ՀՀ ԳԱԱ ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ ՀԱՄԼԵՏ ԿԱՐԵՆԻ

ՓՈՔՐ ԱՄՊԼԻՏՈՒԴԱՅՈՎ ՍԽԱԼՆԵՐ ՈՒՂՂՈՂ ԿՈԴԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ԵՎ ԻՐԱԿԱՆԱՑՈՒՄԸ

Ե.13.05 – <<Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի համալիրներ>> մասնագիտությամբ տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2018

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ НАН РА

ХАЧАТРЯН ГАМЛЕТ КАРЕНОВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ КОДОВ ИСПРАВЛЯЮЩИХ ОШИБКИ МАЛЫМИ АМПЛИТУДАМИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
технических наук по специальности
05.13.05 – “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”

Ереван – 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ տեխ.գիտ.դոկտոր Գ.Հ.Խաչատրյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.մաթ.գիտ.դոկտոր Լ.Հ.Ասլանյան
Ֆիզ.մաթ.գիտ.թեկնածու Ս.Ե.Աբրահամյան

Առաջատար կազմակերպություն՝
Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2018թ. Հունիսի 19-ին ժամը 11:00-ին ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում գործող 037 <<Ինֆորմատիկա>> մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 0014, Պ. Սևակի 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ ԻԱՊԻ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է մայիսի 19-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, ֆիզ.-մաթ.գիտ.դոկտոր Հ. Գ. Սարուխանյան

Тема диссертации утверждена в Институте проблем информатики и автоматизации НАН РА

Научный руководитель: доктор тех. наук Г.А.Хачатрян
Официальные оппоненты: доктор физ.-мат.наук Л.А.Асланян
кандидат физ.-мат.наук С.Е.Абрамян

Ведущая организация: Национальный политехнический университет Армении

Защита состаится 19–го июня 2018г. в 11:00 на заседании специализированного совета 037 <<Информатика>> Института проблем информатики и автоматизации НАН РА, по адресу: 0014, Ереван, ул. П. Севака 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПИА НАН РА.

Автореферат разослан 19-го мая 2018г.

Ученый секретарь специализированного
совета, доктор физ.-мат. наук А. Г.Саруханян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Աշխատանքի արդիականությունը: Սխալներ ուղղող կոդերի տեսությունը ինֆորմատիկայի մի ճյուղ է, որն առաջացել և բուռն զարգացում է ապրել համեմատաբար ոչ վաղ անցյալում՝ XX-րդ դարի երկրորդ կեսին:

Համակարգում կապուղղով հաղորդագրություններ փոխանցելիս տարբեր գործոնների պատճառով սովորաբար տեղի են ունենում որոշակի սխալներ: Դրա համար պահանջվում են այնպիսի կոդեր, որոնք կարողանան ոչ միայն հայտնաբերել այլ նաև ուղղել այդ սխալները:

Սխալներ ուղղող կոդերի տեսության հիմնական խնդիրներից են՝

1. Կոդերի հատկությունների ուսումնասիրությունը:
2. Կոդերի կառուցման մեթոդների ստեղծումը:
3. Կոդավորման և ապակոդավորման արդյունավետ ալգորիթմների կառուցումը:

Սխալներ ուղղող կոդերի տեսությունը ունի լայն կիրառություն հեռուստատեսության մեջ, ինչպես նաև արբանյակային ալեհավաքներով փոխանցված հաղորդագրություններում սխալներ հայտնաբերելու և ուղղելու նպատակով: Սխալներ ուղղող կոդերը օգտագործվում են նաև հեռախոսային գծերում և բջջային կապերում: Չնայած որ սխալներ ուղղող կոդերի ամենալայն կիրառությունը կապի գծերում է, այնուամենայնիվ, այժմ նրանք ունեն կիրառություններ նաև ֆլեշ հիշողություններում:

Քանի որ ֆլեշ հիշողություններում առաջացած սխալները հիմնականում լինում են ասիմետրիկ և փոքր ամպլիտուդայով, անհրաժեշտ է կառուցել հենց այս տիպի սխալներ ուղղող կոդեր: Ֆլեշ հիշողությունների ծավալների մեծացմանը զուգընթաց խնդիր է առաջանում ստեղծել ավելի արագագործ կոդավորման և ապակոդավորման համակարգեր: Պրակտիկ տեսանկյունից առավել մեծ հետաքրքրություն են առաջացնում Z_{2m} կամ Z_{2m+1} օղակների վրա դիտարկված կոդերը, քանի որ նրանք ունեն լայն կիրառություն $2^{2m}-QAM$ (*Quadrature Amplitude Modulation*) մոդուլյացիոն սխեմաներում: Գրականությանը հայտնի են այնպիսի կոդեր, որոնք կարողանում են ուղղել ± 1 մեծությամբ մինչև 2 սխալներ, որոնք սակայն օպտիմալ չեն և ունեն շատ փոքր երկարություններ:

Սխալներ ուղղող կոդերի խնդիրների վրա դրված երեք հիմնական պահանջներն են՝

1. Կոդերի կառուցումներ, որոնք կկարողանան պատշաճ կերպով ուղղել արտաքին գործոնների հետևանքով առաջացած սխալները:

2. Կառուցված կոդերով կոդավորման մեթոդի պրակտիկ իրականացում:
3. Ապակոդավորման էֆեկտիվ ալգորիթմի մշակում:

Ատենախոսության նպատակն է կառուցել ինչպես ± 1 այնպես էլ ± 2 մեծությամբ սխալներ ուղղող նոր օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդեր, որոնք կունենան ավելի մեծ հաղորդման արագություն, կկարողանան ուղղել ոչ միայն եզակի այլ նաև կրկնակի սխալներ, նաև այդ կոդերով կոդավորման և ապակոդավորման ալգորիթմների տեխնիկական իրականացումը:

Աշխատանքի գիտական նորույթը

- Կատարվել են փոքր ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդերի կառուցումներ տարբեր մեծության օղակների վրա, որոնք կարողանում են ուղղել ինչպես ± 1 այնպես էլ ± 2 մեծությամբ սխալներ:
- Ապացուցվել է թեորեմ կոդի երկարության կրկնապատկման մասին, որի հիման վրա մշակվել է ալգորիթմ, որի միջոցով արդեն իսկ հայտնի կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող գծային օպտիմալ $C(N, N-4)$ կոդերին ավելացնելով երկու ստուգող սիմվոլներ, կարող ենք ստանալ նոր $C\,(2N, 2N-6)$ կոդեր, որոնք կունենան երկու անգամ ավելի մեծ երկարություն, և հետևաբար, մոտ երկու անգամ ավելի մեծ արագություն:
- Փոքր ամպլիտուդաներով կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերի կոդավորման և ապակոդավորման (սխալների հայտնաբերման և ուղղման) ալգորիթմների մշակումը և այդ ալգորիթմների ծրագրային իրականացումը $C++$ լեզվի միջոցով:

Ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը նրանումն է, որ հետազոտությունները ցույց են տվել, որ ֆլեշ մեխանիզմներում տեղի ունեցող սխալները հիմնականում լինում են ասիմետրիկ և ունենում են փոքր ամպլիտուդա (մեծություն), նաև նրանք անկախ են այբուբենի մեծությունից, որոնք կարող են լինել զգալիորեն ավելի մեծ քան սխալի մեծությունը: Դրա համար անհրաժեշտ է կառուցել հենց այդ տիպի սխալներ ուղղող կոդեր: Փոքր ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդերի կառուցումը և իրագործումը ֆլեշ հիշողություններում և մոդուլյացիոն սխեմաներում զգալիորեն կարող են ավելացնել նրանց աշխատանքի կայունությունը:

Աշխատանքի արդյունքների հավաստիությունը հիմնավորվում է մշակված ծրագրային համակարգի կիրառմամբ ստացված փորձնական արդյունքներով:

Աշխատանքի արդյունքների ներդրումը: Ատենախոսության շրջանակներում ստացված արդյունքները և մշակված ալգորիթմները վերցված են ներդրման Երևանի Կապի միջոցների ԳՀԻ-ում մշակվող և արտադրվող թվային կապի համակարգերում:

Պաշտպանության են ներկայացված հետևյալ դրույթները.

1. Փոքր ամպլիտուդաներով կրկնակի սխալներ ուղղող օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդերի կառուցումներ տարբեր մեծության օղակներում:

2. Ապացուցվել է թեորեմ կոդի երկարության կրկնապատկման մասին, ըստ որի մշակվել է ալգորիթմ, որի հիման վրա արդեն իսկ հայտնի կրկնակի սխալներ ուղղող օպտիմալ $C(N, N-4)$ կոդերին ավելացնելով երկու ստուգող սիմվոլ, կարող ենք ստանալ $C\,(2N, 2N-6)$ կոդեր, որոնք կունենան երկու անգամ ավելի մեծ երկարություն, և հետևաբար, մոտ երկու անգամ ավելի մեծ արագություն:

3. Մշակվել և ծրագրի միջոցով իրականացվել են այդ տեսակ կոդերի համար կոդավորման և ապակոդավորման (սխալների ուղղման) ալգորիթմներ:

Աշխատանքի արդյունքները զեկուցվել են. ՀՀ ԳԱԱ ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտի ընդհանուր սեմինարում, ինչպես նաև ինստիտուտի կոդավորման և ազդանշանների մշակման բաժնի մասնագիտական սեմինարներում:

Հրապարակումներ: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են 6 գիտական աշխատություններում, որոնք թվարկված են սեղմագրի վերջում:

<u>Աշխատանքի կառուցվածքը և ծավալը</u>: Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և 35 անուն օգտագործված գրականության ցուցակից: Աշխատանքի ընդհանուր ծավալն է 100 էջ՝ ներառյալ 9 նկար:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ՀԱՄԱՌՈՏ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ներածության մեջ հիմնավորված է աշխատանքի արդիականությունը, ձևակերպված են աշխատանքի նպատակներն ու խնդիրները, ներկայացված է աշխատանքի գիտական նորույթը և բերված են պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները:

Աշխատանքի **առաջին գլխում** նկարագրված են կոդավորման տեսության հիմնական խնդիրները, որոնց հետ գործ ենք ունենում հետագա աշխատանքի ընթացքում: Այս գլխում առավել մանրամասն դիտարկվել են սխալներ ուղղող գծային կոդերը և նրանց ներկայացումը մատրիցների միջոցով: Ներկայացվում են փոքր ամպլիտուդայով (մեծությամբ) կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերը, նրանց կիրառական նշանակությունը և դերը գիտության մեջ: Բերված են գրականությանն արդեն հայտնի այս տիպի կոդերի օրինակներ, որոնք սակայն օպտիմալ չեն և չունեն կիրառություններ քանզի ունեն շատ փոքր երկարություն և հաղորդման արագություն: Բացի այդ գլխի վերջում կատարվում է համեմատություն կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերի և հնուց մեզ արդեն հայտնի Հեմմինգի ու ԲՉՀ (Bose–Chaudhuri–Hocquenghem) կոդերի միջև:

Աշխատանքի **երկրորդ գլխում** ներկայացվում են ±1 և ±2 մեծությամբ կրկնակի սխալներ ուղղող օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդերի կառուցումներ տարբեր մեծության օղակներում: Բացի այդ ապացուցված է թեորեմ կոդի երկարության կրկնապատկման մասին, որի հիման վրա մշակվել է մի մեթոդ, որի միջոցով հիմնվելով մեզ արդեն հայտնի $C(N, N-4)$ օպտիմալ կոդերի վրա, կարող ենք կառուցել $C\ (2N, 2N-6)$՝ երկու անգամ ավելի մեծ երկարություն ունեցող կոդեր ավելացնելով ընդամենը 2 ստուգող սիմվոլ:

Ֆիքսված Z_m օղակում կառուցված կոդի համար օպտիմալության պայմանը կարող է դրված լինել 2 ձևով[1]: Առաջին պայմանն ասում է, որ n երկարությամբ կոդը օպտիմալ է, եթե այն պարունակում է մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ (այսինքն ավելի քիչ ստուգող սիմվոլներով հնարավոր չէ կառուցել այդ երկարության կոդ): Երկրորդ պայմանն այն է, որ տրված ստուգող սիմվոլների քանակի համար այն պետք է ունենա հնարավոր ամենամեծ երկարությունը: Մեզ դեռ հայտնի չեն այնպիսի կոդեր, որոնք բավարարեն օպտիմալության 2-րդ պայմանին: Այս

[1] G. Khachatrian and H. Morita, “Construction of optimal ±1 double error correcting linear codes over ring Z_5”, 3th International Workshop on Advances in Communications, Boppard, Germany, pp. 10-12, May 2014.

աշխատանքում կառուցված կոդերից ոմանք կբավարարեն օպտիմալության առաջին պայմանին՝ այսինքն կպարունակեն մինիմալ քանակության ստուգող սիմվոլներ:

Նախ ներկայացնենք Z_5 օղակում կառուցված $C\,(12,8)$ օպտիմալ կոդը[1], որն ունի 12 երկարություն, որից 4 – ը դա ստուգող սիմվոլներն են, իսկ 8 –ը՝ ինֆորմացիոն, և այն բավարարում է օպտիմալության առաջին պայմանին: Z_5 օղակում դիտարկված այս կոդը՝ տրված H մատրիցի միջոցով կարող է ուղղել ± 1 ամպլիտուդայով մինչև 2 սխալ:

Դիցուք այս $C(12,8)$ գծային օպտիմալ կոդը տրված է իր ստուգող H մատրիցի միջոցով՝

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}:$$

Ապացուցելու համար, որ այս կոդը հանդիսանում է կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդ, պետք է ցույց տալ, որ H մատրիցն ունի հատկություն, ըստ որի նրա բոլոր սյունակները և այդ սյունակների հետ հանման և գումարման գործողությունների կատարման ընթացքում ստացված սինդրոմները բավարարում են հետևյալ 2 պայմաններին՝

$$h_{ij} \neq \pm h_{im} \qquad\qquad j \neq m$$
$$\pm h_{ij} \pm h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \qquad (j,m) \neq (l,k)$$

Ապացույցը կատարվում է օգտվելով $\{3,2,4,4,2\}$ բազմության հատկությունից, որը կայանում է նրանում, որ ըստ դիտարկված բոլոր հեռավորությունների այս բազմության 2 էլեմենտների տարբերությունները միշտ տարբեր են: Օրինակ, եթե դիտարկում ենք ըստ 1-հեռավորության ($2 - 3 = \mathbf{4}$, $4 - 2 = \mathbf{2}$, $4 - 4 = \mathbf{0}$, $2 - 4 = \mathbf{3}$, $3 - 2 = \mathbf{1}$): Առաջին տեղում գրված 3-ն ունի 0 ինդեքս և վերջին տեղում գրված 2 –ն ունի 4 ինդեքսը և հետևաբար $0 - 4 = 1$ ըստ ($\boldsymbol{mod 5}$)-ի քանի որ բոլոր գործողությունները կատարվում են Z_5 օղակում: Z_5 օղակում դիտարկված այս $C(12,8)$ գծային կոդը ներկայացված H մատրիցի միջոցով, որն ուղղում է ± 1 ամպլիտուդայով մինչև 2 սխալ, օպտիմալ է այն իմաստով, որ պարունակում է մինիմալ քանակով ստուգող զույգության սիմվոլներ:

Քանի որ այս կոդը կարողանում է ուղղել ± 1 ամպլիտուդայով մինչև 2 սխալ, ապա բոլոր հնարավոր կոմբինացիաների քանակը, որոնք կարող են ուղղվել հավասար կլինի՝

$$(1 + 12 * 2 + (12 choose 2) * 4) = 289:$$

Այս պարագայում կունենանք, որ $289 * 5^8 <= 5^{12}$ և հնարավոր լավագույն կոդի հզորությունը կլինի $<= 5^{12}/289 < 5^9$:

Երկրորդ գլխի հաջորդ պարագրաֆներում օգտագործելով տվյալ մոտեցումը կառուցվել են նոր օպտիմալ կրկնակի ± 1 ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդեր Z_7 և Z_9 օղակներում, որոնք ունեն ավելի մեծ երկարություն քան Z_5 օղակում կառուցված կոդը և հանդիսանում են օպտիմալ այն իմաստով, որ պարունակում են մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ:

Այդ ստացված կոդերը ներկայացնենք նրանց ստուգող մատրիցների միջոցով՝

$$H_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

H_7 ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված է Z_7 օղակում ± 1 մեծությամբ կրնակի սխալներ ուղղող $C(16, 12)$ օպտիմալ կոդը, որն ունի 12-ինֆորմացիոն և 4-ստուգող սիմվոլներ: Այս կոդի կառուցման հիմքում ընկած է $\{4,3,6,6,3,4,2\}$ 7 երկարությամբ բազմությունը: Այս բազմությունը ևս բավարարում է այն պայմանին, ըստ որի ըստ դիտարկված բոլոր հեռավորությունների այս բազմության 2 էլեմենտների տարբերությունները միշտ տարբեր են:

Մատրիցը կառուցվում է հետևյալ կերպով.

- մատրիցի առաջին տողում դնում ենք $1-$եր, ապա Z_7 օղակի բոլոր ամբողջ թվերը $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, իսկ երկրորդ տողում կրկին այդ բազմության բոլոր թվերը, իսկ հետո արդեն ավելացնում ենք $2-$ներ: Իսկ մատրիցի վերջին 2 սյունակներին կանվանենք մատրիցի պոչ, որոնք ավելացվում են նրա համար, որպիսի այդ մատրիցի միջոցով ներկայացված կոդը բավարարի օպտիմալության այն պայմանին, ըստ որի այն պետք է պարունակի մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ:

H_9 ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված է Z_9 օղակում ± 1 մեծությամբ կրնակի սխալներ ուղղող $C(20,16)$ օպտիմալ կոդը, որն ունի 16-ինֆորմացիոն և 4-ստուգող սիմվոլներ: Այս կոդը բավարարում է օպտիմալության այն պայմանին, որ պարունակում է մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ: Այս կոդի կառուցման հիմքում ընկած է $\{7,3,2,4,4,2,3,7\}$ 8 երկարությամբ բազմությունը: Այս բազմությունը ևս բավարարում է այն պայմանին, ըստ որի ըստ դիտարկված բոլոր հեռավորությունների այս բազմության 2 էլեմենտների տարբերությունները միշտ տարբեր են: Սակայն այս դեպքում արդեն մատրիցի պոչը պարունակում է 4 սյունակ 2-ի փոխարեն, որպեսզի այն բավարարի օպտիմալության առաջին պայմանին:

Աշխատանքի **երկրորդ գլխի** հաջորդ պարագրաֆում ներկայացվում է մի նոր մեթոդ, որի միջոցով հիմնվելով մեզ արդեն հայտնի $C(N, N-4)$ օպտիմալ կոդերի վրա, կարող ենք կառուցել $C\ (2N, 2N-6)$՝ երկու անգամ ավելի մեծ երկարություն ունեցող կոդեր ավելացնելով ընդամենը 2 ստուգող սիմվոլ: Այս կոդերը նույնպես կհանդիսանան Z_n օղակում ± 1 ամպլիտուդայով կրկնակի սխալներ ուղղող կոդեր: Բայց արդեն չեն հանդիսանա օպտիմալ կոդեր: Տվյալ կոդերին մենք կանվանենք քվազի-օպտիմալ կոդեր:

Դիցուք $C(N, N-4)$ օպտիմալ կոդ է Z_n օղակում: Մեր կառուցած նոր $C\ (2N, 2N-6)$ կոդերի ստուգող H մատրիցները պետք է ունենան 6 տող և $2N$ հատ սյուն, որտեղ առաջին 4 տողերը հանդիսանում են $C(N, N-4)$ կոդի ստուգող մատրիցի 4 տողերը, իսկ $2N$ հատ սյուները իրենցից ներկայացնում են $C(N, N-4)$ կոդի N սյուները կրկնած 2 անգամ:

Փորձենք կառուցել H մատրիցին ավելացված 2 տողերը 3 քայլերով՝

1. Կնշանակենք $\boldsymbol{group\ 1}$ և $\boldsymbol{group\ 2}$-ով համապատասխանաբար ավելացված 2 տողերի առաջին N և վերջին N սյուները: $Group\ 1$ –ի առաջին տողում ձախից հերթով դնում ենք n հատ 2 և n հատ 1,ապա $N-2n$ հատ մեկ այլ ամբողջ թիվ x (տարբեր (1,2,3,4) –ից) Z_n –ից :

2. Հաջորդ քայլում $group\ 1$-ի երկրորդ տողում կդնենք հերթով Z_n օղակի բոլոր ամբողջ թվերը $\{0,1, \dots\ n-1\}$ կրկնելով 2 անգամ, ապա նույն բազմության առաջին $N-2n$ կոմպոնենտները:

3. Համապատասխանաբար $group\ 2$ – ի երկրորդ տողում կդնենք 3 և 4 թվերը կրկնելով n անգամ, և մնացած դիրքերում նույն x ամբողջ թիվը, իսկ առաջին տողում կկրկնենք $group$ 1-ի երկրորդ տողը: Միակ պայմանին, որ պետք է բավարարի x ամբողջ թիվն այն է, որ՝ $x + x \neq 1\ (mod\ n)$:

Վերը նկարագրված քայլերից հետևում է, որ մեր կառուցած նոր $C\ (2N, 2N - 6)$ կոդի ստուգող մատրիցը պետք է ունենա հետևյալ տեսքը՝

$$
\begin{array}{c|c}
Group\ 1 & Group\ 2 \\
\\
C\ (N, N\ -\ 4) & C\ (N, N\ -\ 4)
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
2 & 2 & \ldots & 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & x & x & \ldots & 0 & 1 & \ldots & n-1 & 0 & 1 & \ldots & n-1 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & 1 & \ldots & n-1 & 0 & 1 & \ldots & n-1 & 0 & 1 & \cdots & 3 & 3 & \ldots & 3 & 4 & 4 & \ldots & 4 & x & x & \ldots
\end{bmatrix}
$$

Ելնելով վերևում նկարագրված մոտեցումից արդեն կարող ենք սահմանել հետևալ թեորեմը:

Թեորեմ. Տրված $C\ (N, N\ -\ 4)$ կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող օպտիմալ կոդի համար միշտ կարող ենք կառուցել նոր $C\ (2N, 2N - 6)$ կոդ ավելացնելով 2 ստուգող սիմվոլ, որը կունենա երկու անգամ ավելի մեծ երկարություն և իր հերթին նույնպես կհանդիսանա կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդ:

Ներկայացնենք որոշ արդյունքներ, որոնք ստացվել են օգտագործելով վերը բերված մեթոդը:

Ներկայացնենք այդ կոդերից մի քանիսը նրանց ստուգող մատրիցների միջոցով ՝

1. $\boldsymbol{C\ (24, 18)}$

$$
H_5 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$C\ (24, 18)$ – կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդը կառուցված Z_5 օղակում, որը ներկայացված է H_5 ստուգող մատրիցի օգնությամբ, ստացվել է $(12, 8)$ օպտիմալ կոդի միջոցով, որին ավելացվել է 2 ստուգող սիմվոլ, դրանց համապատասխան նրա H_5 ստուգող մատրիցին ավելացվել են հետևյալ 2 տողերը՝

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \quad 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & \quad 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. $\boldsymbol{C\ (32,26)}$

$$H_7 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$C\ (32,26)$ – կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդը կառուցված Z_7 օղակում, որը ներկայացված է H_7 ստուգող մատրիցի օգնությամբ, ստացվել է $(16,12)$ օպտիմալ կոդի միջոցով, որին ավելացվել է 2 ստուգող սիմվոլ, դրանց համապատասխան նրա H_7 ստուգող մատրիցին ավելացվել են հետևյալ 2 տողերը՝

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 & \quad 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & \quad 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Այս ստացված կոդերը հանդիսանում են քվազի-օպտիմալ կոդեր կառուցված Z_m տարբեր մեծությունների օղակներում, որոնք կարողանում են ուղղել կրկնակի ± 1 մեծությամբ սխալներ:

Երկրորդ գլխի վերջին պարագրաֆում կատարվել են հետազոտություններ արդեն ± 2 մեծությամբ սխալներ ուղղող կոդերի համար և ոչ թե միայն ± 1: Կառուցվել են նոր օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդեր տարբեր մեծության օղակներում, որոնք կկարողանան ուղղել միևնույն մեծությամբ (± 1 կամ ± 2) բոլոր կրկնակի սխալները: Այս կոդերի համար ևս հիմք են հանդիսանում վերևում ներկայացված կրկնակի ±1 մեծության սխալներ ուղղող $C(N, N-4)$ օպտիմալ կոդերը: Այս դեպքում արդեն ունենում ենք սխալների հնարավոր 8 դեպք 4-ի փոխարեն: Նոր կառուցված կոդերը պետք է կարողանան ուղղել այս տիպի բոլոր սխալները: Ինչպես գիտենք, որպիսի կոդը հանդիսանա կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդ, նրա ստուգող մատրիցի բոլոր սյուների հետ գումարման և հանման գործողությունների արդյունքում ստացված սինդրոմները պետք է բավարար էին հետևյալ 2 պայմաններին՝

$$h_{ij} \neq \pm h_{im} \qquad\qquad j \neq m$$

$$\pm h_{ij} \pm h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \qquad\qquad (j,m) \neq (l,k)$$

Իսկ տվյալ դեպքում, որպիսի կոդը հանդիսանա նաև կրկնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող կոդ, անհրաժեշտ է, որպեսզի բավարարվեն նաև հետևյալ 2 պայմանները՝

$$\pm 2 * \ h_{ij} \ \neq \ \pm h_{im} \qquad\qquad\qquad j \ \neq \ m$$

$$\pm 2 * \ h_{ij} \pm 2 * h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \qquad\qquad (j,m) \ \neq \ (l,k)$$

Հիմա ներկայացնենք կառուցված նոր $C(N,N-5)$ օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդերը Z_n տարբեր մեծության օղակներում, որոնք ստացվել են կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող $C(N,N-4)$ օպտիմալ կոդերին ավելացնելով ընդամենը 1 ստուգող սիմվոլ:
H_5 ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված է օպտիմալ $\boldsymbol{C}(13,8)$ կոդը, որն ունի 13-երկարություն, որոնցից 8-ը դա ինֆորմացիոն սիմվոլներն են, իսկ 5–ը՝ ստուգող, որը կարողանում է ուղղել ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ կրկնակի սխալներ Z_5 օղակում՝

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Քանի որ այս կոդը կարողանում է ուղղել ± 1 և ± 2 ամպլիտուդաներով 1 կամ 2 սխալներ, հետևաբար բոլոր հնարավոր կոմբինացիաների քանակը, որոնք կարող են ուղղվել այս կոդի միջոցով հավասար կլինի՝

$$(1 \ + \ 13 * 4 \ + \ (13 choose 2) * 8) \ = 677,$$

այս պարագայում կունենանք, որ $677 \ * \ 5^8 \ <= \ 5^{13}$ և հնարավոր լավագույն կոդի հզորությունը կլինի $5^{13}/677 \ < \ 5^9$, հետևաբար այն հանդիսանում է օպտիմալ այն իմաստով,որ ունենալով 4 - ստուգող սիմվոլ, մենք չենք կարող կառուցել նմանատիպ կոդ, հետևաբար այն պարունակում է մինիմալ քանակությամբ 5-ստուգող սիմվոլներ:
Ներկայացնենք ևս 2 կոդ, որոնք կառուցվել են Z_7 և Z_9 օղակներում, որոնք կարողանում են ուղղել ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ կրկնակի սխալներ:

H_7 ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված է $\boldsymbol{C}(17,12)$ կոդը, որը կարողանում է ուղղել ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ կրկնակի սխալներ Z_7 օղակում՝

$$H_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 6 & 5 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

H_9 ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված է $\boldsymbol{C}(21,16)$ կոդը, որը կարողանում է ուղղել ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ կրկնակի սխալներ Z_9 օղակում՝

$$H_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 2 & 3 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 3 & 7 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 8 & 7 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 8 & 7 & 3 & 3 & 7 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}:$$

Ի տարբերություն Z_5 օղակում կառուցված $\boldsymbol{C}(13,8)$ կոդի, որը հանդիսանում էր օպտիմալ կոդ այն իմաստով, որ պարունակում էր մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ, այս $\boldsymbol{C}(17,12)$ և $\boldsymbol{C}(21,16)$ կոդերը չեն բավարարում այդ օպտիմալության պայմանին: Այս տիպի կոդերին մենք կանվանենք քվազի-օպտիմալ կոդեր:

Աշխատանքի **երրորդ գլխում** ներկայացված են այս կոդերով հաղորդագրությունների կոդավորման և ապակոդավորման (սխալների հայտնաբերման և ուղղման) ալգորիթմները և նրանց ծրագրային իրականացումը ինչպես կրկնակի ± 1 մեծությամբ սխալներ ուղղող կոդերի դեպքում այլ նաև ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ սխալներ ուղղող կոդերի համար:

Այս համակարգում հաղորդագրությունը ներկայացվում է Z_m –ում n երկարությամբ վեկտորների միջոցով: Նրանց ընդհանուր քանակը կլինի m^n, իսկ կոդային վեկտորների քանակը՝ m^{n+k} որտեղ k – ն ստուգող սիմվոլների քանակն է: Նախորդ պարագրաֆներում մենք կառուցել ենք կոդեր, որոնք ներկայացվել են իրենց ստուգող մատրիցի օգնությամբ: Որպեսզի կարողանանք կոդավորել կամայական վեկտոր մեզ անհրաժեշտ է կառուցել նաև այդ կոդերի ծնող մատրիցաները: Դրա համար մեզ արդեն հայտնի ստուգող մատրիցը՝ H – ը պետք է ներկայացնենք նրան կոմբինատոր-էկվիվալենտ մատրիցի տեսքով բերված աստիճանային տեսքի: Ստացված H' կոմբինատոր-էկվիվալենտ մատրիցը ևս կպահպանի H մատրիցի բոլոր առանձնահատկությունները (այսինքն բոլոր սինդրոմները կլինեն տարբեր՝ $h_{ij} \neq \pm h_{im}$, $\pm h_{ij} \pm h_{im} \neq \pm(h_{il} \pm h_{ik})$: Հետագայում H' մատրիցի միջոցով շատ ավելի հեշտ կարող ենք գտնել կոդի G ծնող մատրիցան: Կատարենք վերը նշված գործողությունները $\boldsymbol{C}(12,8)$ օպտիմալ կոդի H ստուգող մատրիցի համար: Այս ալգորիթմը տեղի ունի նաև այս աշխատանքում ստացված մյուս բոլոր կոդերի համար:

H մատրիցի համար նրա կոմբինատոր-էկվիվալենտ մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}:$$

Օգտվելով հայտնի թեորեմից[2] կոդի ծնող մատրիցը գտնելու մասին, եթե տրված է ստուգող մատրիցը բերված կոմբինատոր-էկվիվալենտ տեսքի (եթե H'=[$-P^T\ I_{n-k}$] որտեղ (I_{n-k} -ն (n-k) չափանի միավոր մատրից է, ապա $G = [I_k\ P]$, քանի որ $GH^T = 0$) կգտնենք մեր կոդի ծնող մատրիցան:

Այն կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}:$$

Տեսնում ենք, որ G մատրիցի աջ կողմում ունենք I_{n-k} (այս դեպքում I_8) միավոր մատրիցը:

Կոդավորում: Գտնելով G ծնող մատրիցան կարող ենք կոդավորել Z_5 օղակի 5^8 հնարավոր վեկտորներից յուրաքանչյուրը: Ենթադրենք մեր վեկտորն է $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_8)$– վեկտորը, այն կոդավորելու համար պետք է բազմապատկենք G -ի բոլոր սյուներով սկսած առաջինից, արդյունքում կստանանք 12 չափանի **սիստեմատիկ կոդ**, որի առաջին չորս կոմպոնենտները կլինեն ստուգող սիմվոլները, իսկ մնացած ութը կլինեն հենց մեր սկզբնական վեկտորի սիմվոլները՝

$$u = vG = (c_1, c_2, c_3, c_4, a_1, a_2, a_3, \dots, a_8),$$

որտեղ

$$c_j = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\, p_{ij}\right) mod 5$$

Բոլոր գործողությունները կատարվում են ըստ մոդուլ 5-ի քանի որ այս կոդը դիտարկված է Z_5 օղակի վրա:

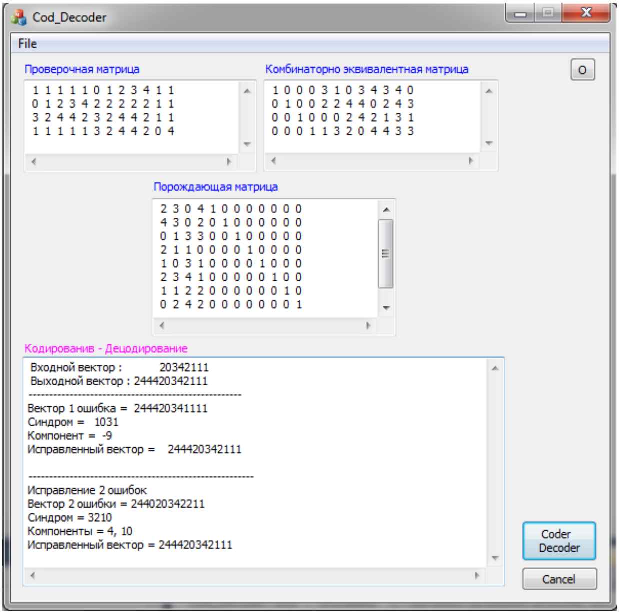
[2] W. W. Peterson and E.J. Weldon, “Error-Correcting Codes”, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1972.

Ապակոդավորում (Սխալների հայտնաբերում և ուղղում): Համոզվելու համար արդյոք եղել է սխալ կոդային վեկտորը փոխանցելուց հետո թե ոչ, և հետագայում այդ սխալները ուղղելու համար պետք է կատարենք հետևյալ գործողությունները.

1. Վեկտորը ստանալուց հետո այն բազմապատկում ենք H' մատրիցի տողերով, որպեսզի գտնենք $S = \boldsymbol{v} H'$ սինդրոմը :
   Եթե բոլոր բազմապատկումները կատարելուց հետո $\boldsymbol{S} = (\mathbf{0\ 0\ 0\ 0})$, հետևում է որ ոչ մի սխալ փոխանցման ժամանակ տեղի չի ունեցել:
2. Եթե սինդրոմը ստացվել է ոչ զրոյական, հետևում է տեղի են ունեցել ինչ-որ քանակությամբ սխալներ: Մեր դիտարկած $\boldsymbol{C}(12, 8)$ կոդի դեպքում ունենք 288 հատ իրարից տարբեր սինդրոմներ, որոնք մենք ունենք պահված նախապես ստացված աղյուսակում (տես §3.4): Հաշվելով ստացված սինդրոմը մենք միարժեք կերպով կարող ենք որոշել, թե որ 2 սյուների գումարման կամ հանման արդյունքում է այն ստացվել, որոնք իրենց հերթին ցույց են տալիս այն կոմպոնենտների համարները, որտեղ սխալ է տեղի ունեցել և սխալի ուղղությունը $(-$ ով թե $+$ ով): Գտնելով այդ կոմպոնենտները գումարում կամ հանում ենք նրանցից 1 (կախված սխալի ուղղությունից) և ստանում ենք ելքում հենց սկզբնական ուղարկված կոդային վեկտորը՝ $(c_1, c_2, c_3, c_4, a_1, a_2, a_3, \dots, a_8)$:
3. Արտաքսելով առաջին 4 կոմպոնենտները (ստուգող սիմվոլները), կստանանք հենց մեր ուղարկած սկզբնական հաղորդագրությունը:

Իսկ ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող կոդերի դեպքում ապակոդավորման ժամանակ արդեն սինդրոմների աղյուսակում պետք է ունենանք նաև 2-ով բազմապատկված սինդրոմները ևս, որպեսզի կարողանանք ուղղել նաև ± 2 մեծությամբ սխալները: Իսկ մնացած բոլոր գործողությունները կկատարվեն նույն մոտեցումով:

Փոքր ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդերով կոդավորման և ապակոդավորման ալգորիթմներն իրականացվել են $C++$ ծրագրավորման լեզվի միջոցով: Ստացված արդյունքներն ավելի պատկերավոր ներկայացնելու համար կառուցվել է նաև MFC դիալոգային պատուհան, որի վրա տարբեր դաշտերում դուրս են բերվում կոդի ստուգող, ծնող և կոմբինատոր-էկվիվալենտ մատրիցները, հաղորդագրության վեկտորը, կոմպոնենտների համարները, որոնցում սխալներ են տեղի ունեցել և համապատասխան սինդրոմը (Նկար 1):



Նկար 1 (MFC դիալոգային պատուհան)

Առաջին տողում կարող ենք տեսնել մուտքային հաղորդագրությունը, որն ինչպես գիտենք ներկայացվում է Z_5 օղակում 8 երկարությամբ վեկտորի միջոցով: Երկրորդ տողում մենք կարող ենք տեսնել արդեն իսկ կոդավորված վեկտորը (քանի որ կատարվում է սիստեմատիկ կոդավորում, ապա վեկտորի 8 կոմպոնենտները կմնան նույնը, իսկ սկզբից կավելանան 4 ստուգման բիթերը): Հաջորդ քայլում ծրագիրը կոդային բառում առաջացնում է մեկական կամ երկուական սխալներ, որից հետո գտնվում են համապատասխան սխալանքի սինդրոմները: Այնուհետև սինդրոմների աղյուսակից (որը ևս ստացվել է համապատասխան ծրագրի միջոցով) ծրագիրը գտնում է համապատասխան կոմպոնենտները, որոնցում սխալներ են տեղի ունեցել: Եթե կոմպոնենտի համարը + նշանով է ուրեմն սխալն ունի $+1$ մեծություն, իսկ եթե -, ապա -1: Վերջին քայլում ծրագիրն ուղղում է առաջացած սխալները, և դուրս է բերվում պատուհան սկզբնական կոդավորված վեկտորը, որից արտաքսելով առաջին 4 ստուգման բիթերը ստանում ենք սկզբնական հաղորդագրությունը (Նկար 1):

Սույն ատենախոսության շրջանակներում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

- Կառուցվել են նոր օպտիմալ կոդեր, որոնք կարողանում են հայտնաբերել և ուղղել կրկնակի փոքր ամպլիտուդաներով սխալներ տարբեր մեծությամբ օղակներում [2,3,6]:
- Ապացուցվել է թեորեմ կոդի երկարության կրկնապատկման մասին, ըստ որի մշակվել է ալգորիթմ, որի միջոցով արդեն իսկ հայտնի կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող գծային օպտիմալ $C(N, N-4)$ կոդերին ավելացնելով երկու ստուգող սիմվոլ, կարող ենք ստանալ $C\ (2N, 2N-6)$ կոդեր [3,5]:
- Մշակվել են կրկնակի փոքր ամլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդերի համար կոդավորման և ապակոդավորման (սխալների հայտնաբերման և ուղղման) ալգորիթմներ, որոնք իրականացվել են $C++$ ծրագրավորման լեզվով [1,4]:

ՀՐԱՊԱՐԱԿՎԱԾ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ՑԱՆԿ

[1] H. Khachatrian, “Encoding and Decoding procedures for double ± 1 error correcting codes over ring Z_5” Mathematical Problems of Computer Science 43, 57--61, 2015.

[2] Gurgen Khachatrian and Hamlet Khachatrian, “Construction of Double ± 1 Error Correcting Linear Optimal Codes over Rings Z_7 and Z_9” Mathematical Problems of Computer Science 45, 106-110, 2016.

[3] Gurgen Khacahtrian and Hamlet Khachatrian, “Further results on double ± 1 error correcting codes over rings Z_m” International Journal “Information Control and Processing”,Volume 4, Number 1, Sofia, Bulgary, pp.3-11, 2017.

[4] Hamlet Khachatrian, “Further Results for Encoding and Decoding Procedures of Asymmetric Low Magnitude Error Correcting Codes” Mathematical Problems of Computer Science 48, 105--111, 2017.

[5] Gurgen Khacahtrian and Hamlet Khachatrian, “Construction method of $(2N, 2N-6)$ linear codes over rings Z_m, based on $(N, N-4)$ linear codes correcting double ± 1 types of errors” CSIT Conference 2017, Yerevan, Armenia, September 25-29, pp.233-236.

[6] Gurgen Khachatrian and Hamlet Khachatrian.”Construction of Linear Codes over Rings Z_m Correcting Double ± 1 or ± 2 Errors**”** Mathematical Problems of Computer Science 49, pp.66-73, 2018.

ХАЧАТРЯН ГАМЛЕТ КАРЕНОВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ КОДОВ ИСПРАВЛЯЮЩИХ ОШИБКИ МАЛЫМИ АМПЛИТУДАМИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

РЕЗЮМЕ

С практической точки зрения большой интерес вызывают коды на кольцах Z_{2m} и Z_{2m+1}, так как они имеют широкое применение в 2^{2m} – КАМ модуляционных схемах. Ошибки, возникающие в канале, в основном асимметричны, они также имеют ограниченную величину, и этот эффект особенно применим к флэш-памяти. Таким образом, должны создаваться коды, которые могут исправлять такие типы ошибок.

Критерий оптимальности для линейных кодов по фиксированному кольцу Z_m можно рассматривать двумя способами. Прежде всего, напомним, что код длиной **n** является оптимальным-1, если он имеет минимальное возможное количество символов проверки на четность. Во-вторых, критерий оптимальности-2 для кода заключаются в том, что для заданного числа символов проверки на четность он имеет максимально возможную длину. На данный момент мы не знаем никаких кодов, которые удовлетворяют критериям оптимальности-2.

В данной работе представлено построение оптимальных кодов в кольцах Z_7 и Z_9, исправляющие двойные ошибки размера ± 1, которые удовлетворяют критерии оптимальности-1. Кроме того, мы разработали метод построения новых кодов $C\ (2N, 2N-6)$, добавляя только два символа проверки на четность к оптимальным кодам $C\ (N, N-4)$, исправляющих двойные ошибки размера ± 1. Новые построенные коды в 2 раза больше, чем $C\ (N, N-4)$ оптимальные коды.

Более того, мы обратили внимание на случаи, когда величина ошибок не только ± 1. В следующей части работы построены коды $C\ (N, N-5)$ с 5-ю символами проверки на четность, исправляющих двойные ± 1 или ± 2 ошибки с ограничением, что обе ошибки имеют одинаковую амплитуду по абсолютной величине над кольцами Z_m. Они также основаны на оптимальных кодах $C\ (N, N-4)$, исправляющих двойные ошибки размера ± 1. В этом случае мы не можем исправлять двойные ошибки с разными величинами, например, одну ошибку с величиной +1 и другую с величиной +2.

В заключительной части работы представлены построение и внедрение процедур кодирования и декодирования для линейных кодов, исправляющих двойные

ошибки размера ± 1 или ± 2, которые были реализованы на языке программирования C++, результаты которого были представлены через диалоговое окно MFC.

В результате исследований, проведенных в данной работе, были получены следующие основные результаты:

- Построены новые оптимальные и квазиоптимальные коды, которые способны обнаруживать и исправлять двойные ошибки с малыми амплитудами в разных кольцах Z_m [2, 3, 6].
- Был разработан новый метод для построения кодов $C\ (2N, 2N-6)$, который состоит в том, что добавив только два символа проверки на четность к оптимальным кодам $C\ (N, N-4)$, можно построить коды, которые будут иметь длину в два раза больше [3,5].
- Разработка и реализирование процедур кодирования и декодирования для линейных кодов исправляющих двойные ошибки размера ± 1 или ± 2 [1, 4].

HAMLET KAREN KHACHATRYAN

LOW-MAGNITUDE ERROR CORRECTING CODES AND THEIR IMPLEMENTATION

ABSTRACT

From practical point of view the codes over rings Z_{2m} or Z_{2m+1} are interesting, because they can be used in 2^{2m} – QAM (Quadrature amplitude modulation) schemes. Codes over finite rings, particularly over integer residue rings and their applications in coding theory have been studied for a long time. Errors happening in the channel are basically asymmetrical; they also have a limited magnitude and this effect is particularly applicable to flash memories. As such, we consider the problem of construction of codes, correcting these types of errors.

The optimality criteria for the linear codes over fixed ring Z_m can be considered in two ways. First of all, recall that the code of the length **n** is optimal-1 if it has a minimum possible number of parity check symbols. Secondly, optimality-2 criteria for the code is that for a given number of parity check symbols, it has a maximum possible length. At this point we do not know any codes that satisfy the optimality criteria-2.

In this paper a construction of double ± 1 error correcting linear optimal codes over rings Z_7 and Z_9 is presented, which satisfy to optimality criteria-1. Also, we construct a method for constructions of codes $C\ (2N, 2N-6)$, by adding only two parity check symbols to the optimal codes $C(N, N-4)$ correcting double ± 1 errors. The new constructed codes are 2 time longer then $C(N, N-4)$ optimal codes, and they have a higher rate.

Moreover, we pay attention to the cases when magnitude of errors are not only ± 1. In this paper we will construct codes $C(N, N-5)$ with 5 parity check symbols correcting double ± 1 or ±2 errors with the limitation that both errors have the same amplitude in absolute value over rings Z_m. They are based on optimal codes $C(N, N-4)$ with 4 parity check symbols correcting double errors over rings Z_m of value ± 1 . In this case we can not correct double errors with different magnitude, for example one error with magnitude +1 and other with a magnitude +2.

In the next part of the work, the construction and implementation of encoding and decoding procedures for double ±1 or (±1 and ±2) error correcting optimal linear codes are presented.

During the research carried within this study, the following results were obtained:

- Construction of optimal and quasi-optimal low-magnitude error correting codes over different rings Z_m [2, 3, 6].
- A new method for constructions of codes $C\ (2N, 2N-6)$, by adding only two parity check symbols to the optimal codes $C(N, N-4)$ correcting double ± 1 errors has been developed [3,5].
- Sofware implementation of encoding and decoding procedures for double ±1 or (±1 and ±2) error correcting optimal linear codes [1, 4].