաջացել է այսպես կոչված Կուկ-Ռեքաու ծրագիրը, որը հանդիսանում է ասույթային հաշվի համակարգերում արտածման բարդության բնութագրիչների հետազոտման ակտիվացման սկզբնակետերից մեկը և որը ներառում է հետևյալ հիմնական ուղղությունները՝

- տրված համակարգում բանաձևերի արտածման բնութագրիչների գնահատում,
- նոր, առավել արդյունավետ համակարգերի սահմանում,
- նոր, առավել բարդ արտածվող բանաձևերի որոնում:

Վերջերս Գորդեևի և Հեյսլերի /L. Gordeev, E. H. Haeusler, NP vs PSPACE, arXiv:1609.09562v1 [cs.CC] 30 Sep 2016/ կողմից ապացուցվել է, որ **NP=PSPACE** և, հետևաբար, **NP = coNP = PSPACE**: Այսպիսով, **սուպեր համակարգ գոյություն ունի:** Հայտնի է, որ բազմաթիվ համակարգեր սուպեր չեն, սակայն ասույթային հաշվի առավել բնական (սեկվենցիալ կամ Ֆրեգեի) համակարգերի, ինչպես նաև վերջերս կառուցված որոշ համակարգերի վերաբերյալ սուպեր լինելու խնդիրը դեռ բաց է, հետևաբար խիստ արդիական է և անհրաժեշտ այդպիսի համակարգերի ուսումնասիրությունը արտածումների բարդության տեսանկյունից:

Սա հեռահար նպատակն է, սակայն առկա են նաև այլ հետաքրքրություններ, որոնցով նույնապես հիմնավորվում են այս ոլորտում առկա հետազոտությունների մեծամասնությունը: Այդպիսի խնդիրներից է, մասնավորապես, **ԻՐԱԳՈՐԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ խնդրի /SAT problem-ի/** լուծումը, որը կարող է բացահայտել արդեն **P և NP** դասերի փոխհարաբերությունը: Հայտնի է, որ ասույթային հաշվի յուրաքանչյուր բանաձև որոշակի ձևափոխությամբ կարելի է ներկայացնել այնպիսի կոնյունկտիվ նորմալ ձևով (ԿՆՁ), որի երկարությունը ունի ոչ ավելին, քան գծային աճ սկզբնական բանաձևի երկարության համեմատությամբ, և որն անիրագործելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ ինքը բանաձևը նույնաբանություն է: Անիրագոծելիությունը հաստատող որևէ ալգորիթմ սահմանում է որոշակի արտածման համակարգ, որը կրկնօրինակում է ալգորիթմի կատարման քայլերը և, հակառակը, անիրագոծելիությունը փաստող որևէ արտածման համակարգ հանդիսանում է **SAT problem-ը** լուծող ալգորիթմ: SAT problem-ի ժամանակակից հետազոտողները որոնում են որոշակի «թույլ» համակարգերում (Resolution, Polynomial Calculus, Analytic Tableaux, Catting Planes, Cut-fee Sequence, Elimination, Bounded Frege) արտածումների բարդության վերին և ստորին գնահատականները, որոնք հուշում են **SAT problem-ի** լուծման համար նվազագույն և առավելագույն բավարար ռեսուրսների մասին: Հիմնավորվել է, որ օգտագործված հիշողությունը հանդիսանում է կարևորագույն պարամետրը SAT-problem-ի լուծման ընթացքում, հետևաբարր, արտածման space բարդությունը կարող է լինել օգտակար այս հարցում: Վերջերս կատարված հետազոտությունների արդյունքները փաստում են resolution համակարգում space բարդության համար ստացված տեսական արդյունքների և միևնույն ժամանակահատվածում պրակտիկորեն ստացված բարդության մեծությունների իրական մոտիկությունը: Այսպիսով, արտածումների բարդության հետազոտումները **կարևոր են նաև «թույլ» համակարգերում:**

Արտածումների բարդության վերոհիշյալ, ինչպես նաև որոշ այլ հարցեր, որոնք վերաբերում են **բազմարժեք տրամաբանության** որոշ տարատեսակների համակարգերում արտածումների բարդությունների գնահատմանը, ունենալով տեսական նշանակություն, **ունեն նաև պրակտիկ կիրառություն** թեորեմների արտածումների ավտոմատացման ընթացքում, հետևաբար նաև Formal Verification, Artificial Intelligence, Operations Research, Computational Biology, Cryptography, Data Mining, Machine Learning, Hardware Design-ի հետ առնչվող հետազոտումներում**:**

Նպատակն ու խնդիրները. Աշխատանքի հիմնական նպատակն է ասույթային հաշվի որոշակի համակարգերում արտածումների տարբեր բնութագրիչների գնահատականների ճշգրտումը, նշելու համար այդ համակարգերի տեղակայումը ասույթային համակարգերի ըստ արդյունավետության բաղդատման աղյուսակում: Հիմնական խնդիրներն են՝

- R(lin) - գծայնացված ռեզոլյուցիա համակարգի սուպեր լինելու հանգամանքի հետազոտումը,
- տարբեր սահմանափակումներով տեղադրման կանոնների ազդեցությունը R-ռեզոլյուցիա և E – կրճատման համակարգերի արդյունավետության վրա,
- Ֆրեգեի կամայական համակարգերում արտածումների քայլերի ստորին գնահատականների ճշգրտումը,
- բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում արտածումների բարդությունների գնահատումը:
- տարբեր տրամաբանությունների նույնաբանությունների որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների /**կատարյալ, կրճատված, փակուղային, կարճագույն, մինիմալ/** ուսումնասիրումը և դրանց ու արտածումների բարդության բնութագրիչների մեծությունների կապի հետազոտումը:

Հետազոտման մեթոդներն են՝ մաթեմատիկական տրամաբանության, բարդության ընդհանուր տեսության և կոմբինատոր օպտիմիզացիայի մեթոդները:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթներն են՝

1. R(lin) համակարգում բանաձևերի որոշակի հաջորդականության համար ստացված են արտածումների քայլերի և երկարության ստորին ցուցչային գնահատականներ, հետևաբար ***R(lin)-ը սուպեր համակարգ չէ:*** Ապացուցված է նաև, որ այդ նույն բանաձևերի հաջորդականության արտածումները բազմանդամորեն սահմանափակ են R(lin)+renaming (վերանվանում) համակարգում: Նույնատիպ արդյունքներ ստացվել են նաև R(lin)-ին երկակի E(lin) համակարգի համար:
2. Սահմանված են R+l-տեղադրություն և E+ l-տեղադրություն համակարգերը /$l \geq 0$ – տեղադրվող բանաձևերի տրամաբանական գործողությունների քանակն է / և ապացուցված է, որ R+(l+1)-տեղադրություն (E+(l+1)-տեղադրություն) համակարգը ունի քայլերի քանակի ցուցչային արագացում R+l-տեղադրություն (E+l-տեղադրություն) համակարգի նկատմամբ, իսկ R+տեղադրություն և E+տեղադրություն համակարգերը համարժեք են Ֆրեգեի համակարգերին:
3. Ֆրեգեի **բոլոր** համակարգերի համար ստացված է արտածումների քայլերի սուպեր-գծային ստորին գնահատական /մինչ այժմ հայտնի գծայինի փոխարեն/:
4. Բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում բանաձևերի որոշակի հաջորդականությունների արտածումների բարդությունների բոլոր չորս բնութագրիչների համար ստացված են օպտիմալ /նույն կարգի վերին և ստորին/ գնահատականներ:
5. Ուսումնասիրված են տարբեր տրամաբանությունների նույնաբանությունների որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակները /**կատարյալ, կրճատված, փակուղային, կարճագույն, մինիմալ**/ և հետազոտված է դրանց կապը արտածումների բարդության բնութագրիչների մեծությունների հետ:

Գիտական նորույթը. Ներկայացվող հետազոտությունների ուղղությամբ ստացված բոլոր արդյունքները նոր են՝ դասական երկարժեք տրամաբանության համակարգերի համար ստացված արդյունքների հիման վրա էապես ճշգրտվել է ասույթային համակարգերի ըստ արդյունավետության բաղդատման աղյուսակը, իսկ բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում արտածումների բարդությունների բնութագրիչների գնահատում կատարվել է առաջին անգամ:

Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը. Արտածումների բարդության բնութագրիչների գնահատումները թե երկարժեք, թե բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում, ունենալով տեսական նշանակություն, **ունեն նաև պրակտիկ կիրառություն** թեորեմների արտածումների ավտոմատացման գործընթացում, ինչպես նաև վերջին տասնամյակում այնպիսի ոլորտներում, ինչպիսիք են Formal Verification, Artificial Intelligence, Operations Research, Computational Biology, Cryptography, Data Mining, Machine Learning, Hardware Design-ը:

Ստացված արդյունքների փորձարկումը. Ատենախոսությունում ներկայացված արդյունքները բազմիցս ներկայացվել և քննարկվել են տարբեր սեմինարների և տարբեր միջազգային գիտական կոնֆերանսների ժամանակ՝

- Logic Colloquium 2015 LC 2015Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL), Helsinki, 2015,
- Logic Colloquium 2016 LC 2015Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL), Leeds, 2016,
- CSIT-2015, Yerevan
- ԵՊԸ ՈՒԳԸ գիտական նստաշրջան, 2017.

Հրապարակումներ. Ատենախոսության հետազոտությունների վերաբերյալ տպագրված են 11 գիտական աշխատություններ, որոնց ցուցակը բերվում է գրականության ցանկ վերջում:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը. Ատենախոսությունը կազմված է ներածությունից, հինգ գլուխներից, եզրակացությունից, երկու հավելվածներից և օգտագործված գրականության ցանկից /42 անուն/: Ծավալը 90 էջ է:

Ատենախոսության համառոտ բովանդակությունը

Առաջին գլխում տրվում են որոշ հիմնական գաղափարների սահմանումները, նկարագրված են ատենախոսությունում հետազոտված հիմնական արտածման համակարգերը, բարդության տարբեր բնութագրիչների սահմանումները, տարբեր համակարգերի համար մեկը մյուսին հանգեցման գաղաբարը, ցուցչային արագացման գաղափարը, ասույթային հաշվի տարբեր համակարգերի ըստ արդյունաբենության բաղդատման հայտնի աղյուսակի այն հատվածը, որը ճշգրտվել է սույն ատենախոսության արդյունքների հիման վրա, և որոշակի «դժվար» արտածվող բանաձևերի օրինակները:

Երկրորդ գլխում ուսումնասիրվել են արտածումների բարդության բնութագրիչները R(lin) և E(lin) համակարգերում, ինչպես նաև նրանց որոշակի ընդլայնումներում: Հարկ է նշել, որ R(lin) համակարգը ի սկզբանե ընդունվել էր մեծ ոգևորությամբ, քանի որ մինչ այդ հայտնի «բարդ» բանաձևերը / Pigeon Hole Principle, Clique Colouring pair, Hool's theorem, Ցեյտինի բանաձևերը և այլն/, որոնք մի շարք հանրահայտ համակարգերում ունեն արտածման երկարության ստորին ցուցչային գնահատականներ, R(lin) – ում արտածվեցին բազմանդամային բարդությամբ: Սույն ատենախոսությունում ապացուցվել է, որ կան բանաձևեր, որոնք ունեն ստորին ցուցչային գնահատականներ նաև R(lin) համակարգում: Ներմուծվել է նաև տեղադրման կանոնի մի տարատեսակ՝ վերանվանման (renaming) կանոնը, որով համալրվել են R(lin) և E(lin) համակարգերը: R(lin)+renaming-ով և E(lin)+renaming-ով նշանակված են renaming կանոնով համալրված համապատասխանաբար R(lin) և E(lin) համակարգերը: Ապացուցվել է, որ R(lin)+renaming և E(lin)+renaming համակարգերը **ունեն ցուցչային արագացում** համապատասխանաբար R(lin) և E(lin) համակարգերի նկատմամբ:

Երրորդ գլխում ուսումնասիրվում են E տիպի համակարգերը դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համար, որոնք նշանակված են համապատասխանաբար E, EI և EM-ով, և դրանց որոշակի ընդլայնումները:

Տեղադրման կանոնով համալրված E (EI, EM) համակարգը նշանակված է **SEC (SEI, SEM)**-ով: Եթե որևէ սևեռված ℓ-ի համար տեղադրվող բանաձևերի տրամաբանական կապերի քանակը սահմանափակված է ℓ-ով, ապա համապատասխան համակարգը նշանակված է **S_ℓEC (S_ℓEI, S_ℓEM)**-ով: Ապացուցված է, որ

1) $\forall\, \ell \geq 0$ $S_{\ell+1}EC$ ($S_{\ell+1}EI$, $S_{\ell+1}EM$) համակարգը ունի էկսպոնենցիալ արագացում $S_{\ell}EC$ ($S_{\ell}EI$, $S_{\ell}EM$) համակարգի նկատմամբ, եթե դիտարկվու են միայն ծառատիպ արտածումները:

2) SEC (SEI, SEM) համակարգը բազմանդամորեն համարժեք է $\mathcal{F}C$ ($\mathcal{F}I$, $\mathcal{F}M$) համակարգին, որտեղ **$\mathcal{F}C$, $\mathcal{F}I$ և $\mathcal{F}M$** –ով նշանակված են համապատասխանաբար Ֆրեգեի համակարգերը դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համար:

Հաշվի առնելով E և R համակարգերի բազմանդամային համարժեքությունը և երկակիությունը, նույնատիպ եղանակով կառուցվում են SRC (SRI, SRM) և $S_{\ell}RC$ ($S_{\ell}RI$, $S_{\ell}RM$) համակարգերը, որոնց համար տեղի ունեն վերոհիշյալ երկու պնդումները: Այսպիսով, նշված տրամաբանություններից յուրաքանչյուրի Ֆրեգեի և E ու R համակարգերի միջև **կառուցված են համակարգերի անվերջ բազմություններ, որոնցից յուրաքանչյուր հաջորդը էապես ավելի արդյունավետ է, քան նախորդը:**

Չորրորդ գլխում Ֆրեգեի յուրաքանչյուր համակարգում որոշակի դասի բանաձևերի արտածումների քայլերի համար ստացված է **սուպեր-գծային ստորին գնահատական** (մինչ այժմ հայտնի էր միայն գծային ստորին գնահատականը, իսկ նշված տիպի գնահատական նախկինում ստացվել էր Ֆրեգեի **միայն մեկ** համակարգի համար [15] –ում):

Հինգերորդ գլխում բազմարժեք տրամաբանության չորս տարատեսակների համակարգերում գնահատվել են բանաձևերի որոշակի հաջորդականությունների արտածումների բարդությունների բոլոր բնութագրիչները: Ապացուցվել է, որ բանաձևերի նշված հաջորդականությունները ունեն միաժամանակյա օպտիմալ գնահատականներ /նույն կարգի վերին և ստորին/ և արտածումների քայլերի քանակի, և երկարությունների, և օգտագործված տարածքի, և օգտագործված ամենաերկար բանաձևերի երկարությունների համար:

Վեցերորդ գլխում տրվում են տարբեր տրամաբանությունների նույնաբանությունների որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակները /**կատարյալ, կրճատված, փակուղային, կարճագույն, մինիմալ**/ և հետազոտված է դրանց կապը արտածումների բարդության բնութագրիչների մեծությունների հետ:

ԳԼՈՒԽ 1. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՆՇԱՆԱԿՈՒՄՆԵՐ

Այս գլխում տրվում են որոշ հիմնական գաղափարների սահմանումները, նկարագրված են ատենախոսությունում հետազոտված հիմնական արտածման համակարգերը, բարդության տարբեր բնութագրիչների սահմանումները, տարբեր համակարգերի համար մեկը մյուսին հանգեցման գաղաբարը, ցուցչային արագացման գաղափարը, ասույթային հաշվի տարբեր համակարգերի ըստ արդյունավետության բաղդատման հայտնի աղյուսակի այն հատվածը, որը ճշգրտվել է սույն ատենախոսության արդյունքների հիման վրա, «դժվար» արտածվող բանաձևերի գաղափարը, օրինակները:

1.1. Որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի գաղափարը

Մենք կօգտագործենք բուլյան խորանարդի հայտնի սահմանումը $\boldsymbol{E^n} = \{(\boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}, \dots, \boldsymbol{\sigma_n}) \,/\, \boldsymbol{\sigma_i} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\},\ \mathbf{1} \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{n}\}$, $\boldsymbol{p_i}$ և $\boldsymbol{p_{i_j}} (\boldsymbol{i} \ge \mathbf{1};\ \boldsymbol{j} \ge \mathbf{1})$ տրամաբանական փոփոխականների, հետևյալ տրամաբանական կապերով $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$ ասույթային հաշվի բանաձևերի (որպես հանրահայտ օրենքներով տրամաբանական փոփոխականներից, տրամաբանական կապերից և փակագծերից կառուցված որոշակի բառերի), նույնաբանության գաղափարները:

Երկարժեք տրամաբանությունում փոփոխականները և դրանց ժխտումները կանվանենք լիտերալներ: **K** կոնյունկտը իրենից ներկայացնում է լիտերալների բազմություն (կոնյունկտը չի կարող պարունակել փոփոխականը և այդ փոփոխականի ժխտումը միաժամանակ): $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \dots, \boldsymbol{K_l}\}$ տարրական կոնյունկտների բազմությունը կանվանենք դիզյունկտիվ նորմալ ձև /ԴՆՁ/:

Հետևելով [6]-ին տանք հետևյալ սահմանումները՝

Սահմանում 1.1.1: Ասույթային հաշվի յուրաքանչյուր ψ բանաձևի համար հետևյալ տարրական ձևափոխումներից յուրաքանչյուրը կանվանենք փոխարինման-կանոն՝

$$\begin{array}{llll} 0 \& \psi = 0, & \psi \& 0 = 0, & 1 \& \psi = \psi, & \psi \& 1 = \psi, \\ 0 \vee \psi = \psi, & \psi \vee 0 = \psi, & 1 \vee \psi = 1, & \psi \vee 1 = 1, \\ 0 \supset \psi = 1, & \psi \supset 0 = \overline{\psi}, & 1 \supset \psi = \psi, & \psi \supset 1 = 1, \\ \overline{0} = 1, & \overline{1} = 0, & \overline{\overline{\psi}} = \psi. & \end{array}$$

Փոխարինման-կանոնի միջոցով բանաձևերում փոխարինման կանոնի ձախ մասի տեսքը ունեցող ցանկացած ենթաբանաձև կարող է փոխարինվել աջ մասի տեսքը ունեցող համապատասխան բանաձևով:

Դիցուք $\boldsymbol{\varphi}$–ն ասույթային հաշվի բանաձև է, իսկ $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \dots, \boldsymbol{p_n}\}$–ն՝ այդ բանաձևի բոլոր փոփոխականների բազմությունը:$\boldsymbol{P'} = \{\boldsymbol{p_{i_1}}, \boldsymbol{p_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{p_{i_m}}\}$-ով ($\boldsymbol{1 \le m \le n}$) նշանակենք $\boldsymbol{P}$–ի որևէ ենթաբազմություն:

Սահմանում 1.1.2: Տրված $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \subset E^m$ –ի համար $K^\sigma = \left\{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}\right\}$[1] կոնյունկտը կանվանենք $\boldsymbol{\varphi - 1}$–որոշիչ ($\boldsymbol{\varphi - 0}$-որոշիչ), եթե ամեն p_{i_j}–ին σ_j արժեքը ($1 \le j \le m$) վերագրելուց հետո կիրառելով փոխարինման կանոնները, կստանանք φ–ի արժեքը (1 կամ 0) անկախ մնացած փոփոխականների արժեքներից:

$\varphi - 1$-որոշիչ կոնյունկտը և $\varphi - 0$-որոշիչ կոնյունկտը կանվանենք նաև φ-որոշիչ կամ որոշիչ φ–ի համար:

Սահմանում 1.1.3: $D = \{K_1, K_2, \dots, K_l\}$ ԴՆՁ-ն կանվանենք որոշիչ ԴՆՁ (ոԴՆՁ) φ–ի համար, եթե $\varphi = D$ և ցանկացած K_j ($1 \le j \le l$) կոնյունկտ 1-որոշիչ է φ–ի համար:

Հինգերորդ գլխում ոԴՆՁ-ի գաղափարը ընդհանրացվել է բազմարժեք տրամաբանության համար:

1.2. Հիմնական համակարգերը

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները ստացվել են մի շարք հանրահայտ արտածման համակարգերի /Ֆրեգեի, սեկվենցյալ/ տարատեսակների համար և վերջերս

---

[1]Տրված p փոփոխականի և $\sigma \in E^1$ համար p^σ –ով կնշանակենք $p^\sigma = \begin{cases} p, & if \quad \sigma = 1, \\ \bar{p}, & if \quad \sigma = 0. \end{cases}$

սահմանված նոր համակարգերի, ինչպես նաև դրանց տարատեսակների համար: Տանք այս համակարգերի սահմանումները:

a/ Ֆրեգեի համակարգում օգտագործվում են հաշվելի թվով տրամաբանական փոփոխականներ և որոշակի տրամաբանական գործողությունների վերջավոր, լրիվ համակարգ: Արտածման կանոնները տրվում են հետևյալ սխեմայով՝ $\frac{A_1A_2\dots A_m}{B}$, որտեղ $A_1A_2\dots A_m$-ն և B-ն բանաձևեր են (առանց նախադրյալներ՝ k=0 դեպքում, արտածման կանոնները հենասույթների սխեմաներ են): Ֆրեգեի համակարգերը անհակասելի են և լրիվ, ինչը նշանակում է, որ ցանկացած $\frac{A_1A_2\dots A_m}{B}$ արտածման կանոնի համար, եթե $A_1\ A_2\dots A_m$ բանաձևերը փոփոխականների արժեքների որևէ հավաքածուի վրա ընդունում են «ճիշտ» արժեքը, ապա B-ն այդ հավաքածուի վրա նույնպես ընդունում են «ճիշտ» արժեքը, և ցանկացած նույնաբանություն արտածելի է:

b/ Մենք դիտարկելու ենք **LK Հենցենյան տիպի սեկվենցյալ համակարգը**: LK-ի այբուբենը կազմված է տրամաբանական փոփոխականներից՝ $p_1, p_2, p_3 \dots$, տրամաբանական կապերից՝ ¬, ∧, ∨, ⊃ , հաստատուններից՝ $T, \bot$, փակագծերից, սեկվենցյալ կապի սիմվոլից՝ ⟶, և ստորակետից:

Սեկվենտը ունի հետևյալ տեսքը՝ $\Gamma \longrightarrow \Delta$, որտեղ Γ-ն և Δ-ն բանաձևերի վերջավոր բազմություններ են: Γ-ն կոչվում է անտեցեդենտ, իսկ Δ-ն սուկցեդենտ: Սեկվենցյալ համակարգի հենասույթները հետևյալ սեկվենտներն են՝

$$p \longrightarrow p, \quad \longrightarrow T \quad \text{և} \quad \bot\longrightarrow,$$

որտեղ p -ն կամայական տրամաբանական փոփոխական է, T -ն «ճիշտ» հաստատունն է, իսկ ⊥-ը «սխալ» հաստատունը:

LK համակարգի արտածման կանոնները հետևյալն են՝

1) $\frac{\Gamma\longrightarrow\Delta}{\Gamma^*\longrightarrow\Delta^*}$, որտեղ $\Gamma \supseteq \Gamma^*$ և $\Delta \supseteq \Delta^*$

2) $\frac{\Gamma\longrightarrow\Delta, A}{\neg A, \Gamma\longrightarrow\Delta}$

3) $\dfrac{\mathbf{A,\Gamma\rightarrow\Delta}}{\mathbf{\Gamma\rightarrow\Delta,\neg A}}$

4) $\dfrac{\mathbf{A,\Gamma\rightarrow\Delta}}{\mathbf{A\wedge B,\Gamma\rightarrow\Delta}}$ և $\dfrac{\mathbf{B,\Gamma\rightarrow\Delta}}{\mathbf{A\wedge B,\Gamma\rightarrow\Delta}}$

5) $\dfrac{\mathbf{\Gamma\rightarrow\Delta,A\quad\Gamma\rightarrow\Delta,B}}{\mathbf{\Gamma\rightarrow\Delta,A\wedge B}}$

6) $\dfrac{\mathbf{A,\Gamma\rightarrow\Delta\quad B,\Gamma\rightarrow\Delta}}{\mathbf{A\vee B,\Gamma\rightarrow\Delta}}$

7) $\dfrac{\mathbf{\Gamma\rightarrow\Delta,A}}{\mathbf{\Gamma\rightarrow\Delta,A\vee B}}$ և $\dfrac{\mathbf{\Gamma\rightarrow\Delta,B}}{\mathbf{\Gamma\rightarrow\Delta,A\vee B}}$

8) $\dfrac{\mathbf{\Gamma\rightarrow\Delta,A\quad B,\Gamma\rightarrow\Delta}}{\mathbf{A\supset B,\Gamma\rightarrow\Delta}}$

9) $\dfrac{\mathbf{A,\Gamma\rightarrow\Delta,B}}{\mathbf{\Gamma\rightarrow\Delta,A\supset B}}$

10) $\dfrac{\mathbf{\Gamma\rightarrow\Delta,A\quad A,\Pi\rightarrow\Lambda}}{\mathbf{\Gamma,\Pi\rightarrow\Lambda,\Delta}}$, որտեղ A-ն կոչվում է արտածման կանոնի **հատույթի** բանաձև

(1) կանոնը կոչվում է կառուցվածքային կանոն, (2)-(9) կանոնները կոչվում են տրամաբանական կանոններ և (10) կանոնը կոչվում է հատույթի կանոն: LK համակարգը առանց (10) կանոնի կոչվում է առանց հատույթի կանոնի LK համակարգ և նշանակվում է $\mathbf{LK}^{-}$-ով: Հատույթի կանոնով LK համակարգը, որտեղ հատույթի բանաձևի մեջ մտնող տրամաբանական գործողությունների քանակը $\leq \boldsymbol{n}$-ից, նշանակվում է $\mathbf{LK_n}$-ով:

c/ **Արտածման E համակարգը** կրճատման կանոնով սահմանված է [6]-ում: E-ի հենասույթները չեն ֆիքսվում, բայց ցանկացած φ -ի համար նրա որևէ ոԴՆՁ-ի յուրաքանչյուր կոնյունկտ կարող է դիտարկվել որպես հենասույթ:

Կրճատման կանոնը ($\boldsymbol{\varepsilon}$ -կանոն) արտածում է $K'\cup K''$ -ն $K'\cup\{p\}$ և $K'\cup\{\overline{p}\}$ կոնյունկտներից, որտեղ K' և K'' կոնյունկտներ են, իսկ p –ն՝ փոփոխական:

Կոնյունկտների վերջավոր հաջորդականությունը հանդիսանում է արտածում E-ում, եթե կամայական կոնյունկտ կամ հենասույթ է, կամ ստացվել է հաջորդականության նախորդ կոնյունկտներից ε-կանոնով:

Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \dots, \boldsymbol{K_l}\}$ ԴՆՁ-ն նույնաբանություն է, եթե $\{\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \dots, \boldsymbol{K_l}\}$ հենասույթներից կարելի է արտածել դատարկ կոնյունկտը (∅) $\boldsymbol{\varepsilon}$-կանոնով:

d/ **Ռեզոլյուցիոն R համակարգ**

Ռեզոլյուցիոն R համակարգը կոնյունկտիվ նորմալ ձևերով (ԿՆՁ) տրված բանաձևի հերքման մեթոդով արտածման համակարգն է հետևյալ ֆորմալ սահմանմամբ՝ ԿՆՁ բանաձև կանվանենք $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}\}$ դիզունկտների հավաքածուն, որտեղ որպես դիզյունկտ կանվանենք լիտերալների (փոփոխականների և նրանց ժխտումների) հավաքածուն, որտեղ փոփոխականը և իր ժխտումը միաժամանակ չեն կարող մասնակցել: R-ում հենասույթները ֆիքսված չեն: Որոշակի $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}\}$ ԿՆՁ-ի համար յուրաքանչյուր $\boldsymbol{D_i}$ դիզյունկտ կարող է համարվել հենասույթ: Ռեզոլյուցիոն կանոնը $\boldsymbol{D'} \cup \{\boldsymbol{p}\}$ և $\boldsymbol{D''} \cup \{\overline{\boldsymbol{p}}\}$-ից արտածում է $\boldsymbol{D'} \cup \boldsymbol{D''}$-ը, որտեղ$\boldsymbol{D'}$ և $\boldsymbol{D''}$-դիզյունկտներեն, իսկ $\boldsymbol{p}$-ն փոփոխական:

$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}\}$ ԿՆՁ-ն կոչվում է հերքվող այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի դատարկ դիզյունկտի արտածում $\{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}\}$ հենասույթներից:

Յուրանքչյուր բանաձևի ժխտմանը որոշակի եղանակով համապատասխանեցվում է $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}\}$ ԿՆՁ, որի հերքելիությունը համարժեք է տրված բանաձևի նույնաբանություն հանդիսանալուն:

Դժվար չէ նկատել, որ E և R երկակի համակարգեր են:

e/ **R(lin) համակարգ**

R(lin) համակարգի սահմանումը տանք ըստ Ռան Ռազի և Իդդո Ձամեռետի [25] հոդվածի.

Դիցուք ունենք L գծային հավասարում հետևյալ տեսքով՝ $\boldsymbol{a_1 x_1} + \cdots \boldsymbol{a_n x_n} = \boldsymbol{a_0}$: Աջ կողմի $\boldsymbol{a_0}$-ն կոչվում է L-ի ազատ մաս, իսկ ձախ $\boldsymbol{a_1 x_1} + \cdots \boldsymbol{a_n x_n}$ մասը կոչվում L-ի գծային մաս (գծային մասը կարող է 0 լինել): Գծային հավասարումների դիզյունկտ կանվանենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\left(a_1^{(1)}x_1+\cdots+a_n^{(1)}x_n=a_0^{(1)}\right)\vee\ldots\vee\left(a_1^{(t)}x_1+\cdots+a_n^{(t)}x_n=a_0^{(t)}\right),$$

որտեղ$t\geq 0$ և $a_i^{(j)}$-երը ամբողջ թվեր են ($0\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq t$)։ Գծային հավասարումների կրկնությունները գծային հավասարումների դիզյունկտում բացառվում է։ Այս դիզյունկտը ունի հետևյալ բնական նկարագրությունը՝ մենք ասում ենք, որ $x_1\ldots x_n$ փոփոխականներին ամբողջ թվերի վերագրումը իրագործելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի $j\in[1,t]$ այնպես, որ $a_1^{(j)}x_1+\cdots+a_n^{(j)}x_n=a_0^{(j)}$ հավասարումը ճիշտ է փոփոխականներին տրված արժեքների դեպքում։

Քանի որ այս աշխատանքում օգտագործված բոլոր գծային հավասարումները ունեն ամբողջ գործակիցներ, մենք որպես գծային հավասարում այսուհետ կհասկանանք գծային հավասարում ամբողջ արժեք գործակիցներով։

Այժմ կներկայացնենք դիզյունկտների “թարգմանության” գաղափարը։ Ցանկացած ԿՆՁ հնարավոր է թարգմանել գծային հավասարումների դիզյունկտների հավաքածուի հետևյալ կերպ՝ ԿՆՁ-ի մեջ մտնող ցանկացած $\bigvee_{i\in I}x_i\vee\bigvee_{j\in J}\neg x_j$ դիզյունկտ (որտեղ I և J փոփոխականների ինդեքսների բազմություններն են) թարգմանվում է հետևյալ գծային հավասարումների դիզյունկտի $\bigvee_{i\in I}(x_i=1)\vee\bigvee_{j\in J}(x_j=0)$ ։ D դիզյունկտի թարգմանությունը գծային հավասարումների դիզյունկտին կնշանակենք $\widetilde{D}$-ով։ Հեշտ է տեսնել, որ $x_1\ldots x_n$ փոփոխակաների բուլյան արժեքները բավարարում են D-ին այն և միայն այն դեպքում, երբ բավարարում են $\widetilde{D}$-ին (որտեղ 1 հասկացվում է որպես ճիշտ, իսկ 0-ն սխալ)։

Գծային հավասարումների ռեզոլյուցիոն R(lin) համակարգը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

Դիցուք ունենք գծային հավասարումների դիզյունկտների $K\coloneqq\{D_1,\ldots,D_m\}$ բազմություն։ $\pi=(D_1,\ldots,D_l)$ գծային հավասարումների դիզյունկտների հաջորդականությունը կանվանենք D գծային հավասարման դիզյունկտի արտածում K-ից R(lin)-ում, եթե $D_l=D$ և ցանկացած $i\in[1,l]$-ի համար կամ $D_i=K_j$ ինչ որ $j\in[1,m]$-

ի համար, կամ $\boldsymbol{D_i}$-ն $(\boldsymbol{x_h} = \boldsymbol{0}) \vee (\boldsymbol{x_h} = \boldsymbol{1})$ բուլյան հենասույթ է $\boldsymbol{h} \in [\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}]$-ի համար, կամ $\boldsymbol{D_i}$-ին արտածվել է $\boldsymbol{D_j}, \boldsymbol{D_k}$-ից $(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} < \boldsymbol{i})$ R(lin)-ի հետևյալ արտածման կանոներից մեկով՝

Ռեզոլյուցիա՝ Դիցուք A-ն և B-ն գծային հավասարումների երկու դիզյունկտներ են (հնարավոր է դատարկ դիզյունկտներ), իսկ L_1-ը և L_2-ը երկու գծային հավասարումներ: $A \vee L_1$-ից և $B \vee L_2$-ից արտածվում է $A \vee B \vee (L_1 + L_2)$ (+ռեզոլյուցիա) կամ $A \vee B \vee (L_1 - L_2)$ (-ռեզոլյուցիա):

Թուլացում՝ A գծային հավասարումների դիզյունկտներից արտածվում է $A \vee L$, որտեղ L-ը կամայական գծային հավասարում է:

Պարզեցում՝ $A \vee (0 = k)$-ից բխում է A-ն, որտեղ A-ն գծային հավասարումների դիզյունկտ է, իսկ $(k \neq 0)$:

K գծային հավասարումների դիզյունկտների բազմության հերքում R(lin)-ում դատարկ դիզյունկտի՝ $(k \neq 0)$-ի արտածումն է վերը նշված համակարգում:

f/ **E(lin) համակարգ**

Այժմ կներկայացնենք նոր արտածման համակարգ, հիմնված որոշիչ ԴՆՁ-ի վրա: Դիցուք տրված φ –ի համար $K = \{p_{i1}^{\sigma_1}, p_{i2}^{\sigma_2}, \ldots, p_{im}^{\sigma_m}\}$ –ը $\varphi - 1$ –որոշիչ կոնյունկտ է: K^0 -ով կնշանակենք հետևյալ հավասարումը՝ $\sum_{j=1}^{m} \alpha(p_{ij}^{\sigma_j}) = 0$, որտեղ

$$\alpha(p_{ij}^{\sigma_j}) = \begin{cases} x_{ij} & if\ \sigma_j = 1 \\ 1 - x_{ij} & if\ \sigma_j = 0 \end{cases}:$$

Եթե φ-ն n փոփոխականի ասույթային բանաձև է և $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \ldots, \boldsymbol{K_l}\}$-ն որոշիչ ԴՆՁ φ –ի համար, ապա որպես E(lin)–ի հենասույթներ կհամարենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{0} \vee \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{K_j^0}, & \boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{l} \end{cases}$$

Նշենք, որ եթե φ-ն նույնաբանություն է, ապա այս համակարգը անհամատեղելի է: Որպես արտածման կանոններ կհամարենք R(lin)-ի վերը սահմանված կանոնների երկակի կանոնները՝

Կրճատում՝ Դիցուք A-ն և B-ն գծային հավասարումների երկու կոնյունկտներ են (հնարավոր է դատարկ կոնյունկտներ), իսկ L_1-ը և L_2-ը երկու գծային հավասարումներ: A&L_1-ից և B&L_2-ից արտածվում է A&B&(L_1+L_2) (+ռեզոլյուցիա) կամ A&B&(L_1-L_2) (-ռեզոլյուցիա):

Թուլացում՝ A∨A&L գծային հավասարումների կոնյունկտների արտածվում է A, որտեղ L-ը կամայական գծային հավասարում է:

Պարզեցում՝ A&(*k*=*k*)-ից բխում է A-ն, որտեղ A-ն գծային հավասարումների կոնյունկտ է, իսկ *k*-ն որևէ ամբողջ թիվ է:

D գծային հավասարումների կոնյունկտների բազմության համատեղելիությունը **E(lin)**-ում դատարկ կոնյունկտի *k*=*k*-ի արտածումն է վերը նշված համակարգում:

Այստեղ ևս դժվար չէ նկատել, որ E*(lin)* և R*(lin)* երկակի համակարգեր են: Երբեմն մենք արտածման և հերքման վերաբերյալ կօգտագործենք միևնույն «արտածում» տերմինը:

Հետագայում դիտարկվում են նաև այս չորս /E,R,R(lin),E(lin)/ համակարգերին տեղադրման կանոնի որոշակի տարատեսակների ավելացմամբ ստացված որոշ իմաստով «առավել արդյունավետ» համակարգեր:

Այսպիսով, սույն աշխատանքում դիտարկված ասույթային հաշվի յուրաքանչյուր Φ արտածման համակարգ սահմանվում է հենասույթների որոշակի բազմությամբ /կամ նախապես սևեռված, կամ յուրաքանչյուր բանաձևի համար ուրույն ձևով ընտրվող/ և որոշակի արտածման կանոնների բազմությամբ: Որևէ Φ համակարգի արտածում (Φ-արտածում), ինչպես արդեն նշվել է, ընդունված է համարել այնպիսի բանաձևերի վերջավոր հաջորդականություն, որոնցից յուրաքանչյուրը կամ Φ համակարգի հենասույթ է, կամ ստացվում է նախորդներից Φ համակարգի որևէ արտածման կանոնի կիրառմամբ: Հայտնի է, որ ցանկացած **արտածմանը կարելի է համապատասխանեցնել նշագրված գրաֆ,** որի յուրաքանչյուր գագաթին վերագրված է արտածման որևէ բանաձև և մեկից դեպի մյուսը տարված է կող, եթե երկրորդին վերագրված բանաձևը ստացվել է առաջինին վերագրված բանաձևից (կարող է և այլ բանաձևերից միաժամանակ) որևէ արտածման կանոնի կիրառմամբ: Եթե որևէ բանաձև օգտագործվել է այլ մեկից ավելի բանաձևերի արտածման համար, ապա եթե նրա յուրաքայյուր օգտագործման համար գրաֆին ավելացնենք նոր գագաթ այդ բանաձևի նշագրումով, ապա համապատասխան գրաֆը իրենից ծառ կներկայացնի, որին համապատասխանող արտածումը կոչվում է **ծառատիպ արտածում:**

1.3. Արտածման բարդության բնութագրիչների սահմանումները

Հետևելով Ֆիլմուս և համահեղինակների [19] հոդվածի, տանք արտածման բարդության բնութագրիչների ֆորմալ սահմանումները:

Եթե $\boldsymbol{\Phi}$-ում արտածումը ներկայացնենք որպես տողերի հաջորդականություն, որտեղ ցանկացած տող իրենից կներկայացնի կամ հենասույթ կամ արտածվել է նախորդ տողերի վերջավոր բազմությունից որոշակի արտածման կանոնով, ապա $\boldsymbol{\Phi}$-կոնֆիգուռացիա կանվանենք այդպիսի տողերի որևէ ենթաբազմություն: $\boldsymbol{\Phi}$-կոնֆիգուռացիաների $\{\boldsymbol{D_0}, \boldsymbol{D_1}, \dots, \boldsymbol{D_r}\}$ հաջորդականությունը կանվանենք $\boldsymbol{\Phi}$*-ապացույց*, եթե $\boldsymbol{D_0} = \emptyset$ և բոլոր $\boldsymbol{t}$-երի $(\boldsymbol{1} \le \boldsymbol{t} \le \boldsymbol{r})$ համար $\boldsymbol{D_t}$-ն ստացվում է $\boldsymbol{D_{t-1}}$-ից հետևյալ քայլերով՝

Հենասույթի ավելացում. $\boldsymbol{D_t} = \boldsymbol{D_{t-1}} \cup \{\boldsymbol{L_A}\}$, որտեղ $\boldsymbol{L_A}$-ն հենասույթ է $\boldsymbol{\Phi}$-ում:

Արփածման կանոն. $\boldsymbol{D_t} = \boldsymbol{D_{t-1}} \cup \{\boldsymbol{L}\}$, որտեղ $\boldsymbol{L}$-ը ստածվել է $\boldsymbol{\Phi}$-ի արտածման կանոններից $\boldsymbol{D_{t-1}}$-ին պատկանող նախորդ տողերից:

Հեռացում. $\boldsymbol{D_t} \subset \boldsymbol{D_{t-1}}$:

$\boldsymbol{\varphi}$ նույնաբանության $\boldsymbol{\Phi}$-արտածում կանվանենք $\boldsymbol{\Phi}$-ում այնպիսի $\{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_r}\}$ $\boldsymbol{\Phi}$-*ապացույց*, որ $\boldsymbol{D_0} = \emptyset$ և $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{D_r}$, որտեղ $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$-ն $\boldsymbol{\varphi}$ բանաձևը ներկայացնող որոշակի տող է (կոնկրետ համակարգից կախված այն կարող է լինել կամ դատարկ կոնյունկտ, կամ դատարկ դիզյունկտ, կամ նոյն $\boldsymbol{\varphi}$-ն, կամ որևէ այլ «պատկեր»):

$|\boldsymbol{\varphi}|$-ով կնշանակենք $\boldsymbol{\varphi}$ բանաձևի երկարությունը (կամ նրա ինչ-որ ներկայացման երկարությունը, օրինակ, երբ ներկայացված է որպես գծային հավասարում որոշ համակարգում), սահմանված որպես բոլոր տրամաբանական գործողությունների /կամ այլ գործողությունների/ մուտքերի քանակը: Ակնհայտ է, որ բանաձևի ընդհանուր երկարությունը, որը ներառում է բոլոր փոփոխականների մուտքերը, տրամաբանական գործողությունները և փակագծերը, սահմանափակված է $|\boldsymbol{\varphi}|$-ից կախված գծային ֆունկցիայով:

Φ-արտածման ***երկարությունը (l-բարդություն)*** *հավասար է արտածման բոլոր տողերի երկարությունների գումարին:*

Φ-արտածման ***քայլերի քանակը (t-բարդություն)*** *հենասույթների և արտածման կանոնների կիրառումների քանակն է:*

Φ-արտածման ***ծավալը (s-բարդություն)*** *մաքսիմալ կոնֆիգուրացիայի ծավալն է, որտեղ կոնֆիգուրացիայի ծավալը նրա մեջ գտնվող տառերի մուտքերի քանակն է :*

Φ-արտածման ***լայնությունը (w-բարդություն)*** *հավասար է արտածման ամենաերկար տողի երկարությանը:*

Դիցուք, ունենք $\mathbf{\Phi}$ արտածման համակարգը և $\boldsymbol{\varphi}$ նույնաբանությունը: $\boldsymbol{t_{\varphi}^{\Phi}}(\boldsymbol{l_{\varphi}^{\Phi}},\boldsymbol{s_{\varphi}^{\Phi}},\boldsymbol{w_{\varphi}^{\Phi}})$-ով նշանակենք $\mathbf{\Phi}$ համակարգում $\boldsymbol{\varphi}$-ի բոլոր արտածումների $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{s},\boldsymbol{w})$-բարդությունների մինիմալ արժեքը:

Դիցուք, $\boldsymbol{\Phi_1}$-ն ու $\boldsymbol{\Phi_2}$-ը երկու տարբեր արտածման համակարգեր են: Հետևելով Կուկի և Ռեքաուի [17] հոդվածին, հիշեցնենք բազմանդամային հանգեցման գաղափարը:

Սահմանում 1.3.1: $\boldsymbol{\Phi_1}$-ը $\mathbf{p}-\mathbf{t}$-հանգեցվում է ($\mathbf{p}-\mathbf{l}$-հանգեցվում է) $\boldsymbol{\Phi_2}$-ին, եթե գոյություն ունի այնպիսի $\mathbf{p}()$ բազմանդամ, որ և $\boldsymbol{\Phi_1}$-ում, և $\boldsymbol{\Phi_2}$-ում արտածելի յուրաքանչյուր $\boldsymbol{\varphi}$ բանաձևի համար $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\varphi}}^{\Phi_2} \leq \mathbf{p}(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\varphi}}^{\Phi_1})$ ($\mathbf{l}_{\boldsymbol{\varphi}}^{\Phi_2} \leq \mathbf{p}(\mathbf{l}_{\boldsymbol{\varphi}}^{\Phi_1})$):

Սահմանում 1.3.2: $\boldsymbol{\Phi_1}$ և $\boldsymbol{\Phi_2}$ համակարգերը $\mathbf{p-t}$-համարժեք են ($\mathbf{p-l}$-համարժեք են), եթե $\boldsymbol{\Phi_1}$-ը $\mathbf{p-t}$-հանգեցվում է ($\mathbf{p-l}$-հանգեցվում է) $\boldsymbol{\Phi_2}$-ին և $\boldsymbol{\Phi_2}$-ը $\mathbf{p-t}$-հանգեցվում է ($\mathbf{p-l}$-հանգեցվում է) $\boldsymbol{\Phi_1}$-ին:

Սահմանում 1.3.3: $\boldsymbol{\Phi_1}$ համակարգը ունի ցուցչային արագացում $\boldsymbol{\Phi_2}$ համակարգի նկատմամբ, եթե $\boldsymbol{\Phi_2}$-ը $\mathbf{p-l}$-հանգեցվում է $\boldsymbol{\Phi_1}$-ին և գոյություն ունի $\boldsymbol{\varphi_n}$ բանաձևերի այնպիսի հաջորդականություն, որ $\mathbf{l}_{\varphi_n}^{\Phi_2} > \mathbf{2}^{\boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{l}_{\varphi_n}^{\Phi_1}\right)}$:

Բնական է, որ վերոհիշյալ երեք սահմանումներում տրված գաղափարները կարելի է սահմանել բոլոր չորս բարդության բնութագրիչների համար:

[6]-ում ապացուցված է E և R համակարգերի բազմանդամային համարժեքությունները և ըստ քայլերի և ըստ երկարությունների: Դժվար չէ համոզվել, որ E(lin) և R(lin) համակարգերի բազմանդամային համարժեքությունը կարելի է ապացուցել նմանատիպ մեթոդներով, հաշվի առնելով, որ այդ համակարգերի հենասույթները կառուցվում են համապատասխանաբար E և R համագարգերի հենասույթների հիման վրա վերոհիշյալ «թարգմանությամբ», իսկ մեկի արտածման կանոնները երկակի են մյուսի արտածման կանոններին:

1.4. Դժվար արտածելի բանաձևեր.

Երկարժեք տրամաբանության տարբեր համակարգերում արտածումների բարդությունների գնահատականների համեմատությունների համար կարևոր դեր են խաղում [6] – ում ներմուծված հետևյալ բանաձևերը՝

$$\boldsymbol{TTM_{n,m}} = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in E^n} \bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_{ij}^{\sigma_j}} \; (\boldsymbol{n \geq 1, 1 \leq m \leq 2^n - 1}),$$

որոնք նշված միջակայքի յուրաքանչյուր ֆիքսված $n \geq 1$-ի և m-ի համար արտահայտում են հետևյալ ճշմարիտ պնդումը. տրված n x m չափանի 0,1-մատրիցում կարելի է այնպես շրջել որոշ տողեր (փոխարինելով 0-ն 1-ի և հակառակը), որ կամայական սյուն պարունակի առնվազն մեկ հատ 1:

Ատենախոսությունում n-ի և m-ի որոշակի արժեքների համար տրվում է նաև այս պնդման ընդհանրացումը բազմարժեք տրամաբանության որոշակի տարատեսակների համար և գնահատվում են արտածումների բարդությունները համապատասխան բանաձևերի համար:

Սահմանում 1.4.1: $\boldsymbol{\varphi}$ բանաձևի որոշիչ կոնյունկտներում պարունակվող փոփոխականների նվազագույն քանակը անվանում ենք $\boldsymbol{\varphi}$-ի որոշիչ չափ (determinative size) և նշանակում ենք $\boldsymbol{ds(\varphi)}$-ով:

Ակնհայտ է, որ ցանկացած $\boldsymbol{\varphi}$ բանաձևի համար $\boldsymbol{ds(\varphi)} < |\boldsymbol{\varphi}|$, և որքան փոքր է այս մեծությունների տարբերությունը, այդքան ավելի «դժվար» արտածվող կարելի է համարել բանաձևը:

Սահմանում 1.4.2: $\boldsymbol{\varphi}$ նույնաբանությունը կանվանենք մինիմալ, եթե գոյություն չունի $\boldsymbol{\varphi}$-ից ավելի կարճ նույնաբանություն, որից $\boldsymbol{\varphi}$-ն ստացվում է որևէ տեղադրությամբ:

Սահմանում 1.4.3: Դիցուք $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n} \geq \mathbf{1})$ մինիմալ նույնաբանությունների հաջորդականություն է: Եթե որևէ $\boldsymbol{n_0}$-ի համար, գոյություն ունի այնպիսի $\mathbf{c}$ հաստատուն, որ $\forall \mathbf{n} \geq \boldsymbol{n_0}\ \boldsymbol{ds}(\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}})^{c} \leq |\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}}| \leq \boldsymbol{ds}(\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}})^{c+1}$, ապա $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n_0}}, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n_0+1}}, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n_0+2}}, \ldots$ բանաձևերը կոչվում են ***դժվար որոշելի***:

Ենթադրենք $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}} = \mathbf{TTM}_{\mathbf{n},\mathbf{2}^{n-1}}(\mathbf{n} \geq \mathbf{1})$: Հաշվի առնելով այն փաստը, որ $|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}}| = \boldsymbol{n}(\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1})\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$ և $\boldsymbol{ds}(\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}}) = \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$, դժվար չէ տեսնել, որ $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{3}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{4}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{5}}, \ldots$ բանաձևերը դժվար որոշելի են:

Արտածումների բարդության հետազոտման ոլորտում հայտնի են մի քանի կոմբինատոր խնդիրների ձևակերպումներին համապատասխանող ասույթային հաշվի բանաձևեր՝ Pigeon Hole Principle, Clique Colouring pair, Hool’s theorem, Ramsey theorem /տես, օրինակ [21], [24]/, Ցեյտինի նշագրված ցանցային գրաֆներից առաջացած բանաձևերը [27], որոնց համար ասույթային հաշվի մի շարք «թույլ» համակարգերում ստացված են արտածումների երկարությունների ստորին ցուցչային գնահատականներ: Այս բանաձևերը համարվում են դժվար արտածելի:

Օրինակ՝

Pigeon Hole Principle բանաձև:

Եթե ունենք n վանդակ և $m > n$ հատ աղավնի, և յուրաքանչյուր աղավնի գտնվում է վանդակներից որևէ մեկի մեջ, ապա գոյություն ունի առնվազն մեկ վանդակ, որի մեջ գտնվում են առնվազն 2 աղավնի:

Այս պնդումը արտահայտող ասույթային հաշվի բանաձևը նշանակենք PHP_m^n-ով, և այստեղ ցույց տանք $\neg PHP_m^n$-ի արտահայտումը ԿՆՁ-ի միջոցով՝

$$\neg PHP_m^n = \bigwedge_i \bigvee_j p_{ij} \wedge \bigwedge_k \bigvee_{i<j} (\neg p_{ik} \vee \neg p_{jk}),$$

որտեղ $p_{ij} = 1$, այն և միայն այն դեպքում, երբ i-րդ աղավնին գտնվում է j-րդ վանդակում, և $p_{ij} = 0$ հակառակ դեպքում:

Clique Colouring pair բանաձև:

Դիցուք ունենք n գագաթ ունեցող G գրաֆ և հայտնի է, որ գրաֆում գոյություն ունի m չափանի կլիկա, այդ դեպքում գրաֆի գագաթները չի կարելի ներկել $m-1$ գույներով:

Այս պնդումը կարելի է ներկայացնել ասույթային հաշվի հետևյալ բանաձևի միջոցով՝

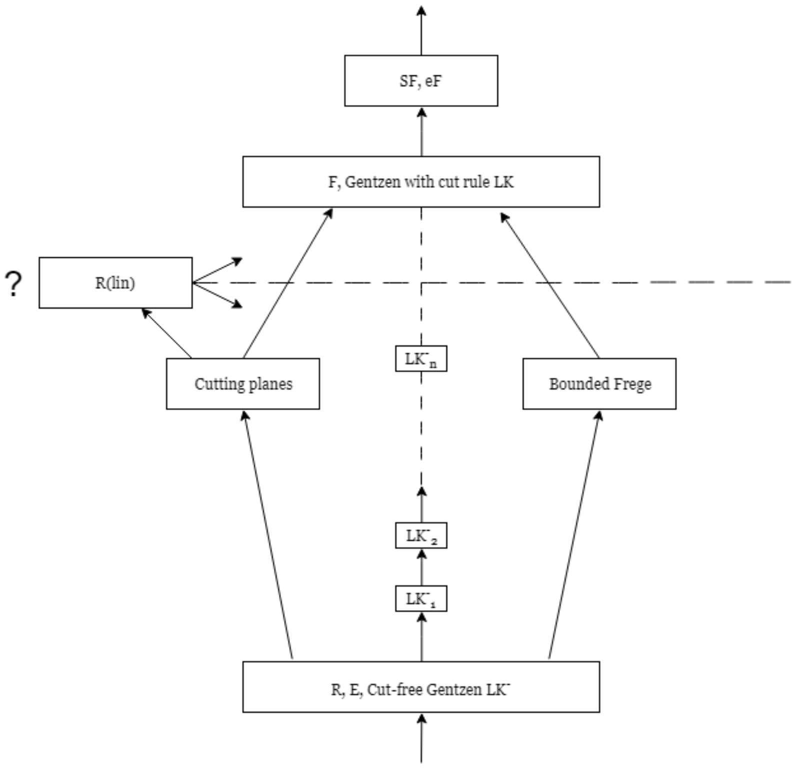
$$C_{n,m} = \left(\wedge_{i<j}\left(\neg p_{ij} \vee \neg r_{il} \vee \neg r_{jl}\right)\right) \wedge (\wedge_i \vee_l r_{il}) \wedge (\wedge_k \vee_i q_{ki}) \wedge (\wedge_i \wedge_{k<k'} (\neg q_{ki} \vee \neg q_{k'i})) \wedge \left(\wedge_i \wedge_{k \neq k'} \left(p_{ij} \vee \neg q_{ki} \vee \neg q_{k'j}\right)\right),$$

որտեղ $i, j \in \{1, \ldots, n\}, k, k' \in \{1, \ldots, m\}, l \in \{1, \ldots, m-1\}$: $p_{ij} = 1$, այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի կող i և j գագաթների միջև, և $p_{ij} = 0$ հակառակ դեպքում: $q_{ki} = 1$, այն և միայն այն դեպքում, երբ G գրաֆի i-րդ գագաթը հանդիսանում է m-կլիկայի k-րդ գագաթը, և $q_{ki} = 0$ հակառակ դեպքում: $r_{il} = 1$, այն և միայն այն դեպքում, երբ գրաֆի i-րդ գագաթը ներկված է l-րդ գույնով:

Դիտարկելով այդ բանաձևերը կարելի է նկատել, որ դրանցից ոչ մեկը դժվար որոշելի չեն, քանի որ դրանցից յուրաքանչյուրի որոշման չափը սահմանափակ է որոշակի հաստատունով: Այսպիսով դժվար որոշելիությունը միայն բավարար պայման է դժվար արտածելիության համար:

1.5. Ասույթային հաշվի համակարգերի բաղդատումը ըստ արդյունավետության

Հաջորդիվ ներկայացված է մասնագիտական գրականության տարբեր հոդվածներում ներկայացված ասույթային հաշվի համակարգերի ըստ արդյունավետության բաղդատման աղյուսակների որոշակի ընդհանրացված հատվածը, որն ճշգրտվել և համալրվել է սույն ատենախոսության արդյունքների հիման վրա:



Ուշադրություն դարձնենք, որ — — — — — — գծից ցածր գտնվում են այն համակարգերը, որոնց համար ապացուցվել են արտածման բնութագրիչների ստորին ցուցչային գնահատականները: Միևնույն վանդակներում տեղադրված են բազմանդամորեն համարժեք համակարգերը: Եթե որևէ վանդակից դեպի մյուսը տարված է սլաք, դա նշանակում է, որ երկրորդ վանդակի յուրաքանչյուր համակարգ ունի ցուցչային արագացում առաջին համակարգի յուրաքանչյուր համակարգի նկատմամբ:

ԳԼՈՒԽ 2. ՈՐՈՇ ՏԻՊԻ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ԱՐՏԱԾՄԱՆ ԲԱՐԴՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԸ R(lin) ԵՎ R(lin)+renaming ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ:

Այս գլխում ուսումնասիրվել են արտածումների բարդության բնութագրիչները R(lin) և R(lin)+renaming (R(lin)-ի որոշակի ընդլայնում) համակարգերում: Մենք կօգտագործենք առաջին գլխում տրված սահմանումները և նշանակումները դիտարկվող R և R(lin) համակարգերի համար:

Նախ հարկ է նշել, որ R ռեզոլուցիոն համակարգը սուպեր համակարգ չէ, քանի որ դեռ 1960-ական թվականներին, ռեզոլուցիոն համակարգում արտածման երկարության համար, Ցեյտինը ստացել է սուպեր-բազմանդամային ստորին գնահատական [27]: Չնայած այդ փաստին, ռեզոլուցիոն համակարգը համարվում է ավտոմատացված ապացույցների համար ամենաշատ օգտագործվող համակարգերից մեկը: Այդ իսկ պատճառով, բնական է, որ պետք է դիտարկել ռեզոլուցիոն համակարգի ընդլայնումներ, որոնք կլավացնեն արտածման բարդության բնութագրիչների գնահատականները: [25]-ում ցույց է տրվել, որ ռեզոլուցիոն համակարգում բազմաթիվ «դժվար» արտածելի նույնաբանություններ, ունեն բազմանդամային արտածումների բարդությունների գնահատականներ R(lin)-ում: Այս գլխում դիտարկվում են որոշ դասի բանաձևերի արտածումների բարդության բնութագրիչները R(lin) և R(lin)+renaming արտածման համակարգերում, ինչի արդյունքում ապացուցված է երկրորդ համակարգի էական առավելությունը առաջինի նկատմամբ: Ցույց է տրվել, որ գոյություն ունի նույնաբանությունների այնպիսի հաջորդականությթուն, որոնց արտածման բարդությունները գծային հավասարումների ռեզոլյուցիոն համակարգում՝ R(lin)-ում, ունեն ստորին ցուցչային գնահատական:Այսպիսով ապացուցվել է, որ R(lin) համակարգը նույնպես սուպեր համակարգ չէ: Մենք ավելացրել ենք վերանվանման կանոնը, որը թույլ է տալիս նշված նույնաբանությունները արտածել բազմանդամային ժամանակում: Ստացված արդյունքների համառոտ շարադրանքը տրվում է [39]-ում, իսկ ապացույցներով ամբողջական արդյունքները շարադրված են [8]-ում:

2.1. R(lin) համակարգի արտածումների բարդության գնահատականները որոշակի բանաձևերի համար:

Դիտարկենք գլուխ 1-ում սահմանված հետևյալ բանաձևերը.

$$TTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\in E^n} \bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} x_{ij}^{\sigma_j} \; (n \geq 1, 1 \leq m \leq 2^n - 1).$$

Դիցուք $\varphi_n = TTM_{n,2^n-1}$, իսկ K_n –ը $\neg\varphi_n$ –ին համապատասխանող ԿՆՁ –ն է R(lin)-ում: Ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2.1: $l_{K_n}^{R(lin)} \geq t_{K_n}^{R(lin)} \geq 2^{2^n-1}$ և $l_{\varphi_n}^{E(lin)} \geq t_{\varphi_n}^{E(lin)} \geq 2^{2^n-1}$:

Ապացույց: [6]-ում ապացուցված է, որ $TTM_{n,m}$-ի ոԴՆՁ-ն ունի ամենաքիչը 2^m կոնյունկտ, որոնցից յուրաքանչյուրը ունի m հատ լիտերալներ և $\neg TTM_{n,m}$-ի ԿՆՁ-ն ունի ամենաքիչը 2^m դիզյունկտ, որոնցից յուրաքանչյուրը ունի m հատ լիտերալներ, այսինքն եթե դիտարկենք $\varphi_n = TTM_{n,2^n-1}$, մենք կունենանք

$$t_{\varphi_n}^{E} > 2^{2^n-1},$$
$$l_{\varphi_n}^{E} > (2^n - 1)2^{2^n-1}.$$

և

$$t_{\varphi_n}^{R} > 2^{2^n-1},$$
$$l_{\varphi_n}^{R} > (2^n - 1)2^{2^n-1}.$$

Եթե կատարենք φ_n-ի ոԴՆՁ-ի /$\neg\varphi_n$-ի ԿՆՁ-ի/ «թարգմանությունը» գծային հավասարումների կոնյունկտների /դիզյունկտների/, ապա այն հենասույթների քանակը, որոնք պետք է օգտագործվեն E(lin)-արտածման /R(lin)-հերքման/ ժամանակ, հավասար է 2^{2^n-1}, հետևաբար

$$t_{\varphi_n}^{E(lin)} > 2^{2^n-1},$$
$$l_{\varphi_n}^{E(lin)} > (2^n - 1)2^{2^n-1}.$$

և

$$t_{\mathrm{K}_n}^{R(lin)} > 2^{2^n-1},$$

$$l_{\mathrm{K}_n}^{R(lin)} > (2^n-1)2^{2^n-1}.$$

Այսպիսով, հաշվի առնելով φ_n բանաձևերի երկարությունը, ապացուցվեց E(lin) և R(lin) համակարգերի ոչ սուպեր համակարգ հանդիսանալը:

Այժմ մենք կդիտարկենք $TTM_{n,m}$ բանաձևերով ներկայացված պնդման հերքումը /սխալ պնդում/, որը հնարավոր է ներկայացնել այլ ԿՆՁ-ի տեսքով, որի համար նույնպես ապացուցվում է R(lin) –ում հերքման բարդությունների սոպեռ բազմանդամային ստորին գնահատական:

Պնդում 2.1: Գոյություն ունի այնպիսի $n \times m$ չափի 0,1-մատրից ($n \geq 1,\ 1 \leq m \leq 2^n - 1$), որ յուրաքանչյուր տողերի շրջումից հետո, ամենաքիչը մի սյուն կպարունակի միայն 0-ներ:

Սա իր հերթին համարժեք է հետևյալ պնդմանը.

Պնդում 2.2: Գոյություն ունի այնպիսի $n \times m$ չափի 0,1-մատրից ($n \geq 1,\ 1 \leq m \leq 2^n - 1$), որ յուրաքանչյուր տողերի շրջումից հետո, ամենաքիչը մի սյան էլեմենտների գումարը հավասար կլինի 0-ի:

Այս պնդումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ բանաձևով.

$$\neg TTM'_{n,m} = \bigwedge_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in E^n} \bigvee_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha\left(x_{ij}^{\sigma_i}\right) = 0 \quad (n \geq 1,\ 1 \leq m \leq 2^n - 1),$$

որտեղ $\alpha\left(x_{ij}^{\sigma_i}\right) = \begin{cases} x_{ij}, & \sigma_i = 1 \\ 1 - x_{ij}, & \sigma_i = 0 \end{cases}$

Թեորեմ 2.2: $l_{\varphi'_n}^{R(lin)} \geq t_{\varphi'_n}^{R(lin)} \geq 2^{2^n-1}$, որտեղ $\neg\varphi'_n = \neg TTM'_{n,2^n-1}$

Ապացույց. $\neg TTM'_{n,2^n-1}$ -ի ներկայացումը արդեն գծային հավասարումների դիզյունկտների համակարգ է: Որոշ հանրահաշվական ձևափոխություններից հետո, մենք ստանում ենք պարզագույն հավասարումներ, որոնց հետագա հետազոտումը առավել տեսանելի դարձնելու նպատակով ցուցադրենք այն գծային հավասարումների համակարգը $\neg TTM'_{2,3}$-ի համար:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 0 & \vee \quad x_{12} + x_{22} = 0 & \vee \quad x_{13} + x_{23} = 0 \\ x_{11} + 1 - x_{21} = 0 & \vee \quad x_{12} + 1 - x_{22} = 0 & \vee \quad x_{13} + 1 - x_{23} = 0 \\ 1 - x_{11} + x_{21} = 0 & \vee \quad 1 - x_{12} + x_{22} = 0 & \vee \quad x_{13} + 1 - x_{23} = 0 \\ 1 - x_{11} + 1 - x_{21} = 0 & \vee \quad 1 - x_{12} + 1 - x_{22} = 0 & \vee \quad 1 - x_{13} + 1 - x_{23} = 0 \end{cases}$$

կամ

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 0 \vee x_{12} + x_{22} = 0 \vee x_{13} + x_{23} = 0 \\ x_{21} - x_{11} = 1 \vee x_{22} - x_{12} = 1 \vee x_{23} - x_{13} = 1 \\ x_{11} - x_{21} = 1 \vee x_{12} - x_{22} = 1 \vee x_{13} - x_{23} = 1 \\ x_{11} + x_{21} = 2 \vee x_{12} + x_{22} = 2 \vee x_{13} + x_{23} = 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Կարելի է նկատել, որ (1)-ը անիրագործելի է: (1)-ի հերքման համար, որպես R(lin) հենասույթներ պետք է վերցնենք (1) համակարգի գծային հավասարումներից յուրաքանչյուրը, և յուրաքանչյուր x_{ij} (i = 1,2; j = 1,2,3) փոփոխականի համար x_{ij} = 0 ∨ x_{ij} = 1 հենասույթները: Որպեսզի կառուցենք (1)-ի հերքումը, պետք է հենասույթներից ստանանք 0 = k հավասարումը, որոշակի $k \neq 0$-ի համար: Հետևաբար, հերքման որոշակի քայլերից հետո, պետք է ստանանք ավելի կարճ հավասարումների անիրագործելի համակարգ: Դժվար չէ նկատել, որ նշված հենասայթների վրա արտածման կանոնի յուրաքանչյուր կիրառումից հետո, ստանում ենք կա՛մ իրագործելի հավասարում, կա՛մ էլ ավելի երկար հավասարում: Հետևաբար, որպեսզի կառուցենք (1) գծային հավասարումների համակարգի հերքումը, պետք է օգտվենք [25]-ի Լեմմա 4.-ում ապացուցված հետևյալ պնդումից.

Պնդում 2.3: Դիցուք K-ն գծային հավասարումների դիզյունկտների համակարգ է և ենթադրենք z-ով նշանակված է որոշակի ամբողջաթիվ գործակիցներով գծային հավասարման գծային մասը: $E_1, \dots, E_\lambda$-ը գծային հավասարումների դիզյունկտներ են և կամայական $i \in [1, \lambda]$-ի համար, գոյություն ունի E_i-ի R(lin) արտածում ամենաշատը s քայլում $z = a_i$-ից և K-ից, որտեղ $a_1, \dots, a_\lambda$-ն իրարից տարբեր ամբողջ թվեր են: Այդ դեպքում, գոյություն ունի $\bigvee_{i=1}^{\lambda} E_i$-ի R(lin) արտածում K-ից և $(z = a_1) \vee \dots \vee (z = a_\lambda)$, որի քայլերի քանակը բազմանդամորեն կախված է s-ից և λ-ից:

Մասնավորապես, եթե R(lin) համակարգում կարող ենք ապացուցել որևէ սխալ պնդում K գծային հավասարումների համակարգից և $x_i = 0$ հավասարումից, ինչպես նաև K-ից և $x_i = 1$-ից, ապա այդ սխալ պնդումը կարող ենք նաև ապացուցել K-ից և $x_i = 0 \vee x_i = 1$ հենասույթից:

Այս պնդումը «թույլ է տալիս փոխարինել» K համակարգի x_i փոփոխականը 0-ով կամ 1-ով: Սակայն, որպեսզի կարողանանք ապացուցել հակասությունը (1)-ից, պետք է կատարենք փոխարինում առնվազն 3 (ընդհանուր դեպքում m) փոփոխականի համար:

Այս պնդումը ճիշտ է կամայական $n \geq 1$-ի և $1 \leq m \leq 2^n - 1$-ի համար, հետևաբար, եթե նշանակենք $\neg\varphi'_n$ -ով $\neg TTM'_{n,2^n-1}$ բանաձևերին համապատասխանող հավասարումների դիզյունքների համակարգերը, մենք կունենանք հետևյալ գնահատականները՝

$$l_{\varphi'_n}^{R(lin)} \geq t_{\varphi'_n}^{R(lin)} \geq 2^{2^n-1}: \qquad \square$$

Այսպիսով, ստացվում է, որ φ_n նույնաբանությունների երկու ներկայացումներն էլ որպես գծային հավասարումների դիզյունկտների համակարգ, ունեն արտածման բարդությունների ստորին ցուցչային գնահատականներ R(lin) համակարգում, հետևաբար, **R(lin) համակարգը սուպեր համակաարգ չէ :**

2.2. R(lin)+renaming համակարգի արտածումների բարդության գնահատականները որոշակի բանաձևերի համար:

Ներմուծենք տեղադրման կանոնի մի տարատեսակ՝ վերանվանման (renaming) կանոնը

$$\beta = \binom{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jk}}{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}},$$

համաձայն որի յուրաքանչյուր x_{im} փոփոխականը փոխարինվում է x_{jm} ($1 \leq m \leq k$) փոփոխականով: R(lin)+renaming-ով և E(lin)+renaming-ով նշանակված են *renaming* կանոնով համալրված համապատասխանաբար R(lin) և E(lin) համակարգերը: Ցույց կտանք, որ $\neg\varphi'_n = \neg TTM'_{n,2^n-1}$-ի հիման վրա կառուցված (1) գծային հավասարումների համակարգերը ունեն արտածման բարդությունների բազմանդամային վերին գնահատականներ R(lin)+renaming համակարգում:

Հետագա դիտարկումները պարզեցնելու համար ներմուծենք մի քանի կրճատ նշանակումներ: Յուրաքանչյուր $n \geq 1$ և $1 \leq j \leq 2^n - 1$ համար $\widetilde{x_j}$ -ով նշանակենք փոփոխականների հետևյալ հաջորդականությունը x_{1j} , x_{2j} , …, x_{nj} և ներմուծենք հետևյալ նշանակումները նշված վերանվանման կանոնների համար

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{x_1}, \widetilde{x_1}, \dots, \widetilde{x_1} \\ \widetilde{x_2}, \widetilde{x_3}, \dots, \widetilde{x_{2^n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\beta_j = \begin{pmatrix} \widetilde{x_j}, \widetilde{x_j}, \dots, \widetilde{x_j}, \widetilde{x_j}, \dots, \widetilde{x_j} \\ \widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \dots, \widetilde{x_{j-1}}, \widetilde{x_{j+1}}, \dots, \widetilde{x_{2^n-1}} \end{pmatrix} \qquad 2 \leq j \leq 2^n - 1$$

$$\vdots$$

$$\beta_{2^n-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{x_{2^n-1}}, \widetilde{x_{2^n-1}}, \dots, \widetilde{x_{2^n-1}} \\ \widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \dots, \widetilde{x_{2^n-2}} \end{pmatrix}$$

Տրված $\tilde{\sigma} = \{\sigma_i, \dots, \sigma_i\} \in E^n$, $1 \leq i \leq n$ -ի և $1 \leq j \leq 2^n - 1$ -ի համար $\neg\varphi_n = \neg TTM_{n,2^n-1}$ -ի $\sum_{i=1}^{m} \alpha(x_{ij}^{\sigma_i}) = 0$, կարելի է ներկայացնել հետևյալով՝

$$X_j^{\tilde{\sigma}}: x_{i_1 j} + x_{i_2 j} + \dots + x_{i_k j} - x_{i_{k+1} j} - \dots - x_{i_n j} = k,$$

որտեղ k $(0 \leq k \leq n)$ $\tilde{\sigma}$-ում 1-երի քանակն է: Յուրաքանչյուր π իրական թվի համար $(1 \leq \pi \leq 2^n - 1)$, $\tilde{\sigma}_\pi$-ով նշանակենք նրա 2-ական ներկայացումն է n հատ նիշերով: Այս դեպքում, φ'_n -ի համար ոչ իրագործելի հավաքածուն K_n գծային հավասարումների դիզյունկտների հետևյալ համակարգն է.

$$D_1 : X_1^{\tilde{\sigma}_0} \vee X_2^{\tilde{\sigma}_0} \vee \dots \vee X_{2^n-1}^{\tilde{\sigma}_0} ,$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$D_{2^n} : X_1^{\tilde{\sigma}_{2^n-1}} \vee X_2^{\tilde{\sigma}_{2^n-1}} \vee \dots \vee X_{2^n-1}^{\tilde{\sigma}_{2^n-1}} .$$

Թեորեմ 2.3: Գոյություն ունի այնպիսի $p()$ բազմանդամ, որ

$$t_{K_n}^{R(lin)+renaming} \leq l_{K_n}^{R(lin)+renaming} \leq p(|K_n|).$$
$$t_{\varphi_n}^{E(lin)+renaming} \leq l_{\varphi_n}^{E(lin)+renaming} \leq p(|\varphi_n|).$$

Ապացույց: K_n-ի հերքման առաջին $2^n - 1$ քայլերը հետևյալն են. կիրառելով β_π վերանվաման կանոնները D_π-ի վրա $(1 \leq \pi \leq 2^n - 1)$, ստանում ենք հետևյալ հավաքածուները՝

$$X_1^{\widetilde{\sigma_0}}, X_2^{\widetilde{\sigma_1}}, \ldots, X_{2^n-1}^{\widetilde{\sigma_{2^n-2}}} \quad \text{և} \quad D_{2^n} \quad (2)$$

Ապացուցման հետագա քայլերի միայն R(lin)-ի քայլերն են, որոնց հիմնավորման համար ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումները:

Լեմմա 2.1: Եթե A գծային հավասարումների դիզյունկտի R(lin)-հերքման քայլերի քանակը ամենաշատը s է, ապա ցանկացած B գծային հավասարումների դիզյունկտը արտածվում է R(lin)-ում $A \vee B$–ից s-ից և $|B|$-ից բազմանդամորեն կախված քայլերի քանակով:

Ապացույց: Իրոք, կրկնելով $A \vee B$-ի համար A-ից R(lin)-հերքման բոլոր քայլերը ինչ-որ հակասություն $(0 = k)$ արտածելու համար , մենք ստանում ենք $(0 = k) \vee B$-ն, և կիրառելով պարզեցման կանոնը, կստանանք B-ն:

Լեմմա 2.2: Տրված $l \geq 1$ և $c \geq 1$ -ի համար $A: 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_l = 2l + c$ հավասարումը ունի R(lin)-հերքում, $2^{O(l)}$ քայլերով:

Ապացույց: Կիրառելով «+ռեզոլուցիա» կանոնը $x_i = 0\ (x_i = 1)$-ի վրա $(1 \leq i \leq l)$ ստանում ենք $2x_i = 0\ (2x_i = 2)$: Կիրառելով «-ռեզոլուցիա» կանոնը A-ի վրա և օգտագործելով $2x_i = 0\ (2x_i = 2)$-ը, մենք ստանում ենք

$$A_0: 2x_2 + \cdots + 2x_l = 2l + c$$

$$(A_1: 2x_2 + \cdots + 2x_l = 2(l-1) + c)$$

Պնդում 2.3-ից հետևում է որ A-ից և $x_1 = 0 \vee x_1 = 1$-ից ստանում ենք $A_0 \vee A_1$:

Նման ձևով $A_0 \vee A_1$-ից և $x_2 = 0 \vee x_2 = 1$-ից ստանում ենք $A_{00} \vee A_{10} \vee A_{01} \vee A_{11}$, որտեղ $A_{00}(A_{10})$-ն ստացվում է կիրառելով «-ռեզոլուցիա» կանոնը $A_0(A_1)$-ի վրա և օգտագործելով $2x_2 = 0$, իսկ $A_{01}(A_{11})$-ը ստացվում է կիրառելով «-ռեզոլուցիա» կանոնը $A_0(A_1)$-ի վրա և օգտագործելով $2x_2 = 2$:

Կատարելով նման քայլեր բոլոր փոփոխականների համար, Լեմմա 2.2-ը ապացուցվում է:

Լեմմա 2.3: Տրված $n \geq 1$ և $0 \leq k \leq n$-ի համար,

$$x_1 + \cdots + x_k - x_{k+1} - \cdots - x_n = k$$
$$x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} + \cdots + x_n = n$$

հավասարումների հավաքածուն ունի R(lin)-հերքում, $2^{O(2^n)}$ քայլերով:

Ապացույց: Ապացույցը ստացվում է Լեմմա 2.2-ից, կիրառելով «+ռեզոլուցիա» կանոնը տրված հավաքածուի հավասարումների վրա:

Թեորեմի ապացույցը ավարտելու համար, պետք է կիրառենք «+ռեզոլուցիա» կանոնը յուրաքանչյուր $X_j^{\widetilde{\sigma_j}}$-ի վրա և օգտագործենք D_{2^n}-ի j-րդ հավասարումը և ապա վերևում ապացուցված 3 լեմմաները: Հաշվի առնելով որ $|K_n|$-ը $O(n2^n(2^n-1))$ է, թեորեմը ապացուցվում է R(lin)+renaming համակարգի համար: Հաշվի առնելով, որ վերոհիշյալ լեմմաների ապացուցման համար օգտագործված գործողությունները նույն են E(lin)+renaming համակարգում, թեորեմի պնդումը ճիշտ է նաև այս համակարգի համար:

Այսպիսով մենք ցույց տվեցինք, որ գոյություն ունի նույնաբանությունների այնպիսի հաջորդականություն, որոնք R(lin)-ում ունեն արտածումների բարդության բնութագրիչների ստորին ցուցչային գնահատական, սակայն ավելացնելով վերանվանման կանոնը R(lin)-ին, մենք ստանում ենք R(lin)+renaming արտածման համակարգը, որտեղ այդ նույնաբանությունները ունեն բազմանդամային վերին գնահատականներ:

Հետևություն. R(lin)+renaming համակարգը ունի ցուցչային արագացում R(lin)-ի նկատմամբ:

Հաջորդ գլխում ճշգրտվում է R(lin)+renaming համակարգի տեղը վերոհիշյալ բաղդատման աղյուսակում:

ԳԼՈՒԽ 3. ԱՍՈՒՅԹԱՅԻՆ ՀԱՇՎԻ ԴԱՍԱԿԱՆ ԵՎ ՈՉ ԴԱՍԱԿԱՆ ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԵՂԱԴՐՈՒԹՅԱՆ ԿԱՆՈՆՆԵՐՈՎ *E* ԵՎ *R* ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԱՐՏԱԾՄԱՆ ԲԱՐԴՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Արտածումների բարդության բաղադրիչների հետազոտումը սկսվել է դասական ասույթային հաշվի տրամաբանության համակարգերում, սակայն, սովորաբար իրական դատողությունները ունեն կառուցողական բնույթ, այդ իսկ պատճառով, արտածումների բարդության բնութագրիչների հետազոտումը կարևոր է նաև ինտուիցիոնիստական ասույթային հաշվի տրամաբանության՝ **IPL** համակարգերում և որոշ դեպքերում նաև մինիմալ ասույթային հաշվի տրամաբանության՝ **MPL** համակարգերում:

Այս գլխում ուսումնասիրվում են E և *R* տիպի համակարգերը դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համար, որոնք նշանակված են համապատասխանաբար *E, EI, EM* ու *R, RI, RM* և դրանց որոշակի ընդլայնումները տեղադրման կանոնի որոշակի տարատեսակներով: Այս գլխի արդյունքները շարադրված են [35]-ում:

3.1. Հիմնական համակարգերի սահմանումները.

Գլուխ 1-ում արդեն սահմանված են E և *R* համակարգերը, այժմ նախ կտանք RI և RM ռեզոլյուցիոն համակարգերի սահմանումները, ապա EI և EM կրճատման կանոնով համակարգերի սահմանումները: IPL-ի և MPL-ի համար [8]-ում ապացուցվել է, որ համապատասխանաբար EI և EM կրճատման կանոնով, RI և RM ռեզոլյուցիոն համակարգերը և այդ տրամաբանությունների մի շարք հայտնի համակարգեր /օրինակ I-Multi-succedent cut-free և M-Multi-succedent cut-free սեկվենցյալ համակարգերը/ բազմանդամորեն համարժեք են յուրաքանչյուր տրամաբանության համար: Մենք ենթադրում ենք, որ դասական տրամաբանության համար *R*-ի հիման վրա սահմանված “Cutting planes” և “Gentzen refutation” /տես, օրինակ, [24]/ համակարգերին նման համակարգեր նույնպես հնարավոր է կառուցել IPL-ի և MPL-ի համար, այդ իսկ պատճառով կարևոր ենք համարում RI և RM ու EI և EM համակարգերի և դրանց որոշակի ընդլայնումների ուսումնասիրությունները:

Քանի որ **ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանություններում նույնաբանություն հանդիսանալը որոշվում է համապատասխան համակարգում արտածելիության հիման վրա**, ապա դասական տրամաբանության համար տրված որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի սահմանումը չի գործում այս տրամաբանություններում:

[7]-ում դասական տրամաբանության համար նկարագրված է ալգորիթմ, որը յուրաքանչյուր նույնաբանության համար կառուցում է ոԴՆՁ-ը, հիմնվելով ռեզոլյուցիոն համակարգում այդ բանաձևի ժխտման հերքման հիման վրա: Հետևելով [8]-ին տանք ոԴՆՁ-ի կառուցման ալգորիթմը ինտուիցիոնիստական և մինիմալ ռեզոլյուցիոն համակարգերում հերքման հիման վրա:

Նախ օգտվելով [23]-ից վերհիշենք IPL-ի ռեզոլյուցիոն RI համակարգը:

Հենասույթները հետևյալ սեկվենտներն են՝ $p \longrightarrow p$, $\perp \longrightarrow p$:

Ռեզոլյուցիոն կանոնները հետևյալն են՝

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{(p \supset q) \longrightarrow r;\ \Sigma, p \longrightarrow \perp}{\Sigma \longrightarrow r}(1) \\ \dfrac{(p \supset q) \longrightarrow r;\ \Sigma, p \longrightarrow q}{\Sigma \longrightarrow r} \\ \dfrac{(p \supset q) \longrightarrow r;\ \Sigma \longrightarrow \perp}{\Sigma \longrightarrow r} \\ \dfrac{(p \supset \perp) \longrightarrow r;\ \Sigma, p \longrightarrow \perp}{\Sigma \longrightarrow r} \end{array}\right\}(\supset^-)$$

$$\frac{p \supset q \vee r;\ \Gamma \longrightarrow p;\ \Sigma, q \longrightarrow s^*;\ \Pi, r \longrightarrow s^{**}}{\Gamma, \Sigma, \Pi \longrightarrow s}(\vee^-)$$

$$\frac{p, q \longrightarrow r^*;\ \Gamma \longrightarrow p;\ \Sigma \longrightarrow q}{\Gamma, \Sigma \longrightarrow r^*} \quad (cut) \quad \frac{p \longrightarrow q;\ \Gamma \longrightarrow p}{\Gamma \longrightarrow q}$$

$$(2)\frac{\longrightarrow \perp}{\longrightarrow p}(\perp)$$

որտեղ կամայական p փոփոխականի համար p^* կարող է լինել p կամ $\perp$:

RM ռեզոլյուցիոն համակարգը MPL-ի համար սահմանվում է RI-ի նման՝ հեռացնելով (1) և (2) կանոնները [8]:

Դիցուք φ -ն որևէ բանաձև է, և $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ -ը այդ բանաձևի բոլոր փոփոխականների բազմությունն է, որոնց անվանում ենք ***հիմանական փոփոխականներ***: φ բանաձևի յուրաքանչյուր ոչ տարրական ենթաբանաձևին ասոցացնելով նոր փոփոխական, մենք կարող ենք կառուցել դիզյունկտների համակարգ, օգտվելով [23]-ում նկարագրված մեթոդից: Դիզյունկտները կարող են ներկայացվել հետևյալ սեկվենտների միջոցով՝

$$p \longrightarrow q \vee r;\ (p \supset q^*) \longrightarrow r;\ q_1, q_2, \dots, q_k \longrightarrow r^* (\diamond)$$

Դիցուք φ բանաձևի հետ ասոցացվել է s փոփոխականը: [23]-ում IPL-ի համար նկարագրված է NI /նորմալ արտածումների/ համակարգը և ցույց է տրված, որ $\longrightarrow s$ սեկվենտը արտածվում է RI-ում հենասույթներից և $(\diamond)$-ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ $\longrightarrow \varphi$ սեկվենտը արտածվում է NI համակարգում: Նույն պնդումը տեղի ունի նաև MPL-ում RM և NM համակարգերի համար, որտեղ NM համակարգը ստացվում է NI-ից՝ հեռացնելով $\frac{\Gamma \to \bot}{\Gamma \to A}$ կանոնը: Կամայական φ բանաձևի համար, $(\diamond)$ -ի յուրաքանչյուր դիզյունկտ կոչվում է ***հավելյալ հենասույթ***: Հենասույթը՝ կլինի դա հավելյալ թե ոչ, անվանում ենք ***հիմնական հենասույթ***, եթե այն պարունակում է առնվազն մեկ հիմնական փոփոխական:

Հետևելով [6]-ին, օգտվենք ենթաբանաձևի /փոփոխականի/ դրական և բացասական մուտքի գաղափարից: Եթե p փոփոխականը ունի բացասական մուտք որևէ ենթաբանաձևում, որը իր հերթին ունի բացասական մուտք բանաձևում, ապա ասում ենք, որ p փոփոխականը ունի **կրկնակի բացասական** մուտք բանաձևում:

Դժվար չէ նկատել, որ ցանկացած փոփոխականի մուտքը հենասույթում կամ RI-ի արտածման կանոններում, կա՛մ դրական է, կա՛մ բացասական, կա՛մ կրկնակի բացասական: Քանի որ $p \backsim \overline{\overline{p}}$-ն արտածելի չէ IPL-ում և MPL-ում, ապա այս երկու տրամաբնություններում φ-որոշիչ կոնյունկտի համար որպես լիտերալներ կարող են օգտագործվել ոչ միայն փոփոխականը և փոփոխականի ժխտումը, այլ նաև փոփոխականի կրկնակի ժխտումը:

Բնական է, որ ցանկացած p փոփոխականի համար, ոչ միայն p և $\overline{p}$-ն են միմյանց հակադիր, այլ նաև $\overline{p}$ և $\overline{\overline{p}}$-ը: Դժվար չէ նկատել, որ RI արտածման կանոններով ռեգուլյուցիային են ենթարկվում և p ու $\overline{p}$ և $\overline{p}$ ու $\overline{\overline{p}}$ զույգերը:

Պետք է նկատել, որ ցանկացած φ-որոշիչ կոնյունկտ չի կարող պարունակել հակադիր լիտերալներ:

IPL-ի և MPL-ի համար φ-որոշիչ ԴՆՁ-ը / $\varphi - I$-որոշիչ ԴՆՁ IPL-ի համար, $\varphi - M$-որոշիչ ԴՆՁ MPL-ի համար/ կարելի է կառուցել հետևյալ ալգորիթմով՝

Ենթադրենք W-ն $\longrightarrow s$ սեկվենտի արտածումն է RI (RM)-ում:

1. $\longrightarrow s$-ի W արտածումը ձևափոխենք $\mathrm{W^{tree}}$ ծառատիպ արտածման: Դիցուք k-ն ծառում ճանապարհների քանակն է

2. Յուրաքանչյուր $i\ (1 \leq i \leq k)$ ճանապարհի համար, որը կապում է երկու գագաթներ, որոնցից մեկը համապատասխանում է հիմնական հենասույթին և մյուսը $\longrightarrow s$-ին. կառուցում ենք K_i' կոնյունկտը, որպես բոլոր այն հիմնական փոփոխականների /նրանց ժխտման, նրանց կրկնակի ժխտման/ բազմություն, որոնք ունեն դրական /բացասական, կրկնակի բացասական/ մուտք այդ ճանապարհի սեկվենտներում:

Այնուհետև, վերցնում ենք $\widetilde{K_\iota}$ կոնյունկտը, որը պարունակում է K_i'-ի բոլոր լիտերալների ժխտումները, և փոխարինելով $\overline{\overline{\overline{p}}}$ տիպի լիտերալները $\overline{p}$-ով, ստանում ենք K_i որոշիչ կոնյունկտը:

$D = \{K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_t}\}\ (t \leq k)$ ԴՆՁ-ը, որը կազմված է վերևում նկարագրված ալգորիթմով ստացվող կոնյունկտներից, կոչվում է $\varphi - I$-որոշիչ ԴՆՁ RI-արտածման համար /$\varphi - M$-որոշիչ ԴՆՁ RM-արտածման համար /:

Նկատենք, որ միայն ժխտումով կամ կրկնակի ժխտումով փոփոխականներն են լիտերալներ I-որոշիչ կոնյունկտների համար / $p \supset \perp$ և $(p \supset \perp) \supset \perp$ M-որոշիչ կոնյունկտների համար /:

Գլուխ 1-ում սահմանված դասական տրամաբանության E համակարգի նման համակարգեր կարելի է սահմանել նաև IPL-ի և MPL-ի համար: Այդ համակարգերը նշանակենք EI-ով IPL-ում և EM-ով MPL-ում:

Որպես հենասույթներ կարող են օգտագործվել I-որոշիչ ԴՆՁ-ի /M-որոշիչ ԴՆՁ-ի / յուրաքանչյուրI-որոշիչ /M-որոշիչ / կոնյունկտ:

EI /EM/ համակարգի կրճատման կանոնը հետևյալն է՝

$$\frac{K' \cup \overline{\overline{p}\,,} K'' \cup \overline{p}}{K' \cup K''} I_\epsilon - \text{կանոն}$$

$$\left(\frac{K' \cup (p \supset\perp) \supset\perp,\ K'' \cup (p \supset\perp)}{K' \cup K''} M_\epsilon - \text{կանոն}\right),$$

որտեղ K'-ը և K''-ը կոնյունկտներ են, և p-ն փոփոխական:

Յուրաքանչյուր նշված տրամաբանությունների համար, ***ընդհանրացված լիտերալ*** ասելով կհասկանանք, լիտերալում փոփոխականի փոխարինման արդյունքը կամայական փոփոխականների դիզյունկցիայով: ***Ընդհանրացված կոնյունկտ*** կանվանենք լիտերալների և /կամ/ ընդհանրացված լիտերալների բազմությունը:

Կանյունկտների C բազմության համար, որոնցից առնվազն մեկը պարունակում է p փոփոխականը, և լիտերալների դիզյունկցիա հանդիսացող A բանաձևի համար ներմուծված է տեղադրման հետևյալ կանոնը՝

$$\frac{C}{S(C)_p^A}$$

որտեղ $S(C)_p^A$-ով նշանակված է C-ում p-ի փոխարեն ամենուրեք A բանաձևի տեղադրման արդյունքը: Ներմուծված է նաև կրճատման կանոնի ընդհանրացումը՝

$$\frac{C_1\ \cup\ \{A\} C_2\ \cup\ \{\bar{A}\}}{C_1\ \cup\ C_2},$$

որտեղ A-ն կամ լիտերալ է, կամ արտածման որևէ քայլում տեղադրված բանաձև:

Տեղադրման կանոնով համալրված E (EI, EM) համակարգը նշանակված է $\boldsymbol{SEC}$ ($\boldsymbol{SEI}$, $\boldsymbol{SEM}$)-ով: Եթե որևէ սևեռված l-ի համար տեղադրվող բանաձևերի տրամաբանական կապերի քանակը սահմանափակված է l-ով, ապա համապատասխան համակարգը նշանակված է $\boldsymbol{S_l EC}$ ($\boldsymbol{S_l EI}$, $\boldsymbol{S_l EM}$)-ով:

Օգտագործում ենք նաև հայտնի Ֆրեգեի $\boldsymbol{\mathcal{F}C}$ համակարգերը դասական տրամաբանության համար և $\boldsymbol{\mathcal{F}I}$ ($\boldsymbol{\mathcal{F}M}$) համակարգերը IPL (MPL) համար, որոնք սահմանված են [8]-ում, հենցենյան տիպի սեկվենցյալ $\boldsymbol{LK}$ համակարգը, սահմանված դասական տրամաբանության համար [20]-ում: LK համակարգի հենասույթները և արտածման կանոնները ներկայացրել ենք գլուխ 1-ում:

LK^--ով նշանակված է LK համակարգը առանց հատույթի կանոնի, և LK_l-ով նշանակված է LK համակարգը, որտեղ հատույթի ենթարկվող բանաձևում տրամաբանական կապերի քանակը սահմանափակված է l-ով:

Նմանատիպ համակարգեր՝ LI (LI^-, LI_l)-ի IPL-ի համար, LM (LM^-, LM_l)-ի MPL-ի համար, սահմանված են [18]-ում:

Նկատենք, որ E, EI, EM համակարգերի արտածման կանոնները հատույթի կանոններ են, որոնց հատույթի ենթարկվող բանաձևերը լիտեռալներ են՝ բանաձևեր առանց տրամաբանական կապերի /բացառությամբ մեկ ժխտման/:

3.2. LK^- *և E համակարգերի փոխհարաբերությունները.*

Այժմ տանք որոշակի օժանդակ հասկացություններ, պնդումներ և մեկ ալգորիթմ, որով կառուցվում է φ-որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևը՝ հիմնված φ նույնաբանության LK^- արտածման հիման վրա:

Տրված $C = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ և $C' = \{K'_1, K'_2, \dots, K'_m\}$ կոնյունկտների բազմությունների համար, $C \times C'$-ով նշանակում ենք հետևյալ կոնյունկտների զույգը՝ $\{K_i \cup K'_j \,/\, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$: Տրված φ բանաձևի համար, նշանակենք $(\varphi)1$-ով /$(\varphi)0$-ով/ բոլոր $\varphi - 1$-որոշիչ /$\varphi - 0$-որոշիչ/ կոնյունկտների բազմությունը:

Ակնհայտ է, որ որոշիչ կոնյունկտների կառուցման համար, կարող ենք օգտագործել հետևյալ ***0-որոշիչների* կամ *1-որոշիչների փոխկապակցվածությունները***՝

$$(\neg\varphi)0 = (\varphi)1 \qquad (\neg\varphi)1 = (\varphi)0$$
$$(\varphi \wedge \psi)0 = (\varphi)0 \cup (\psi)0 \qquad (\varphi \wedge \psi)1 = (\varphi)1 \times (\psi)0$$
$$(\varphi \vee \psi)0 = (\varphi)0 \times (\psi)0 \qquad (\varphi \vee \psi)1 = (\varphi)1 \cup (\psi)1$$
$$(\varphi \supset \psi)0 = (\varphi)1 \times (\psi)0 \qquad (\varphi \supset \psi)1 = (\varphi)0 \cup (\psi)1$$

Ստորև ներկայացնենք φ նույնաբանության φ-որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևը կառուցելու ալգորիթմը հիմնված LK^{-} արտածման վրա.

Դիցուք W-նφնույնաբանության ծառատիպ LK^{-}արտածումն է, որը ունի մինիմալ երկարություն: Հենասույթում յուրաքանչյուր փոփոխականի համար, մենք կարող ենք քայլ առ քայլ ցույց տալ φ-ի բոլոր ենթաբանաձևերը /փոփոխականից մինչը φ բանաձևը/, որոնք օգտագործվել են այդ փոփոխականից սկսած $\varphi -$ի արտածման համար: Յուրաքանչյուր քայլում համապատասխան ենթաբանաձևի համար կառուցում ենք որոշիչ կոնյունկտների բազմությունը, օգտագործելով *0-որոշիչ փոխկապակցվածությունները /ձախ սյան/,* եթե ենթաբանաձևը ունի բացասական մուտք φ բանաձևում և *1-որոշիչ փոխկապակցվածությունները /աջ սյան/,* եթե՝ դրական: Ոչ դասական տրամաբանությունների համար, բոլոր լիտերալները պետք է վերցնել հավելյալ ժխտումով այն ենթաբանաձևերի համար, որոնք ունեն կրկնակի բացասական մուտք:

Նկատենք, որ

1. այս ալգորիթմով կառուցված ոԴՆՁ-ի հիման վրա E տիպի արտածման երկարությունը չի կարող լինել ավելի մեծ, քան LK^{-} արտածման երկարությունը

2. եթե ունենք LK արտածում, որի հատույթի ենթարկված բանաձևերը որոշ փոփոխականների դիզյունկցիաներ են, ապա նկարագրված ալգորիթմի միջոցով SE տիպի համակարգերում ստանում ենք ընդհանրացված կոնյունկտներ, որոնք պարունակում են ոչ միայն փոփոխականները որպես լիտերալներ, այլ նաև հատույթի ենթարկված բանաձևերը, որպես ընդհանրացված լիտերալներ:

3. Այսպիսով ապացուցվել է հետևյալը

Պնդում 3.2.1: LK^{-} / LK_l/ համակարգերի ծառատիպ արտածումները բազմանդամորեն հանգեցվում են E /S_lEC/ ծառատիպ արտածումներին:

Դիցուք Γ-ն բանաձևերի հաջորդականություն է: $\neg\neg\Gamma$-ով նշանակենք Γ-ի յուրաքանչյուր բանաձևի կրկնակի ժխտումից ստացված բանաձևերի հաջորդականությունը: Մինիմալ տրամաբանությունում $\neg\varphi\,(\neg\neg\varphi)$-ն կարող է ներկայացվել հետևյալ կերպ՝ $\varphi \supset\perp \left(((\varphi \supset\perp) \supset\perp)\right)$: $\boldsymbol{\varphi o}/\varphi$ բանաձև o-ներակայացում/ բանաձևը ստացվում է φ բանաձևից, նրա յուրաքանչյուր $\neg\gamma$ տեսքի ենթաբանաձևի փոխարինմամբ $\gamma \supset \perp$ -ով: **Γ**o -ով նշանակենք Γ -ի յուրաքանչյուր բանաձևի o -ներակայացման բանաձևերի հաջորդականությունը:

Հանրահայտ է հետևալ պնդումը

Պնդում 3.2.2: Եթե LK համակարգում $\Gamma \longrightarrow \Delta$ սեկվենտը արտածելի է, ապա $\neg\neg\Gamma \longrightarrow \neg\neg\Delta$ /$\Gamma o \Rightarrow \Delta o$/ սեկվենտը արտածելի է LI /LM/ համակարգում:

LI-ի համար ապացույցը տրված է [20]-ում, իսկ LM-ի ապացույցը կարելի է տալ նույն եղանակով, կրկնելով հիշատակված ապացույցը LM-ի արտածման կանոնների համար, որոնք հանդիսանում են LI-ի արտածման կանոնները միայն մեկի որոշակի սահմանափակմամբ:

Հետևանք: LI /LM/ համակարգի ծառատիպ արտածման հիման վրա վերոհիշյալ ալգորիթմով կկառուցվի նշված 1. կետին բավարարող ծառատիպ արտածում EI /EM/ համակարգում, ինչպես նաև LI_l / LM_l/ համակարգի ծառատիպ արտածման հիման վրա վերոհիշյալ ալգորիթմով կկառուցվի նշված 1. և 2. կետերին բավարարող ծառատիպ արտածում S_lEI / S_lEM/ համակարգում:

3.3. Հիմնական արդյունքները

Նախ տանք մի շարք օժանդակ պնդումներ:

Noriko Arai կողմից **([2]-ի թեորեմ 1-ում)** ապացուցված է հետևյալը

Պնդում 3.3.1: Ցանկացած $l \geq 1$ -ի և մեծ m -ի համար, գոյություն ունի m երկարությամբ $\Gamma \longrightarrow \Delta$ սեկվենտ, այնպիսին, որ

1. $\Gamma \longrightarrow \Delta$ սեկվենտը ունի $O(m^2)$ երարության ծառատիպ արտածում LK_l-ում
2. $\Gamma \longrightarrow \Delta$-ի կամայական ծառատիպ LK_{l-1} արտածում ունի առնվազն $2^{\sqrt{m}/l}$ հատ սեկվենտ:

Դիցուք c_i^j $(i, j = 1,2, \ldots)$ ասույթային հաշվի փոփոխականներ են և $k = l + 1$:

$$G_i = \bigvee_{h=1}^{k} c_i^h, \qquad F_i = \bigwedge_{h=1}^{i} G_h,$$

$$A_1^j = c_1^j, \qquad A_{i+1}^j = F_i \supset c_{i+1}^j:$$

Պնդումը ապացուցելու համար օգտագործվում է հետևյալ սեկվենտը՝

$$\bigvee_{h=1}^{k} A_1^h, \dots, \bigvee_{h=1}^{k} A_{n-1}^h, \bigvee_{h=1}^{2} A_n^h \longrightarrow c_n^1, c_n^2:$$

Նկատենք, որ ցանկացած $l \geq 1$ -ի համար, հատույթի կանոնին ենթարկվող բանաձևերը ամենաշատը $l+1$ հատ փոփոխականների դիզյունկցիաներ են: Ավելին, յուրաքանչյուր փոփոխական պատկանում է միայն մեկ դիզյունկտի:

Պնդում 3.3.2: Ցանկացած $l \geq 1$-ի համար, S_lEC և LK_l /S_lEI և LI_l, S_lEM և LM_l/ համակարգերը բազմանդամորեն համարժեք են ծառատիպ արտածումների համար:

Ապացույց: [7]-ում ապացուցվել է, որ LK^- և E համակարգերը բազմանդամորեն համարժեք են ծառատիպ տեսքով արտածումների համար: Դժվար չէ նկատել, որ նման դատողություններ կատարելով, կարող ենք ստանալ, որ LK_l և S_lEC նույնպես բազմանդամորեն համարժեք են: Իսկապես, պետք է օգտագործենք [7]-ում տրված ալգորիթմը ոչ միայն որոշիչ կոնյունկտների համար, այլ նաև ընդհանրացված կոնյունկտների համար, որոնք ստացվել են որոշիչ կոնյունկտներից՝ կիրառելով տեղադրման կանոնը, և հետո կրճատման

$$\frac{C_1 \cup \{A\} \qquad C_2 \cup \{\bar{A}\}}{C_1 \cup C_2}$$

կանոնը փոխարինվում է հատույթի հետևյալ կանոնով

$$\frac{\longrightarrow C_1, A \qquad A \longrightarrow C_2}{\longrightarrow C_1, C_2}:$$

Այստեղ շատ կարևոր է այն փաստը, որ յուրաքանչյուր փոփոխական ունի մուտք ամենաշատը մեկ հատույթի բանաձևում /տեղադրման արդյունքում ստացված բանաձևում/: Ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համակարգերում արդյունքները ստացվում են նույնատիպ եղանակով՝ օգտվելով [8]-ում նկարագրված ալգորիթմից: Հակառակ հանգեցումը փաստում է.

Պնդում 3.3.3: LK (LI, LM) սեկվենցիալ համակարգը բազմանդամորեն համարժեք է Ֆրեգեի $\mathcal{FC}$ $(\mathcal{FI}, \mathcal{FM})$ համակարգին:

LK -ի և $\mathcal{FC}$ -ի բազմանդամորեն համարժեքության ապացույցը հանրահայտ եղանակով տրված է [24]-ում, իսկ ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանության համակարգերի համար՝ [8]-ում:

Թեորեմ 3.1: 1) $\forall l \geq 0$ -ի համար $S_{l+1}EC$ ($S_{l+1}EI, S_{l+1}EM$) համակարգը ունի ցուցչային արագացում S_lEC (S_lEI, S_lEM) համակարգի նկատմամբ, եթե դիտարկվում են միայն ծառատիպ արտածումները:

2) SEC (SEI , SEM) համակարգը բազմանդամորեն համարժեք է Ֆրեգեի $\mathcal{F}C$ ($\mathcal{F}I, \mathcal{F}M$) համակարգին:

Ապացույցը հետևում է պնդումներ 3.3.1 - 3.3.3.-ից: □

Հաշվի առնելով E և R համակարգերի բազմանդամային համարժեքությունը և երկակիությունը, նույնատիպ եղանակով կառուցվում են SRC (SRI, SRM) և S_lRC (S_lRI, S_lRM) համակարգերը, որոնց համար տեղի ունեն վերոհիշյալ երկու պնդումները / **Պնդում 3.3.1. և Թեորեմ** ***3.1.*** */*:

Այսպիսով, նշված տրամաբանություններից յուրաքանչյուրի համար Ֆրեգեի և E ու R համակարգերի միջև ***կառուցված են համակարգերի անվերջ բազմություններ, որոնցից յուրաքանչյուր հաջորդը էապես ավելի արդյունավետ է, քան նախորդը:***

Թեորեմ 3.2: ***R(lin)+renaming*** համակարգի արդյունավետությունը Ֆրեգեի համակարգի արդյունավետությունից ցածր չէ:

Ապացույցը բխում է հետևյալ պնդումներից՝

ա/ ***R*** համակարգը բազմանդամորեն հանգեցվում է ***R(lin)*** համակարգին**,** հետևաբար ***R+renaming*** համակարգը բազմանդամորեն հանգեցվում է ***R(lin)+renaming*** համակարգին,

բ/ ***R+տեղադրություն*** համակարգը բազմանդամորեն համարժեք է Ֆրեգեի համակարգին,

գ/ **տեղադրություն կանոնով** արտածումները կարելի է ոչ ավելին, քան երկարության բազմանդամային աճի, փոխարինել **renaming կանոնով** /տես [5]/:

Այսպիսով, ***R(lin)+renaming*** համակարգը ասույթային հաշվի համակարգերի բաղդատման աղյուսակում չի կարող գտնվել Ֆրեգեի համակարգերից ցածր մակարդակում:

ԳԼՈՒԽ 4. ՈՐՈՇԱԿԻ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՐՏԱԾՈՒՄՆԵՐԻ ՔԱՅԼԵՐԻ ՔԱՆԱԿԻ ՍՏՈՐԻՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԸ ՖՐԵԳԵԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ

Ինչպես արդեն նշվել է Ֆրեգեի համակարգերում արտածման բարդությունների տրիվիալ ցուցչային վերին գնահատականների հետ մեկտեղ n երկարության նույնաբանությունների համար ստացված էին միայն $\Omega(n^2)$ գնահատական արտածման երկարության համար և $\Omega(n)$ գնահատական արտածումների քայլերի համար (տես, օրինակ [24]): 2014 թվականին An. Chubaryan, A.Mnatsakanyan [15] հոդվածում ապացուցվեց, որ գոյություն ունի φ_n նույնաբանությունների այնպիսի հաջորդականություն, որոնց արտածման համար Ֆրեգեի **որոշակի** համակարգում անհրաժեշտ են առնվազն $|\varphi_n|\sqrt{\frac{|\varphi_n|}{\log_2{}^3(|\varphi_n|)}}$ կարգի քայլեր: Ինչպես արդեն նշվել է Ֆրեգեի բոլոր համակարգերը բազմանդամորեն համարժեք են, սակայն որոշակի համակարգի համար ստացված այսպիսի «նուրբ» աճը հնարավոր չէ տարածել այլ համակարգերի համար բազմանդամային ձևափոխությամբ: Այս գլխում նմանատիպ արդյունք ուղղակիորեն ապացուցվում է Ֆրեգեի **կամայական** համակարգի համար: Այս գլխի արդյունքները ընդգրկված են [41],[42] հոդվածներում:

4.1. Նախնական գաղափարներ և օժանդակ պնդումներ

Հիմնական արդյունքն ապացուցելու համար հիշեցնենք մի շարք գաղափարներ:

Նախ հիշեցնենք [7]-ում ներմուծված **էական ենթաբանաձևի** գաղափարը:

F բանաձևի բոլոր ոչ տարրական ենթաբանաձևերի բազմությունը նշանակենք $Sf(F)$-ով:

Ցանկացած F բանաձևի, ցանկացած $\varphi \in Sf(F)$ ենթաբանաձևի և ցանկացած p փոփոխականի համար F_φ^p-ով նշանակենք F-ում ամենուրեք φ ենթաբանաձևերը p-ով փոխարինելու արդյունքը: Եթե $\varphi \in Sf(F)$, ապա F_φ^p համնկնում է F-ի հետ:

$Var(F)$-ով նշանակենք F բանաձևի բոլոր փոփոխականների բազմությունը:

Սահմանում 4.1.1: Դիցուք F բանաձևը նույնաբանություն է, $p \notin Var(F)$ որևէ փոփոխական է և $\varphi \in Sf(F)$: Կասենք, որ φ-ն էական ենթաբանաձև է F-ում, եթե F_{φ}^{p}-ը նույնաբանություն չէ:

$Essf(F)$-ով նշանակենք F նույնաբանության բոլոր **էական ենթաբանաձևերի** բազմությունը:

Եթե F-ը մինիմալ նույնաբանություն է, այսինքն չի հանդիսանում տեղադրության արդյունք որևէ այլ ավելի կարճ նույնաբանությունից, ապա $Essf(F) = Sf(F)$:

Ինչպես արդեն նշվել է, Ֆրեգեի յուրաքանչյուր $\mathcal{F}$ համակարգը սահմանվում է վերջավոր քանակությամբ $\frac{A_1 A_2 \dots A_m}{B}$ $(m \geq 0)$ արտածման կանոններով (առանց նախադրյալներ՝ $m = 0$ դեպքում, արտածման կանոնները հենասույթների սխեմաներ են):

[7]-ում ապացուցված է հետևյալ պնդումը՝

Պնդում 4.1.1: Եթե F-ը մինիմալ նույնաբանություն է և $\varphi \in Essf(F)$, ապա F բանաձևի յուրաքանչյուր $\mathcal{F}$-արտածման համար φ ենթաբանաձևը էական է արտածման մեջ օգտագործված առնվազն մեկ հենասույթում կամ օգտագործված $\frac{A_1 A_2 \dots A_m}{B}$ արտածման կանոնին համապատասխանող $A_1 \supset (A_2 \supset (\dots (A_m \supset B) \dots))$ բանաձևում**:**

Հետագայում $A_1 \supset (A_2 \supset (\dots (A_m \supset B) \dots))$ բանաձևի յուրաքանչյուր $A_i \supset (\dots (A_m \supset B) \dots)$ $/2 \leq i \leq m/$ կանվանենք ***աջ i–հարված:***

Սահմանում 4.1.2: $\mathcal{F}$ համակարգի արտածման կանոնների նախադրյալների մեծագույն քանակը անվանենք **$\mathcal{F}$ համակարգի կանոնների խորություն (inference depth)** և նշանակենք id($\mathcal{F}$)–ով:

Որևէ $\mathcal{F}$ համակարգի արտածում ($\mathcal{F}$-արտածում), ինչպես արդեն նշվել է, ընդունված է համարել այնպիսի բանաձևերի վերջավոր հաջորդականություն, որոնցից յուրաքանչյուրը կամ $\mathcal{F}$ համակարգի հենասույթ է, կամ ստացվում է նախորդներից $\mathcal{F}$ համակարգի որևէ արտածման կանոնի կիրառմամբ: Արդեն նշվել է, որ ցանկացած արտածմանը կարելի է համապատասխանեցնել նշագրված գրաֆ, որի յուրաքանչյուր գագաթին վերագրված է արտածման որևէ բանաձև և մեկից դեպի մյուսը տարված է կող, եթե երկրորդին վերագրված բանաձևը ստացվել է առաջինին վերագրված բանաձևից (կարող է և այլ բանաձևերից միաժամանակ) որևէ արտածման կանոնի կիրառմամբ:

Նշենք, որ տարբեր ֆորմալ համակարգերում հիմնական արտածման կանոններից է Modus ponens $\frac{A \quad A \supset B}{B}$, որը ի դեպ կարող է չլինել որևէ Ֆրեգեի համակարգի կանոն: Հիշեցնենք, որ եթե B բանաձևը արտածվել է A ու $A \supset B$ բանաձևերից modus ponens կանոնով, ապա A-ն կոչվում է **փոքր նախադրյալ**, իսկ $A \supset B$-ն կոչվում է **մեծ նախադրյալ**, ինքը B-ն կոչվում է **հետևանք** (descendant):

Սահմանում 4.1.3: Եթե որևէ արտածման մեջ օգտագործվել է **միայն Modus ponens կանոնը,** ապա համապատասխան գրաֆում յուրաքանչյուր ոչ հենասույթով նշագրված գագաթից մեծ նախադրյալներով նշագրված գագաթներով դեպի հենասույթով նշագրված գագաթը անցնող ճանապարհները անվանենք **աջակողմյան ճանապարհներ:**

Սահմանում 4.1.4: Եթե որևէ m բնական թվի համար միայն Modus ponens կանոնով արտածման համապատասխան գրաֆում **աջակողմյան ճանապարհների** մաքսիմալ երկարությունը m է, ապա արտածումը կոչվում է ***m-աջակողմյան հափվածությամբ***:

Նշենք, որ Ա.Նուրիջանյանը [30]-ում ապացուցել է ինտուիցիոնիստական և մինիմալ (Johansson’s) տրամաբանությունների ասույթային հաշվի հայտնի համակարգերի ըստ քայլերի կարճագույն բոլոր արտածումների **2-*աջակողմյան հափվածությունը:***

Դժվար չէ համոզվել, որ դասական տրամաբանության համակարգերում նման հատկությունը կարող է տեղի չունենալ, սակայն Ֆրեգեի յուրաքանչյուր $\mathcal{F}$ համակարգի համար տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 4.1.1: Ֆրեգեի յուրաքանչյուր $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ համակարգի համար կարելի է նշել այնպիսի r բնական թիվ և միայն Modus ponens կանոնով այնպիսի $\boldsymbol{\mathcal{F}}'$ համակարգ, որ $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ համակարգում ցանկացած արտածում հնարավոր է ձևափոխել նույն բանաձևի $\boldsymbol{\mathcal{F}}'$ համակարգի r-աջակողմյան հատվածությամբ արտածման, որի քայլերի քանակը սկզբնական արտածման քայլերի քանակի համեմատությամբ կարող է ունենալ ոչ ավելին, քան գծային աճ:

Ապացույց: Դիցուք $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ Ֆրեգեի որևէ համակարգ է: Վերցնենք $\boldsymbol{r} = id(\mathcal{F})$: $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-ի յուրաքանչյուր $\frac{A_1A_2\ldots A_m}{B}$ արտածման կանոն, որտեղ նախադրյալների քանակը փոքր է $\boldsymbol{r}$-ից, փոխարինենք $\frac{A_1A_2\ldots A_r}{B}$ արտածման կանոնով, կրկնելով որոշ նախադրյալներ: Որպես $\boldsymbol{\mathcal{F}}'$ համակարգի հենասույթների սխեմաներ վերցնում ենք $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-ի հենասույթների սխեմաները և $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-ի **բոլոր** $\frac{A_1A_2\ldots A_r}{B}$ արտածման կանոններին (ներառյալ Modus ponens կանոնին, եթե այն առկա է $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-ում) համապատասխանող $A_1 \supset \big(A_2 \supset (\ldots(A_r \supset B)\ldots)\big)$ տեսքի բանաձևերը**:** Ենթադրենք $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-ում տրված է որոշակի արտածում, որի քայլերի քանակը t-է: $\boldsymbol{\mathcal{F}}$-ի յուրաքանչյուր $\frac{A_1A_2\ldots A_r}{B}$ կանոնի կիրառումը փոխարինում ենք հետևյալ բանաձևերի՝ $A_1 \supset \big(A_2 \supset (\ldots(A_r \supset B)\ldots)\big)$, $\big(A_2 \supset (\ldots(A_r \supset B)\ldots)\big)$, $\ldots$, $(A_r \supset B)$ հաջորդականությամբ, որոնց և՝ $A_1, A_2, \ldots, A_r$ բանաձևերի նկատմամբ հերթականությամբ կիրառելով Modus ponens կանոնը կարտածենք B բանաձևը $\boldsymbol{\mathcal{F}}'$-ում: Այսպիսով, հին արտածման յուրաքանչյուր $A_1, A_2, \ldots, A_m$, B խումբը լրացվում է r հատ բանաձևերով: Հետագայում $A_1, A_2, \ldots, A_m$, B և $A_1 \supset \big(A_2 \supset (\ldots(A_r \supset B)\ldots)\big)$, $\big(A_2 \supset (\ldots(A_r \supset B)\ldots)\big)$, $\ldots$, $(A_r \supset B)$ բանաձևերի խումբը կանվանենք $\frac{A_1A_2\ldots A_m}{B}$ կանոնին համապատասխանող $\boldsymbol{\mathcal{F}}'$-**արտածման բլոկ**: Դժվար չէ համոզվել, որ

- $\boldsymbol{\mathcal{F}}'$-ում կառուցված արտածումը r-աջակողմյան հատվածությամբ արտածում է,
- սկզբնական արտածման յուրաքանչյուր նշված կանոնի կիրառումը ավելացնում է r հատ քայլ նոր արտածումում, հետևաբար, նոր արտածման քայլերի քանակը չի գերազանցում $t + tr = t(1 + r)$:

Լեմմա 4.1.1. ապացուցված է:

Հետագայում Ֆրեգեի յուրաքանչյուր $\mathcal{F}$ համակարգի համար Լեմմա 4.1.1.-ի պայմաններին բավարարող $\mathcal{F}'$ համակարգը կանվանենք $\mathcal{F}$-ի **կանոնավոր պատկեր**:

Հիշեցնենք որևէ F բանաձևի մեջ նրա φ ենթաբանաձևի ***մուտքի խորության (depth)*** $d_\varphi(F)$ գաղափարը՝

- $d_F(F) = 0$,
- եթե $d_\varphi(F) = k$ և $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$, որտեղ $*$ որևէ երկտեղանի տրամաբանական գործողություն է, ապա $d_{\varphi_1}(F) = d_{\varphi_2}(F) = k + 1$,
- եթե $d_\varphi(F) = k$ և $\varphi = \neg\varphi_1$, ապա $d_{\varphi_1}(F) = k + 1$:

Սահմանում 4.1.5: F նույնաբանության որևէ էական ենթաբանաձևերի բազմությունը կոչվում է **էական ենթաբանաձևերի անկախ բազմություն**, եթե նրա մեջ մտնող ոչ մի բանաձև չի հանդիսանում որևէ մյուսի ենթաբանաձև:

Սահմանում 4.1.6: Եթե M-ը φ նույնաբանության էական ենթաբանաձևերի որևէ անկախ բազմություն է, ապա φ-ում նրանց մուտքերի մաքսիմալ խորությունների գումարը անվանենք **M բազմության խորությունը φ-ում:**

Սահմանում 4.1.7: φ նույնաբանության բոլոր հնարավոր էական ենթաբանաձևերի անկախ բազմությունների խորությունների մեծագույն արժեքը անվանենք φ բանաձևի ընդհանուր խորություն (common depth) և նշանակենք $\boldsymbol{Cd(\varphi)}$:

4.2. *Modus ponens կանոնի ազդեցությոնը ընդհանուր խորության աճի վրա*

Այժմ մեր նպատակն է գնահատել Modus ponens կանոնի կիրառման հետևանքով արտածվող բանաձևի ընդհանուր խորության մեծության հնարավոր աճը այդ կանոնի նախադրյալների ընդհանուր խորությունների համեմատությամբ: Օգտվենք որոշ հայտնի գաղափարներից, որոնք հստակ ֆորմալիզացված են [28]-ում:

Հայտնի է կամայական F բանաձևի յուրաքանչյուր ենթաբանաձևը զրոներից և մեկերից բաղկացած հաջորդականություններով նշագրելու եղանակը՝ ինքը բանաձևը նշագրվում է (1) հաջորդականությամբ, եթե որևէ F′ ենթաբանաձև նշագրվել է որոշակի

$\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ հաջորդականությամբ, ապա նրա աջ մասի ենթաբանաձևը նշագրվում է $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, 1)$ հաջորդականությամբ, ձախ ենթաբանաձևը /եթե գոյություն ունի/ նշագրվում է $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, 0)$ հաջորդականությամբ:

Հետագայում $\boldsymbol{F - \tilde{\delta}}$ –ով կնշանակենք F բանաձևի $\tilde{\delta}$ հաջորդականությամբ նշագրված ենթաբանաձևը, իսկ $\boldsymbol{S(F - \tilde{\delta}/A(x))}$ -ով կնշանակենք A բանաձևում x փոփոխականի փոխարեն $F - \tilde{\delta}$ բանաձևի տեղադրման արդյունքը:

Սահմանում 4.2.1: (A,B) բանաձևերի կարգավորված զույգի $\boldsymbol{\tilde{\delta}}$**-ձևափոխություն** կանվանենք հետևյալ եղանակով կառուցվող բանաձևերի կարգավորված զույգը՝

a. $(S(B - \tilde{\delta}/A(x)), B)$, եթե $A - \tilde{\delta} = x$**,** իսկ $B - \tilde{\delta}$-ի երկարությունը մեծ է զրոից,
b. $(A, S(A - \tilde{\delta}/ B(y))$**,** եթե $B - \tilde{\delta} = y$**,** իսկ $A - \tilde{\delta}$-ի երկարությունը մեծ է զրոից,
c. (A,B), մնացած դեպքերում:

Եթե (A,B) բանաձևերի կարգավորված զույգի $\boldsymbol{\tilde{\delta}}$**-ձևափոխությունը** ստացվել է միայն վերջին երկու կետերի շնորհիվ, ապա այն կանվանենք **ձախ-կայուն** $\boldsymbol{\tilde{\delta}}$ **-ձևափոխություն:**

$\boldsymbol{L(F)}$-ով նշանակենք F բանաձևից կամայական տեղադրություններով ստացված բանաձևերի բազմությունը: [28]-ում ապացուցված է հետևյալ պնդումը.

Պնդում 4.2.1: Եթե A, B բանաձևերի համար $L(A) \cap L(B) \neq \emptyset$, ապա գոյություն ունի այնպիսի C բանաձև, որ $L(C) = L(A) \cap L(B)$:

C բանաձևը /հետագայում կնշանակենք (A,B)^/ կառուցվում է (A,B) բանաձևերի կարգավորված զույգի նկատմամբ որոշակի $\boldsymbol{\tilde{\delta}}$**-ձևափոխությունների** հաջորդաբար կիրառման արդյունքում: Դժվար չէ նկատել, որ եթե C բանաձևի կառուցման համար կիրառվում են միայն **ձախ-կայուն** $\boldsymbol{\tilde{\delta}}$**-ձևափոխություններ,** ապա $C = A$:

Սահմանում 4.2.2: Դիցուք (A,B) բանաձևերի այնպիսի կարգավորված զույգ է, որ B-ի գլխավոր տրամաբանական նշանը իմպլիկացիա է և $L(A) \cap L(B - (1{,}0)) \neq \emptyset$: Եթե C-ն այն բանաձևն է, որ $L(C) = L(A) \cap L(B - (1{,}0))$, ապա այն բանաձևը, որը ստացվում է B-(1,1)–ից նույն տեղադրությամբ, որով ստացվել է C-ն B-(1,0)–ից, կանվանենք (A,B) բանաձևերի կարգավորված զույգի ***հնարավոր հետևանք:*** Եթե $C = A$, ապա (A,B) բանաձևերի կարգավորված զույգի հնարավոր հետևանքը կանվանենք ***ձախ-կայուն հնարավոր հետևանք:***

F բանաձևի փոփոխականների մուտքերի քանակը /բանաձևին համապատասխանող ծառի եզրային գագաթների քանակը/ **նշանակենք $\boldsymbol{f(F)}$, իսկ $\boldsymbol{h(F)}$-ով** նշանակենք այդ ծառի ամենաերկար ճյուղի երկարությունը:

Լեմմա 4.2.1: 1) Եթե F բանաձևը հանդիսանում է (A,B) բանաձևերի կարգավորված զույգի ***ձախ-կայուն հնարավոր հետևանք,*** ապա $Cd(F) \leq Cd(A) + 2f(B-(1,1))h(B-(1,1))$:

2) Եթե F բանաձևը հանդիսանում է (A,B) բանաձևերի կարգավորված զույգի ***հնարավոր հետևանք,*** ապա $Cd(F) \leq 4f(B-(1,1))h(B)$:

Ապացույց: Նկատենք, որ յուրաքանչյուր նույնաբանության մեջ որևէ տեղադրություն կատարելով, ստանում ենք նոր նույնաբանություն, որի կամայական էական ենթաբանաձև կամ հանդիսանում է որևէ սկզբնական նույնաբանության էական ենթաբանաձևի տեղադրության արդյունք, հետևաբար նրա խորությունը չի փոխվում, կամ որևէ փոփոխականի փոխարեն կատարված տեղադրության արդյունք և այս դեպքում նրա խորությունը չի գերազանցում սկզբնական նույնաբանության խորությանը:

1) Որպեսզի F բանաձևը հանդիսանա (A,B) բանաձևերի կարգավորված զույգի ***ձախ-կայուն հնարավոր հետևանք,*** անհրաժեշտ է որ ա/ B-ի գլխավոր տրամաբանական նշանը լինի իմպլիկացիա և բ/ գոյություն ունենան B բանաձևի որևէ p_1, p_2, …, p_k փոփոխականներ և այնպիսի α_1, α_2, …, α_k բանաձևեր, որ B-(1,0)-ի մեջ p_1, p_2, …, p_k փոփոխականների փոխարեն տեղադրելով α_1, α_2, …, α_k բանաձևերը ստացվի A բանաձևը, իսկ B-(1,1)-ի մեջ p_1, p_2, …, p_k փոփոխականների փոխարեն տեղադրելով α_1, α_2, …, α_k բանաձևերը ստացվի F բանաձևը: Այդպիսի յուրաքանչյուր բանաձևի մուտքի խորությունը F-ում չի կարող գերազանցել տեղադրված որոշակի α_i բանաձևի խորությանը A-ում գումարած h(B-(1,1)):

Ուշադրություն դարձնենք, որ F բանաձևի ցանկացած էական ենթաբանաձև հանդիսանում է կամ A-ի էական ենթաբանաձև, կամ B-ից վերը նշված տեղադրման արդյունքում ստացված $A \supset F$ բանաձևի էական ենթաբանաձև: Եթե F բանաձևի որևէ α էական ենթաբանաձև է A–ում, ապա $d_{\alpha}(F) \leq d_{\alpha}(A) + h(B-(1,1))$, իսկ դրանց քանակը չի կարող գերազանցել $f(B-(1,1))$-ին: Եթե F բանաձևի որևէ β էական ենթաբանաձև էական է $A \supset F$–ում, ապա $d_{\beta}(F) \leq h(B-(1,1))$, և դրանց քանակը նույնպես չի կարող գերազանցել $f(B-(1,1))$ -ին: Հետևաբար, ընտրելով այդպիսի ենթաբանաձևերի հնարավոր անկախ բազմությունների խորությունների մեծագույն արժեքը կստանանք $Cd(F) \leq \Sigma d_{\alpha}(F) + \Sigma d_{\beta}(F) \leq Cd(A) + 2f(B-(1,1))h(B-(1,1))$:

2) կետի պնդման ապացույցը բխում է այն փաստից, որ այս դեպքում պետք է հաշվի առնենք, որ որոշակի տեղադրությունների արդյունքում A-ից և B-(1,0)–ից ստացվում է որոշակի A′=(A,B)^ բանաձև և այդ նույն տեղադրություններով ստացվում է F բանաձևը B-(1,1)-ից, հետևաբար, F բանաձևի ցանկացած էական ենթաբանաձև հանդիսանում է կամ A′-ի էական ենթաբանաձև, կամ $A' \supset F$ բանաձևի էական ենթաբանաձև: Այսպիսով, եթե որևէ α էական ենթաբանաձև է A′–ում և F -ում, ապա $d\alpha(F) \leq min(h(B-(1,0)), h(A)) + h(B-(1,1)) \leq h(B-(1,0)) + h(B-(1,1)) \leq 2h(B)$ հետևաբար 1) կետում նշված $\Sigma d\alpha(F) \leq 2\, f(B-(1,1)h(B)$: Քանի որ $\Sigma d\beta(F)$ մնում է անփոփոխ, ապա

$$Cd(F) \leq \Sigma d_{\alpha}(F) + \Sigma d_{\beta}(F) \leq 2f(B-(1,1))h(B) + 2f(B-(1,1))h(B-(1,1)) \leq 4f(B-(1,1))h(B):$$

Լեմմա 4.2.1. ապացուցված է:

Լեմմա 4.2.2: Ֆրեգեի կամայական $\mathcal{F}$ համակարգում **t** քայլերով արտածվող յուրաքանչյուր F բանաձևի համար գոյություն ունի F-ի արտածման մեջ օգտագործված հենասույթներից և արտածման կանոններից կախված այնպիսի **c** հաստատուն, որ $Cd(F) \leq \boldsymbol{ct}$:

Ապացույց: Ֆիքսենք Ֆրեգեի որևէ $\mathcal{F}$ համակարգ և որոշակի F բանաձև, որն արտածվում է այդ համակարգում t քայլերով, ապա դիտարկենք այդ բանաձևի արտածումը $\mathcal{F}$-ի կանոնավոր պատկեր հանդիսացող $\mathcal{F}'$ համակարգում: Համաձայն Լեմմա 4.1.1.-ի F բանաձևի նոր արտածման $\boldsymbol{t'}$ բարդության համար տեղի ունի $\boldsymbol{t' \leq c_1 t}$

առնչությունը որոշակի c_1 հաստատունի համար: Այս արտածման մեջ կիրառվում է միայն Modus ponens կանոնը, ընդ որում յուրաքանչյուր կիրառման մեծ և փոքր նախադրյալները կարող են լինել համապատասխանաբար՝

1. Որևէ հենասույթ, որևէ հենասույթ,
2. Որևէ հենասույթ, որևէ հենասույթի աջ i–հատված,
3. Modus ponens-ի արդյունք, որևէ հենասույթ,
4. Modus ponens-ի արդյունք, որևէ հենասույթի աջ i–հատված:

Նախ նշենք մի քանի հայտնի փաստեր՝

ա/ յուրաքանչյուր Ֆրեգեի համակարգերի կամայական հենասույթի սխեմա և յուրաքաչյուր արտածման կանոնին համապատասխանող $A_1 \supset (A_2 \supset (\dots (A_r \supset B) \dots))$ բանաձևերի սխեմաները ունեն վերջավոր խորություն, վերջավոր քանակությամբ մետափոփոխականներ և նրանցով կազմված վերջավոր քանակությամբ էական ենթաբանաձևեր,

բ/ $\mathcal{F}'$ համակարգում յուրաքանչյուր հենասույթի և յուրաքանչյուր հենասույթի կամայական աջ i–հատվածների հնարավոր հետևանքների սխեմաները ունեն վերջավոր խորություն, վերջավոր քանականությամբ մետափոփոխականներ և նրանցով կազմված վերջավոր քանակությամբ էական ենթաբանաձևեր,

գ/ յուրաքանչյուր նույնաբանություն հանդիսացող բանաձևի սխեմայի մեջ որևէ տեղադրություն կատարելով, ստանում ենք նոր նույնաբանություն, որի կամայական էական ենթաբանաձև կամ հանդիսանում է որևէ սկզբնական նույնաբանության մետափոփոխականներով կազմված էական ենթաբանաձևի տեղադրության արդյունք, կամ որևէ մետափոփոխականի փոխարեն կատարված տեղադրության արդյունք:

Նշանակենք c'-ով ա/ և բ/ կետերում նշված մեծությունների մեծագույն արժեքը $\mathcal{F}'$ համակարգի համար: Նախ նկատենք, որ յուրաքանչյուր բլոկի $D_1, D_2, \dots, D_r$ բանաձևերի և առաջին մեծ նախադրյալ $A_1 \supset (A_2 \supset (\dots (A_r \supset B) \dots))$ հենասույթի սխեմայի համար ի սկզբանե պետք է կատարվեն բոլոր **ձախ-կայուն $\tilde{\delta}$-ձևափոխությունները** այնպես, որ ստանանք $D_1=A_1$, $D_2=A_2$, …, $D_r=A_r$, հետևաբար, համաձայն ա/ և բ/ դիտողությունների և

Լեմմա 4.2.1-ի պնդման Cd մեծությունը ձևափոխված հենաասույթի յուրաքանչյուր ***աջ (i+1)–հատվածի*** Cd մեծությունը ***աջ i–հատվածի*** Cd մեծության նկատմամբ կավելանա 2(c’)^2-ով: Մակածման եղանակով ըստ $\mathcal{F}'$-արտածման բլոկների k քանակի ապացուցենք, որ $Cd(F) \ \le 4(\boldsymbol{c}')^2\boldsymbol{rk}$:

Առաջին բլոկի համար պնդումն ակնհայտ է, քանի որ տեղի ունեն վերը նշված 1. և 2. դեպքերը, իսկ այդ դեպքերում մենք ստանում ենք **r հատ *ձախ-կայուն հնարավոր հետևանքներ,*** հետևաբար, համաձայն ա/ և բ/ դիտողությունների և Լեմմա 4.2.1-ի պնդման առաջին բլոկում արտածված F_i բանաձևի համար կստանանք $Cd(F_i) \le 2c' + \boldsymbol{r}2(c')^2 \le 4(c')^2\boldsymbol{r}$: Արտածման այլ բլոկներում արտածվող բանաձևերի համար կարող են տեղի ունենալ 1.-4. դեպքերը, հետևաբար կարող են ստացվել և ***ձախ-կայուն հնարավոր հետևանքներ և հնարավոր հետևանքներ:*** Ենթադրենք պնդումը ճիշտ է k-ից քիչ բոլոր բլոկներում արտածվող բանաձևերի համար և ենթադրենք վերջին F բանաձևը ստացվել է Modus ponens կանոնով, որի փոքր նախադրյալը որոշակի F_s բանաձև է /որևէ նախորդ բլոկից, կամ հեասույթ/: Համաձայն գ/ դիտողության, Լեմմա 4.2.1-ի պնդման $Cd(F) \le Cd(F_s) + r4(c')^2 \le r4(c')^2(k-1) + r4(c')^2 \le 4(c')^2rk \le 4(c')^2r(t'/r) \le \ 4(c')^2c_1t$**:** Որպես պահանջվող **c** վերցնում ենք $4(c')^2c_1$:

Լեմմա 4.2.2. ապացուցված է:

4.3. t-բարդության գնահատականների ճշգրտումը Ֆրեգեի համակարգերում

Ինչպես և նախորդ պարագրաֆներում այստեղ ևս կարևոր դեր է կատարում $\varphi_n = TTM_{n,m}$ նույնաբանությունը, որտեղ

$$TTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in E^n} \bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} p_{ij}^{\sigma_j} \ (n \ge 1, 1 \le m \le 2^n - 1):$$

Դժվար չէ համոզվել, որ $Cd(\varphi_n) = \Theta(2^{3n})$: Իրոք, եթե ներմուծենք հետևյալ նշանակումը $\psi_\sigma^j = \bigvee_{i=1}^{n} p_{ij}^{\sigma_j}$, որտեղ $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, ապա φ_n կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi_n = \bigvee_{\sigma\in E^n} \bigwedge_{j=1}^{2^n-1} \psi_\sigma^j:$$

Առավել ճշգրտված տեսքով (փակագծերի նշումով)՝

$$\varphi_n = \bigwedge_{j=1}^{2^n-1} \psi^j_{\sigma^1} \vee \left(\bigwedge_{j=1}^{2^n-1} \psi^j_{\sigma^2} \vee \left(\dots \vee \left(\bigwedge_{j=1}^{2^n-1} \psi^j_{\sigma^{2^n}} \right) \right) \dots \right),$$

որտեղ՝

$$\bigwedge_{j=1}^{2^n-1} \psi^j_{\sigma^k} = \left(\psi^1_{\sigma^k} \wedge \left(\psi^2_{\sigma^k} \wedge \left(\dots \wedge \psi^{2^n-1}_{\sigma^k}\right) \dots \right)\right):$$

Դժվար չէ համոզվել, որ փակագծերի այսպիսի դասավորվածության համար բոլոր $\psi^j_\sigma = \bigvee_{i=1}^n p_{ij}^{\sigma_j}$ բանաձևերի բազմությունը էական ենթաբանաձևերի անկախ բազմություն է, և այդ բանաձևերից յուրաքանչյուրի համար

$$depth\left(\psi^j_{\sigma^k}\right) = k + j$$

և հետևաբար φ_n նույնաբանության ընդհանուր խորությունը՝

$$Cd(\varphi_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n-1} k + j = \sum_{k=1}^{2^n} (k + (2^n - 1)2^{n-1}) = 2^{n-1}(2^n + 1) + 2^n(2^n - 1)2^{n-1} = \Theta(2^{3n})$$

Այս գլխի հիմնական արդյունքն է՝

Թեորեմ 4:

$$t^F_{\varphi_n} = \Omega\left(|\varphi_n| \sqrt{\frac{|\varphi_n|}{\log_2{}^3(|\varphi_n|)}}\right):$$

Ապացույց: Թեորեմ 4-ի ապացույցը հետևում է Լեմմա 4.2.2.-ի պնդումից: Իրոք՝ $Cd(\varphi_n) = \Theta(2^{3n})$ և հետևաբար,

$$t^F_{\varphi_n} = \Omega(2^{3n}) = \Omega\left(\frac{n2^{2n}\sqrt{n2^{2n}}}{\sqrt{n^3}}\right) = \Omega\left(|\varphi_n| \sqrt{\frac{|\varphi_n|}{n^3}}\right) = \Omega\left(|\varphi_n| \sqrt{\frac{|\varphi_n|}{(\log_2(n) + 2n)^3}}\right) =$$

$$= \Omega\left(|\varphi_n| \sqrt{\frac{|\varphi_n|}{\log_2{}^3(|\varphi_n|)}}\right):$$

Թեորեմ 4-ը ապացուցված է:

ԳԼՈՒԽ 5. ԲԱԶՄԱՐԺԵՔ ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԱՐՏԱԾՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՐԴՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐ

Այս գլխում բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում գնահատվել են բանաձևերի որոշակի հաջորդականությունների արտածումների բարդությունների բոլոր չորս բնութագրիչները: Արդյունքների հստակ ձևակերպման համար տանք **k-արժեք (k≥3) տրամաբանության հիմնական գաղափարները՝** E_k -ով նշանակենք հետևյալ բազմությունը $\left\{0,\frac{1}{\mathrm{k}-1},\ldots,\frac{\mathrm{k}-2}{\mathrm{k}-1},1\right\}$: Ասույթային բանաձևերը կառուցվում են հայտնի եղանակով E_k -ից արժեքներ ընդունող ասույթային փոփոխականներից /կամ նաև ասույթային հաստատուններից/ և ∧, ∨, ⊃, ¬ (կամ ~) տրամաբանական կապերից, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է սահմանվել տարբեր ձևերով՝

Դիզյունկցիայի համար

$p \vee q = max(p,q)$ (1) կամ $p \vee q = [(k-1)(p+q)](mod\ k)/(k-1)$ (2):

Կոնյունկցիայի համար

$p \wedge q = min(p,q)$ (1) կամ $p \wedge q = max(p+q-1,0)$ (2):

Իմպլիկացիայի համար

$p \supset q = \begin{cases} 1, & p \le q \\ 1-p+q, & p > q \end{cases}$ (1) Լուկասևիչի

կամ

$p \supset q = \begin{cases} 1, & p \le q \\ q, & p > q \end{cases}$ (2) Գյոդելի:

Ժխտման համար

$\sim p = 1-p$ (1) Լուկասևիչի կամ $\neg p = ((k-1)p+1)(mod\ k)/(k-1)$ (2) ցիկլիկ:

Որոշ դեպքերում $\neg p$ նշանակման փոխարեն օգտագործվում է $\bar{p}$ նշանակումը:

p ասույթային փոփոխականիև $\delta = \frac{i}{\mathrm{k}-1}(0 \le i \le k-1)$-ի համար սահմանված է նաև ***ցուցչային*** ֆունկցիան.

p^{δ} որպես $(p \supset \delta) \wedge (\delta \supset p)$ (1),

p^{δ} որպես p-ն $(k-1)-i$ հատ ցիկլիկ ժխտումներով (2):

Եթե սևեռվում է որպես «ճշմարտություն» 1 արժեքը /$\frac{1}{2} \le \frac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{k-1}} \le 1$ միջակայքի յուրաքանչյուր արժեք/, ապա $p_1, p_2, \dots, p_n$ փոփոխականներով յուրաքանչյուր φ բանաձև կոչվում է $\mathbf{1}-\boldsymbol{k}$ **-նույնաբանություն** ($\ge \mathbf{1/2}-\boldsymbol{k}$ **-նույնաբանություն**), եթե ցանկացած $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in E_k^n$ հավաքածուի համար, վերագրելով յուրաքանչյուր p_j *–ին* δ_j $(1 \le j \le n)$ արժեքը, ստանում ենք φ -ի արժեքը 1 (կամ $\frac{1}{2} \le \frac{i}{\mathrm{k}-1} \le 1$ միջակայքից որևէ մեկը):

Ա.Չուբարյանի և Ա.Խամիսյանի կողմից մի քանի աշխատություններում /[16],[34],[40]/ բազմարժեք տրամաբանության բոլոր հնարավոր տարբերակների համար կառուցվել են մի քանի համապիտանի համակարգեր, այդ թվում նաև, ընդհանրացնելով բազմարժեք տրամաբանության համար ոԴՆՁ-ի գաղափարը և կրճատման կանոնով E տիպի համակարգերը: Ատենախոսությունում բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համար կառուցվել են $TTM_{n,m}$ -ին նմանատիպ $\mathbf{1}-\boldsymbol{k}$ **-նույնաբանություններ** ($\ge \mathbf{1/2}-\boldsymbol{k}$ **-նույնաբանություններ**) և համապատասխան ընդհանրացված կրճատման կանոնով համակարգերում գնահատվել են այդ բանաձևերի արտածումների բարդությունների բոլոր բնութագրիչները: Հետազոտված համակարգերն են՝

$\boldsymbol{ELN_k}$ **[1]** - k-արժեք համակարգը **Լուկասևիչի ժխտմամբ** և որպես «ճշմարտություն» սևեռված **1** արժեքով,

$\boldsymbol{ECN_k}$ **[1]** - k-արժեք համակարգը **ցիկլիկ ժխտմամբ** և որպես «ճշմարտություն» սևեռված **1** արժեքով,

$\boldsymbol{ELN_3}$ **[$\mathbf{1/2}$,1]** - 3-արժեք համակարգը **Լուկասևիչի ժխտմամբ** և որպես «ճշմարտություն» սևեռված $\mathbf{1/2}$ **և 1-ով,**

$\boldsymbol{ECN_3}$ **[$\mathbf{1/2}$,1]** - 3-արժեք համակարգը **ցիկլիկ ժխտմամբ** և որպես «ճշմարտություն» սևեռված $\mathbf{1/2}$ **և 1-ով:**

$\boldsymbol{CN_3}$**-cut-free [1]** - Ֆրեգեի տիպի 3-արժեք համակարգը **ցիկլիկ ժխտմամբ** և որպես «ճշմարտություն» սևեռված 1-ով:

Արդյունքները շարադրված են [32], [33], [34], [36] հոդվածներում և ներկայացվել են նաև Logic Colloquium գիտական կոնֆերանսի շրջանակներում [40]:

5.1. Որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի ընդհանրացումը բազմարժեք տրամաբանության համար

Ինչպես երկարժեք տրամաբանության համար, այնպես էլ բազմարժեքի դեպքում, սահմանումները տալու համար օգտագործվում են բազմարժեք միավոր խորանարդի, բանաձևի և նույնաբանության հասկացությունները: Լեզվի ընտրությունը էական չէ, սակայն պարզության համար դիտարկվում է հետևյալ լեզուն՝ այն բաղկացած է բազմարժեք $p_i(i \geq 1)$ և $p_{i_j}(i \geq 1; j \geq 1)$ փոփոխականներից, տրամաբանական կապերից՝ $\wedge$, $\vee$, $\supset, \neg$ (կամ ~) և փակագծերից:

Պարզության համար, սահմանումները կտանք 3-արժեք տրամաբանության համար, սակայն նույն կերպ կարելի է ընդհանրացնել k-արժեք տրամաբանության համար:

Երկարժեք տրամաբանության համար գլուխ 1-ում սահմանված բոլոր փոխարինման կանոնները ճիշտ են $\wedge$ և $\vee$ համար, սակայն $\supset$-ի համար ճիշտ են միայն հետևյալ կանոնները՝

$0 \supset \psi = 1$, $1 \supset \psi = \psi$, $\psi \supset 1 = 1$:

Ժխտման համար փոխարինման կանոնները հետևյալն են.

$\neg 0 = {}^{1}/_{2}$, $\neg({}^{1}/_{2}) = 1$, $\neg 1 = 0$ և $\neg\neg\neg\psi = \psi$

$\sim 0 = 1$, $\sim({}^{1}/_{2}) = {}^{1}/_{2}$, $\sim 1 = 0$ և $\sim\sim\psi = \psi$

Բազմարժեք տրամաբանությունում որոշ դեպքերում, բացի սահմանված փոխարինման կանոններից, անհրաժեշտ է լինում օգտագործել նաև հետևյալ ***օժանդակ փոխարինման առնչությունները.***

$$ {}^{1}/_{2} \wedge \psi = \psi \wedge {}^{1}/_{2} \leq {}^{1}/_{2}, \qquad {}^{1}/_{2} \vee \psi = \psi \vee {}^{1}/_{2} \geq {}^{1}/_{2}, $$

$$ \psi \supset 0 = \neg sg\psi, \quad {}^{1}/_{2} \supset \psi = sg\psi, \quad \psi \supset {}^{1}/_{2} \geq {}^{1}/_{2}, $$

որտեղ $\neg sg\psi$-ն հավասար է 0, եթե ψ-ի արժեքը մեծ է 0-ից և 1 հակառակ դեպքում և $sg\psi$-ն հավասար է 1, եթե ψ-ի արժեքը մեծ է 0-ից և 0 հակառակ դեպքում:

3-արժեք տրամաբանությունում կամայական p փոփոխականի համար, p^0 , $p^{1/2}$ևp^1 լիտերալներն են:

Ենթադրենք φ-ն բանաձև է 3-արժեք տրամաբանությունում, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$-ն այդ բանաձևի բոլոր փոփոխականների բազմությունն է և $P' = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}\}$ $(1 \leq m \leq n)$, P-ի որևէ ենթաբազմություն:

Սահմանում 5.1.1: Տրված $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \in E_3^m$-ի համար, կոնյունկտ $K^{\sigma} = \{{p_{i_1}}^{\sigma_1}, {p_{i_2}}^{\sigma_2}, \dots, {p_{i_m}}^{\sigma_m}\}$-ն կոչվում է $\varphi - 1$-որոշիչ ($\varphi - 0$-որոշիչ, $\varphi - {}^{1}/_{2}$-որոշիչ), եթե վերագրելով σ_j $(1 \leq j \leq m)$ -ն p_{i_j} -ին, և կիրառելով փոխարինման կանոնը, անհրաժեշտության դեպքում նաև օժանդակ փոխարինման առնչությունները, ստանում ենք φ-ի արժեքը (1, 0, ${}^{1}/_{2}$), անկախ մյուս փոփոխականների արժեքներից:

Օրինակ $p_1 \supset (p_2 \supset (p_3 \supset p_1))$ բանաձևի համար p_1^1, p_1^0 և $p_1^{1/2}$ կոնյունկտները 1-որոշիչ են: p_1^1-ի և p_1^0-ի համար օգտագործվում են միայն փոխարինման կանոնները, սակայն $p_1^{1/2}$ -ի համար, պետք է օգտագործվեն նաև օժանդակ փոխարինման առնչությունները:

Որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի սահմանումը 3-արժեք տրամաբնությունում տրվում է նույն եղանակով, ինչպես երկարժեքում՝

Սահմանում 5.1.2: $D = \{K_1, K_2, \dots, K_i\}$ ԴՆՁ-ն կանվանենք որոշիչ ԴՆՁ (ոԴՆՁ) φ–ի համար, եթե φ –ն ու D –ն համարժեք են և եթե որպես «ճշմարտություն» սևեռված է **1** արժեքը / $\frac{1}{2} \leq \frac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{k-1}} \leq 1$ միջակայքի յուրաքանչյուր արժեք/, ապա ցանկացած $K_j (1 \leq i \leq j)$ կոնյունկտ 1-որոշիչ է /$\frac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{\kappa-1}}$ – որոշիչ է/ φ–ի համար:

Դիտողություն 5.1.՝

1) եթե որևէ φ նույնաբանության համար, իր φ -որոշիչ կոնյունկտներից ամենաքիչ լիտերալ ունեցող կոնյունկտի սիմվոլների քանակը m է, ապա φ-ի ոԴՆՁ-ը ունի առնվազն k^m կոնյունկտ:

2) եթե որևէ φ նույնաբանության համար գոյություն ունի այնպիսի m, որ կամայական կոնյունկտ, որը ունի m լիտերալ, φ-որոշիչ է, ապա φ-ի ոԴՆՁ-ը ունի ոչ ավել քան k^m կոնյունկտ:

5.2. Հիմնական համակարգերի սահմանումները

5.2.1. Հեռացման կանոնով համակարգեր ELN_k և ECN_k

Հենասույթները ֆիքսված չեն, սակայն կամայական φ բանաձևի համար, նրա ոԴՆՁ-ի կամայական կոնյունկտ կարող է դիտարկվել որպես հենասույթ:

3-արժեք տրամաբանության համար ***հեռացման կանոնը*** *(ε-կանոն)* արտածում է $K' \cup K'' \cup K'''$ *-ը,* հետևյալ կոնյունկտներից՝ $K' \cup \{p^1\}$, $K'' \cup \left\{p^{1/2}\right\}$ և $K''' \cup \{p^0\}$, որտեղK', K'' և K''' կոնյունկտներ են, p-ն փոփոխական է և ցուցչային ֆունկցիան սահմանված է ըստ (1)-ի ELN_3-ում և ըստ (2)-ի ECN_3-ում:

Ակնհայտ է, որ այս կանոնը հեշտությամբ կարելի է ընդհանրացնել k-արժեք տրամաբանության համար:

ELN_k (ECN_k) համակարգում արտածումը իրենից ներկայացնում է վերջավոր քանակի կոնյունկտների հաջորդականություն, այնպիսին որ կամայական կոնյունկտ կամ հենասույթ է, կամ էլ ստացվել է հաջորդականության նախորդ կոնյունկտներից ε-կանոնի կիրառմամբ:

Կասենք որ $D = \{K_1, K_2, \ldots, K_l\}$ ԴՆՁ-ն նույնաբանություն է, եթե հենասույթների վրա կիրառելով ε-կանոնը, կարող ենք ստանալ դատարկ կոնյունկտը (∅):

5.2.2. CN_3-*Cut-Free համակարգ*

Հենասույթները հետևյալն են

1. $\alpha_1 \wedge (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge (\alpha_{m-1} \wedge \alpha_m) \ldots) \supset \alpha_i,\ m \geq 1, 1 \leq i \leq m$
2.

a. $(\mathrm{K} \supset \alpha^{\sigma_1}) \supset \Big((\mathrm{K} \supset \beta^{\sigma_2}) \supset \big(\mathrm{K} \supset (\alpha \supset \beta)^{\varphi_{\supset}(\alpha,\beta,\sigma_1,\sigma_2)}\big)\Big)$,

b. $(\mathrm{K} \supset \alpha^{\sigma_1}) \supset ((\mathrm{K} \supset \beta^{\sigma_2}) \supset \big(\mathrm{K} \supset (\alpha \vee \beta)^{\varphi_{\vee}(\alpha,\beta,\sigma_1,\sigma_2)}\big))$,

c. $(\mathrm{K} \supset \alpha^{\sigma_1}) \supset ((\mathrm{K} \supset \beta^{\sigma_2}) \supset \big(\mathrm{K} \supset (\alpha \wedge \beta)^{\varphi_{\wedge}(\alpha,\beta,\sigma_1,\sigma_2)}\big))$,

d. $(\mathrm{K} \supset \alpha^{\sigma_1}) \supset ((\mathrm{K} \supset \beta^{\sigma_2}) \supset (\mathrm{K} \supset \big(\alpha^{\beta}\big)^{\varphi_{\exp}(\alpha,\beta,\sigma_1,\sigma_2)})$,

e. $(\mathrm{K} \supset \alpha^{\sigma}) \supset (\mathrm{K} \supset \neg\alpha)^{\overline{\sigma}}$,

3.

a. $(\delta \wedge \mathrm{K} \supset \varphi) \supset \Big((\overline{\delta} \wedge \mathrm{K} \supset \varphi) \supset \Big((\overline{\overline{\delta}} \wedge \mathrm{K} \supset \varphi) \supset (\mathrm{K} \supset \varphi)\Big)\Big)$,

b. $(\gamma \supset \varphi) \supset \big((\overline{\gamma} \supset \varphi) \supset ((\overline{\overline{\gamma}} \supset \varphi) \supset \varphi)\big)$,

որտեղ

1. φ-ն արտածվող բանաձևն է
2. $\alpha_i\ (1 \leq i \leq m)$ և γ լիտերալներ են, α, β, δ կամայական բանաձևեր են,$\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \{0, {}^1/_2, 1\}$
3. $K = \beta_1 \wedge (\beta_2 \wedge \ldots \wedge (\beta_{l-1} \wedge \beta_l) \ldots), (l \geq 1)$ կամայական $\beta_i\ (1 \leq i \leq l)$ լիտերալների համար,
4. 2րդ խմբի կամայական $\beta_1 \wedge (\beta_2 \wedge \ldots \wedge (\beta_{l-1} \wedge \beta_l) \ldots) \supset \psi$ տիպի ենթաբանաձևի համար $\{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$ կոնյունկտը ψ-որոշիչ է

5. 3-րդ խմբի առաջին հենասույթի որևէ $K = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_k$ ենթաբանաձևի փոփոխականների բազմությունը նշանակենք $K^{set} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$-ով: Այդ դեպքում $\delta \notin K^{set}$ և $\delta \cup K^{set}$ –ը որևէ φ-որոշիչ կոնյունկտի ենթաբազմություն է և K^{set}-ը φ-որոշիչ չէ:

6. $\varphi_{\supset}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1 \supset \sigma_2) \wedge (\neg(\mathrm{A} \vee \overline{\mathrm{A}}) \vee (\overline{\overline{\mathrm{B}}} \supset \mathrm{B})) \vee (\neg(\mathrm{A} \vee \overline{\overline{\mathrm{A}}}) \wedge \neg(\mathrm{B} \vee \overline{\overline{\mathrm{B}}})),$

7. $\varphi_{\vee}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1 \vee \sigma_2) \vee ((\mathrm{A} \supset \overline{\mathrm{A}}) \wedge \neg(\overline{\mathrm{B}} \vee \overline{\overline{\mathrm{B}}})) \vee (\neg(\overline{\mathrm{A}} \vee \overline{\overline{\mathrm{A}}}) \wedge (\mathrm{B} \supset \overline{\mathrm{B}})),$

8. $\varphi_{\wedge}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1 \wedge \sigma_2) \vee ((\mathrm{A} \wedge \overline{\overline{\mathrm{A}}}) \vee (\mathrm{B} \wedge \overline{\mathrm{B}})) \vee ((\mathrm{A} \wedge \overline{\mathrm{A}}) \vee (\mathrm{B} \wedge \overline{\overline{\mathrm{B}}}),$

9. $\varphi_{\exp}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \sigma_1, \sigma_2) = {\sigma_1}^{\sigma_2} \vee (\neg({\sigma_1}^{\sigma_2}) \wedge \neg(\neg(\mathrm{A}^{\sigma_1} \wedge \overline{\mathrm{B}}^{\sigma_2}) \vee \neg\neg(\mathrm{A}^{\sigma_1} \wedge \overline{\mathrm{B}}^{\sigma_2})))$

10. Ցուցչային ֆունկցիան (2) exponent-ն է:

Արտածման կանոնը Modus ponens-ն է

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}:$$

Նկատենք, որ չնայած Modus ponens կանոնի, 1.-3. սահմանափակումները ստիպում են, որ արտածվող φ բանաձևը կառուցվի քայլ առ քայլ՝ հիմնվելով որոշիչ կոնյունկտների վրա:

Նմանապես կարելի է կառուցել նաև $\mathbf{CN_k}$ **-Cut-Free** համակարգը $k \geq 4$ -ի դեպքում:

φ նույնաբանության արտածումը Φ համակարգում, դա $\{D_0, D_1, \ldots, D_r\}$ Φ -ապացույց է /սահմանումը տրված է գլուխ 1-ում երկարժեք տրամաբանության համար, սակայն k-արժեք տրամաբանության դեպքում սահմանումը տրվում է նմանապես/, այնպիսին, որ $\tilde{\varphi} \in D_r$, որտեղ φ-ն դատարկ կոնյունկտն է ELN_k (ECN_k) համակարգի դեպքում, և φ-ն է $\mathrm{CN_k}$-Cut-Free համակարգի դեպքում:

5.3. Որոշ բազմարժեք նույնաբանությունների արփածումների բարդության բնութագրիչների գնահափականներ

Ստացված արդյունքների համար կարևոր դեր են խաղում գլուխ 1-ում երկարժեք տրամաբանության համար սահմանված $TTM_{n,m}$ նույնաբանությունների հաջորդականության ընդհանրացումը k-արժեք տրամաբանության մի շարք տարատեսակների համար:

Սահմանում 5.3.1: Տրված $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \in E_k^m$ և $\delta = \frac{i}{k-1}$ $(0 \le i \le k-1)$ -ի համար, մենք անվանում ենք δ-(1) /δ-(2) / շրջման արդյունք հետևյալ կորտեժը՝ $\widetilde{\sigma\delta}$, որտեղ յուրաքանչյուր σ_j $(1 \le j \le m)$ փոխարինվում է σ_j^{δ} -ով (1) exponent ELN_k -ի համար /(2) exponent ECN_k-ի և $\mathrm{CN_k}$-Cut-Free-ի համար/:

δ-(1) և δ-(2) շրջման արդյունքը անվանում ենք նաև δ շրջման արդյունք, եթե կարիք չկա նշելու դիտարկվող համակարգը:

Կասենք որևէ կորտեժ շրջման արդյունք է մեկ այլ կորտեժից, եթե գոյություն ունի $\delta = \frac{i}{k-1}(0 \le i \le k-1)$, այնպիսին, որ առաջին կորտեժը δ շրջման արդյունք է երկրորդ կորտեժից:

Տրված $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \in E_k^m$-ի և $\delta = \frac{i}{k-1}$ $(0 \le i \le k-1)$-ի համար, նշանակենք $|\tilde{\sigma}(\delta)|$-ով δ-ների քանակը $\tilde{\sigma}$-ում:

ELN_k համակարգում $TTM_{n,m}$ բանաձևի ընդհանրացումը նշանակենք $L_kTTM_{n,m}$-ով, իսկ ECN_k-ում՝ $C_kTTM_{n,m}$:

Մենք դիտարկում ենք արտածման բարդության t, l, s, w բնութագրիչները, որոնք արդեն սահմանված են գլուխ 1-ում:

Նախ դիտարկենք ELN_k [1] համակարգը և ապացուցենք որոշ օժանդակ պնդումներ, որոնք անհրաժեշտ են հիմնական արդյունքները ներկայացնելու համար:

Լեմմա 5.3.1: Տրված $n \times m$ չափանի 3-արժեք $0, {}^1/_2, 1$-մատրիցայում, կարող ենք կատարել որոշ տողերի δ-(1) շրջում այնպես, որ յուրաքանչյուր սյուն կպարունակի առնվազն մեկ հատ 1, այն և միայն այն դեպքում, երբ $m \le f(n)$, որտեղ $f(n)$-ը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\mathrm{f}(1) = 1,\ \mathrm{f}(\mathrm{n}+1) = \mathrm{f}(\mathrm{n}) + [\mathrm{f}(\mathrm{n})/2] + 1:$$

Ապացույց: Ապացուցենք մակածման եղանակով ըստ n-ի: Երբ $n = 1$, $m = 1$ ակնհայտ է: Ենթադրենք պնդումը ճիշտ է n-ի համար: Դիտարկենք $n + 1$-ի դեպքը: Դիտարկենք վերջին տողը, և եթե որևէ $\delta \in \{0, {}^{1}/_{2}, 1\}$-ի համար $|\tilde{\sigma}(\delta)| \geq [(m + 2)/3]$ /միշտ գոյություն ունի այդպիսի δ/, ապա այդ տողի վրա δ-(1) շրջման արդյունքում ստանում ենք առնվազն $[(m + 2)/3]$ հատ 1: Այդպիսով ստանում ենք առնվազն $[(m + 2)/3]$ հատ սյուն, որոնք պարունակում են 1: Բոլոր մնացած սյուների համար դիտարկում ենք առաջին n տողերը: Սյուների քանակը $m_1 \leq [(2m - 2)/3]$: Քանի որ $m = f(n + 1) = f(n) + [f(n)/2] + 1$, ապա որոշ ձևափոխումներ անելուց հետո, ստանում ենք, որ $m_1 \leq [(2m - 2)/3] \leq f(n)$: Ըստ մակածման ենթադրության $n \times f(n)$ չափանի մատրիցայում հնարավոր է կատարել որոշակի տողերի շրջում այնպես, որ յուրաքանչյուր սյուն պարունակի առնվազն մեկ հատ 1, հետևաբար ապացուցվեց:

Ցույց տանք, որ եթե $m > f(n)$, ապա այդպիսի (1) շրջում գոյություն չունի: Դիտարկենք հետևյալ օրինակը՝ $n = 1, m = 2$ և մատրիցան ունի հետևյալ տեսքը՝

${}^{1}/_{2}$	0

Այս դեպքում հեշտ է նկատել, որ ինչպես էլ շրջենք տողերը, միշտ գոյություն կունենա առնվազն մեկ սյուն, որը չի պարունակում 1:

Հետևանք 5.3.1: Տրված $n \times m$ չափանի k-արժեքանի $/k \geq 4/$ մատրիցայում, կարող ենք կատարել որոշ տողերի (1) շրջում այնպես, որ յուրաքանչյուր սյուն կպարունակի առնվազն մեկ հատ 1, այն և միայն այն դեպքում, երբ $m \leq f(n)$, որտեղ $f(n)$-ը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$f(1) = 1,\ f(n + 1) = f(n) + [f(n)/(k - 1)] + 1:$$

Ապացույցը տրվում է Լեմմա 5.3.1-ի ապացույցի նման:

Կարելի է նկատել հետևյալը՝ $f(n + 1) = f(n) + [f(n)/(k - 1)] + 1 \geq f(n) + f(n)/(k - 1) = kf(n)/(k - 1) \geq \cdots \geq k^n/(k - 1)^n > k^{[n/k]}$:

Հետևանք 5.3.2: ELN_k [1]–ում $1 - k$ -նույնաբանություններ են հանդիսանում հետևյալ բանաձևերը.

$L_k TTM_{n,m} = \vee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in E_k^n} \wedge_{j=1}^{m} \vee_{i=1}^{n} p_{i_j}^{\sigma_j}$ $/n \geq 1, m \leq \mathrm{k}^{[n/k]}$ / և (1) exponent-ով:

Լեմմա 5.3.2: ELN_3 համակարգերում n փոփոխական ունեցող յուրաքանչյուր φ նույնաբանության համար տեղի ունի հետևյալը՝ $s_\varphi = O(n^2)$ և $s_\varphi = \Omega(n)$:

Ապացույց: Վերին գնահատականը ստանալու համար օգտագործում ենք φ-ի D կատարյալ ԴՆՁ-ն, որը ակնհայտ է, որ ուԴՆՁ է:Դիտարկում ենք D ԴՆՁ-ի ծառային արտածումը, որտեղ հենասույթները ձախից դեպի աջ հետևյալ կոնյունկտերն են՝

$$p_1^0, p_1^0, \dots, p_1^0 \quad p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^{1/2} \quad p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^1 \quad \dots\dots\dots \quad p_1^1, p_2^1, \dots, p_n^1$$

Կոնյուկտների քանակը, որոնք օգտագործվում են որպես հենասույթներ 3^k է: Առաջին փուլում կվերցնենք առաջին 3 հենասույթները, և կկիրառենք հեռացման կանոնը, հետո հաջորդ 3-ը, և այդպես շարունակ: Արդյունքում կստանանք 3^{k-1} հատ կոնյունկտ, որոնք չեն պարունակում p_n փոփոխականը: Հաջորդ փուլում կատարելով նույն գործողությունները կհեռացնենք p_{n-1} փոփոխականը: Այսպիսով մենք ստանում ենք ծառատիպ արտածում, որի բարձրությունը $n+1$ է, և յուրաքանչյուր գագաթ կոնյունկտ է, որը ստացվել նախորդ մակարդակի 3 կոնյունկտներից կիրառելով հեռացման կանոնը: Համարակալենք ծառի մակարդակները 0-ից n-ով: 0 մակարդակում, յուրաքանչյուր կոնյունկտ ունի n փոփոխական, իսկ n-րդ մակարդակում, դատարկ կոնյունկտն է: Դիցուք c_l $(1 \leq l \leq n)$-ը l-րդ մակարդակի որևէ կոնյունկտ է: Այն ստացվել է նախորդ մակարդակի c', c'' և c''' կոնյունկտենրից՝ հեռացման կանոնը կիրառելով: Հետևաբար ստանում ենք հետևյալը՝

$$s(c_l) = s(c') + |c''| + |c'''| = |c'| + s(c'') + |c'''| = |c'| + |c''| + s(c''')$$

l-րդ մակարդակի յուրաքանչյուր կոնյունկտ ունի $n-l$ հատ փոփոխական, հետևաբար ստանում ենք՝

$$s(c_l) = s(c') + 2(n-(l-1))$$

Քանի որ կամայական մակարդակի վրա, բոլոր կոնյունկտները ունեն նույն չափը, նշանակենք $S(l)$ -ով l -րդ մակարդակի ցանկացած կոնյունկտի համար օգտագործված տարածությունը.

$$S(l) = S(l-1) + 2(n-l+1)$$

Արտածման ամբողջ օգտագործված տարածությանը կլինի n-րդ մակարդակի դատարկ կոնյունկտի համար օգտագործված տարածությունը.

$$s \leq S(n) = S(n-1) + 2 = S(n-2) + 2(2+1) = \cdots = 2(1+2+\cdots+n) = O(n^2):$$

Ստորին գնահատականը ստանալու համար օգտվենք այն փաստից, որ առնվազն 3 հատ որոշիչ կոնյունկտ պետք է օգտագործվի արտածման մեջ, հետևաբար $s_\varphi = \Omega(n)$:

Թեորեմ 5.3.1: Գոյություն ունի այնպիսի φ_n $1-k$-նույնաբանությունների ($k \geq 3$) հաջորդականություն, որ ELN_k[1]–ում տեղի ունեն հետևյալ հավասարումները

1) $\log_k(|\varphi_n|) = \theta(n)$;
2) $\log_k\log_k(t(\varphi_n)) = \theta(n)$;
3) $\log_k\log_k(l(\varphi_n)) = \theta(n)$;
4) $\log_k(s(\varphi_n)) = \theta(n)$;
5) $\log_k(w(\varphi_n)) = \theta(n)$.

Ապացույց: Որպես $\boldsymbol{\varphi_n}$ **նույնաբանությունների հաջորդականություն դիտարկենք $\boldsymbol{L_kTTM_{n,m}}$-ը** ($\boldsymbol{n \geq 1, m = k^{[n/k]}}$): Վերին գնահատականները ստանալու համար օգտվում ենք φ_n-ի կատարյալ ԴՆՁ-ից, իսկ ստորին գնահատականները ստանալու համար φ_n-որոշիչ կոնյունկտի հատկություններից:

Դժվար չէ նկատել, որ φ_n-ում փոփոխականների քանակը $nk^nk^{[n/k]}$ է, և կամայական φ_n-որոշիչ կոնյունկտը ունի առնվազն $k^{[n/k]}$ հատ փոփոխական: Օգտվելով **Դիտողություն 5.1**.-ից, φ_n-որոշիչ կոնյունկտների քանակը առնվազն $k^{k^{[n/k]}}$, և հետևաբար օգտագործվող հենասույթների քանակը նույնպես պետք է լինի առնվազն $k^{k^{[n/k]}}$:

Հաշվի առնելով նաև լեմմա 5.3.2-ի ստացված արդյունքը, թեորեմը ապացուցված է:

Այժմ դիտարկենք $\mathrm{ECN_k}$ [1] համակարգը:

Լեմմա 5.3.3: Տրված $n \times m$ չափանի 3-արժեքանի $0, {}^1\!/_2, 1$ -մատրիցայում, կարող ենք կատարել որոշ տողերի (2) շրջում այնպես, որ յուրաքանչյուր սյուն կպարունակի առնվազն մեկ հատ 1, այն և միայն այն դեպքում, երբ $m \leq f(n)$, որտեղ $f(n)$-ը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$f(1) = 1,\ f(n+1) = f(n) + [f(n)/2] + 1:$$

Ապացույցը տրվում է կատարելով Լեմմա 5.3.1-ի ապացույցի դատողությունները:

Ցույց տանք, որ եթե $\mathrm{m} > \mathrm{f(n)}$, ապա այդպիսի (2) շրջում գոյություն չունի: Դիտարկենք նույն օրինակը, որը դիտարկել ենք Լեմմա 5.3.1-ի ապացույցի ժամանակ: Կրկին կարելի է նկատել, որ ցանկացած տողերի շրջումից հետո, առնվազն մեկ սյուն չի պարունակի 1:

Հետևանք 5.3.3: Տրված $\mathrm{n} \times \mathrm{m}$ չափանի k-արժեքանի /$\mathrm{k} \geq 4$/ մատրիցայում, կարող ենք կատարել որոշ տողերի (2) շրջում այնպես, որ յուրաքանչյուր սյուն կպարունակի առնվազն մեկ հատ 1, այն և միայն այն դեպքում, երբ $m \leq f(n)$, որտեղ $f(n)$-ը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\mathrm{f}(1) = 1,\ \mathrm{f}(\mathrm{n}+1) = \mathrm{f}(\mathrm{n}) + [\mathrm{f}(\mathrm{n})/(\mathrm{k}-1)] + 1:$$

Այստեղ նույնպես կարելի է նկատել հետևյալը՝ $\mathrm{f}(\mathrm{n}+1) = \mathrm{f}(\mathrm{n}) + [\mathrm{f}(\mathrm{n})/(\mathrm{k}-1)] + 1 \geq \mathrm{f}(\mathrm{n}) + \mathrm{f}(\mathrm{n})/(\mathrm{k}-1) = \mathrm{kf}(\mathrm{n})/(\mathrm{k}-1) \geq \cdots \geq \mathrm{k}^{\mathrm{n}}/(\mathrm{k}-1)^{\mathrm{n}} > \mathrm{k}^{[\mathrm{n}/\mathrm{k}]}$:

Հետևանք 5.3.4: ECN_k [1]–ում $1-k$ -նույնաբանություններ են հանդիսանում հետևյալ բանաձևերը.

$$C_k TTM_{n,m} = \vee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in E_k^n} \wedge_{j=1}^{m} \vee_{i=1}^{n} {p_{i_j}}^{\sigma_j} \ /n \geq 1, m \leq \mathrm{k}^{[\mathrm{n}/\mathrm{k}]}/ \text{ և (2) exponent-ով:}$$

Լեմմա 5.3.4: ECN_3 համակարգերում n փոփոխական ունեցող յուրաքանչյուր φ նույնաբանության համար տեղի ունի հետևյալը՝ $s_\varphi = O(n^2)$ և $s_\varphi = \Omega(n)$:

Ապացույցը տրվում է Լեմմա 5.3.2-ի ապացույցի նման:

Լեմմա 5.3.5: $\mathrm{CN_k}$-Cut-Free և ECN_k համակարգերը բազմանդամորեն համարժեք են արտածման բարդության դիտարկվող բոլոր չորս բնութագրիչների համար:

Ապացույց: Պարզության համար դատողությունները կանենք $k=3$-ի դեպքում, սակայն նույն ձև կարելի է անել նաև $k \geq 4$-ի դեպքում: Երկու համակարգերի բազմանդամորեն համարժեք լինելը նշանակում է, որ համակարգերից յուրաքանչյուրում ցանկացած նույնաբանության արտածում, կարելի է ձևափոխել այդ նույնաբանության այնպիսի արտածման մյուս համակարգում, որ բարդության բնութագրիչների գնահատականները աճում են ամենաշատը բազմանդամորեն: Դժվար չէ նկատել, որ ECN_3 համակարգում ցանկացած φ բանաձևի ոԴՆՁ-ի միջոցով դատարկ կոնյունկտի արտածումը կարելի է ձևափոխել φ բանաձևի արտածման $\mathrm{CN_3}$-

Cut-Free համակարգում՝ արտածման բարդության t , s և w բնութագրիչների բարդությունների ոչ ավել քան $(*|\varphi|)$ աճով և l բարդության ոչ ավել քան $(*|\varphi|^2)$ աճով: Օգտվելով CN_3-Cut-Free համակարգի 1-ին և 2-րդ խմբի հենասույթներից մենք կարող ենք ստանալ φ բանաձևը կամայական φ-որոշիչ կոնյունկտից և հետո օգտվելով 3-րդ խմբի հենասույթներից արտածել φ-ն: Հակառակ կողմը ավելի հեշտ է: Մենք կարող ենք ECN_3 համակարգում որպես հենասույթներ վերցնել CN_3-Cut-Free համակարգում φ նույնաբանության արտածման ժամանակ հանդիպած հենասույթների 3-րդ խմբի յուրաքանչյուր φ-որոշիչ կոնյունկտը: Այս դեպքում բարդության բնութագրիչների աճ չի լինում:

Թեորեմ 5.3.2: Գոյություն ունի այնպիսի φ_n $1-\mathrm{k}$-նույնաբանությունների $(\mathrm{k} \geq 3)$ հաջորդականություն, որ $\mathrm{ECN_k}$ [1]–ում և $\mathrm{CN_k}$ -Cut-Free[1]-ում տեղի ունեն հետևյալ հավասարումները

1) $log_{\mathrm{k}}(|\varphi_{\mathrm{n}}|) = \theta(\mathrm{n});$
2) $log_{\mathrm{k}}\log_{\mathrm{k}}(\mathrm{t}(\varphi_{\mathrm{n}})) = \theta(\mathrm{n});$
3) $log_{\mathrm{k}}\log_{\mathrm{k}}(\mathrm{l}(\varphi_{\mathrm{n}})) = \theta(\mathrm{n});$
4) $log_{\mathrm{k}}(\mathrm{s}(\varphi_{\mathrm{n}})) = \theta(\mathrm{n});$
5) $log_{\mathrm{k}}(\mathrm{w}(\varphi_{\mathrm{n}})) = \theta(\mathrm{n}).$

Ապացույց: Որպես $\boldsymbol{\varphi_n}$ **նույնաբանությունների հաջորդականություն դիտարկենք $\boldsymbol{C_kTTM_{n,m}}$-ը** $(\boldsymbol{n \geq 1, m = k^{[n/k]}})$: Վերին գնահատականները ստանալու համար օգտվում ենք φ_n-ի կատարյալ ԴՆՁ-ից, իսկ ստորին գնահատականները ստանալու համար φ_n-որոշիչ կոնյունկտի հատկություններից:

Դժվար չէ նկատել, որ φ_n -ում փոփոխականների քանակը $nk^nk^{[n/k]}$ է, և կամայական φ_n -որոշիչ կոնյունկտը ունի առնվազն $k^{[n/k]}$ հատ փոփոխական: Օգտվելով պնդում 5.1.1-ից, φ_n-որոշիչ կոնյունկտների քանակը առնվազն $k^{k^{[n/k]}}$, և հետևաբար օգտագործվող հենասույթների քանակը նույնպես պետք է լինի առնվազն $k^{k^{[n/k]}}$:

Հաշվի առնելով նաև լեմմա 5.3.4-ի և լեմման 5.3.5-ի ստացված արդյունքները, թեորեմը ապացուցված է:

Այժմ դիտարկենք $ELN_3[1/2, 1]$ և $ECN_3[1/2, 1]$ համակարգերը:

Լեմմա 5.3.6: Տրված $n \times m$ չափանի 3-արժեքանի $0, {}^1/_2, 1$ -մատրիցայում, կարող ենք կատարել որոշ տողերի 0-(1) շրջում այնպես, որ յուրաքանչյուր սյուն կպարունակի առնվազն մեկ հատ 1 կամ ${}^1/_2$, այն և միայն այն դեպքում, երբ $m \leq 2^n - 1$:

Ապացույց: Ապացույցը տրվում է մակածման եղանակով ըստ մատրիցայի տողերի քանակի: Երբ $n = 1$, $m = 1$ ակնհայտ է: Ենթադրենք պնդումը ճիշտ է n-ի համար: Ցույց տանք որ $n + 1$-ի դեպքում նույնպես ճիշտ է: Դիցուք տողերի քանակը $n + 1$ է և սյուների քանակը ոչ ավել է քան $2^{n+1} - 1$: Դիտարկենք վերջին տողը, և եթե $|0| \geq |{}^1/_2| + |1|$, ապա 0-(1) շրջումից հետո, այդ տողում ստանում ենք առնվազն 2^n հատ ${}^1/_2$ կամ 1: Հետևաբար ստացվում է 2^n հատ սյուն, որոնք ունեն առնվազն մեկ հատ 1 կամ ${}^1/_2$: Եթե $|0| < |{}^1/_2| + |1|$, ապա կարող ենք ոչ մի բան չանել, և այս դեպքում նույնպես կունենանք 2^n հատ սյուն, որոնք ունեն առնվազն մեկ հատ 1 կամ ${}^1/_2$: Բոլոր մնացած սյուներով և առաջին n տողերով կազմված ենթամատրիցայում պնդումը ճիշտ է ըստ մակածման ենթադրության:

Ցույց տանք, որ եթե $\mathrm{m} > \mathrm{f(n)}$, ապա այդպիսի 0-(1) շրջում գոյություն չունի: Կրկին կարող ենք դիտարկել նույն օրինակը, որը դիտարկել ենք Լեմմա 5.3.1-ի և Լեմմա 5.3.3-ի ապացույցի ժամանակ:

Հետևանք 5.3.5: ELN_3 [$1/2$, 1]–ում $\geq 1/2 - 3$ -նույնաբանություններ են հանդիսանում հետևյալ բանաձևերը.

$$L_3TTM_{n,m} = \vee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in E^n} \wedge_{j=1}^{m} \vee_{i=1}^{n} {p_{i_j}}^{\sigma_j} \ /n \geq 1, m \leq 2^n - 1 \ / \text{ և (1) exponent-ով:}$$

Թեորեմ 5.3.3: Գոյություն ունի այնպիսի $\mathrm{\varphi_n} \geq 1/2 - 3$-նույնաբանությունների հաջորդականություն, որ $\mathrm{ELN_3}[1/2, 1]$–ում տեղի ունեն հետևյալ հավասարումները

1) $l\mathrm{og_3}(|\mathrm{\varphi_n}|) = \theta(\mathrm{n})$;
2) $l\mathrm{og_2}\mathrm{log_3}(\mathrm{t}(\mathrm{\varphi_n})) = \theta(\mathrm{n})$;
3) $l\mathrm{og_2}\mathrm{log_3}(\mathrm{l}(\mathrm{\varphi_n})) = \theta(\mathrm{n})$;

4) $log_3(s(\varphi_n)) = \theta(n)$;

5) $log_3(w(\varphi_n)) = \theta(n)$.

Ապացույց: Որպես $\boldsymbol{\varphi_n}$ **նույնաբանությունների հաջորդականություն դիտարկենք** $\boldsymbol{L_3TTM_{n,m}}$**-ը** ($\boldsymbol{n \geq 1, m = 2^n - 1}$): Վերին գնահատականները ստանալու համար օգտվում ենք φ_n-ի կատարյալ ԴՆՁ-ից, իսկ ստորին գնահատականները ստանալու համար φ_n-որոշիչ կոնյունկտի հատկություններից:

Դժվար չէ նկատել, որ φ_n-ում փոփոխականների քանակը $n2^n(2^n - 1)$ է, և կամայական φ_n -որոշիչ կոնյունկտը ունի առնվազն $2^n - 1$ հատ փոփոխական: Օգտվելով **Դիտողություն 5.1.**-ից, φ_n-որոշիչ կոնյունկտների քանակը առնվազն 3^{2^n-1}, և հետևաբար օգտագործվող հենասույթների քանակը նույնպես պետք է լինի առնվազն 3^{2^n-1}:

Հաշվի առնելով նաև լեմմա 5.3.2-ի ստացված արդյունքը, թեորեմը ապացուցված է:

Լեմմա 5.3.7: Տրված $n \times m$ չափանի 3-արժեք $0, {}^1\!/_2, 1$-մատրիցայում, կարող ենք կատարել որոշ տողերի (2) շրջում այնպես, որ յուրաքանչյուր սյուն կպարունակի առնվազն մեկ հատ 1 կամ ${}^1\!/_2$, այն և միայն այն դեպքում, երբ $m \leq 3^n - 1$:

Ապացույց: Ապացույցը տրվում է մակածման եղանակով ըստ մատրիցայի տողերի քանակի: Երբ $n = 1$, $m \leq 2$ ակնհայտ է: Ենթադրենք պնդումը ճիշտ է n-ի համար: Ցույց տանք որ $n + 1$-ի դեպքում նույնպես ճիշտ է: Դիցուք տողերի քանակը $n + 1$ է և սյուների քանակը ոչ ավել է քան $3^{n+1} - 1$: Դիտարկենք վերջին տողը:Եթե $|0| \leq {}^m\!/_3$, ապա ոչ մի բան չենք անում, քանի որ արդեն ստացվում է, որ առնվազն ${}^{2m}\!/_3$ հատ սյուն պարունակում են 1 կամ ${}^1\!/_2$, եթե $|{}^1\!/_2| \leq {}^m\!/_3$, ապա 0-(2) շրջումից հետո, այդ տողում ստանում ենք $|0| \leq {}^m\!/_3$, եթե $|1| \leq {}^m\!/_3$, ապա ${}^1\!/_2$-(2) շրջումից հետո վերջին տողում ստանում ենք $|0| \leq {}^m\!/_3$: Բոլոր մնացած սյուներով և առաջին n տողերով կազմված ենթամատրիցայում պնդումը ճիշտ է ըստ մակածման ենթադրության:

Ցույց տանք, որ եթե $\mathrm{m} > \mathrm{f(n)}$, ապա այդպիսի (2) շրջում գոյություն չունի: Դիտարկենք հետևյալ օրինակը՝ $\mathrm{n} = 1, \mathrm{m} = 3$ և մատրիցան ունի հետևյալ տեսքը՝

0	1	$^1/_2$

Այս դեպքում հեշտ է նկատել, որ ինչպես էլ շրջենք տողերը, միշտ գոյություն կունենա առնվազն մեկ սյուն, որը պարունակում է 0:

Հետևանք 5.3.6: ECN_3 [$1/2$, 1]-ում $\geq 1/2 - 3$ -նույնաբանություններ են հանդիսանում հետևյալ բանաձևերը.

$$C_3TTM_{n,m} = \vee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in E_3^n} \wedge_{j=1}^{m} \vee_{i=1}^{n} p_{i_j}{}^{\sigma_j} \; /n \geq 1, m \leq 3^n - 1 \; / \text{ և (2) exponent-ով:}$$

Թեորեմ 5.3.4: Գոյություն ունի այնպիսի $\varphi_\mathrm{n} \geq 1/2 - 3$-նույնաբանությունների հաջորդականություն, որ $\mathrm{ECN_3}[1/2, 1]$–ում տեղի ունեն հետևյալ հավասարումները

1) $log_3(|\varphi_\mathrm{n}|) = \theta(\mathrm{n});$
2) $log_3\log_3(\mathrm{t}(\varphi_\mathrm{n})) = \theta(\mathrm{n});$
3) $log_3\log_3(\mathrm{l}(\varphi_\mathrm{n})) = \theta(\mathrm{n});$
4) $log_3(s(\varphi_\mathrm{n})) = \theta(\mathrm{n});$
5) $log_3(\mathrm{w}(\varphi_\mathrm{n})) = \theta(\mathrm{n}).$

Ապացույց: Որպես $\boldsymbol{\varphi_n}$ **նույնաբանությունների հաջորդականություն դիտարկենք $\boldsymbol{C_3TTM_{n,m}}$-ը** $(\boldsymbol{n \geq 1, m = 3^n - 1})$: Վերին գնահատականները ստանալու համար օգտվում ենք φ_n-ի կատարյալ ԴՆՁ-ից, իսկ ստորին գնահատականները ստանալու համար φ_n-որոշիչ կոնյունկտի հատկություններից:

Դժվար չէ նկատել, որ φ_n-ում փոփոխականների քանակը $n3^n(3^n - 1)$ է, և կամայական φ_n -որոշիչ կոնյունկտը ունի առնվազն $3^n - 1$ հատ փոփոխական: Օգտվելով **Դիտողություն 5.1.**-ից, φ_n-որոշիչ կոնյունկտների քանակը առնվազն 3^{3^n-1}, և հետևաբար օգտագործվող հենասույթների քանակը նույնպես պետք է լինի առնվազն 3^{3^n-1}:

Հաշվի առնելով նաև լեմմա 5.3.4-ի ստացված արդյունքը, թեորեմը ապացուցված է:

ԳԼՈՒԽ 6. ԴԱՍԱԿԱՆ, ԻՆՏՈՒԻՑԻՈՆԻՍՏԱԿԱՆ ԵՎ ՄԻՆԻՄԱԼ ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՍՈՒՅԹԱՅԻՆ ՀԱՇՎԻ ՆՈՒՅՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՈՇԻՉ ԴԻԶՅՈՒՆԿՏԻՎ ՆՈՐՄԱԼ ՁԵՎԵՐԻ ՔԱՆԱԿԱԿԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԻ ԵՎ ԱՐՏԱԾՄԱՆ ԲԱՐԴՈՒԹՅԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԻ ՓՈԽՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Այս գլխում տրված են դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ նույնաբանությունների որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների սահմանումները, դրանց քանակական բնութագրիչների և որոշակի համակարգերում արտածման բարդության բոլոր չորս բնութագրիչների փոխհարաբերությունները: Հիմնական արդյունքները շարադրված են [39]-ում:

6.1. ոԴՆՁ փարափեսակները

Հետևելով [29]-ին սահմանենք որոշիչ ԴՆՁ-երի տարատեսակները:

Սահմանում 6.1.1.

1. φ բանաձևի համար ոԴՆՁ-ն կոչվում է **կրճատված** որոշիչ ԴՆՁ (**կոԴՆՁ**), եթե այն բաղկացած է բոլոր մինիմալ φ որոշիչ կոնյունկտներից:
2. φ բանաձևի համար մինիմալ φ որոշիչ կոնյունկտներից բաղկացած ոԴՆՁ-ն կոչվում է **փակուղային** որոշիչ ԴՆՁ (**փոԴՆՁ**), եթե նրա կամայական կոնյունկտ հեռացնելուց հետո, այն հավասար չի լինում φ-ին:
3. φ բանաձևի համար ոԴՆՁ-ն կոչվում է **կարճագույն** որոշիչ ԴՆՁ (**կճոԴՆՁ**), եթե այն ունի մինիմալ քանակով կոնյունկտներ բոլոր ոԴՆՁ-երի համեմատությամբ:
4. φ բանաձևի համար ոԴՆՁ-ն կոչվում է **մինիմալ** որոշիչ ԴՆՁ (**մոԴՆՁ**), եթե այն ունի մինիմալ քանակով լիտերալներ բոլոր ոԴՆՁ-երի համեմատությամբ:

Բուլյան ֆունկցիայի համար կրճատված դիզյունկտիվ նորմալ ձևը կառուցվում է միարժեք եղանակով: Նրա ամենակարևոր հատկությունը այն է, որ յուրաքանչյուր մինիմալ ԴՆՁ և գոնե մեկ կարճագույն ԴՆՁ կարող են ստացվել կրճատված ԴՆՁ-ից, հեռացնելով որոշակի տարրական կոնյունկտներ: Այդ իսկ պատճառով, բազմաթիվ մինիմիզացիոն ալգորիթմներ օգտագործում են կԴՆՁ-ն որպես Բուլյան ֆունկցիայի սկզբնական ներկայացում:

Կրճատված ոԴՆՁ-ն նույնպես ունի այդ հատկությունը, այդ իսկ պատճառով, մենք կարող ենք օգտագործել հայտնի ալգորիթմները, որպեսզի ստանանք կարճագույն և մինիմալ ոԴՆՁ-երը, կրճատված ոԴՆՁ-ից: Սակայն ոԴՆՁ-ի դեպքում, ալգորիթմի յուրաքանչյուր քայլից հետո մենք պետք է **ստուգենք ստացված կոնյունկտի որոշիչ լինելու հատկությունը**:

6.2. Դասական նույնաբանությունների ոԴՆՁ-ի փարափեսակների հափկությունները

Քանի որ, միայն նույնաբանություններն են արտածելի ասույթային հաշվի համակարգերում, մենք միայն կդիտարկենք ոԴՆՁ-երը նույնաբանությունների համար:

Հեշտ է ապացուցել հետևյալը.

Հատկություն 6.2.1: Տրված նույնաբանության համար, յուրաքանչյուր ոԴՆՁ, պետք է առնվազն պարունակի մեկ փոփոխական իր ժխտման հետ:

Իսկապես, հակառակ դեպքում ոԴՆՁ-ը չի կարող «ծածկել» բուլյան խորհանարդի $(0,0,\dots,0)$ կետը:

Հայտնի է, որ մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի մինիմալ ԴՆՁ-ն, չի պարունակում ժխտումով փոփոխական, սակայն ոԴՆՁ-երի համար դա այդպես չէ:

Հատկություն 6.2.2: Գոյություն ունեն մոնոտոն բուլյան ֆունցկիաներ (նույնաբանություններ), որոնց կամայական ոԴՆՁ (այդ թվում մինիմալ ոԴՆՁ), պետք է պարունակի առնվազն մեկ փոփոխական իր ժխտման հետ:

Հատկություն 6.2.3: n փոփոխականի նույնաբանությունների կճոԴՆՁ-ում հանդիպող կոնյունկտների մաքսիմալ քանակը հավասար է 2^n:

Վերին գնահատականի ապացույցը կարող ենք ստանալ ինդուկցիայի մեթոդով, կիրառելով Հատկություն 6.2.1-ը: Ստորին գնահատականը ստացվում է դիտարկելով հետևյալ նույնաբանությունները

$$a_n = p_1 \equiv p_2 \equiv \cdots \equiv p_n \equiv p_1 \equiv p_2 \equiv \cdots \equiv p_n,$$

որոնց յուրաքանչյուր որոշիչ կոնյունկտ պարունակում է բոլոր փոփոխականները:

Նկատենք որ, n փոփոխականի բուլյան ֆունկցիաների համար, կարճագույն ԴՆՁ-ի կոնյունկտների քանակը ամենաշատը 2^{n-1} է [29]:

Յուրաքանչյուր φ բանաձևի ոԴՆՁ-ը, φ բանաձևի միջոցով ներկայացված բուլյան ֆունկցիայի ԴՆՁ է, հետևաբար, ԴՆՁ-ի բազմաթիվ քանակական հատկություններ ճիշտ են նաև ոԴՆՁ-ի համար:

Եթե դիտարկենք միայն նույնաբանությունները, ապա ԴՆՁ-ի քանակական հատկությունների վերին գնահատականները ճիշտ են նաև ոԴՆՁ-ի համար: Ստորին գնահատականների համար մենք կարող ենք կառուցել «վատ» նույնաբանությունների օրինակներ, հիմնված «վատ» բանաձևերի վրա, որոնք ներկայացված են [29]-ում, օգտագործելով հետևյալ հատկությունը.

Հատկություն 6.2.4: Եթե φ բանաձևը φ_1 և φ_2 բանաձևերի դիզյունկցիա է, ապա $\varphi - 1$ որոշիչ կոնյունկտը պետք է լինի կա՛մ $\varphi_1 - 1$ որոշիչ, կա՛մ $\varphi_2 - 1$ որոշիչ:

Մասնավորապես, եթե $L^{\text{կ}}(n)$ -ով նշանակենք n փոփոխականի նույնաբանությունների կրճատված ոԴՆՁ-ի կոնյունկտների մաքսիմալ քանակը, ապա կարող ենք ապացուցել հետևյալը.

Հատկություն 6.2.5: $L^{\text{կ}}(n) = O(\frac{3^n}{\sqrt{n}})$ և $L^{\text{կ}}(n) = \Omega(\frac{3^n}{n})$:

Վերին գնահատականի ապացույցը նույնն է, ինչ որ ներկայացված է [29]-ում: Ստորին գնահատականը ստանալու համար բավական է [29]-ում դիտարկված «վատ» գոտկային ֆունկցիաները լրացնել վերևի և ներքևի մասերը դիզյունկցիաներով այնպես, որ լրացված բանաձևերը վերածվեն նույնաբանությունների:

Այսպիսով, ենթադրենք $S_n^{[i,k]}$-ն $(0 \le i \le k \le n)$ n փոփոխականի բուլյան ֆունկցիա է, այնպիսին, որ $\forall(\sigma_1 \dots \sigma_n) \in E^n$-ի համար $S_n^{[i,k]}(\sigma_1 \dots \sigma_n) = 1$, այն և միայն այն դեպքում, երբ $i \le \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \le k$, և $D^{կ}\left(S_n^{[i,k]}\right)$-ով նշանակված է $S_n^{[i,k]}$-ի կրճատված ԴՆՁ-ն: «Վատ» նույնաբանությունների հաջորդականություն ասելով, մենք դիտարկում ենք հետևյալ բանաձևերը $n \ge 3$-ի համար

$$\varphi_n = D^{կ}\left(S_n^{[0,[n/3]-1]}\right) \vee D^{կ}\left(S_n^{[[n/3],2[n/3]]}\right) \vee D^{կ}\left(S_n^{[2[n/3]+1,n]}\right):$$

Դժվար չէ նկատել, որ φ_n բանաձևի կրճատված ԴՆՁ-ը, այդպիսով նաև ոԴՆՁ-ը ունեն

$$C_n^{[n/3]-1} + C_n^{[n/3]} * C_{n-[n/3]}^{[n/3]} + C_n^{2[n/3]+1}$$

հատ տարբեր կոնյունկտներ, որոնցից յուրաքանչյուրը φ_n-որոշիչ են:

Նշենք, որ $S_n^{[[n/3],2[n/3]]}$ բուլյան ֆունկցիաների հաջորդականությունը դիտարկված է [29]-ում:

6.3. E համակարգում արտածման բարդության բնութագրիչների և դասական նույնաբանությունների ոԴՆՁ-երի որոշ հայտանիշների փոխհարաբերությունը.

Գլուխ 1-ում արդեն սահմանվել է կրճատման կանոնով E արտածման համակարգը:

Ստորև ներկայացնենք դասական նույնաբանությունների E-արտածման բարդության բնութագրիչների որոշակի գնահատականներ:

$Ք(D(\varphi))$-ով նշանակենք φ բանաձևի D ԴՆՁ-ում կոնյունկտների քանակը:

Գլուխ 1-ում սահմանել ենք φ-ի որոշիչ չափի գաղափարը, որը նշանակում ենք $ds(\varphi)$-ով:

Թեորեմ 6.3.1:

1.) Ցանկացած φ նույնաբանության համար

a. $t_{\varphi}^{E} \leq 2^{|\varphi|}$

b. $t_{\varphi}^{E} \geq Ք\big(կճոԴՆՁ(\varphi)\big) \geq 2^{ds(\varphi)}$

c. $l_{\varphi}^{E} \geq |մոԴՆՁ(\varphi)|$

d. $l_{\varphi}^{E} \geq ds(\varphi) * Ք\big(կճոԴՆՁ(\varphi)\big) \geq ds(\varphi) * 2^{ds(\varphi)}$

e. $ds(\varphi) \leq w_{\varphi}^{E} \leq |\varphi|$

f. $s_{\varphi}^{E} \leq \log^{2}{}_{2}(|կատԴՆՁ(\varphi)|)$

2.) Գոյություն ունի γ_n նույնաբանությունների հաջորդականություն, այնպիսին որ

$$|\gamma_n| = \theta(n)$$

$$t_{\gamma_n}^{EC} = \theta(2^n).$$

Ապացույց. Առաջին կետը ապացուցվում է շատ հեշտ: Իսկապես,

a. ինչպես արդեն նշել ենք, յուրաքանչյուր ասույթային հաշվի φ բանաձևի կատարյալ ԴՆՁ-ը φ-որոշիչ է,
b. յուրաքանչյուր φ-որոշիչ ԴՆՁ պետք է պարունակի առնվազն $2^{ds(\varphi)}$ հատ կոնյունկտ, և նրանցից յուրաքանչյուրը պետք է օգտագործվի որպես E համակարգի հենասույթ, φ-ի արտածման ժամանակ E-ում,
c. E-ում φ -ի արտածման ժամանակ հենասույթների երկարությունների գումարը չի կարող լինել ավելի փոքր քան φ բանաձևի մինիմալ ոԴՆՁ-ի սիմվոլների քանակը,
d. հետևում է b կետից,
e. քանի որ $ds(\varphi)$-ն մինիմալ որոշիչ կոնյունկտի լիտերալների քանակն է, ապա ակնհայտ է, որ արտածման ամենաերկար տողի երկարությունը չի կարող լինել ավելի փոքր քան $d(\varphi)$-ն է: Մյուս կողմից, ակնհայտ է, որ w_{φ}^{E}-ն չի կարող մեծ լինել քան արտածվող բանաձևի երկարությունն է,
f. ենթադրենք φ -ն k փոփոխականի նույնաբանություն է: Այդ դեպքում կատԴՆՁ(φ) -ն բաղկացած է 2^k հատ կոնյունկտներից՝ $p_1^0 p_2^0 \dots p_k^0$, $p_1^0 p_2^0 \dots p_k^1, \dots, p_1^1 p_2^1 \dots p_k^1$, որոնք կլինեն մեր համակարգի հենասույթները: Առաջին փուլում վերցնենք առաջին երկու հենասույթները և կիրառենք

հեռացման կանոնը նրանց վրա: Այնուհետև վերցնենք հաջորդ երկու հենասույթները և նորից կիրառենք հեռացման կանոնը և այդպես շարունակ: Արդյունքում կստանանք 2^{k-1} հատ կոնյունկտ, որոնք չեն պարունակի p_k փոփոխականը: Հաջորդ փուլում, նույն ձևով հեռացնենք p_{k-1} փոփոխականը: Եվ այդպես հաջորդաբար հեռացնելով բոլոր փոփոխականները, մենք կստանանք $k+1$ բարձրությամբ ծառային արտածում, որտեղ յուրաքանչյուր գագաթ կլինի ինչ-որ կոնյունկտ, որը ստացվել է հեռացման կանոնը կիրառելով իր երկու նախորդ կոնյուկտների վրա: Նշանակենք ծառի մակարդակները 0-ից k թվերով (0 մակարդակի յուրաքանչյուր կոնյունկտ ունի k երկարություն, իսկ k-րդ մակարդակում դատարկ կոնյունկտն է): c_l-ով նշանակենք l-րդ մակարդակի ինչ-որ մի կոնյունկտ: Այն ստացվել է $l-1$ մակարդակի c'_{l-1} և c''_{l-1} կոնյունկտներից հեռացման կանոնը կիրառելով: Կարող ենք ասել, որ $s(c_l) = s(c'_{l-1}) + |c''_{l-1}| = |c'_{l-1}| + s(c''_{l-1})$: l-րդ մակարդակի յուրաքանչյուր կոնյունկտ ունի $k-l$ երկարություն, այսինքն ստացվում է

$$s(c_l) = s(c'_{l-1}) + k - (l-1):$$

$S(l)$-ով նշանակենք l-րդ մակարդակի յուրաքանչյուր կոնյունկտը ստանալու ծավալը: Հետևաբար՝

$$S(l) = S(l-1) + k - l + 1:$$

Այստեղից կարող ենք ստանալ ամբողջ արտածման ծավալը ՝

$$s_\varphi^E \le S(k) = S(k-1) + 1 = S(k-2) + 2 + 1 = S(k-l) + l + \cdots + 2 + 1 = k(k+1)/2 \\ = O(k^2):$$

Քանի, որ $|\text{կատԴՆՁ}(\varphi)| = n2^n$, ստանում ենք, որ $s_\varphi^E \le \log^2{}_2(|\text{կատԴՆՁ}(\varphi)|)$:

Երկրորդ կետի ապացույցը տրված է [6]-ում, օգտագործելով հետևյալ բանաձևերը

$$\gamma_n = TTM_{n,2^{n-1}},$$

որտեղ

$$TTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\in E^n} \bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} p_{ij}^{\sigma_j} \ (n \geq 1, 1 \leq m \leq 2^n - 1).$$

6.4. Որոշիչ Դիզյունկտիվ Նորմալ Ձևերը ոչ դասական նույնաբանությունների համար

Ինչպես արդեն նշվել է **ինտուցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանություններում նույնաբանություն հանդիսանալը որոշվում է համապատասխան համակարգերում արտածելիության հիման վրա**, հետևաբար դասական տրամաբանության համար տրված որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի սահմանումը չի գործում այս տրամաբանություններում:

Գլուխ 3.-ում նկարագրված է ոչ դասական տրամաբանությունների՝ ինտուիցիոնիստական տրամաբանության ասույթային հաշվի **IPL-ի** և մինիմալ տրամաբանության ասույթային հաշվի **MPL-ի** համար կառուցվել են համարատասխանաբար EI և EM կրճատման կանոնով համակարգերը RI և RM ռեզոլյուցիոն համակարգերի արտածումների հիման վրա:

Օգտագործելով տարբեր RI-արտածումներ / RM-արտածումներ/, մենք կարող ենք կառուցել տարբեր $\varphi - I$-որոշիչ ԴՆՁ-եր / $\varphi - M$-որոշիչ ԴՆՁ-եր /, և հետևաբար, ինչպես դասական տրամաբանության համար կարող ենք սահմանել ոԴՆՁ-երի տարատեսակները IPL-ում և CPL-ում:

Հաշվի առնելով, որ դասական տրամաբանության յուրաքանչյուր φ նույնաբանության համար, $\neg\neg\varphi$ / $(\varphi \supset\perp) \supset\perp$ / բանաձևը նույնաբանություն է նաև ինտուցիոնիստական /մինիմալ/ տրամաբանությունում /տես, օրինակ, [20]/, **6.2. և 6.3. կետում նկարագրված բոլոր արդյունքները ճիշտ են նաև IPL-ում /MPL-ում/:**

Ամփոփում

Սույն ատենախոսությունում ուսումնասիրված են արտածումների բարդության բնութագրիչների գնահատականները դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների ասույթային հաշվի տարբեր համակարգերում՝ ճշգրտվել է որոշ հայտնի համակարգերի դիրքը ասույթային հաշվի համակարգերի ըստ արդյունավետության բաղդատման աղյուսակում, այդ աղյուսակը լրացվել է երկու նոր տիպի համակարգերի անվերջ հաջորդականություններով, հայտնի Ֆրեգեի համակարգերի համար հաջողվել է բարձրացնել արտածումների քայլերի ստորին գնահատականը, ներմուծվել են բազմարժեք նույնաբանությունների հաջորդականություններ, որոնց համար բազմարժեք տրամաբանությունների որոշ տարատեսակներում ստացվել են արտածման բոլոր հայտնի բնութագրիչների օպտիմալ գնահատականներ /ըստ կարգի նույն ստորին և վերին գնահատականներ/, երկարժեք տրամաբանության որոշ համակարգերի համար ստացվել են արտածման բարդությունների որոշ գնահատականներ, հիմնվելով որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների վրա:

Ստացված հիմնական արդյունքներն են.

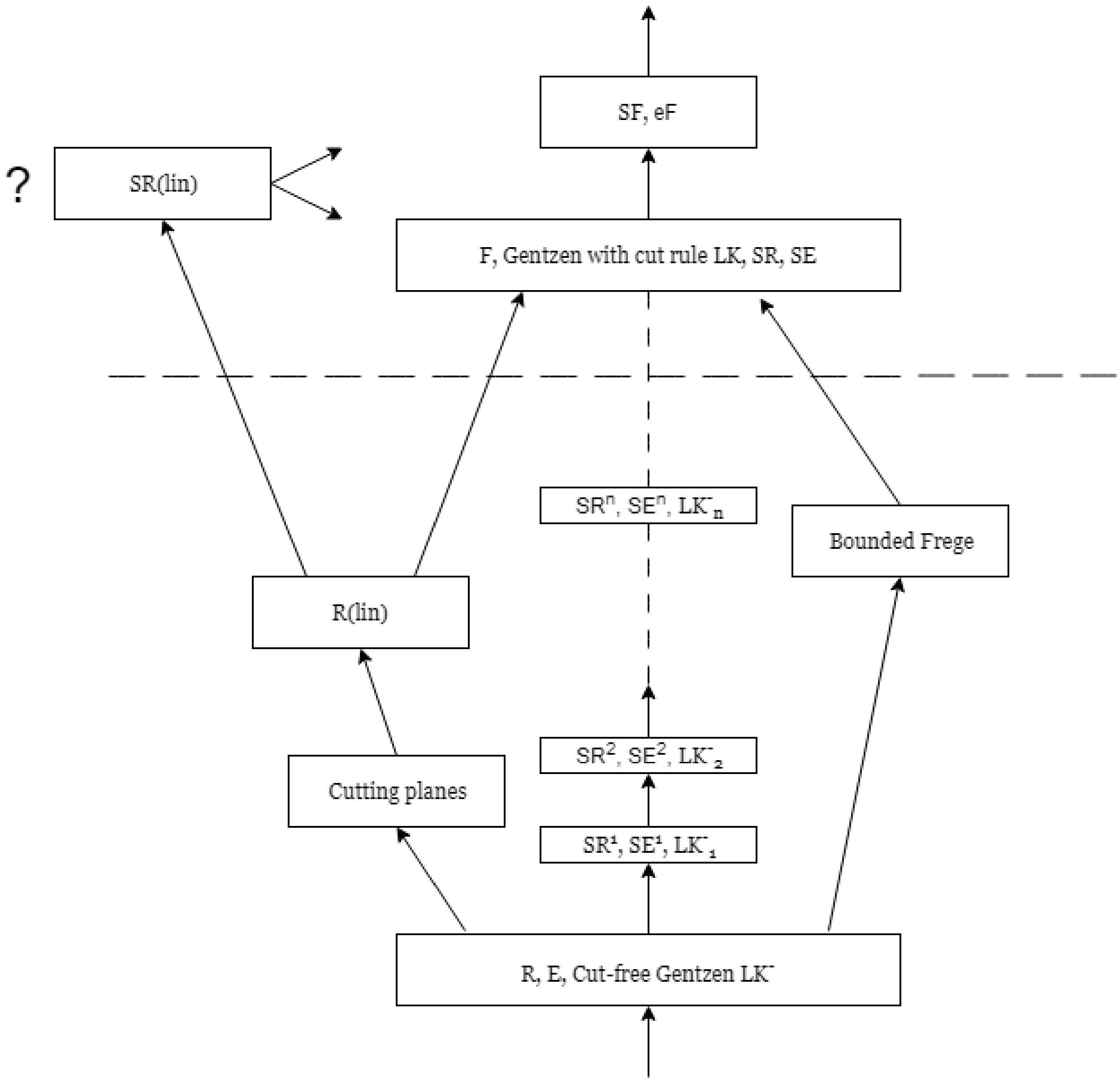
1. R(lin) համակարգում բանաձևերի որոշակի հաջորդականության համար ստացված են արտածումների քայլերի և երկարության ստորին ցուցչային գնահատականներ, հետևաբար ***R(lin)-ը սուպեր համակարգ չէ:*** Ապացուցված է նաև, որ այդ նույն բանաձևերի հաջորդականության արտածումները բազմանդամորեն սահմանափակ են R(lin)+renaming (վերանվանում) համակարգում: Նույնատիպ արդյունքներ ստացվել են նաև R(lin)-ին երկակի E(lin) համակարգի համար:
2. Դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համար սահմանված են R+l-տեղադրություն և E+l-տեղադրություն համակարգերը /$l \geq 0$ – տեղադրվող բանաձևերի տրամաբանական գործողությունների քանակն է/ և ապացուցված է, որ R+(l+1)-տեղադրություն (E+(l+1)-տեղադրություն) համակարգը ունի քայլերի քանակի ցուցչային արագացում R+l-տեղադրություն (E+l-տեղադրություն) համակարգի

ծառատիպ արտածումների նկատմամբ, իսկ R+տեղադրություն և E+տեղադրություն համակարգերը բոլոր տրամաբանությունների համար համարժեք են համապատասխան Ֆրեգեի համակարգերին:

3. Դասական տրամաբանության Ֆրեգեի **բոլոր** համակարգերի համար ստացված է արտածումների քայլերի սուպեր-գծային ստորին գնահատական /մինչ այժմ հայտնի գծայինի փոխարեն/:
4. Բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում բազմարժեք նույնաբանությունների որոշակի հաջորդականությունների արտածումների բարդությունների բոլոր չորս բնութագրիչների համար ստացված են օպտիմալ /նույն կարգի վերին և ստորին/ գնահատականներ:
5. Ուսումնասիրված են տարբեր տրամաբանությունների նույնաբանությունների որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակները /**կատարյալ, կրճատված, փակուղային, կարճագույն, մինիմալ/** և հետազոտված է դրանց կապը արտածումների բարդության բնութագրիչների մեծությունների հետ:

Ներկայացվող հետազոտությունների ուղղությամբ ստացված բոլոր արդյունքները նոր են՝ դասական երկարժեք տրամաբանության համակարգերի համար ստացված արդյունքների հիման վրա էապես ճշգրտվել է *ասույթային համակարգերի ըստ արդյունավետության բաղդատման աղյուսակը /տես հաջորդ էջում/, իսկ* բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում արտածումների բարդությունների բնութագրիչների գնահատում կատարվել է առաջին անգամ:

Ստացված արդյունքները կարող են ունենալ ***պրակտիկ կիրառություն*** թեորեմների արտածումների ավտոմատացման գործընթացում, ինչպես նաև վերջին տասնամյակում այնպիսի ոլորտներում, ինչպիսիք են Formal Verification, Artificial Intelligence, Operations Research, Computational Biology, Cryptography, Data Mining, Machine Learning, Hardware Design-ը:


SF, eF
?
SR(lin)
F, Gentzen with cut rule LK, SR, SE
SR^n, SE^n, LK^-_n
Bounded Frege
R(lin)
SR^2, SE^2, LK$^-_2$
Cutting planes
SR^1, SE^1, LK$^-_1$
R, E, Cut-free Gentzen LK$^-$

Գրականություն

1. S. R. Aleksanyan, A. A. Chubaryan, The polynomial bounds of proof complexity in Frege systems, Siberian Mathematical Journal, vol. 50, № 2, pp. 243-249, 2009.
2. N. Arai, A proper hierarchy of propositional sequent calculi, Theoretical Computer Science 159, 1996, 343-354.
3. N. Arai, Tractability of Cut-free Gentzen-type propositional calculus with permutation inference, Theoretical Computer Science 170, pp. 129-144, 2000.
4. S.R. Buss, Polynomial size proofs of the propositional pigeonhole principle, J. Symbolic Logic, 52, 916-927.
5. S.R. Buss, Some remarks on lengths of propositional proofs', Archive of Mathematical Logic, 34, 377-394, 1995.
6. An.Chubaryan, Relative efficiency of some proof systems for classical propositional logic, Proceedings of NASA RA, Vol.37,N5,2002, and Journal of CMA (AAS),Vol.37, N5, 2002, 71-84.
7. A.A.Chubaryan: Comparison of proof sizes in systems and substitution systems of Frege, *Izvestiya NAN Armenii, Matematika, vol. 35, No. 5*, 2002, 71-84.
8. An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, S. Sayadyan, The relative efficiency of propositional proofs systems for classical and nonclassical propositional logic, in: (J.-Y.Béziau, A. Costa-Leite (Eds.), Perspectives on Universal Logic, Polimetrica International Scientific Publisher, Monza/Italy, 2007, 265-275.
9. An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, A new conception of Equality of Tautologies, LIPS, Vol.V, No,1, 3-8, Triest, Italy, 2007.
10. An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, S. Aleksanyan, Comparison of the complexities in Frege proofs with different substitution rules, Mathematical Problems of Computer Science 30, 2008, 36-39.
11. An.Chubaryan, H.Nalbandyan, Comparison of proof sizes in Frege systems and Substitution Frege systems. Int.J. ITA, Bulgaria, 2010, Vol.17, N 2, 146-153.
12. An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, Ashot Abajyan, On Determinative Disjunctive Normal Forms, Proceedings of CSIT Conference 2011 pp. 39-41, Yerevan, Armenia.

13. An.Chubaryan, Arm.Chubaryan, H.Nalbandyan, S.Sayadyan, A Hierarchy of Resolution Systems with Restricted Substitution Rules, Computer Technology and Application, David Publishing, USA, vol. 3, № 4, pp. 330-336, 2012.
14. An.Chubaryan, On the hierarchies of some propositional systems for classical and non-classical logics, Mathematical problems of computer science 38, 2012, 95-96.
15. An.Chubaryan, A.Mnatsakanyan, Super linear lower bounds for steps of proofs in some Frege system, News of Science and Education, Sheffield, Science and Education LTD, NR 21 (21), 2014, 105-110.
16. Chubaryan Anahit, Khamisyan Artur, Generalization of Kalmar's proof of deducibility in two valued propositional logic into many valued logic, Pure and Applied Mathematics Journal, Vol 6, No. 2, 2017, doi: 10.116448/j.pamj. 20170602.12.,71-75.
17. S. Cook, R. Reckhow, The relative efficiency of propositional proofs systems, Journal of Symbolic Logic 44, pp. 36-50, 1979.
18. U. Egli, S. Schmitt, On intuitionistic proof transformations, their complexity and application to constructive program synthesis, Fundamenta Informaticae 39 (1-2), 1999, 59-83.
19. Y. Filmus, M. Lauria, J. Nordstrom, N. Thapen, N. Ron-Zewi: Space Complexity in Polynomial Calculus, *2012 IEEE Conference on Computational Complexity (CCC)*, 2012, 334-344.
20. S.C. Kleene, Introduction to Mathematics, D. VanNostrand Company, INC, New York, 1952.
21. Krajicek, "On the weak pigeonhole principle", Fund. Math. 170, 123-140, 2001.
22. J.Lukasiewicz, O logice Trojwartosciowej (On three-valued logic), Ruch Filoseficzny (Lwow), Vol.5, 1920, 169-171.
23. Mints, G., Resolution systems for non-classical logic, Semoitika I informatika, 1985, N25, 120-133.
24. P.Pudlak, Lengths of proofs, Handbook of proof theory, North-Holland, pp. 547-637, 1998.

25. Ran Raz, Iddo Tzameret, Resolution over linear equations and multilinear proofs, Ann. Pure Appl. Logic 155(3), pp. 194-224, 2008.
26. R. Statman, Proof search and speed-up in the predicate calculus, Annals of Mathematical Logic 15, 1978, 225-287.
27. Tseitin G.S., on the complexity of derivation in propositional calculus, Studies in constructive mathematics and mathematical logic, part 2, New York, 1970, pp.115-125.
28. А.С.Аникев, О некоторой класификации выводимых пропозициональных формул, Математические заметки, 1972, т. 11, выпуск 2, 165-174.
29. Дискретная математика и математичеке вопросы кибернетики, И-во «Наука», т. 1 ' Москва, 1974.
30. А.Нуриджанян, Об одном свойстве выводов в интуиционистском и минимальном исчислении высказываний, сборник «Молодой научный сотрудник», ЕГУ, Ереван, том 2(34), 1981, 42-50.
31. Г.Цейтин, А.Чубарян, О некоторых оценках длины лгических выводов в классическом пропозициональном исчислении, Труды Вычисл. Центра АН Арм.ССР и ЕГУ, 1975, вып. 8, 57-64.

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում տպագրված հոդվածները՝

32. Arman Tshitoyan, Bounds of proof complexities in some systems for many-valued logics, Isaac Scientific Publishing (ISP), Journal of Advances in Applied Mathematics, Vol. 2, No. 3, July 2017, 164-172. https://dx.doi.org/10.22606/jaam.2017.23006
33. Tshitoyan A.S., BOUNDS OF PROOF COMPLEXITY MEASURES FOR SOME SEQUENCE OF MANY-VALUED TAUTOLOGIES, Журнал «Проблемы современной науки и образования», N 3, (123), И-во «Проблемы науки», Иваново, РФ, 2018, 17-23.
34. Chubaryan Anahit, Khamisyan Artur, Arman Tshitoyan, On some systems for Łukasiewicz's many-valued logic and its properties, Scientific Journal "Fundamentalis Scientiam", Vol.8(8), Madrid, Spain, 2017, 74-79.

35.Chubaryan A.A., Tshitoyan A.S., On some propositional proof systems for various logics, Sciences of Europe, Vol 1, # 11 (11), Physics and Mathematics, Praha, Czech Republic, 2017, 26-29.

36.А.А.Чубарян, А.С.Читоян, А.А. Хамисян, О некоторых системах доказательств для многозначных логик и сложностях выводов в них, ДНАН Армении, том 116, N2, Прикладная Математика, 2016, 18-24.

37.An.Chubaryan, Arm.Chubaryan, A.Tshitoyan, Refutation of hard-determinable formulas in the system "Resolution over Linear Equations" and its generalization, Pure and Applied Mathematics Journal, USA, 2013; 2(3); 128-133.

38.Armine A.Chubaryan, A.S.Tshitoyan, Some Generalization of Proof System "Resolution over Linear Equations", ДНАН Армении, том 113, N1, Прикладная Математика, 2013, 7-12.

39.An.Chubaryan, Arm.Chubaryan, A.Tshitoyan, The Properties of Determinative Disjunctive Normal Forms and Systems Based on Them, Journal of Mathematics Research, Vol.4, No 6, Toronto, Published by Canadian Centre of Science and Education, 2012, pp.89-96.

40.Anahit Chubaryan, Artur Khamisyan, Arman Tshitoyan, Some new proof systems for a version of many-valued logics and proof complexities in it, ASL, ESM, Logic Colloquium – 2016, Leeds, Volume of Abstracts, 70.

41. An.Chubaryan, Arm. Chubaryan, A.Tshitoyan, Some notes about lower bounds for steps and sizes of proofs in Frege systems. Logic Colloquium 2015 (LC 2015), Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL), University of Helsinki, 3–8 August 2015, The Bulletin of Symb. Logic V.22, N3, 2016, 391-392.

42.An.Chubaryan, Arm. Chubaryan, A.Tshitoyan, On lower bounds for steps and sizes of proofs in Frege systems, Proceedings of CSIT-2015, Yerevan.

Օգտագործվող հիմնական համակարգեր

Դասական տրամաբանության համակարգեր՝

$\mathcal{F}$ Ֆրեգեի համակարգ – էջ 13

LK Հենցենյան տիպի սեկվենցյալ համակարգը – էջ 13

Առանց հատույթի կանոնի LK համակարգ և նշանակվում է LK^{-}-ով – էջ 14

Հատույթի կանոնով LK համակարգը, որտեղ հատույթի բանաձևի մեջ մտնող տրամաբանական գործողությունների քանակը ≤ n-ից, նշանակվում է LK_{n}-ով – էջ 14

Արտածման E համակարգ – էջ 14

Ռեզոլյուցիոն R համակարգ – էջ 15

Գծային հավասարումների ռեզոլյուցիոն R(lin) համակարգ – էջ 15

Գծային հավասարումների կրճատման E(lin) համակարգ – էջ 17

R(lin)+renaming համակարգ – էջ 29

E(lin)+renaming համակարգ – էջ 29

Տեղադրման կանոնով համալրված E համակարգերը՝ SEC – էջ 37

Սահմանափակ տեղադրման կանոնով E համակարգեր՝ $S_l EC$ – էջ 37

Ինտուիցիոնիստական (IPL) և մինիմալ (MPL) տրամաբանությունների համակարգեր՝

IPL-ի ռեզոլուցիոն RI և MPL-ի ռեզոլուցիոն RM համակարգեր – էջ 34

IPL-ի կրճատման EI և MPL-ի կրճատման EM համակարգեր – էջ 37

IPL-ի (MPL-ի) տեղադրման կանոնով համալրված EI (EM) համակարգերը ՝ (SEI, SEM) – էջ 37

IPL-ի (MPL-ի) սահմանափակ տեղադրման կանոնով EI (EM) համակարգեր՝ (S_lEI, S_lEM) – էջ 37

Ֆրեգեի $\mathcal{F}I$ և $\mathcal{F}M$ համակարգեր – էջ 38

IPL-ի LI (LI^-, LI_l) համակարգեր – էջ 38

MPL-ի LM (LM^-, LM_l) համակարգեր – էջ 38

Բազմարժեք տրամաբանությունների որոշ համակարգեր՝

ELN_k [1] - k-արժեք համակարգը Լուկասևիչի ժխտմամբ և որպես «ճշմարտություն» սևեռված 1 արժեքով – էջ 58

ECN_k[1] - k-արժեք համակարգը ցիկլիկ ժխտմամբ և որպես «ճշմարտություն» սևեռված 1 արժեքով – էջ 58

$ELN_3[1/2,1]$ - 3-արժեք համակարգը Լուկասևիչի ժխտմամբ և որպես «ճշմարտություն» սևեռված $1/2$ և 1-ով – էջ 58

$ECN_3[1/2,1]$ - 3-արժեք համակարգը ցիկլիկ ժխտմամբ և որպես «ճշմարտություն» սևեռված $1/2$ և 1-ով – էջ 58

CN_3-cut-free[1] - Ֆրեգեի տիպի 3-արժեք համակարգը ցիկլիկ ժխտմամբ և որպես «ճշմարտություն» սևեռված 1-ով – էջ 59

Օգտագործվող հիմնական գաղափարներ

Որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձև (ոԴՆՁ) – էջ 12

Փոխարինման-կանոն – էջ 11

$\varphi - 1$-որոշիչ կոնյունկտ և $\varphi - 0$-որոշիչ կոնյունկտ – էջ 12

Կոնյունկտիվ նորմալ ձև (ԿՆՁ) – էջ 15

Արտածմանը համապատասխանեցված նշագրված գրաֆ – էջ 19

Ծառատիպ արտածում – էջ 19

Արտածման բարդության բնութագրիչներ՝

$|\boldsymbol{\varphi}|$ - $\boldsymbol{\varphi}$ բանաձևի երկարությունը – էջ 20

Արտածման **երկարությունը (l-բարդություն)** – էջ 20

Արտածման **քայլերի քանակը (t-բարդություն)** – էջ 20

Արտածման **ծավալը (s-բարդություն)** – էջ 20

Արտածման **լայնությունը (w-բարդություն)** – էջ 20

t_{φ}^{ϕ} $(l_{\varphi}^{\phi}, s_{\varphi}^{\phi}, w_{\varphi}^{\phi})$ – էջ 20

Համակարգերի բազմանդամային հանգեցում – էջ 20

Համակարգերի p–t-համարժեքություն ($p - l$-համարժեքություն) – էջ 20

Ցուցչային արագացում – էջ 20

$TTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in E^n} \bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} {p_{i_j}}^{\sigma_j}$ $(n \geq 1, 1 \leq m \leq 2^n - 1)$ – էջ 21

$\boldsymbol{\varphi}$-ի որոշիչ չափ (determinative size) $\boldsymbol{ds}(\boldsymbol{\varphi})$ – էջ 22

Մինիմալ նույնաբանություն – էջ 22

A բանաձևում x փոփոխականի փոխարեն $F - \tilde{\delta}$ բանաձևի տեղադրման արդյունքը - $S(F - \tilde{\delta}/A(x))$ – էջ 48

(A, B) բանաձևերի կարգավորված զույգի $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$-ձևափոխություն – էջ 48

Ձախ-կայուն $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$-ձևափոխություն – էջ 48

F բանաձևից կամայական տեղադրություններով ստացված բանաձևերի բազմություն - $L(F)$ – էջ 48

(A, B) բանաձևերի կարգավորված զույգի հնարավոր հետևանք – էջ 48

(A, B) բանաձևերի կարգավորված զույգի ձախ-կայուն հնարավոր հետևանք – էջ 48

F բանաձևի փոփոխականների մուտքերի քանակը $f(F)$ – էջ 49

F բանաձևին համապատասխանող ծառի ամենաերկար ճյուղի երկարություն - $h(F)$ – էջ 49

(A, B)^ – էջ 50

Բազմարժեք տրամաբանությունների տրամաբանական ֆունկցիաները՝

$p \vee q = max(p, q)$ (1) կամ $p \vee q = [(k-1)(p+q)](mod\ k)/(k-1)$ (2) – էջ 54

$p \wedge q = min(p, q)$ (1) կամ $p \wedge q = max(p+q-1, 0)$ (2) – էջ 54

$p \supset q = \begin{cases} 1, & p \leq q \\ 1-p+q, & p > q \end{cases}$ (1) Լուկասևիչի – էջ 54

$p \supset q = \begin{cases} 1, & p \leq q \\ q, & p > q \end{cases}$ (2) Գյոդելի – էջ 54

$\sim p = 1 - p$ (1) Լուկասևիչի կամ $\neg p = ((k-1)p+1)(mod\ k)/(k-1)$ (2) ցիկլիկ – էջ 54

Ցուցչային ֆունկցիան.

p^{δ} որպես $(p \supset \delta) \wedge (\delta \supset p)$ (1) exponent – էջ 55

p^{δ} որպես p-ն $(k-1)$– i հատ ցիկլիկ ժխտումներով (2) exponent – էջ 55

$1-k$-նույնաբանություն ($\geq 1/2-k$-նույնաբանություն) – էջ 55

Օժանդակ փոխարինման առնչությունները – էջ 57

δ-(1) /δ-(2) / շրջման արդյունք – էջ 61

$|\tilde{\sigma}(\delta)|$ – δ –ների քանակը $\tilde{\sigma}$-ում – էջ 61

Դժվար որոշելի բազմարժեք նույնաբանություններ՝

$L_kTTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in E_k^n} \bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} {p_{i_j}}^{\sigma_j}$ $/n \geq 1, m \leq \mathrm{k}^{[\mathrm{n/k}]}/$ և (1) exponent-ով – էջ 63

$C_kTTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in E_k^n} \bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} {p_{i_j}}^{\sigma_j}$ $/n \geq 1, m \leq \mathrm{k}^{[\mathrm{n/k}]}/$ և (2) exponent-ով – էջ 65

$L_3TTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in E^n} \bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} {p_{i_j}}^{\sigma_j}$ $/n \geq 1, m \leq 2^n - 1/$ և (1) exponent-ով – էջ 67

$C_3TTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in E_3^n} \bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} {p_{i_j}}^{\sigma_j}$ $/n \geq 1, m \leq 3^n - 1/$ և (2) exponent-ով – էջ 69

ոԴՆՁ տարատեսակները՝

Կրճատված որոշիչ ԴՆՁ (կոԴՆՁ) – էջ 70

Փակուղային որոշիչ ԴՆՁ (փոԴՆՁ) – էջ 70

Կարճագույն որոշիչ ԴՆՁ (կճոԴՆՁ) – էջ 70

Մինիմալ որոշիչ ԴՆՁ (մոԴՆՁ) – էջ 70

Ք$(D(\varphi))$ - φ բանաձևի D ԴՆՁ-ում կոնյունկտների քանակը – էջ 73

Որոշիչ Դիզյունկտիվ Նորմալ Ձևերը ոչ դասական նույնաբանությունների համար – էջ 76