Ереванский Государственный Университет

Факультет Математики и Механики

Айк Тигранович Асланян

Полугруппа эндоморфизмов и автоморфизмы некоторых относительно свободных групп

А.01.06 – Алгебра и теория чисел

Диссертация

Научный руководитель:

д.ф.м.н., проф. В.С. Атабекян

Ереван – 2018

Оглавление

Введение

Группа F называется относительно свободной, если она обладает множеством порождающих S таких, что любое отображение из S в F можно продолжить до эндоморфизма F. Порождающее множество с этим свойством называется множеством свободных образующих для F. Мощность S, являющаяся инвариантом данной относительно свободной группы F, называется рангом F. Каждая относительно свободная группа является свободной группой соответствующего ранга в некотором многообразии групп. Напомним, что многообразия групп является классом всех групп, каждый из которых удовлетворяет некоторому фиксированному множеству тождеств (см. [1]).

Если в группе G имеем тождество $x^n = 1$, то мы говорим, что G является периодической группой с показателем n или G является n -периодической группой. Все такие группы образуют многообразие, которое называется многообразием Бернсайда показателя n. Свободная группа ранга m в многообразии Бернсайда показателя n обозначается через $B(m, n)$.

Известно, что для конечного ранга m группы $B(m, 2)$, $B(m, 3)$, $B(m, 4)$ и $B(m, 6)$ конечны (см. [2], [3]) и для всех нечетных чисел $n \geq 665$ (см. [4], [5]) и натуральных чисел $n = 16k \geq 8000$ см. [6], [7]), а также для их натуральных кратных группы $B(m, n)$ бесконечны. Для всех остальных экспонент вопрос конечности $B(m, n)$ является хорошо известной, но еще не решенной задачей в теории групп (проблема В. Бернсайда, 1902). Например, неизвестно, является ли $B(2, 5)$ конечной или бесконечной.

Теория конечно порожденных свободных бернсайдовых групп достаточно больших нечетных показателей была построена в работе Новикова-Адяна [4]. Позднее эта теория была усовершенствована в монографии [5] С. И. Адяном.

В. Атабекян в [8] показал, что для всех нечетных $n \geq 655$ и ранга $m > 1$ группа автоморфизмов $Aut(End(B(m, n)))$ полугруппы эндоморфизмов $End(B(m, n)$ группы $B(m, n)$ изоморфна группе автоморфизмов $Aut(B(m, n))$. Аналогичное утверждение для конечно порожденных абсолютно свободных групп было доказано Э.Форманеком в 2002 году (см. [9]). Группа $Aut(End(F))$ изучалась для свободных моноидов F Машевицким и Шейном в [10]. Вышеупомянутые результаты работ [8], [9] обобщены и усилены в главе I (см. [80]). В этой главе рассматривается класс всех относительно свободных групп R, в которых нетривиальные элементы имеют только циклические централизаторы. Мы показали (см. теорему 2, гл. I), что каждый автоморфизм полугруппы эндоморфизмов $End(R)$ группы R из этого класса однозначно определяется ее действием на подгруппу внутренних автоморфизмов $Inn(R)$.

Другим направлением нашего исследования является исследование групп автоморфизмов свободных бернсайдовых групп показателя n и некоторых других относительно свободных групп. По классической теореме Нильсена [11] группа автоморфизмов абсолютно свободной группы конечного ранга порождается так называемыми элементарными автоморфизмами, которые в наши дни называются автоморфизмами Нильсена. Аналогичные естественные вопросы возникают и для других относительно свободных групп. Например, *верно ли, что для данной относительно свободной группы ее группа автоморфизмов порождается автоморфизмами Нильсена?*

Ответ на этот вопрос отрицательный в общем случае. Например, нетрудно видеть, что автоморфизм, переводящий каждый свободный генератор на его квадрат, не может быть индуцирован никаким автоморфизмом абсолютно свободной группы (того же ранга) и, следовательно, он не является автоморфизмом Нильсена для свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ достаточно большого нечетного периода n.

Существует много других относительно свободных групп с так называемыми «дикими» (т. е. не индуцированным нильсенскими автоморфизмами) автоморфизмами (см., например, [12]).

Эта задача интересна также для автоморфизмов известных конечных свободных групп $B(m, n)$. Как было отмечено выше, в настоящее время конечность групп $B(m, n)$ известна только для конечных рангов и периодов $n = 2, 3, 4, 6$. Р. Брайант и О. Мацедонска в [13] показали, что каждый автоморфизм свободной нильпотентной группы бесконечного ранга индуцируется некоторым автоморфизмом абсолютно свободной группы F_m. А.Григоряном было показано, что каждый автоморфизм группы $B(m, 3)$ конечного ранга m индуцируется некоторым автоморфизмом абсолютно свободной группы F_m ранга m (см. [78] , Теорема 2).

Отметим, что ранее была установлена серия аналогов между свойствами автоморфизмов абсолютно свободных групп и автоморфизмов свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 1003$. Например, было доказано (см. [14]), что для любого нечетного числа $n \geq 1003$ каждый нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ранга $m > 1$ является внутренним автоморфизм (см. также [15]). Напомним, что автоморфизм ϕ группы G называется нормальным автоморфизмом, если $\phi(N) = N$ для любой нормальной подгруппы N группы G. Такой результат для свободных групп был доказан А. Любоцким в 1980 году [16].

Группа называется совершенной, если она имеет тривиальный центр, и если каждый из ее автоморфизмов является внутренним. Дж.Дайер и Э.Форманек [17] доказали, что группа автоморфизмов $Aut(F)$ конечно порожденной абсолютно свободной группы F совершенна. В. Толстых [18] доказал, что группы $Aut(F)$ для абсолютно свободных групп бесконечного ранга совершенны. В работе В. Атабекяна [19] было установлено, что башня автоморфизмов групп $B(m, n)$ для любого нечетного периода $n \geq 1003$ и ранга $m > 1$ заканчивается на его первом шаге, т. е. он меньше, чем башня автоморфизмов абсолютно свободной группы. Более того, оказалось, что для всех нечетных $n \geq 1003$ и $m > 1$ группа внутренних автоморфизмов $Inn(B(m, n))$ является единственной нормальной подгруппой $Aut(B(m, n))$, которая изоморфна свободной группе Бернсайда $B(s, n)$ некоторого ранга s. Отсюда следует, что группа автоморфизмов $Aut(B(m, n))$ свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ полна для всех нечетных $n \geq 1003$ и $m > 1$, а также, что группы $Aut(B(m, n))$ и $Aut(B(k, n))$ изоморфны тогда и только тогда, когда $m = k$ (см. также [20] - [22]).

В [14] также доказано, что подгруппа внутренних автоморфизмов $Inn(B(m, n))$ максимальна среди всех подгрупп группы $Aut(B(m, n))$, в которой порядки элементов ограничены числом n.

Другой результат касается расщепляющих автоморфизмов, т. е. тех автоморфизмов периода n, для которых

$$gg^{\phi}g^{(\phi^2)}...g^(\phi^{(n-1)}) = 1$$

для всех $g \in G$. В [23] – [25] доказано, что если ϕ – расщепляющий автоморфизм периода n группы $B(m,n)$, где $n \geq 1003$ нечетное число, то если порядок автоморфизма ϕ является степенью некоторого простого числа, то ϕ является внутренним автоморфизмом (это дает положительный ответ на вопрос С. И. Иванова в «The Kourovka Notebook» [26], поставленный в 1990 году).

Отметим, что все упомянутые результаты касаются бесконечным свободным группам Бернсайда. Во второй главе мы изучаем аналогичные вопросы для автоморфизмов конечных свободных бернсайдовых групп $B(m,3)$. Мы доказываем следующее:

1. Если в свободной группе $B(m,3)$ нормальное замыкание элементов x и у совпадают, то x сопряжено или с y или с $y^{(-1)}$ (аналог известной теоремы Магнуса, см. В [27]),

2. Если $m \geq 3$, то каждый нормальный автоморфизм группы $B(m,3)$ является внутренний автоморфизм

Обозначим через A_m подгруппу группы $\mathrm{Aut}(R_n)$ порожденную всеми нильсеновскими автоморфизмами. Следующий результат второй главы касается группе A_m:

3. Группа A_m является нормальным замыканием одной инволюции.

Представленные автором результаты работы были представлены на международной конференции Мальцева (Новосибирск, 2017), в семинаре «Теория групп» в ЕГУ (Ереван, 2016-2018 гг.), на ежегодной заседании АМУ, посвященной 120-летию Артина (Ереван , 2018).

Глава 1

Автоморфизмы полугрупп эндоморфизмов относительно свободных групп

Введем алфавит E из букв $x_1, x_2, ...$ и обозначим через X_∞ свободную группу, свободно порожденную множеством E. Для каждого $n \geq 1$ свободная группа X_n свободна порожденная элементами $x_1, ..., x_n$, будет тогда естественно вложена в группу X_∞. Если A - группа, а

$$\alpha : E \to \alpha(E) \subseteq A$$

является отображением свободных образующих группы X_∞ в A, то образ слова w при соответствующем гомоморфизме

$$\alpha : X_\infty \to A$$

называется значением слова w в A.

Определение 1.1. *Вербальной подгруппой $\omega(A)$ группы A, соответствующей множеству ω слов, называется подгруппа, порожденная всеми значениями в A слов из ω:*

$$\omega(A) = gp(\alpha(w) | w \in \omega, \alpha \in Hom(X_\infty, A)) \tag{1.1}$$

Если ω состоит из единственного слова w, мы пишем $w(A)$.

Все слова $w \in \omega$ являются тождествами в A тогда и только тогда, когда

$$\omega(A) = \{1\}.$$

Для вербальных подгрупп известно следующее свойство: каждая вербальная подгруппа любой группы вполне инвариантна в этой группе. Обратное в общем случае неверно. Однако, каждое вполне инвариантная подгруппа свободной группы X вербальна.

Для свободной группы X_Γ с множеством образующих Γ известно, что каждое отображение

$$\alpha : \Gamma \to \alpha(\Gamma) \subseteq X$$

может быть продолжено до эндоморфизма группы X_Γ. Это свойство используется для определения более общего класса групп.

Определение 1.2. *F называется относительно свободной, если она обладает множеством порождающих S таких, что любое отображение из S в F можно продолжить до эндоморфизма F.*

Порождающее множество с этим свойством называется множеством свободных образующих для F. Мощность S, являющаяся инвариантом данной относительно свободной группы F, называется рангом F.

Каждая относительно свободная группа является свободной группой соответствующего ранга в некотором многообразии групп. Напомним, что многообразия групп является классом всех групп, каждый из которых удовлетворяет некоторому фиксированному множеству тождеств (см. [1]). Относительно свободные группы называют также приведенными свободными или холловски свободными, а свободные образующие известны также как канонические образующие. Из [1] известно, что группа F является относительно свободной тогда и только тогда, когда она обладает одним из следующих свойств:

а) F обладает множеством образующих, таким что каждое соотношение между этими образующими является тождеством в F.

б) F может быть представлена как факторгруппа

$$F \cong X/U(X)$$

свободной группы по некоторой ее вербальной подгруппе.

в) F имеет представление

$$F \cong X/N,$$

такое, что каждый эндоморфизм группы X индуцирует некоторый эндоморфизм в F.

Из этого следует, что каждый эндоморфизм относительно свободной группы F индуцирует эндоморфизм группы X, где, в соответствии со свойством б),

$$F \cong X/U(X).$$

Каждое соотношение на множестве свободных образующих относительно свободной группы F является тождеством в F.

В этой главе доказывается, что каждый автоморфизм полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}(F)$ для широкого класса относительно свободных групп F произвольного (конечного или бесконечного) ранга однозначно определяется его действием на подгруппу внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(F)$.

Вопрос об описании автоморфизмов $\mathrm{End}(A)$ для свободной алгебры A в некотором многообразии был поднят Б. И. Плоткиным (см. [28, стр. 1085] или [29]). Аналогичные задачи для $\mathrm{End}(F)$, где F - конечно порожденная свободная группа, свободная бернсайдова группа нечетного периода $n \geq 1003$ или свободный моноид были решены Форманеком [9] , Атабекян [8], Машевицким и Шейном [10] соответственно.

Форманеком в работе [9] была доказана, что если имеем свободную группу

$$F = F(x_1, \ ..., \ x_n)$$

конечного ранга $n \geq 2$ и

$$T : \mathrm{End}(F) \to \mathrm{End}(F)$$

является автоморфизмом полугруппы $\mathrm{End}(F)$, тогда существует автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(F)$ такое, что

$$T(\beta) = \alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$$

для всех $\beta \in \mathrm{End}(F)$.

Обозначим через X^* и X^+ свободный моноид и свободную группу порожденную множеством X соответственно. Всякая биекция $f : X \to Y$ индуцирует изоморфизм $\iota_f : X^* \to Y^*$ и антиизоморфизм $\overline{\iota_f} : X^* \to Y^*$, определяемый следующим образом:

$$\iota_f(u) = f(x_{i_1})...f(x_{i_k})$$

и

$$\overline{\iota_f}(u) = \overline{\iota_f(u)} = f(x_{i_k})...f(x_{i_1}).$$

Аналогичные факты справедливы и для X^+ и Y^+.

Машевицким и Шейном в [10] были рассмотрены полугруппы $\mathrm{End}(X^*)$ и $\mathrm{End}(X^+)$. Их первый результат гласит, что если $\mathrm{End}(X^*)$ и $\mathrm{End}(Y^*)$ изоморфны и $|X| = 1$, то $|Y| = 1$ и изоморфизмы из $\mathrm{End}(X^*)$ на $\mathrm{End}(Y^*)$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с перестановками P. А если $|X| \geq 1$, то всякий изоморфизм

$$\alpha : \mathrm{End}(X^*) \to \mathrm{End}(Y^*)$$

индуцируется либо изоморфизмом ι_f, либо антиизоморфизмом $\overline{\iota_f}$ моноида X^* на моноид Y^* для однозначно определенной бифункции $f : X \to Y$. Те же результаты справедливы для любого изоморфизма

$$\alpha : \mathrm{End}(X^+) \to \mathrm{End}(Y^+)$$

.

Второй результат Машевицкого и Шейна [10] гласит, что если группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(X^+))$ и $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(X^*))$ изоморфны и $|X| > 1$, то каждый автоморфизм $\mathrm{End}(X^*)$ и $\mathrm{End}(X^+)$ является либо внутренним, либо произведением внутреннего автоморфизма и зеркального автоморфизма μ. В этой случае $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(X^*))$ изоморфно прямому произведению

$$\mathrm{Aut}(X) \times C_2.$$

А если $|X| = 1$, то $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(X^*))$ изоморфна симметрической группе счетного бесконечного множества.

Другие результаты связанные с этой задачей можно найти, например в [30]-[32].

Но, прежде всего нами будет рассмотрен класс так называемых CC-групп. По определению, группа G называется *CC-группой*, если централизатор каждого нетривиального элемента G является циклической группой. Хорошо известно, что абсолютно свободные группы и свободные периодические группы с достаточно большими нечетными периодами (см. [5]) являются CC-группами. Легко показать, что свободное произведение произвольного семейства CC-групп также является CC-группой. Из теоремы 5 статьи [33] (см. также [34]) следует, что то же самое верно для n -периодических произведений CC-групп. Рассматриваемые в этой главе группы $\Gamma_m(\mathcal{P})$ также являются CC-группами $\Gamma_m(\mathcal{P})$.

Заметим, что, например, конечно порожденные свободные периодические группы периода 3 не являются CC-группами (их группы автоморфизмов описаны в [78]).

Наш первый основной результат настоящей главы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *(см. [81]) Пусть Φ - произвольный автоморфизм полугруппы эндоморфизмов* $\mathrm{End}(G)$ *нециклической CC-группы G. Если*

$$\Phi(i_a) = i_a$$

для любого $i_a \in Inn(G)$, то $\Phi(\delta) = \delta$ для любого эндоморфизма $\delta \in \mathrm{End}(G)$ образ $\mathrm{Im}\delta$ которого не является циклическим.

Из него непосредственно вытекает

Следствие 1.1. *Для любого $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G))$нециклической CC-группы G такой, что $\Phi(i_a) = i_a$ для любого $i_a \in \mathrm{Inn}(G)$ имеет место равенство $\Phi(\delta) = \delta$ для всех $\delta \in \mathrm{Inn}(G)$.*

Сформулируем теперь наш следующий основной результат.

Теорема 1.2. *(см. [80]) Пусть Φ и Ψ – произвольные автоморфизмы полугруппы эндоморфизмов* $\mathrm{End}(F)$ *относительно свободной CC-группы F некоторого ранга > 1. Тогда*

$$\Phi = \Psi$$

тогда и только тогда, когда ограничения автоморфизмов Φ и Ψ на подгруппу $Inn(F)$ совпадают, т. е.

$$\Phi\big|_{Inn(F)} = \Psi\big|_{Inn(F)}$$

.

В частности, мы получаем

Следствие 1.2. *Для любых автоморфизмов* Φ *и* Ψ *полугруппы эндоморфизмов* $\mathrm{End}(F)$ *абсолютно свободной группы* F *ранга* > 1 *выполняется равенство* $\Phi = \Psi$ *тогда и только тогда, когда ограничения автоморфизмов* Φ *и* Ψ *на подгруппу* $\mathrm{Inn}(F)$ *совпадают.*

Другое следствие получаем для свободных бернсайдовых групп. По теореме С. И. Адяна (см. [5], глава VI, теорема 3.1) централизатор любого нетривиального элемента свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ранга $m > 1$ и нечетного периода $n \geq 665$ является циклической группой (свободные группы многообразия групп, определяемые одинаковым соотношением $x^n = 1$, называются свободными группами Бернсайда).

Следствие 1.3. *Для любых автоморфизмов* Φ *и* Ψ *полугруппы эндоморфизмов* $\mathrm{End}(B(m, n))$ *свободной бернсайдовой группы* $B(m, n)$ *(конечного или бесконечного) ранга* $m > 1$ *и нечетного периода* $n \geq 665$ *равенство* $\Phi = \Psi$ *выполняется тогда и только тогда, когда ограничения автоморфизмов* Φ *и* Ψ *на подгруппу* $\mathrm{Inn}(B(m, n))$ *совпадают.*

Согласно статье [35], оценка $n \geq 665$ в формулировке следствия 1.1 в будущем может быть сведена к $n \geq 101$. Другое обобщение следствия 1.1 можно получить для n-периодических произведений некоторого класса групп (см. [34]).

Укажем еще один широкий класс групп, к которым можно применить теорему 1.2. В [36] С. И. Адян построил примеры (первые примеры) бесконечных независимых систем групповых тождеств для решения задачи конечного базиса, поставленной Б. Нойманом в 1937 году и хорошо известной в теории групп. В монографии [5] доказано, что для любого нечетного $n \geq 1003$ следующее семейство тождеств с двумя переменными

$$\{[x^{pn}, y^{pn}]^n = 1\}, \tag{1.2}$$

где параметр p пробегает все простые числа, неприводим, т. е. ни одно из тождеств этого семейства не следует из других. Поэтому, если для заданного набора простых чисел $\mathcal{P}$ и для фиксированного натурального $m > 1$ через $\Gamma_m(\mathcal{P})$ обозначим относительно свободную группу ранга m многообразия $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$, определяемого всеми тождествами вида (1.2) для $p \in \mathcal{P}$, тогда существует континуум многообразий и континуум неизоморфных относительно свободных групп $\Gamma_m(\mathcal{P})$, соответствующих различным наборам простых чисел $\mathcal{P}$.

В статье [37] доказано, что для любого ранга $m > 1$ и для любого набора простых чисел $\mathcal{P}$ централизатор любого неединичного элемента относительно свободной группы $\Gamma_m(\mathcal{P})$ - циклическая группа.

Следствие 1.4. *Для любых автоморфизмов* Φ *и* Ψ *полугруппы эндоморфизмов* $\mathrm{End}(\Gamma_m(\mathcal{P}))$ *относительно свободной группы* $\Gamma_m(\mathcal{P})$ *ранга* $m > 1$ *в многообразии* $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ *равенство* $\Phi = \Psi$ *выполняется тогда и только тогда, когда ограничения автоморфизмов* Φ *и* Ψ *в подгруппу* $\mathrm{Inn}(\Gamma_m(\mathcal{P}))$ *совпадают.*

Для произвольной группы G рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\tau_G : \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(G)) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G))$$

взяв каждый автоморфизм из полугруппы эндоморфизмов группы G в его ограничение на подгруппу $\mathrm{Aut}(G)$ всех обратимых элементов этой полугруппы.

Следствие 1.5. *Если* F *является относительно свободной группой некоторого ранга* > 1, *то гомоморфизм* τ_G *является мономорфизмом и, следовательно, группа автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(F))$ *канонически вложено в группу* $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(F))$.

Очевидно, что любой внутренний автоморфизм из $\mathrm{Aut}(G)$ естественным образом распространяется на автоморфизм полугруппы $\mathrm{End}(G)$. Поэтому, если все автоморфизмы группы $\mathrm{Aut}(G)$ являются внутренними, то τ_G является сюръективным гомоморфизмом.

В частности, это верно для совершенных групп (напоминаем, что группа называется *совершенной*, если ее центр тривиален и все его автоморфизмы являются внутренними). Более того, если

$$\phi : \mathrm{Inn}(G) \to \mathrm{Inn}(G)$$

является автоморфизмом группы внутренних автоморфизмов G и

$$\phi(i_g) = i_{\alpha(g)},$$

то нетрудно проверить, что $\alpha : G \to G$ является автоморфизмом G.

Предположим, что композиция эндоморфизмов действует на группу G по правилу

$$(\alpha \circ \beta)(x) = (\alpha(\beta(x)) \text{ для } \alpha, \beta \in \mathrm{End}(G) \text{ и } x \in G.$$

Используя соотношение

$$\alpha \circ i_g \circ \alpha^{-1} = i_{\alpha(g)},$$

получаем, что автоморфизм ϕ продолжается до автоморфизма i_α полугруппы $\mathrm{End}(G)$. Подгруппа $\mathrm{Inn}(G)$ характерна в $\mathrm{Aut}(G)$ для совершенных групп $\mathrm{Aut}(G)$ по известному критерию Бернсайда. Следовательно, для любой совершенной группы $\mathrm{Aut}(G)$ гомоморфизм

$$\iota_G : \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(G)) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Inn}(G)),$$

сопоставляющий каждому автоморфизму из $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(G))$ ее ограничение на подгруппу $\mathrm{Inn}(G)$, также является сюръективным гомоморфизмом.

Таким образом, получаем

Следствие 1.6. *Если F является относительно свободной CC-группой и группа $\mathrm{Aut}(F)$ совершенна, то гомоморфизмы*

$$\tau_F : \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(F)) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(F))$$

и

$$\iota_F : \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(F)) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Inn}(F))$$

являются изоморфизмами.

Например, группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F)$ совершенны для абсолютно свободных групп F и для свободных бернсайдовых групп с нечетными показателями $n \geq 1003$ для любого ранга > 1 (см. [17], [18] и [19] соответственно). Итак, для этих групп получаем изоморфизмы

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(F)) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{Inn}(F)) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(F)) \simeq \mathrm{Aut}(F),$$

(по определению, для совершенной группы G имеет место изоморфизм $\mathrm{Aut}(G) \simeq G$).

1.1 Вспомогательные понятия

Определение 1.3. *Взаимно однозначное суръективное отображение ϕ одной группы в другую, сохраняющее произведение, называется изоморфным. Иными словами, отображение ϕ группы G в группу H является изоморфным, если образ различных элементов различны:*

$$\phi(a) \neq \phi(b) \text{ при } a \neq b \ (a, b \in G)$$

и образ произведения равен произведению образов:

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

Отказываясь от первого требования приходим к понятию гомоморфизма:

Определение 1.4. *Отображение ϕ группы G в группу H называется гомоморфным или гомоморфизмом, если*

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

для любых элементов a, b из G.

Определение 1.5. *Гомоморфное отображение группы в себя называется ее эндоморфизмом.*

Определение 1.6. *Изоморфное отображение группы в себя называется ее автоморфизмом.*

Множество всех эндоморфизмов и автоморфизмов данной группы G обозначаются соответственно через $\mathrm{End}(G)$ и $\mathrm{Aut}(G)$. На этих множествах определяют умножение, считая произведением двух эндоморфизмов их последовательное выполнение. Легко проверить, что тогда $\mathrm{End}(G)$ становится полугруппой, а $\mathrm{Aut}(G)$ становится группой.

Говорят, что элемент a сопряжен с элементом b посредством элемента x, если $a = x^{-1}bx$. Часто используют степенные обозначения:

$$x^{-1}bx = b^x.$$

Отображение группы G на себя по правилу

$$i_a : x \mapsto x^a$$

(при фиксированном a из G) является изоморфизмом, так как оно взаимно однозначно и

$$i_a(xy) = i_a(x)i_a(y) \text{ для } x, y \in G.$$

Этот автоморфизм i_a называется внутренним автоморфизмом группы G, производимым элементом a. Непосредственно проверяется, что

$$(x^a)^b = x^{ab},$$

$$(x^a)^{a^{-1}} = x,$$

$$\phi^{-1} i_a \phi(x) = i_{\phi(a)}(x),$$

где $a, b, x \in G,\ \phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Поэтому

$$i_a i_b = i_{ab},$$

$$i_a^{-1} = i_{a^{-1}},$$

$$\phi^{-1} i_a \phi = i_{\phi(a)}.$$

Отсюда вытекает в частности, что множество $\mathrm{Inn}(G)$ всех внутренних автоморфизмов группы G является нормальной подгруппой группы $\mathrm{Aut}(G)$,

$$\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$$

Автоморфизмы не являющиеся внутренними, называют внешними, а группу

$$\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\,\mathrm{Inn}(G)$$

называют группой внешних автоморфизмов. Очевидно, для абелевой группы Out совпадает с Aut.

1.2 Доказательство теоремы 1.1

Пусть F - относительно свободная CC-группа некоторого ранга > 1. Очевидно, утверждение теоремы 1.2 эквивалентно утверждению, что если ограничение автоморфизма Φ

от $\mathrm{End}(F)$ на подгруппу $\mathrm{Inn}(F)$ - тождественный автоморфизм, т. е.

$$\Phi\big|_{\mathrm{Inn}(F)} = 1_{\mathrm{Inn}(F)}, \tag{1.3}$$

то Φ является тождественным автоморфизмом полугруппы $\mathrm{End}(F)$, то есть

$$\Phi = 1_{\mathrm{End}(F)}.$$

Предположим, что выполнено равенство (1.3). Мы покажем равенство

$$\beta(a)^{-1} \cdot \Phi(\beta)(a) = 1$$

для любых $a \in F$ и $\beta \in \mathrm{End}(F)$, что означает, что

$$\Phi(\beta) = \beta$$

для любого $\beta \in \mathrm{End}(F)$.

Выведем доказательство из нескольких лемм, которые будут доказаны ниже.

Лемма 1.1. *а) Любой нетривиальный элемент $x \in F$ принадлежит единственной максимальной циклической подгруппе, которая является централизатором x.*

б) Если нетривиальные элементы a^m и b^n из F коммутируют, то a и b принадлежат одной и той же циклической подгруппе.

Доказательство. а) Любая максимальная циклическая подгруппа A группы F является подмножеством централизатора $C(x)$ каждого нетривиального элемента $x \in A$. Следовательно, $A = C(x)$, так как $C(x)$ также является циклическим. Далее, любые две различные максимальные циклические подгруппы A и B из F порождают нециклическую подгруппу $gp\{A, B\}$ в централизаторе каждого элемента $y \in A \bigcap B$. Таким образом, отношение $y \in A \bigcap B$ влечет равенство $y = 1$, так как централизатор каждого нетривиального элемента является циклическим.

б) Пусть циклическая группа $gp\{x\}$ является централизатором a^m. Тогда $b^n, a^m \in gp\{x\}$. Так как

$$b^n \in gp\{b\}, \quad a^m \in gp\{a\}$$

и $gp\{x\}$ - максимальная циклическая подгруппа в силу а), получаем

$$gp\{b\} \subset gp\{x\} \text{ и } gp\{a\} \subset gp\{x\},$$

потому что любой нетривиальный элемент принадлежит единственной максимальной циклической подгруппе. В частности, a и b принадлежат циклической группе $gp\{x\}$. $\square$

Лемма 1.2. *Для любых $a, x \in F$ и $\beta \in \mathrm{End}(F)$ элемент*

$$\beta(a)^{-1} \cdot \Phi(\beta)(a)$$

принадлежит централизатору элемента $\Phi(\beta)(x)$ (и наоборот).

Доказательство. Обозначим через i_a внутренний автоморфизм F, определенный элементом $a \in F$. Рассмотрим произвольный эндоморфизм $\beta \in \mathrm{End}(F)$ и применим эндоморфизмы $\beta \circ i_a$ к элементу $x \in F$. По определению имеем

$$(\beta \circ i_a)(x) = \beta(i_a(x)) = \beta(a)\beta(x)\beta(a^{-1}) = (i_{\beta(a)} \circ \beta)(x).$$

Следовательно, справедливо равенство:

$$\beta \circ i_a = i_{\beta(a)} \circ \beta. \tag{1.4}$$

Применяя автоморфизм Φ к обеим сторонам равенства (1.4) и учитывая (1.3), получаем равенство

$$\Phi(\beta) \circ i_a = i_{\beta(a)} \circ \Phi(\beta). \tag{1.5}$$

Теперь применяя обе части равенства (1.5) к произвольному элементу $x \in F$, получим

$$\Phi(\beta)(a) \cdot \Phi(\beta)(x) \cdot \Phi(\beta)(a)^{-1} = \beta(a) \cdot \Phi(\beta)(x) \cdot \beta(a)^{-1}. \tag{1.6}$$

Равенство (1.6) означает, что элемент

$$\beta(a)^{-1} \cdot \Phi(\beta)(a)$$

принадлежит централизатору элемента $\Phi(\beta)(x)$ для каждого $a, x \in F$. $\square$

Лемма 1.3. *Если образ $\Phi(\beta)$ не является циклической группой для некоторого эндоморфизма $\beta \in \mathrm{End}(F)$, то*

$$\Phi(\beta) = \beta. \tag{1.7}$$

Доказательство. Предположим, что $\Phi(\beta)(x)$ и $\Phi(\beta)(y)$ не принадлежат к одной и той же циклической подгруппе для некоторых элементов $x, y \in F$. Тогда они принадлежат разным максимальным циклическим подгруппам, скажем, A и B соответственно. По лемме 1.2 имеем

$$\beta(a)^{-1} \cdot \Phi(\beta)(a) \in A \bigcap B$$

для любого элемента $a \in F$. С другой стороны,

$$A \bigcap B = \{1\}$$

по лемме 1.1 a) (потому что $A \neq B$). Поэтому

$$\beta(a)^{-1} \cdot \Phi(\beta)(a) = 1$$

для любого $a \in F$. □

В силу леммы 1.3 доказательство теоремы 1.1 завершено.

1.3 Доказательство следствия 1.1

Очевидно, что леммы 1.2 и 1.3 остаются верными, если в их формулировках изменяется $\mathrm{End}(G)$ на $\mathrm{Aut}(G)$. Если δ - автоморфизм, то $\Phi(\delta)$ также является автоморфизмом. Следовательно,

$$\mathrm{Im}(\Phi(\delta)) = G.$$

Следовательно, $\mathrm{Im}(\Phi(\delta))$ не является циклическим, так как G не является циклической группой. Используя лемму 1.3, получаем

$$\Phi(\delta) = \delta.$$

1.4 Доказательство теоремы 1.2

Лемма 1.4. *Если β является автоморфизмом F, то*

$$\Phi(\beta) = \beta.$$

Доказательство. Если β является автоморфизмом, то он является обратимым элементом $\mathrm{End}(F)$. Тогда $\Phi(\beta)$ также обратим, т. е. $\Phi(\beta)$ также является автоморфизмом. Таким образом,

$$\mathrm{Im}(\Phi(\beta)) = F.$$

Следовательно, из неравенства

$$rank(F) > 1$$

следует, что $\mathrm{Im}(\Phi(\beta))$ не является циклическим. Используя лемму 1.3, получаем

$$\Phi(\beta) = \beta.$$

□

В силу леммы 1.3 для завершения доказательства теоремы 1.2 остается рассмотреть случай, когда подгруппа $\mathrm{Im}(\Phi(\beta))$ является циклической.

Лемма 1.5. *Если β - тривиальный эндоморфизм, то*

$$\Phi(\beta) = \beta.$$

Доказательство. Предположим обратное. Тогда мы можем найти несколько свободных образующих x и y F таких, что

$$\Phi(\beta)(x) \neq \Phi(\beta)(y).$$

Пусть σ - автоморфизм, который переставляет порождающие x и y. Из леммы 1.4 получаем

$$\Phi(\sigma) = \sigma.$$

По предположению,

$$\beta(x) = \beta(y) = 1.$$

Так как $\beta \circ \sigma = \beta$, мы получаем

$$\Phi(\beta \circ \sigma) = \Phi(\beta) \circ \sigma = \Phi(\beta).$$

С другой стороны,

$$(\Phi(\beta) \circ \sigma)(x) = \Phi(\beta)(y) \neq \Phi(\beta)(x).$$

Это противоречие доказывает лемму. $\square$

Пусть F порождается свободными образующими $\{x_i\}, i \in I$ и $|I| > 1$.

Лемма 1.6. *Если образ $\Phi(\beta)$ является нетривиальной циклической группой, то существуют свободные образующие $\{y_i\}_{i\in I}$ F и элемент $a \in F$, для которых*

$$\beta(y_1) = a^d \text{ и } \beta(y_i) = 1$$

для всех $i \neq 1$.

Доказательство. Предположим, что

$$\beta(x_i) = a^{k_i}$$

для некоторого элемента $a \in F$ и для каждого $i \in I$, где $k_i \in \mathbb{Z}$. Предположим также, что

$$\beta(x_j) \neq 1$$

для некоторого $j \in I$.

Заметим, что любому преобразованию Нильсена системы образующих $\{x_i\}, i \in I$ соответствует преобразование Нильсена системы $\beta(x_i), i \in I$. Преобразование Нильсена системы $\beta(x_i), i \in I$, приводит к соответствующему элементарному преобразованию показателей $\{k_i\}_{i\in I}$ и наоборот.

Пусть d - порождающий для циклической подгруппы аддитивной группы $\mathbb{Z}$ целых чисел, порожденных множеством чисел $\{k_i\}_{i\in I}$. Очевидно, применяя некоторые элементарные преобразования к последовательности $\{k_i\}_{i\in I}$, мы можем получить новую последовательность $\{s_i\}_{i\in I}$ такую, что $s_1 = d$ и $s_i = 0$ для всех $i \neq 1$. Соответствующие преобразования Нильсена системы свободных образующих x_i, $i \in I$ приводят к системе новых свободных образующих $\{y_i\}_{i\in I}$ группы F, удовлетворяющих условиям

$$\beta(y_1) = a^d \text{ и } \beta(y_i) = 1$$

для всех $i \neq 1$. $\square$

Каждое определяющее соотношение между свободными образующими F является тождеством в F. Следовательно, любая система свободных образующих группы F состоит из элементов бесконечного порядка или любая система свободных образующих F состоит из элементов того же конечного порядка n.

Лемма 1.7. *Пусть $\{y_i\}_{i\in I}$ - свободные образующие F,*

$$\beta(y_1) = a^d \text{ и } \beta(y_i) = 1$$

для $i \neq 1$. Тогда

$$\Phi(\beta) = \beta.$$

Доказательство. **Случай 1**. Пусть свободные образующие $\{y_i\}, i \in I$, имеют бесконечный порядок. Чтобы доказать равенство $\Phi(\beta) = \beta$, мы можем рассуждать так же, как в статье [?]. А именно, пусть гомоморфизм

$$\alpha : F \to F$$

задается соотношениями

$$\alpha(y_1) = y_1 \text{ и } \alpha(y_i) = 1$$

для всех $i \neq 1$. По лемме 1.5 $\Phi(\alpha)$ не может быть тривиальным эндоморфизмом.

Предположим, что $\Phi(\alpha)(y_1) = y_1$. По лемме 1.2 элемент $\Phi(\alpha)(y_1)$ принадлежит циклическому централизатору

$$\alpha(y_i)^{-1} \cdot \Phi(\alpha)(y_i) = \Phi(\alpha)(y_i)$$

и наоборот для каждого $i \neq 1$. Так как y_1 является свободным генератором, для любого $i \neq 1$ существует целое число t_i такое, что

$$\Phi(\alpha)(y_i) = y_1^{t_i}.$$

Для каждого $i \neq 1$ рассмотрим автоморфизм Нильсена λ_i, определяемый формулами

$$\lambda_i(y_1) = y_1 y_i \text{ и } \lambda_i(y_k) = y_k$$

для $k \neq 1$. Нетрудно проверить, что

$$\alpha \circ \lambda_i = \alpha.$$

В силу леммы 1.4 имеем

$$\Phi(\alpha \circ \lambda_i) = \Phi(\alpha) \circ \lambda_i = \Phi(\alpha).$$

Следовательно,

$$\Phi(\alpha)(\lambda_i(y_1)) = \Phi(\alpha)(y_1),$$

то есть

$$y_1^{t_1 t_i} = y_1^{t_1}$$

для $i \neq 1$. Так как y_1 имеет бесконечный порядок, то $t_i = 0$ для всех $i \neq 1$. Таким образом,

$$\Phi(\alpha) = \alpha.$$

Далее, нетрудно проверить, что

$$\beta = \gamma \circ \alpha,$$

где

$$\gamma : F \to F$$

является произвольным гомоморфизмом, заданным на порождающих по формулам

$$\gamma(y_1) = a^d \text{ и } \gamma(y_i) = b$$

для $i \neq 1$, где b - элемент F, который не коммутирует с a. По лемме 1.3 получаем

$$\Phi(\gamma) = \gamma$$

и, следовательно,

$$\Phi(\beta) = \Phi(\gamma) \circ \Phi(\alpha) = \gamma \circ \alpha = \beta.$$

Предположим теперь, что

$$\Phi(\alpha)(Y_1) = y_1.$$

Согласно лемме 1.2, элемент $\Phi(\alpha)(y_i)$ принадлежит циклическому централизатору

$$\alpha(y_1)^{-1} \cdot \Phi(\alpha)(y_1)$$

для каждого $i \in I$. Следовательно, элементы $\alpha(y_1)^{-1} = y^{-1}$ и $\Phi(\alpha)(y_i)$ принадлежат одной и той же максимальной циклической подгруппе для любого $i \in I$. Тогда для любого $i \in I$ существует целое число t_i такое, что

$$\Phi(\alpha)(y_i) = y_1^{t_i}.$$

Рассуждая, как и в предыдущем случае, получаем, что

$$y_1^{t_1 t_i} = y_1^{t_1}$$

для всех $i \neq 1$. Это означает, что $t_i = 0$ для всех $i \neq 1$. Кроме того, очевидное равенство

$$\alpha \circ \alpha = \alpha$$

подразумевает

$$\Phi(\alpha) \circ \Phi(\alpha) = \Phi(\alpha).$$

Действуя обеими сторонами последнего равенства на y_1, получаем $t_1^2 = t_1$. Так как $t_1 \neq 1$, мы получаем $t_1 = 0$. Это противоречит условию, что $\Phi(\alpha)$ является нетривиальным эндоморфизмом. Таким образом, равенство

$$\Phi(\beta) = \beta$$

доказано в **Случай 1**.

Случай 2. Пусть свободные образующие $\{y_i\}, i \in I$, имеют один и тот же конечный порядок n. Чтобы доказать утверждение, мы можем повторить рассуждения из статьи [8]. Приведем доказательство этого случая ввиду.

а) Пусть свободные образующие $\{y_i\}, i \in I$, имеют один и тот же простой период n.

Рассмотрим гомоморфизм

$$\alpha : F \to F,$$

заданный на свободных образующих соотношениями

$$\alpha(y_1) = y_1 \text{ и } \alpha(y_i) = 1$$

для $i \neq 1$. Согласно лемме 1.2, элемент $\Phi(\alpha)(y_i)$ принадлежит циклическому централизатору

$$\alpha(y_1)^{-1} \cdot \Phi(\alpha)(y_1)$$

для каждого $i \in I$. Следовательно, элементы $\alpha(y_1)^{-1} = y^{-1}$ и $\Phi(\alpha)(y_i)$ принадлежат одной и той же максимальной циклической подгруппе для любого $i \in I$. Тогда для любого $i \in I$ существует целое число t_i такое, что

$$\Phi(\alpha)(y_i) = y_1^{t_i}$$

и кроме $t_i \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$ для $i \neq 1$ и $t_1^2 \equiv t_1 (\operatorname{mod} n)$. Поскольку n является простым и числа t_1 и $t_1 - 1$ взаимно простые, из $t_1^2 \equiv t_1 (\operatorname{mod} n)$ следует либо $t_1 \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$, либо $t_1 \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$. Поскольку $\Phi(\alpha)$ является нетривиальным эндоморфизмом, мы имеем $t_1 \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$, то есть

$$\Phi(\alpha) = \alpha.$$

Далее, как в **Случай 1**, получаем, что

$$\Phi(\beta) = \Phi(\gamma) \circ \Phi(\alpha) = \gamma \circ \alpha = \beta,$$

где гомоморфизм γ определяется как в доказательстве **Случай 1**.

б) Пусть период n свободных образующих $\{y_i\}, i \in I$, является составным числом n и $n = n_1 n_2$, где $1 < n_1, n_2 < n$.

Рассмотрим эндоморфизм

$$\delta_1 : F \to F,$$

заданный на генераторах, следующим образом:

$$\delta_1(y_1) = a \quad \text{и} \quad \delta_1(y_k) = y_j^{n_1} \quad \text{для} \quad k \neq 1,$$

где y_j является фиксированным и не коммутирующим с генератором a группы F. По лемме 1.1 b) образ эндоморфизмов δ_1 не является циклическим.

Рассмотрим также эндоморфизм

$$\delta_2 : F \to F,$$

определяемый равенствами

$$\delta_2(y_1) = y_1^d \quad \text{и} \quad \delta_2(y_k) = y_k^{n_2} \quad \text{для} \quad k \neq 1.$$

Так как образы эндоморфизмов δ_1, δ_2 не являются циклическими, то по лемме 1.3

$$\Phi(\delta_i) = \delta_i,$$

$i = 1, 2$. Из определений эндоморфизмов δ_i следует, что

$$\delta_1 \circ \delta_2 = \beta.$$

Поэтому получаем $\Phi(\beta) = \beta$. □

Справедливость теоремы 1.2 следует из лемм 1.3, 1.5 - 1.7.

Глава 2

Аналоги теорем Нильсена и Магнуса для свободных бернсайдовых групп периода 3

В этой главе мы доказываем некоторые теоремы о свободных бернсайдовых группах периода 3. Достоверность аналогичных утверждений для абсолютно свободных групп хорошо известны. Исходной точкой является очевидное замечание о том, что группы автоморфизмов абсолютно свободной группы ранга 1 и свободной бернсайдовой группы периода 3 и ранга 1 изоморфны (циклической группе порядка 2).

В 1930 г. В. Магнус [27] доказал так называемый FreiheitЯsatz и следующую теорему: если в свободной группе F нормальные замыкания $r \in F$ и $s \in F$ совпадают, то r сопряжен с s или s^{-1}. Будем говорить, что группа G обладает свойством Магнуса, если для любых двух элементов r, s из G с теми же нормальными замыканиями, мы имеем что r сопряжен с s или s^{-1}.

В [38], [39] доказано, что фундаментальная группа любой компактной поверхности, за исключением неориентируемой поверхности рода 3, обладает свойством Магнуса (см. также [40]).

Наш первый основной результат второй главы является аналог теоремы Магнуса для свободных бернсайдовых групп периода 3.

Теорема 2.1. *(Аналог теоремы Магнуса, [27]). Свободная группа Бернсайда $B(3)$ любого ранга обладает свойством Магнуса.*

Пусть R_n – относительно свободная группа с базисом

$$X = \{x_1, ..., x_n\}.$$

Любой гомоморфизм из R_n в себя полностью определяется образами порождающих элементов. Для любого $x_i \in X$ пусть ϵ_i - автоморфизм, отправляющий x_i в x_i^{-1} и оставляющий остальные элементы X неизменными. Для любых различных $x_i, x_j \in X$ пусть λ_{ij} является автоморфизмом, сопоставляющим x_i в $x_i x_j$ и оставляющий остальные элементы X неизменными. Эти автоморфизмы ϵ_i, λ_{ij} называются автоморфизмами Нильсена. В 1924 году Нильсен (см., пример, [41]) показал, что автоморфизмы Нильсена порождают полную группу автоморфизмов $Aut(F_n)$ конечно порожденной абсолютно свободной группы F_n.

Очевидно, что любой автоморфизм свободной группы F некоторого (конечного или бесконечного) ранга индуцирует автоморфизм относительно свободной группы R того же ранга. Следовательно, существует очевидный гомоморфизм

$$\tau : Aut(F) \to Aut(R),$$

и каждый

$$\alpha \in Aut(F)$$

индуцирует

$$\tau(\alpha) \in Aut(R).$$

Любой автоморфизм из $\tau(Aut(F))$ называется *ручным* автоморфизмом.

Если $\tau(\alpha) = \beta$, мы говорим, что $\beta \in Aut(R)$ может быть *поднято* до $\alpha \in Aut(F)$. В общем случае не каждый автоморфизм относительно свободной группы является ручным автоморфизмом. Как было доказано Андреадакисом [42] и Бахмута [43], даже свободные нильпотентные группы конечного ранга и степени 3 имеют автоморфизм, не индуцированный автоморфизмом свободной группы. С другой стороны, все автоморфизмы относительно свободных нильпотентных групп бесконечного ранга являются ручными автоморфизмами (см. [13]).

Пусть $B(3)$ – свободная бернсайдовая группа периода 3 и некоторого ранга ≥ 1 и $Aut_N(B(3))$ – группа всех автоморфизмов, порожденных автоморфизмами Нильсена $B(3)$. Через $Aut_t(B(3))$ обозначается группа всех ручных автоморфизмов $B(3)$. Известно, что если ранг $B(3)$ больше 2, то эта группа является нильпотентной группой степени 3. Следующий результат был получен А.Григоряном.

Предложение 2.1. *(cf. [41, Proposition 4.1]) Для любого автоморфизма $\alpha \in Aut(B(3))$ и для любого числа p, не превосходящего ранга B (3), существуют некоторые свободные образующие $x_{i_1}, x_{i_2} ..., x_{i_p}$ из $B(3)$ и автоморфизм $\beta \in Aut_N(B(3))$, что*

$$\alpha(x_{i_1}) = \beta(x_{i_1}) \ldots, \alpha(x_{i_p}) = \beta(x_{i_p}).$$

Из предложения 2.1 следует аналог теоремы Нильсена (см. [11]) для $B(m, 3)$, то есть для любого конечного ранга m имеем равенства

$$Aut(B(m, 3)) = Aut_N(B(m, 3)) = Aut_t(B(m, 3)),$$

то есть любой автоморфизм $B(m, 3)$ является нильсеновским (и, следовательно, ручным) автоморфизмом.

Из вышесказанного следствия и из предложения 2.1 следует, что для любого конечного ранга $m > 1$ гомоморфизм

$$\tau : Aut(F_m) \to Aut(B(m, 3)$$

является гомоморфизмом на.

Брайдсон и Вогтман в [44] доказали, что группа $Aut(F_m)$ свободной группы ранга $m > 1$ является нормальным замыканием одной транспозиции (12) (которая транспозирует порождающие x_1 и x_2, оставив другие порождающие на месте).

Отсюда и из последнего следствия следует, что группа автоморфизмов $Aut(B(m, 3))$ является нормальным замыканием одной инволюции (транспозиции) (12) для любого конечного ранга $m > 1$.

Другая классическая теорема Нильсена (см. [41, Proposition 4.5]) утверждает, что ядро отображения

$$Aut(F_2) \to GL_2(\mathbb{Z})$$

является группой внутренних автоморфизмов F_2. По аналогии образ подгруппы $Aut^+(F_m)$ при гомоморфизме

$$\tau_m : Aut(F_m) \to Aut(B(m,3))$$

обозначим через $Aut^+((m,3))$. Очевидно, что подгруппа $Aut^+(B(m,3))$ также имеет индекс 2 в $Aut(B(m,3))$. Эпиморфизм

$$\epsilon_m : Aut(B(m,3)) \to GL_m(Z_3)$$

(индуцированный эпиморфизмом $B(m,3) \to \underbrace{\mathbb{Z}_3 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_3}_{m}$)) отображает подгруппу $Aut^+(B(m,3))$ на $SL_m(Z_3)$.

Нашим вторым результатом второй главы является следующий аналог вышеупомянутой теоремы Нильсена.

Теорема 2.2. *(Аналог теоремы Нильсена, 1919) Ядро естественного гомоморфизма*

$$\epsilon_2 : Aut(B(2,3)) \to GL_2(\mathbb{Z}_3)$$

является группой внутренних автоморфизмов $B(2,3)$.

Обзор об автоморфизмах бесконечных свободных бернсайдовых групп $B(m,n)$ и других относительно свободных групп можно найти в [22] и [46].

Для произвольной группы G и для автоморфизма $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ подгруппа H группы G называется ϕ *-инвариантной* подгруппой, если

$$\phi(H) = H.$$

Если нормальная подгруппа в G является ϕ -инвариантной для некоторого автоморфизма ϕ, то ϕ называется *нормальным автоморфизмом* G.

Таким образом, для данного нормального автоморфизма $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ всякая нормальная подгруппа в G является ϕ -инвариантной. Ясно, что если N - ϕ -инвариантная нормальная подгруппа в G, то ϕ индуцирует автоморфизм факторгруппы G/N.

Обозначим через $\mathrm{Aut}_n(G)$ множество всех нормальных автоморфизмов G. Очевидно, что

$$\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}_n(G),$$

но обратное неверно. Например

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}_n(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \neq \mathrm{Inn}(\mathbb{Z}) = \{1\}.$$

А.Лубоцкий доказал в [16], что каждый нормальный автоморфизм нециклической абсолютно свободной группы F является внутренней, то есть

$$\mathrm{Inn}(F) = \mathrm{Aut}_n(F).$$

Соответствующее уравнение впоследствии было доказано для различных интересных классов групп (см. ссылки в [14]). В частности, Нещадим [67] укрепил результат [16], доказав, что каждый нормальный автоморфизм свободного произведения нетривиальных групп является внутренним.

Минасян и Осин [68] показали, что если G является нециклической относительно гиперболической группой без нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то $\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{Aut}_n(G)$.

В. Атабекян в [14] доказал, что для любого нечетного числа $n \geq 1003$ каждый нормальный автоморфизм свободной группы Бернсайда $\mathbf{B}(m, n)$ (конечного или бесконечного) ранга $m > 1$ является внутренним (см. также [15]). Напомним, что относительно свободная группа ранга m в многообразии всех групп, удовлетворяющих закону

$$x^n = 1,$$

обозначается через $\mathbf{B}(m, n)$ и называется свободной периодической группой или свободной группой Бернсайда показателя n и ранга m. Хорошо известная теорема С. Адян [5] (см. Также [22]) утверждает, что для всех нечетных $n \geq 665$ и для $m > 1$ группа $\mathbf{B}(m, n)$ бесконечно (решение проблемы Бернсайда). В настоящей работе рассматриваются группы $\mathbf{B}(m, 3)$ периода 3, которые являются конечными группами. Однако для этих групп снова выполняется равенство

$$\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{Aut}_n(G)$$

.

Главным результатом параграфа 2.6 является следующая теорема:

Теорема 2.3. *Любой нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $\boldsymbol{B}(m,3)$ периода 3 является внутренним для всех рангов $m \geq 3$.*

Следствие 2.1.

$$Inn(\boldsymbol{B}(m,3)) = Aut_n(\boldsymbol{B}(m,3))$$

для всех рангов $m \geq 3$.

Обзор об автоморфизмах бесконечных свободных бернсайдовых групп $\mathbf{B}(m,n)$ можно найти в [8].

Предположим, что $x_i, x_j \in X$ разные свободные порождающие. Обозначим через ρ_{ij} автоморфизм F_m, который отправляет x_i в $x_j x_i$ и оставляет остальные элементы X на месте.

Обозначим через R_m относительно свободную группу с порождающими $\{x_1,\ ...,\ x_m\}$. Автоморфизмы λ_{ij}, ρ_{ij} порождают подгруппу $Aut^+(R_m)$ индекса 2 (см. [45]) в группе $Aut(F_m)$, где $Aut^+(R_m)$ является прообразом подгруппы $SL_m(\mathbb{Z})$ под гомоморфизмом

$$Aut(F_m) \to GL_m(\mathbb{Z}),$$

индуцированным эпиморфизм

$$R_m \to \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m}$$

.

Обозначим через A_m подгруппу группы $Aut(R_m)$ порожденную всеми нильсеновскими преобразованиями и автоморфизмами ϵ_i. Нетрудно проверить, что любые два нильсеновские преобразования сопряжены при фиксированном базисе. И так как A_m действует транзитивно на базисы R_m, значит нильсеновские преобразования, соответствующие различным базисам также сопряжены в A_m. Используя рассуждения работы [44], мы доказали следующий результат для нильсеновских автоморфизмов относительно свободных групп.

Теорема 2.4. *Пусть $m \geq 3$ и имеем гомоморфизм*

$$\phi : A_m \to G.$$

Если ϕ не является инъективным гомоморфизмом на S_m, то либо ϕ тривиальный гомоморфизм, либо его образ состоит из двух элементов.

Следствие 2.2. *Пусть имеем группу G и гомоморфизм*

$$\phi : A_m \to G.$$

Образ ϕ тривиален в том и только в том случае, если

$$\phi(\tau) = 1,$$

где $\tau = (1\ 2)$.

Следствие 2.3. *Группа A_m является нормальным замыканием транспозиции* $(1\ 2)$.

2.1 Проблема Бернсайда и группы Бернсайда

Определение 2.1. *Относительно свободная группа ранга m многообразия всех групп, удовлетворяющих тождественному соотношению*

$$x^n = 1,$$

обозначается через $B(m, n)$ и называется свободной периодической или свободной бернсайдовой группой периода n и ранга m.

Более просто, группа $B(m, n)$ имеет следующее задание

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, ..., a_m \mid X^n = 1 \rangle,$$

где X пробегает множество всех слов в алфавите

$$\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}\}.$$

Если F_r-свободная группа, порожденная элементами $x_1, x_2, ..., x_r$ и N-ее вполне характеристическая подгруппа, порожденная всеми элементами вида $z^n, z \in F_r$, то

$$B(n, r) = F_r/N.$$

Проблема Бернсайда является следующий вопрос: для каких n группа $B(m, n)$ является конечной?

Следующие доказательства конечности свободной бернсайдовой группы при $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$ заимствованы из [47] для полноты кортины.

Проблема Бернсайда для $n = 2$. Так как каждый элемент свободной бернсайдовой группы $B(m, 2)$, кроме единицы, имеет порядок 2, то из равенств

$$x^2 = 1,$$

$$y^2 = 1,$$

$$(xy)^2 = 1,$$

получим, что

$$xyxy = 1,$$

$$xy = y^{-1}x^{-1} = yx,$$

т.е. $B(m, 2)$ является абелевой группой. Следовательно, бернсайдовая группа $B(m, 2)$, которая порождается элементами $x_1, x_2, ..., x_m$ является абелевой группой, который имеет порядок 2^m с базисом $x_1, x_2, ..., x_m$. Из этого следует, что группа $B(m, n)$ конечна для $n = 2$.

Проблема Бернсайда для $n = 3$. Если $n = 3$, можно легко доказать, что группа $B(m, 3)$ конечна. Докажем это индукцией по m. Группа $B(1, 3)$ является циклической группой порядка 3. Предположим, что порядок группы $B_h = B(h, 3)$ равен $3^{t(h)}$. Сначала докажем некоторые леммы, которые нам понадобятся для доказательства конечности группы $B(m, 3)$.

Лемма 2.1. *Равенства*

$$(xy)^3 = 1$$

и

$$yxy = x^{-1}y^{-1}x^{-1} \tag{2.1}$$

эквивалентны.

Доказательство. Доказательство очевидно. □

Лемма 2.2. *Любой элемент $y \in B(3)$ переставляется с любым его сопряжением $x^{-1}yx$.*

Доказательство. По определению из тождества $x^3 = 1$ следует равенство

$$(xy^{-1})^3 \cdot (yx^{-1}y^3xy^{-1}) \cdot (y(x^{-1}y^{-1})^3y^{-1}) \cdot y^3 = 1.$$

После сокращения получим равенство $xy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}y = 1$, что означает, что

$$x \cdot y^{-1}xy = y^{-1}xy \cdot x.$$

□

Воспользуемся соотношением (2.1). Группа B_{h+1} получается из B_h присоединяя новый образующий элемент z к группе B_h. Следовательно, элементы группы B_{h+1} имеют вид

$$g = u_1z^{\pm1}u_2z^{\pm1}...z^{\pm1}u_n \tag{2.2}$$

где $u_i \in B_h$. Покажем, что элемент g можно представить как произведение вида (2.2), в которое элемент z входит не более чем два раза. Если два последовательных вхождения элемента z в уравнении (2.2) имеют одинаковые показатели степени, то если применим соотношение (2.1) к правому частью уравнения (2.2), получаем $zu_iz = u_i^{-1}z^{-1}u_i^{-1}$ или $z^{-1}u_jz^{-1} = u_j^{-1}zu_j^{-1}$. Таким образом, мы можем уменьшить число вхождений элемента z на единицу. Следовательно, элемент g может быть представлен в виде (2.2), где показатели элемента z, равные $+1$ и -1, чередуются. Если теперь число вхождений элемента z в представление элемента g равняется три, то мы можем преобразавать его следующим образом:

$$g = u_1zu_2 \cdot z^{-1}u_3 \cdot z... = u_1zu_2z \cdot zu_3z... = u_1u_2^{-1} \cdot z^{-1}u_2^{-1}u_3^{-1}z^{-1}u_3^{-1}... \tag{2.3}$$

который сокращает число вхождений элемента z в g на единицу. Если

$$g = u_1 z^{-1} u_2 z u_3 z^{-1},$$

поступая аналогичным образом можем сокращать число вхождений элемента z на единицу.

Итак, мы получили, что элемент g можно представить в виде (2.2), в котором число вхождениями образующего z равняется 2. При этом

$$u_1 z^{-1} u_2 z u_3 = u_1 z^{-1} u_2 z^{-1} z^{-1} u_3 = u_1 u_2^{-1} z u_2^{-1} z^{-1}.$$

Следовательно, любой элемент группы B_{h+1} может быть представлен одним из следующих выражений:

$$u_1$$

$$u_1 z u_2$$

$$u_1 z^{-1} u_2$$

$$u_1 z u_2 z^{-1} u_3$$

Таким образом, группа B_{h+1} имеет порядок самое большее

$$3^t + 2 \cdot 3^{2t} + 3^{3t} < 3^{3t+1}$$

, поэтому $t(h+1) \leq 3t(h)$, откуда $t(m) < 3^{m-1}$, т.е. группа $B(m, 3)$ состоит не больше, чем из $3^{3^{m-1}}$ элементов. В своей первой работе, используя более сложные методы, Бернсайд получил более точную оценку $t(m) \leq 2^r - 1$. В [47] доказывается точное равенства

$$t(m) = \binom{m}{3} + \binom{m}{2} + m,$$

полученное Леви и Ван дер Варденом.

Если применим трижды равенство (2.1) к выражению $x^{-1}yxzx^{-1}$, то получим формулу

$$x^{-1}yxzx^{-1} = (x^{-1}yx^{-1})(x^{-1}zx^{-1}) = y^{-1}(xy^{-1}z^{-1}x)z^{-1} = y^{-1}zyx^{-1}zyz^{-1} \tag{2.4}$$

Из леммы 2.2 имеем, что любой элемент y можно переставить с любым своим сопряженным элементом $x^{-1}yx$. Таким образом, элемент y можно переставить с коммутатором $y^{-1}x^{-1}yx$, откуда в обозначениях коммутаторов получаем

$$[y, x, y] = 1 \tag{2.5}$$

отсюда получаем

$$[x, y]^{-1} = (x^{-1}y^{-1}xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}yx = x^{-1}yxy^{-1} = [x, y^{-1}]. \tag{2.6}$$

Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} &[x^{-1}, y] = [y, x^{-1}]^{-1} = [y, x] = [x, y]^{-1} \\ &[y, x, x] = [[x, y]^{-1}, x] = [x, y, x]^{-1} = 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Рассмотрим теперь элемент

$$[a, c, b]^{-1} = b^{-1}(c^{-1}a^{-1}caba^{-1}c^{-1})ac$$

и применим формулу (2.4) к произведению в скобках, полагая $x = c,\ y = a^{-1},\ z = aba^{-1}$:

$$[a, c, b]^{-1} = b^{-1}(a \cdot aba^{-1}a^{-1}c^{-1}aba^{-1}a^{-1}ab^{-1}a^{-1})ac = b^{-1}a^{-1}bac^{-1}aba^{-1}b^{-1}c = [a, b, c]$$

Кроме этого, известно, что $[a, c, b]^{-1} = [[a, c]^{-1}, b] = [c, a, b]$. Следовательно

$$\begin{aligned} &[a, b, c] = [c, a, b] = [b, c, a], \\ &[a, c, b]^{-1} = [a, b, c]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Теперь можно показать, что любой коммутатор, который имеет вес четыре, равен единице. Для этого рассмотрим сначала сложный коммутатор $[a, b; c, d]$, используя тождества (2.8), получаем

$$\begin{aligned} [a, b; [c, d]] &= [[c, d], a, b] = [[c, d, a], b] = [a, c, d, b] = \\ &= [a, c, b, d]^{-1} = [[a, b, c]^{-1}, d]^{-1} = [a, b, c, d]. \end{aligned}$$

Но, с другой стороны мы имеем

$$[c, d; a, b] = [[a, b], c, d] = [a, b, c, d].$$

Поэтому

$$[a, b; c, d] = [c, d; a, b] = [a, b; c, d]^{-1},$$

откуда

$$[a, b; c, d] = [a, b, c, d] = 1. \tag{2.9}$$

Как видно из предидущих соотношений, если в коммутаторе веса 3 два элемента совпадают, то он равняется единице. Если имеем три различные образующие элементы группы $B(m, 3)$, то в силу тождеств (2.8) коммутатор веса 3 может быть представлена в виде x_i, x_j, x_k где $i < j < k$, или как обратный элемент для этого элемента. Коммутант абелев, и согласно равенству (2.9), коммутаторы веса 3 содержатся в центре. Следовательно, любой элемент группы $B(m, 3)$ можно представить в виде

$$g = x_1^{a_1} ... x_m^{a_m} [x_1, x_2]^{b_{12}} ... [x_i, x_j]^{b_{ij}} ... [x_i, x_j, x_k]^{c_{ijk}} \tag{2.10}$$

где $i < j$ для коммутатора $[x_i, x_j]$, $i < j < k$ для (x_i, x_j, x_k), а показатели степени равны 0, 1 или 2. Общее число таких выражений равно $3^{t(m)}$ где

$$t(m) = m + \binom{m}{2} + \binom{m}{3}$$

является числом сочетаний из m образующих $x_1, x_2, ..., x_m$ по 1, по 2 и по 3 элементам. Таким образом порядок бернсайдовой группы $B(m, 3)$ не превосходит $3^{m(r)}$. Этот порядок равен точно $3^{m(r)}$, если только элементы вида (2.10) с некоторыми показателями степени не равны нулю, не равны единице. Действительно, если два различных выражения g_1 и g_2 представляют один и тот же элемент группы $B(m, 3)$, то они представляют один и тот же элемент также и в любом гомоморфном образе группы $B(m, 3)$ и, в частности, в элементарной абелевой группе порядка 3^r, откуда следует, что показатели степени $a_i,\ i = 1, ..., r$ должны совпадать. Так как коммутант абелев, элемент $g = g_1 g_2^{-1} = 1$ с некоторыми показателями степени b_{ij} или c_{ijk}, которые не равняются нулю по модулю 3, представлял бы единицу, если бы различные выражения g_1 и g_2 представляли один и тот же элемент. Если рассмотрим равенство $g = 1$ как соотношение в группе $B(m, 3)$, получим, что оно остается верным, если добавим следующие соотношения: $x_s = 1,\ s \neq i, j, k$. Поэтому чтобы показать, что порядок группы $B(m, 3)$ равен $3^{m(r)}$, достаточно доказать, что порядок группы $B(3, 3)$ равен 3^7.

Чтобы построить группу $B(3,3)$ как группу порядка 3^7, применим полупрямое произведение. Пусть

$$C_1 = x,\ C_2 = y,\ C_3 = z,\ C_4 = (x,y),\ C_5 = (x,z),\ C_6 = (y,z),\ C_7 = (x,y,z). \tag{2.11}$$

Сначала строим элементарную абелеву группу $A = (C_4, C_5, C_6, C_7)$, порядок которой равен 3^4. Затем присоединяем к ней элемент C_3 при помощи соотношений

$$C_3^3 = 1,\ C_3^{-1}C_4C_3 = C_4C_7,\ C_3^{-1}C_5C_3 = C_5,\ C_3^{-1}C_6C_3 = C_6,\ C_3^{-1}C_7C_3 = C_7. \tag{2.12}$$

Полупрямое произведение $B = (a, c_3)$ имеет порядок 3^5 и является расширением группы A при помощи циклической группы (C_3). Чтобы этот вывод обосновать, нужно только проверить, что при соотношениях (2.12) трансформирование элементом C_3 индуцирует автоморфизм порядка 3 группы A. Далее, аналогичным способом расширяем группу B элементом C_2 до группы $H = (B, C_2)$ порядка 3^6, используя при этом соотношения

$$\begin{aligned} &C_2^3 = 1,\ C_2^{-1}C_3C_2 = C_3C_6^{-1},\ C_2^{-1}C_4C_2 = C_4,\\ &C_2^{-1}C_5C_2 = C_5C_7^{-1},\ C_2^{-1}C_6C_2 = C_6,\ C_2^{-1}C_7C_2 = C_7. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Наконец, расширяем группу H элементом C_1 до группы $G = (C_1, H)$ порядка 3^7 при помощи соотношений

$$\begin{aligned} &C_1^3 = 1,\ C_1^{-1}C_2C_1 = C_2C_4^{-1},\ C_1^{-1}C_3C_1 = C_3C_5^{-1},\ C_1^{-1}C_4C_1 = C_4,\\ &C_1^{-1}C_5C_1 = C_5,\ C_1^{-1}C_6C_1 = C_6C_7,\ C_1^{-1}C_7C_1 = C_7. \end{aligned} \tag{2.14}$$

При таких соотношений класс нильпотентности группы G равен 3 и имеет место формула

$$(PQ)^3 = P^3(Q,P)^3(Q,P,P)(Q,P,Q)^5 \tag{2.15}$$

Полагая $P = z$ и считая Q произвольным элементом из группы A, получаем, что показатель группы B равен 3. Это же утверждение можно доказать для группы H, а затем для G. Таким образом группа $G = B(3,3)$ имеет порядок 3^7.

Следствие 2.4. *Группа $B(2,3)$ имеет порядок 27.*

Проблема Бернсайда для $n = 4$. Конечность группы $B(m,4)$ была доказана Сановым. Мы приведем это доказательства из [47].

Предложение 2.2. *(Санов) Группы $B(m,4)$ конечны.*

Доказательство. Пусть H-произвольная конечная группа, в которой порядок каждого элемента делит число 4. Докажем, что если присоединим к H некоторый элемент b степени 4 и потребуем, чтобы четвертые степени элементов расширенной группы $G = H \cup \{b\}$ были равны 1, то снова получим конечную группу G. Осуществим присоединение этого элемента b к группе H двумя этапами: сначала, присоединим элемент b^2 к группе H и получим группу $H_1 = H \cup \{b^2\}$, а затем, присоединим элемент b к группе H_1, получая группу

$$G = H_1 \cup \{b\} = H \cup \{b\}.$$

Каждое из этих двух расширений такого, что мы присоединяем элемент, квадрат которого принадлежит расширяемой группе. Поэтому достаточно показать, что, присоединяя к конечной группе H элемент x, такой, что $x^2 \in H$, и полагая $z^4 = 1$ для $z \in H \cup \{x\}$, мы получаем конечную группу $H \cup \{x\}$.

Любой элемент g группы $H \cup \{x\}$, где $x^2 \in H$, имеет вид

$$g = h_1 x h_2 x h_3 x ... h_{n-1} x h_n \quad h_i \in H \tag{2.16}$$

Из соотношения $(xh)^4 = 1$ мы получаем

$$xhx = h^{-1}x^{-1}h^{-1}x^{-1}h^{-1} = h^{-1}x(x^2h^{-1}x^2)xh^{-1} = h^{-1}x\overline{h}xh^{-1} \tag{2.17}$$

где $\overline{h} \in H$. Таким образом, не увеличивая длины n слова (2.16), мы можем при помощи соотношения (2.17) придать ему следующую форму:

$$h_1 x h_2 ... x h_{i-1} h_i^{-1} x \overline{h_i} x h_i^{-1} h_{i+1} x ... x h_n. \tag{2.18}$$

Если в слове (2.16) некоторый элемент h_j равен единице при $2 \leq g \leq n-1$, то мы можем уменьшить длину слова, полагая $x^2 = h \in H$. Можно также использовать несколько раз равенство (2.17), чтобы заменить несколько элементов h_j единицей.

Последовательно применяя соотношение (2.17), можно h_{i-1} заменить произведением $h_{i-1}h_i^{-1}$, затем h_{i-2}-произведением $h_{i-2}(h_{i-1}h_i^{-1})^{-1} = h_{i-2}h_ih_{i-1}^{-1}$ и т.д. Таким способом можно заменить элемент h_2 любым из элементов

$$h_2,\ h_2h_3^{-1},\ h_2h_4h_3^{-1},\ h_2h_4h_5^{-1}h_3^{-1},\ ...,\ h_2h_4...h_{2s}h_{2s-1}^{-1}...h_3^{-1},\ h_2h_4...h_{2s}h_{2s+1}^{-1}...h_3^{-1}.$$

Если хоть один из этих элементов равен единице, можно уменьшить длину слова g. Если же порядок группы H равен M и $n \geq M+2$, то или одно из этих выражений равно единице, или среди них есть равные, скажем

$$h_2...h_{2r}h_{2r+1}^{-1}...h_3^{-1} = h_2...h_{2r}...h_{2s}h_{2s+1}^{-1}...h_{2r+1}^{-1}...h_3^{-1},$$

откуда

$$h_{2r+2}...h_{2s}h_{2s+1}^{-1}h_{2r+3}^{-1} = 1.$$

Но это не что иное, как одно из произведений, которым можно заменить элемент h_{2r+2}. Аналогично, если проверяется произведение $h_2h_4...h_{2r}h_{2r-1}^{-1}...h_3^{-1}$, то элемент h_{2r+1} можно заменить произведением, равным единице. Во всех случаях, если $n \geq M+2$, мы можем уменьшить длину слова g. Следовательно, любой элемент g можно представить словом длины $n \leq M+1$. Поэтому, порядок группы $H \cup \{x\}$ равен самое большее M^{M+1}. $\square$

Проблема Бернсайда для $n = 6$. Лысенок в [69] доказал следующие 3 леммы, из которых вытекает конечность группы $B(m, 6)$.

Лемма 2.3. *Если $n > 2$, группа H порождается множеством элементов X и для любых $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ выполнено соотношение*

$$[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n] = 1,$$

то является нильпотентной группой ступени, не превосходящей $n-1$.

Лемма 2.4. *Если нильпотентная группа H порождается множеством X и все элементы множества X имеют простой порядок p, то H является p-группой.*

Лемма 2.5. *Пусть G есть группа показателя 6, $t \in G$, $t^2 = 1$ и все элементы a некоторого подмножества $A \subseteq G$ удовлетворяют соотношениям*

$$a^3 = 1, \quad tat = a^{-1}. \tag{2.19}$$

Тогда подгруппа H группы G, порожденная множеством A, является группой показателя 3.

Предложение 2.3. *(М. Холл). Любая конечно-порожденная группа показателя 6 конечна.*

Доказательство. Пусть G есть конечно-порожденная группа показателя 6. Рассмотрим подгруппу $M \lhd G$, порожденную кубами всех элементов группы G. Фактор-группа G/M является конечно-порожденной группой показателя 3. В силу известного результата Бернсайда [6, с. 347] группа G/M конечна. Тогда (см. [6, следствие 7.2.1]) группа M конечно порождена, а так как каждый элемент M представим в виде произведения конечного числа кубов элементов из G, то M порождается некоторым конечным множеством T кубов элементов из G. Пусть $t \in T$ и N_t есть подгруппа группы , порожденная множеством

$$A_t = \{[t, w] \ \mid \ w \in M\}.$$

Тогда $t^2 = 1$ и

$$t\ [t, w]\ t = w^{-1}twt = [t, w]^{-1}.$$

Индукцией по длине w, как произведения элементов из T, покажем, что $[t, w]^3 = 1$. Если $x \in T$, то $x^2 = 1$ и поэтому

$$[t, x]^3 = (t^{-1}x^{-1}tx)^3 = (tx)^6 = 1.$$

Пусть $w = vx,\ x \in T$ и $|w| = |v| - 1$. Тогда

$$[t, w] = t^{-1}x^{-1}v^{-1}tvx = x^{-1}(xt^{-1}x^{-1}tt^{-1}v^{-1}tv)x = x^{-1}([t, x]^{-1}\ [t, v])x.$$

По индуктивному предположению $[t, v]^3 = 1$. По лемме 2.5 элементы $[t, x]$ и $[t, v]$ порождают подгруппу показателя 3, следовательно, $[t, w]^3 = 1$. Таким образом, все элементы множества A_t удовлетворяют соотношениям (2.19), и по лемме 2.5 подгруппа N_t есть группа показателя 3. Так как для любых $v, w \in M$

$$v^{-1}[t, w]v = v^{-1}tw^{-1}twv = v^{-1}tvttv^{-1}w^{-1}twv = [t, v]^{-1}[t, wv],$$

то подгруппа N_t нормальна в M. Заметим, что в произвольной группе H произведение H_1H_2 нормальных подгрупп показателей m_1 и m_2 соответственно есть нормальная подгруппа показателя m_1m_2. В самом деле, для любых $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ имеем

$$(h_1h_2)^{m_1} = (h_1h_2)^{m_1}h_1^{-m_1} = (h_1h_2h_1^{-1})\ (h_1^2h_2h_1^{-2})\ ...\ (h_1^{m_1}h_2h_1^{-m_1}) \in H_2$$

поэтому $(h_1h_2)^{m_1m_2} = 1$. Отсюда следует, что произведение N всех подгрупп N_t, $t \in T$ является 3-группой. Так как N есть группа показателя 6, то N является группой показателя 3. Группа N содержит все коммутаторы вида $[t, w]$, где $t \in T$, $w \in M$. Поэтому фактор-группа M/N, будучи абелевой группой, порожденной конечным множеством T элементов порядка 2, конечна. Тогда группа N конечно порождена, и, так как это группа показателя 3, конечна. Таким образом, группы G/M, M/N и N конечны, следовательно, конечна группа G. Предложение доказана. □

2.2 Об аналогии свойств абсолютно свободных и свободных периодических групп

Отметим некоторые известные свойства свободных периодических групп $B(m, n)$, аналогичные свойствам абсолютно свободных групп.

Как установлено С.И. Адяном, при $m > 1$ и для любого нечетного $n \geq 665$

- в группе $B(m, n)$ разрешима проблема сопряженности(см. [5], теорема VI.3.5),
- всякая коммутативная подгруппа группы $B(m, n)$ - циклическая группа (см. [5], теорема VI.3.3),
- центр группы $B(m, n)$ - тривиален (см. [5], теорема VI.3.3),
- для любого конечного ранга $m \geq 1$ группа $B(m, n)$ имеет показательный рост (см. [5], теорема VI.2.5),
- для любого конечного ранга $m \geq 1$ группа $B(m, n)$ - неаменабельная (см. [48]),
- группа $B(2, n)$ содержит изоморфные копии свободных периодических групп $B(m, n)$ любого конечного ранга $m \geq 1$ (см. [5], теорема VI.3.7),

• при $m > 65$ группа $B(m, n)$ содержит континуум различных нормальных подгрупп (см. [49]),

• при $m > 65$ (а также при $m > 1$ и составных нечетных $n = ks$, где $k \geq 665$ и $(k, s) = 1$) группа $B(m, n)$ не удовлетворяет условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп (см. [49] и теорему VI.3.9 [5]).

По этим результатам мы ссылаем также работам [50] - [54]).

Некоторые результаты указанного характера получены другими авторами.

• При нечетных $n \geq 665$ и любого $m > 1$ группа $B(2, n)$ содержит изоморфную копию свободной периодической группы $B(\infty, n)$ бесконечного ранга (В.Л. Ширванян, [55]),

• при нечетных $n \geq 1003$ любая нециклическая подгруппа группы $B(2, n)$ содержит изоморфную копию свободной периодической группы $B(\infty, n)$(см. [56] - [58]),

• при нечетных $n > 10^{78}$ и конечных $m \geq 2$ группа $B(m, n)$ - равномерно неаменабельная (Д.Осин [59]),

• при нечетных $n \geq 1003$ и $m \geq 2$ любая конечнопорожденная нециклическая подгруппа группы $B(m, n)$ - равномерно неаменабельная ([60]),

• при нечетных $n > 10^{78}$ и $m \geq 2$ каждый нормальный автоморфизм группы $B(m, n)$ - внутренний (Е.Черепанов [15], аналогичный результат для абсолютно свободных групп доказан в [16] и [61]),

• при нечетных $n \geq 1003$ и $m \geq 2$ группа $B(m, n)$ содержит континуум различных нормальных подгрупп и не удовлетворяет условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп (см. [62]).

Несмотря на перечисленные сходства, полной аналогии с абсолютно свободными группами не следует ожидать. Например, абсолютно свободные группы являются гиперболическими в то время, как при $m > 1$ и нечетных $n \geq 665$ группы $B(m, n)$ таковыми не являются. Более того, согласно теореме VI.2.13 [5] С.И.Адяна, группы $B(m, n)$ даже не могут быть заданы конечным множеством определяющих соотношений.

Положительный ответ на вопрос 7.1 [63] для достаточно больших нечетных n (где $n > 10^{78}$) был дан А. Ю. Ольшанским в статье [21]. Им доказано ([64], теорема 1.1), что при достаточно больших нечетных n нормализатор любой свободной n-периодической подгруппы N ранга $r \geq 1$ группы $B(m,n)$ совпадает с N. Когда ранг r свободной подгруппы N равен единице, а $n \geq 665$ нечетное число, то совпадение нормализатора подгруппы N с самой подгруппой N непосредственно следует из хорошо известной теоремы С. И. Адяна о том, что каждая конечная подгруппа группы $B(m,n)$ циклическая. Отметим также, что при достаточно больших составных n ($n > 2 \cdot 10^{77}$) утверждение указанной теоремы 1.1 [64] было доказано ранее С. В. Ивановым в [65], однако это доказательство не применимо для простых показателей n.

Позже было доказано, что если $n \geq 1003$ - произвольное нечетное число и N - нетривиальная подгруппа свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ произвольного (конечного или бесконечного) ранга m, причем подгруппа N изоморфна некоторой свободной периодической группе $B(r,n)$. Тогда N совпадает со своим нормализатором в группе $B(m,n)$..

Согласно теореме 1, в утверждении теоремы 1.1 [64] А. Ю. Ольшанского граница показателя n можно снизить до значения $n \geq 1003$.

Из этого немедленно следует положительный ответ на вопрос 7.1 [63] для всех простых $n > 997$. *При простых* $665 < n \leq 997$ *вопрос по прежнему открыт.*

Как показано в [5], [66], [49], [62], группы $B(m,\, n)$ богаты нормальными подгруппами. Сопоставляя следствие 1 с теоремой 2 работы [62], получаем, что для любого нечетного $n \geq 1003$ и $m \geq 2$ группа $B(m,n)$ содержит континуум различных подгрупп, несвободных в многообразии всех n-периодических групп. С другой стороны, классическая теорема Нильсена-Шрейера утверждает, что любая подгруппа абсолютно свободной группы - абсолютно свободна. Тем самим, утвердительный ответ вопроса С.И.Адяна выявляет существенное отличие между свойствами свободных бернсайдовых и абсолютно свободных групп.

2.3 Предварительные леммы

По определению свободная группа Бернсайда $B(m,n)$ периода n и ранга m является фактор-группой абсолютно свободной группы F_m ранга m по нормальной подгруппе F_m^n, порожденной элементами вида a^n для всех $a \in F_m$.

Из определения следует, что любая периодическая группа периода n с m - порождающими является частью $B(m,n)$. В дальнейшем под обозначением $B(3)$ понимается группа Бернсайда периода 3 некоторого фиксированного ранга > 1 со свободными образующими $X = \{x_1, x_2, ...\}$ (который может быть либо конечным, либо бесконечным).

Прежде всего, нам понадобится следующее

Лемма 2.6. *Для любых элементов $x, y \in B(3)$ и любых $k, l \in \mathbb{Z}$ имеем равенство*

$$x^k \cdot y^{-1}x^l y = y^{-1}x^l y \cdot x^k$$

.

Доказательство. Немедленно следует из леммы 2.2. □

Лемма 2.7. *Если*

$$x = (u_1 y^{-1} u_1^{-1})(u_2 y^{-1} u_2^{-1}),$$

тогда

$$x = u_3 y u_3^{-1}$$

для некоторых $u_3 \in B(3)$.

Доказательство. Используя дважды тождество (2.1), получим

$$x = u_1(y^{-1}u_1^{-1}u_2y^{-1})u_2^{-1} = u_1(u_2^{-1}u_1yu_2^{-1}u_1)u_2^{-1} = (u_1u_2^{-1}u_1)y(u_1^{-1}u_2u_1^{-1}) = u_3yu_3^{-1},$$

где $u_3 = u_1u_2^{-1}u_1$. □

Лемма 2.8. *(cf. [47, Ch. 18]) Для любого элемента $u \in B(3)$ и для любой порождающего $x_i \in X$ имеем одно из следующих равенств*

$$u_1, \tag{2.20}$$

$$u_1 x_i u_2, \tag{2.21}$$

$$u_1 x_i^{-1} u_2, \tag{2.22}$$

$$u_1 x_i u_2 x_i^{-1} u_3, \tag{2.23}$$

для некоторых $u_1, u_2, u_3 \in Gp(X \setminus x_i)$.

Доказательство. Пусть

$$u = u_1 x_i{}^{\pm 1} u_2 x_i{}^{\pm 1} \dots u_k x_i{}^{\pm 1} u_{k1}, \tag{2.24}$$

где $u_j \in Gp(X \setminus x_i)$, $j = 1, 2, ..., k1$. Тогда

$$u = (v_1 x_i{}^{\pm 1} v_1^{-1})(v_2 x_i{}^{\pm 1} v_2^{-1}) \dots (v_k x_i{}^{\pm 1} v_k^{-1})(v_k u_{k1}) = (\prod_{i=1}^{k} v_i x^{\pm 1} v_i^{-1})(v_k u_{k1}) \tag{2.25}$$

где

$$v_j = u_1 u_2 \cdots u_j, \quad j = 1, 2, ..., k.$$

По лемме 2.6 мы можем переставить множители в (2.27) и сначала записать все множители вида $v_j x_i v_j^{-1}$, а затем записать все остальные множители вида $v_k x_i^{-1} v_k^{-1}$. Если в (2.27) мы имеем два последовательных вхождения x_i с одинаковым показателем, мы используем лемму 2.7 и уменьшаем число x_i в (2.27) на единицу. Затем мы снова переставляем множители, как указано выше. Поэтому мы можем предположить, что в (2.27) экспоненты x_i чередуются в знаке и $k \leq 2$. Следовательно, мы получаем, что каждый элемент может быть помещен в один из форм (2.20) – (2.23). □

2.4 Доказательство теоремы 2.1.

Из равенства

$$\langle\langle x \rangle\rangle = \langle\langle y \rangle\rangle$$

следует, что $x \in \langle\langle y \rangle\rangle$. Легко проверить, что тогда x можно представить в виде

$$x = \prod_{i=1}^{k} u_i y^{\ pm1} u_i^{-1} \tag{2.26}$$

По лемме 2.6 имеем

$$x \cdot y^{-1} x^{\pm 1} y = y^{-1} x^{\pm 1} y \cdot x.$$

Итак, мы может переставить в (2.26) множители $u_i y^{\pm 1} u_i^{-1}$ и сначала записать все множители вида $u_i y^{-1} u_i^{-1}$, а затем записать все остальные множители вида $u_i y u_i^{-1}$. Тогда в силу леммы 2.7 можно считать, что $k \leq 2$ в (2.26).

Если $k = 1$, то

$$x = u_1 y^{-1} u_1^{-1} \text{ или } x = u_1 y u_1^{-1}$$

и теорема 2.1 доказана.

Если $k = 2$, то

$$x = u_1 y^{-1} u_1^{-1} u_2 y u_2^{-1}$$

В этом случае мы повторно применяем тождество (2.1) и получаем

$$x = u_1 y^{-1} u_1^{-1} u_2 y u_2^{-1} = (yy^{-1}) u_1 y^{-1} u_1^{-1} u_2 y u_2^{-1} = y(y^{-1} u_1 y^{-1}) u_1^{-1} u_2 y u_2^{-1} =$$

$$= y u_1^{-1} y u_1^{-1} u_1^{-1} u_2 y u_2^{-1} = y u_1^{-1} (u_2^{-1} u_1^{-1} y^{-1} u_2^{-1} u_1^{-1}) u_2^{-1} =$$

$$y u_1^{-1} u_2^{-1} u_1^{-1} y^{-1} u_1^{-1} u_2^{-1} u_1^{-1} = y u_3 y^{-1} u_3^{-1} = [y, u_3],$$

где $u_3 = u_1^{-1} u_2^{-1} u_1^{-1}$.

С другой стороны, из равенства $\langle\langle x \rangle\rangle = \langle\langle y \rangle\rangle$ следует, что $y \in \langle\langle x \rangle\rangle$. Повторяя приведенные выше рассуждения, получаем

$$y = [x, u_4]$$

для некоторого u_4. Так как группа $B(3)$ является нильпотентной группой порядка ≤ 3, мы получаем, что

$$x = 1$$

в силу равенств

$$x = [y, u_3] = [[x, u_4], u_3] = [[[y, u_3], u_4], u_3] = 1.$$

Затем из $\langle\langle x \rangle\rangle = \langle\langle y \rangle\rangle$ предполагается, что $y = 1$. Теорема 2.1 доказана.

2.5 Доказательство теоремы 2.2.

Для простоты обозначим через a и b свободные образующие $B(2, 3)$. Рассмотрим автоморфизм $\alpha \in Ker(\epsilon_2)$. Тогда из коммутирующей подгруппы $[B(2, 3), B(2, 3)]$ найдутся такие элементы z_1, z_2, что

$$\alpha(a) = a z_1, \ \alpha(b) = b z_2.$$

Согласно следствию 2.4, группа $B(2,3)$ имеет 27 элементов и

$$[B(2,3), B(2,3)] = C(B(2,3)) = \{1, aba^2b^2, bab^2a^2\}.$$

Следовательно,

$$|Inn(B(2,3)| = \frac{|B(2,3)|}{|C(B(2,3))|} = 9,$$

где $C(B(2,3))$ - центр $B(2,3)$.

Чтобы завершить доказательство утверждения, рассмотрим все возможные варианты для элементов $z_1, z_2 \in C(B(2,3))$.

Если $\alpha_1(a) = a,\ \alpha_1(b) = b,$ тогда $\alpha_1 = i_e$.

Если $\alpha_2(a) = a,\ \alpha_2(b) = b(aba^2b^2) = aba^2,$ тогда $\alpha_2 = i_{a^2}$.

Если $\alpha_3(a) = a,\ \alpha_3(b) = b(bab^2a^2) = a^2ba,$ тогда $\alpha_3 = i_a$.

Если $\alpha_4(a) = a(aba^2b^2) = b^2ab,\ \alpha_4(b) = b,$ тогда $\alpha_4 = i_b$.

Если $\alpha_5(a) = a(aba^2b^2) = b^2ab,\ \alpha_5(b) = b(aba^2b^2) = aba^2,$ тогда $\alpha_5 = i_{ba^2}$.

Если $\alpha_6(a) = a(aba^2b^2) = b^2ab,\ \alpha_6(b) = b(bab^2a^2) = a^2ba,$ тогда $\alpha_6 = i_{ab}$.

Если $\alpha_7(a) = a(bab^2a^2) = bab^2,\ \alpha_7(b) = b,$ тогда $\alpha_7 = i_{b^2}$.

Если $\alpha_8(a) = a(bab^2a^2) = bab^2,\ \alpha_8(b) = b(aba^2b^2) = aba^2,$ тогда $\alpha_8 = i_{a^2b^2}$.

Если $\alpha_9(a) = a(bab^2a^2) = bab^2,\ \alpha_9(b) = b(bab^2a^2) = a^2ba,$ тогда $\alpha_9 = i_{ab^2}$.

Для этого мы получаем $Ker(\epsilon_2) \subseteq Inn(B(2,3))$. Обратное очевидно и, следовательно, $Ker(\epsilon_2) = Inn(B(2,3))$. Теорема 2.2 доказана.

2.6 Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп периода 3

Из теоремы С.И.Адяна о том, что центр группы $B(m,n)$ для всех нечётных $n \geq 665$ и $m > 1$ тривиален (см.[5, гл. VI., теорема 3.3]), следует, что группа $B(m,n)$ изоморфна группе своих внутренних автоморфизмов. В терминах так называемых "точных последовательностей" это означает, что последовательность гомоморфизмов

$$0 \to B(m,n) \hookrightarrow Aut(B(m,n)) \twoheadrightarrow {}^{Aut(B(m,n))}/_{Inn(B(m,n))} \to 0$$

является точной, где $Inn(B(m,n))$ есть группа внутренних автоморфизмов группы $B(m,n)$. Отметим, что фактор-группа ${}^{Aut(B(m,n))}/_{Inn(B(m,n))}$ обозначается через $Out(B(m,n))$ и называется группой внешних автоморфизмов группы $B(m,n)$.

Определение 2.2. *Пусть G – произвольная группа, $\varphi \in Aut(G)$ – автоморфизм группы G и H - подгруппа группы G. Автоморфизм φ назовем H-**стабильным** автоморфизмом, если $\varphi(H) = H$. При этом H называется φ-**допустимой** подгруппой.*

Рассмотрим произвольное семейство $\mathscr{K}$ подгрупп группы G. Всевозможные H-стабильные автоморфизмы при $H \in \mathscr{K}$ составляют подгруппу группы $Aut(G)$. Она называется стабилизатором семейства $\mathscr{K}$ и обозначается

$$Aut_{\mathscr{K}}(G) \risingdotseq \{\varphi \in Aut(G) | \, \varphi(H) = H \text{ для всех } H \in \mathscr{K}\}.$$

Пусть $\mathscr{N} = \mathscr{N}(G)$ – множество всех нормальных подгрупп группы G и $\mathscr{M} \subset \mathscr{N}$. Легко заметить, что тогда выполнены следующие вложения

$$Inn(G) \trianglelefteq Aut_{\mathscr{N}}(G) \leq Aut_{\mathscr{M}}(G) \leq Aut(G).$$

Каждый автоморфизм из $Aut_{\mathscr{N}}(G)$ принято называть **нормальным** автоморфизмом. Таким образом, при данном нормальном автоморфизме $\varphi \in Aut(G)$ любая нормальная подгруппа группы G φ-допустима и наоборот. Ясно, что если N есть φ-допустимая нормальная подгруппа группы G, то автоморфизмом φ индуцируется некоторый автоморфизм фактор группы ${}^{\mathrm{G}}/_{N}$.

А. Любоцкий в [16] и А. Лю в [61] доказали, что каждый нормальный автоморфизм нециклической абсолютно свободной группы F является внутренним, т.е. имеет место равенство $Inn(F) = Aut_{\mathscr{N}}(F)$. Соответствующее равенство было доказано в разные годы для различных интересных классов групп (см. [67] – [76]). В частности, М.В.Нещадим в [67], усиливая результаты работ [16] и [49], доказал, что каждый нормальный автоморфизм свободного произведения нетривиальных групп - внутренний. В связи с этим результатом интересно заметить, что аналогичное утверждение неверно для n-периодических произведений групп, введенных С.И.Адяном в [33]. Например, рассмотрим n-периодическое произведение

$$\langle a\rangle_k \overset{n}{*} \langle b\rangle_k$$

двух циклических групп порядка k, где k и n - взаимно простые нечётные числа и $n \geq 665$. Согласно теореме 1 из работы [66] С.И.Адяна, группа $\langle a\rangle_k \overset{n}{*} \langle b\rangle_k$ является простой. Поэтому каждый её автоморфизм - нормальный. В силу принципа симметричности (см. [5, гл.1, §5, п.3]), отображение $a \to a^{-1}, b \to b^{-1}$ порождает нормальный автоморфизм порядка 2 группы $\langle a\rangle_k \overset{n}{*} \langle b\rangle_k$. Но он не является внутренним, так как по теореме 7 из работы [33] С.И.Адяна, каждый внутренний автоморфизм группы $\langle a\rangle_k \overset{n}{*} \langle b\rangle_k$ имеет нечётный порядок, точнее, его порядок делит либо k, либо n. Добавим, что поскольку

$$\langle a\rangle_2 \overset{n}{*} \langle b\rangle_2 = \langle a\rangle_2 * \langle b\rangle_2,$$

то

$$Inn(\langle a\rangle_2 \overset{n}{*} \langle b\rangle_2) = Aut_{\mathscr{N}}(\langle a\rangle_2 \overset{n}{*} \langle b\rangle_2).$$

Представляет интерес следующий: верно ли, что каждый нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы периода 3 является внутренним? А.Минасян и Д.Осин в [68] показали, что если G – нециклическая относительно гиперболическая группа без нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то

$$Inn(G) = Aut_{\mathscr{N}}(G).$$

В работе Е.Черепанова [15] доказано, что при достаточно больших нечетных n ($n > 10^{78}$) группы нормальных автоморфизмов и внутренних автоморфизмов группы $B(m, n)$ совпадают. В этом параграфе мы докажем, что это утверждение распространяется на автоморфизмы свободных бернсайдовых групп 3. Отметим, что вопрос об исследовании групп автоморфизмов свободных периодических групп достаточно большого нечётного периода был поставлен А.Ю.Ольшанским в 1982 г. (см. [26], вопрос 8.53.а).

Определение 2.3. *Автоморфизм φ группы G назовем M-**нормальным**, если для любой максимальной нормальной подгруппы N группы G выполнено равенство*

$$\varphi(N) = N.$$

В работах [49], [62] было установлено, что не только множество нормальных подгрупп, но и множество максимальных нормальных подгрупп группы $B(m, n)$ континуально.

Для доказательства теоремы 2.3 сначала докажем некоторые леммы.

Предварительные леммы. Будем писать

$$x \sim y,$$

если два элемента x и y сопряжены в данной группе.

Лемма 2.9. *Автоморфизм α $\boldsymbol{B}(m,3)$ является нормальным автоморфизмом тогда и только тогда, когда для всех $x \in \boldsymbol{B}(m,3)$ имеем*

$$\alpha(x) \sim x \text{ или } \alpha(x) \sim x^{-1}.$$

Доказательство. Пусть α - нормальный автоморфизм. Так как нормальное замыкание $\langle\langle x\rangle\rangle$ элемента x является нормальной подгруппой и α является нормальным автоморфизмом, мы имеем равенства

$$\langle\langle x\rangle\rangle = \alpha(\langle\langle x\rangle\rangle) = \langle\langle \alpha(x)\rangle\rangle.$$

Следовательно, в силу теоремы 2.1 получаем, что либо $\alpha(x) \sim x$ или $\alpha(x) \sim x^{-1}$. Обратное тривиально. $\square$

Лемма 2.10. *Пусть $\boldsymbol{B}(m,3)$ - свободная группа Бернсайда со свободными образующими*

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}.$$

Тогда для любого элемента $u \in \boldsymbol{B}(m,3)$ и для любого порождающего $x_i \in X$ существует элемент $v \in Gp(X \setminus x_i)$ такой, что имеет место равенство

$$uxu^{-1} = vxv^{-1} \tag{2.27}$$

Доказательство. Рассмотрим элемент $x_i w x_i w^{-1} x_i^{-1}$. По лемме 2.6 мы можем переписать $w x_i w^{-1}$ и x_i^{-1} и получить

$$x_i w x_i w^{-1} x_i^{-1} = w x_i w^{-1}.$$

Поэтому, если

$$u = u_1 x_i^{\pm 1} u_2 x_i^{\pm 1} \cdots x_i^{\pm 1} u_k,$$

где $u_j \in Gp(X \setminus x_i)$ для всех $j = 1, ..., k$, затем

$$uxu^{-1} = u_1 u_2 \cdots u_k x_i (u_1 u_2 \cdots u_k)^{-1}.$$

Итак, $v = u_1 u_2 \cdots u_k$. □

2.7 Доказательство теоремы 2.3

Доказательство. Пусть α - нормальный автоморфизм $\mathbf{B}(m, 3)$. В силу леммы 2.2 для любого элемента x имеем $\alpha(x) \sim x$ или $\alpha(x) \sim x^{-1}$. Обозначим через $\bar{\alpha}$ автоморфизм абелевой группы $\mathbf{B}(m,3)/[\mathbf{B}(m,3), \mathbf{B}(m,3)]$, индуцированный автоморфизмом α и обозначаемый $\bar{x}$ образом x в $\mathbf{B}(m,3)/[\mathbf{B}(m,3), \mathbf{B}(m,3)]$, где $[\mathbf{B}(m,3), \mathbf{B}(m,3)]$ - коммутаторная подгруппа в $\mathbf{B}$ $(m, 3)$.

Пусть x, y - некоторые элементы из $\mathbf{B}(m, 3)$, которые не принадлежат подгруппе коммутаторов $[\mathbf{B}(m,3), \mathbf{B}(m,3)]$. Предположим, что

$$\alpha(x) \sim x \text{ и } \alpha(y) \sim y^{-1}.$$

Затем $\bar{\alpha}(\bar{x}) = \bar{x}$ и $\bar{\alpha}(\bar{y}) = \bar{y}^{-1}$. Поэтому, если $\alpha(xy) \sim xy$, то $\bar{\alpha}(\bar{x}\bar{y}) = \bar{x}\bar{y}$ и если $\alpha(xy) \sim (xy)^{-1}$, затем $\bar{\alpha}(\bar{x}\bar{y}) = \bar{y}^{-1}\bar{x}^{-1}$.

В случае $\bar{\alpha}(\bar{x}\bar{y}) = \bar{x}\bar{y}$ получаем, что

$$\bar{x}\bar{y}^{-1} = \bar{x}\bar{y}$$

и, следовательно, $\bar{y} = 1$.

Во втором случае $\bar{\alpha}(\bar{x}\bar{y}) = \bar{y}^{-1}\bar{x}^{-1}$ мы получаем

$$\bar{x}\bar{y}^{-1} = \bar{y}^{-1}\bar{x}^{-1}$$

и, следовательно, $\bar{x} = 1$. Следовательно, в обоих случаях мы получаем противоречие с условием $x, y \notin [\mathbf{B}(m,3), \mathbf{B}(m,3)]$.

Это означает, что для всех $x \in \mathbf{B}(m,3)$, которые не находятся в $[\mathbf{B}(m,3), \mathbf{B}(m,3)]$ мы имеем либо

1) $\alpha(x) \sim x$

или

2) $\alpha(x) \sim x^{-1}$.

Сначала рассмотрим случай 1). Пусть $x_1, ..., x_m$ - свободные образующие $\mathbf{B}(m,3)$. Очевидно, что $x_1, ..., x_m \notin [\mathbf{B}(m,3), \mathbf{B}(m,3)]$. Тогда в силу условия $\alpha(x) \sim x$ имеем

$$\begin{gathered}\alpha(x_1) = u_1 x_1 u_1^{-1}\\ \alpha(x_2) = u_2 x_2 u_2^{-1}\\ \dots\\ \alpha(x_m) = u_m x_m u_m^{-1}.\end{gathered} \tag{2.28}$$

Применяя к обеим сторонам всех равенств (2.28) внутренний автоморфизм $\beta_1 = i_{u_1^{-1}}$ мы получим.

$$\begin{gathered}\beta_1(\alpha(x_1)) = x_1\\ \beta_1(\alpha(x_2)) = v_2 x_2 v_2^{-1}\\ \dots\\ \beta_1(\alpha(x_m)) = v_m x_m v_m^{-1}.\end{gathered} \tag{2.29}$$

Согласно лемме 2.10 можно считать, что любой из порождающих x_i не встречается в v_i для всех $i = 2, ..., m$.

Теперь применяя автоморфизм $\beta_1 \circ \alpha$ к $x_1 x_2$, получаем

$$(\beta_1 \circ \alpha)(x_1 x_2) = x_1 v_2 x_2 v_2^{-1}$$

Элементы $x_1, x_1 x_2, x_3, ..., x_m$ являются свободными образующими $\mathbf{B}(m,3)$. Так как автоморфизм $\beta_1 \circ \alpha$ нормален, он индуцирует автоморфизм $\overline{\beta_1 \circ \alpha}$ факторгруппы $\mathbf{B}(m,3)/\langle\langle x_1 x_2\rangle\rangle$. Заметим, что $\mathbf{B}(m,3)/\langle\langle x_1 x_2\rangle\rangle$ канонически изоморфна свободной группе Бернсайда $\mathbf{B}(m-1,3)$ со свободными образующими $x_1, x_3, ..., x_m$. Следовательно,

$$1 = (\overline{\beta_1 \circ \alpha})(x_1 x_2) = x_1 v_2 x_2 v_2^{-1}$$

в $\mathbf{B}(m-1,3)$.

Используя определяющее соотношение $x_1x_2 = 1$ из $\mathbf{B}(m,3)/\langle\langle x_1x_2\rangle\rangle$ из $1 = x_1v_2x_2v_2^{-1}$, получаем

$$v_2x_1v_2^{-1} = x_1.$$

Так как x_2 не встречается в v_2, мы предполагаем, что x_1 и v_2 также переставляются в $\mathbf{B}(m,3)$.

Рассмотрим теперь автоморфизм $\beta_2 = i_{v_2^{-1}}$. Применяя его к обеим сторонам равенств (2.29), получим

$$\begin{gathered}\beta_2(\beta_1(\alpha(x_1))) = x_1\\ \beta_2(\beta_1(\alpha(x_2))) = x_2\\ \beta_2(\beta_1(\alpha(x_3))) = w_3x_3w_3^{-1}\\ \dots\\ \beta_2(\beta_1(\alpha(x_m))) = w_mx_mw_m^{-1},\end{gathered} \tag{2.30}$$

Снова используя лемму 2.10, мы можем предположить, что не один из порождающих x_i не встречается в w_i для всех $i = 3, ..., m$. Далее, учитывая факторгруппы

$$\mathbf{B}(m,3)/\langle\langle x_1x_3\rangle\rangle \text{ и } \mathbf{B}(m,3)/\langle\langle x_2x_3\rangle\rangle$$

и повторяя приведенные выше аргументы, мы можем предположить, что x_1 и x_2 переставляются с w_3 в $\mathbf{B}(m,3)$.

Теперь применим к обеим сторонам равенств (2.30) внутренний автоморфизм $\beta_3 = i_{w_3^{-1}}$ и повторим приведенные выше аргументы для всех образующих x_j, $j \geq 4$, и найдем внутренние автоморфизмы $\beta_4, ..., \beta_m$ такие, что

$$\begin{gathered}\beta_m(...(\beta_1(\alpha(x_1)))...) = x_1\\ \beta_m(...(\beta_1(\alpha(x_2)))...) = x_2\\ \dots\\ \beta_m(...(\beta_1(\alpha(x_m)))...) = x_m.\end{gathered}$$

Это означает, что $\beta_m \circ ... \circ \beta_1 \circ \alpha$ является идентичным автоморфизмом. Следовательно,

$$\alpha = (\beta_m \circ ... \circ \beta_1)^{-1}.$$

Поскольку $\beta_1, ..., \beta_m$ являются внутренними автоморфизмами, мы получаем, что α также является внутренним.

Случай 2). По условию $\alpha(x) \sim x^{-1}$ для всех $x \in \mathbf{B}(m,3)$, которые не находятся в $[\mathbf{B}(m,3), \mathbf{B}(m,3)]$ мы имеем

$$\alpha(x_1) = u_1 x_1^{-1} u_1^{-1}$$

$$\alpha(x_2) = u_2 x_2^{-1} u_2^{-1}$$

$$\dots$$

$$\alpha(x_m) = u_m x_m^{-1} u_m^{-1}.$$

Рассуждая так же, как в случае 1), мы получим:

$$\beta_m(...(\beta_1(\alpha(x_1)))...) = x_1^{-1}$$

$$\beta_m(...(\beta_1(\alpha(x_2)))...) = x_2^{-1}$$

$$\dots$$

$$\beta_m(...(\beta_1(\alpha(x_m)))...) = x_m^{-1}.$$

Кроме того,

$$\beta_m(...(\beta_1(\alpha(x)))...) = x^{-1}$$

для всех. $x \in \mathbf{B}(m,3) \setminus [\mathbf{B}(m,3), \mathbf{B}(m,3)]$. Обозначим

$$\gamma = \beta_m \circ ... \circ \beta_1 \circ \alpha.$$

Тогда

$$\gamma(x_1 x_2 x_3) = x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} = (x_3 x_2 x_1)^{-1}. \tag{2.31}$$

С другой стороны, мы имеем

$$\beta_m(...(\beta_1(\alpha(x)))...) \sim x^{-1},$$

которая обеспечивается условием $\alpha(x) \sim x^{-1}$.

Следовательно,

$$\gamma(x_1x_2x_3) \sim (x_1x_2x_3)^{-1}. \tag{2.32}$$

Из (2.31) и (2.32) следует, что

$$\langle\langle(x_3x_2x_1)^{-1}\rangle\rangle = \langle\langle(x_1x_2x_3)^{-1}\rangle\rangle.$$

Таким образом,

$$\langle\langle x_1x_2x_3\rangle\rangle = \langle\langle x_3x_2x_1\rangle\rangle. \tag{2.33}$$

Теперь рассмотрим свободные образующие $x_1x_2x_3, x_2, x_3$ $\mathbf{B}(m,3)$. Нормальный автоморфизм γ индуцирует автоморфизм факторгруппы

$$\mathbf{B}(m,3)/\langle\langle x_1x_2x_3\rangle\rangle \simeq \mathbf{B}(m-1,3).$$

Равенства (2.33) и $x_1x_2x_3 = 1$ в $\mathbf{B}(m,3)/\langle\langle x_1x_2x_3\rangle\rangle$ подразумевают $x_3x_2x_1 = 1$. Поэтому мы получаем равенство

$$x_2x_3 = x_3x_2$$

в свободной группе $\mathbf{B}(m-1,3)$ со свободными образующими $\{x_2, x_3, ..., x_m\}$. Это противоречие, потому что для $m \geq 3$ группа $\mathbf{B}(m-1,3)$ не является абелевой.

Чтобы закончить доказательства теоремы, остается рассматривать случай, когда ранг является бесконечным. В этой случае рассмотрим натуральный гомоморфизм

$$\phi : F_\infty \to B(\infty,3).$$

Из [13] известно , ϕ индуцирует гомоморфизм

$$\alpha : Aut(F_\infty) \to Aut(B(\infty,3))$$

который является сурьективным гомоморфизмом. Мы должны показать, что для любого нормального автоморфизма $\Phi \in Aut(B(\infty,3))$, Φ является внутренним автоморфизмом.

Допустим $\overline{\Phi}$ является прообразом Φ в $Aut(F_\infty)$ относительно α. $\overline{\Phi}$ будет нормальным автоморфизмом в $Aut(F_\infty)$. Следовательно, $\overline{\Phi}$ является внутренним автоморфизмом:

$$\overline{\Phi} = \overline{i_a}$$

для некоторого $a \in F_\infty$. Следовательно Φ будет внутренним автоморфизмом в $B(\infty, 3)$. Теорема доказана. □

2.8 О нильсеновских автоморфизмах относительно свободных групп

Обзор по исследованиям групп автоморфизмов относительно свободных без кручения дан в работе [46]. Результаты о группах автоморфизмов относительно свободных периодических групп получены в работах [14], [19], [23], [24]. В настоящей заметке мы покажем, что некоторые утверждения из работы [44] об $\mathrm{Aut}(F_n)$, где F_n абсолютно свободная группа ранга n, распространяются на $\mathrm{Aut}(R_n)$, где R_n относительно свободная группа ранга некоторого многообразия групп. Наше изложение опирается на работу [44].

Будем предполагать, что $n \geq 3$, и будем фиксировать базис $\{a_1, ..., a_n\}$ свободной бернсайдовой группы R_n. В соответствии с выбором базиса, в группе автоморфизмов группы R_n возникает конечная подгруппа изоморфная группе $\mathbb{Z}_2^n$, которая порождается автоморфизмами ϵ_i, где

$$\epsilon_i : a_i \mapsto a_i^{-1} \text{ и } a_j \mapsto a_j \text{ для } j \neq i.$$

В свою очередь, перестановки базисных элементов порождают подгруппу в $\mathrm{Aut}(R_n)$ изоморфную симметрической группе S_n. Мы будем представлять элементы из S_n в виде произведения циклов. Например, (1 2) будет обозначать автоморфизм, который переставляет местами a_1 и a_2 и оставляет другие a_i в своих местах.

Обозначим

$$\epsilon_{\sigma(i)} = \sigma \epsilon_i \sigma^{-1}$$

для каждой перестановки $\sigma \in S_n$. Легко понять, что ϵ_i и S_n вместе порождают подгруппу

$$W_n \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n.$$

Мы будем рассматривать также левые нильсеновские преобразования: λ_{ij} отображает a_i на $a_j a_i$ и оставляет другие a_k на своих местах при $k \neq i$. Аналогично будем определяются правые нильсеновские преобразования

$$\rho_{ij} : a_i \mapsto a_i a_j.$$

Все нильсеновские преобразования лежат в подгруппе $\mathrm{Aut}^+(R_n)$ индекса 2, который является прообразом подгруппы $SL(n, \mathbb{Z}_k)$ при естественном отображении

$$\mathrm{Aut}(R_n) \to GL(n, \mathbb{Z}_3),$$

если экспонента рассматриваемого многообразия равна k, и $\mathrm{Aut}^+(R_n)$ совпадает с прообразом естественного отображения

$$\mathrm{Aut}(R_n) \to GL(n, \mathbb{Z}),$$

если экспонента рассматриваемого многообразия равна 0, т.е. свободные порождающие относительно свободной группы R_n имеют бесконечный порядок.

Обозначим через A подгруппу группы $\mathrm{Aut}(R_n)$ порожденную всеми нильсеновскими преобразованиями и автоморфизмами ϵ_i. Если σ перестановка, который переводит $(i,\ j)$ на $(k,\ l)$, тогда

$$\sigma \lambda_{ij} \sigma^{-1} = \lambda_{kl}.$$

Кроме того,

$$\epsilon_i \epsilon_j \lambda_{ij} (\epsilon_i \epsilon_j)^{-1} = \rho_{ij}.$$

Поэтому любые два нильсеновские преобразования сопряжены при фиксированном базисе. И так как A действует транзитивно на базисы R_n, значит нильсеновские преобразования, соответствующие различным базисам также сопряжены в A. В частности, справедлива следующая:

Лемма 2.11. *Если какое-то нильсеновское преобразование принадлежит ядру некоторого гомоморфизма*

$$\phi : A \to G,$$

то ϕ факторизуется через $A \to \mathbb{Z}_2$.

Для того, чтобы написать соотношения группы $\mathrm{Aut}(R_n)$ стандартным и удобным способом мы будем придерживаться соглашению, что $\mathrm{Aut}(R_n)$ действует на R_n справа. Как обычно, коммутатор $aba^{-1}b^{-1}$ элементов a и b обозначается через $[a,\ b]$. Поэтому $[\alpha,\ \beta]$ будет обозначать действие сначала автоморфизма α, потом β, потом α^{-1}, потом β^{-1}.

Мы будем также использовать следующие соотношения

$$[\lambda_{ij},\ \lambda_{jk}] = \lambda_{ik},$$

$$[\lambda_{ij},\ \lambda_{kj}] = 1.$$

для любых i, j и k, которые проверяются непосредственно.

Доказательство теоремы 2.4. Обозначим через K ядро $\phi|_{S_n}$. Так как $n \geq 3$ и $K \neq S_n$, мы будем иметь $K = A_n$, или если $n = 4$, то $K = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Если $K = A_n$, тогда все 3-циклы лежат в ядре. Используя соотношения

$$(i,\ j,\ k)\lambda_{jk}(i,\ j,\ k)^{-1} = \lambda_{ij},$$

$$[\lambda_i j,\ \lambda_{jk}] = \lambda_{ik},$$

получим

$$\phi(\lambda_{ik}) = \phi([\lambda_{ij},\ \lambda_{jk}]) = \phi((i,\ j,\ k)\lambda_{jk}(i,\ j,\ k)^{-1}\lambda_{jk}(i,\ j,\ k)\lambda_{jk}^{-1}(i,\ j,\ k)^{-1})\lambda_{jk}^{-1} =$$

$$= \phi(\lambda_{jk}\lambda_{jk}\lambda_{jk}^{-1}\lambda_{jk}^{-1}) = 1$$

Поэтому $\phi(\lambda_{ik}) = 1$ для любых $i,\ k$. Тогда по лемме 2.11 вся группа A отображается на тривиальный элемент.

Если $n = 4$ и $K = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, то произведения любых двух независимых транспозиций из S_4 будут отображаться на единицу. Поэтому, в силу равенства

$$(j\ k)(i\ l)\lambda_{jk}(j\ k)(i\ l) = \lambda_{kj}$$

получаем, что

$$\phi(\lambda_{jk}) = \phi(\lambda_{kj}).$$

Применив ϕ на обе части равенства

$$[\lambda_{ij},\ \lambda_{jk}] = \lambda_{ik},$$

получим

$$\phi(\lambda_{ik}) = \phi([\lambda_{ij},\ \lambda_{jk}]) = \phi(\lambda_{ij}\lambda_{jk}\lambda_{ij}^{-1}\lambda_{jk}^{-1}) = \phi(\lambda_{ij})\phi(\lambda_{jk})\phi(\lambda_{ij})^{-1}\phi(\lambda_{jk})^{-1} =$$

$$= \phi(\lambda_{ij})\phi(\lambda_{kj})\phi(\lambda_{ij})^{-1}\phi(\lambda_{kj})^{-1} = \phi([\lambda_{ij},\ \lambda_{kj}]) = 1.$$

Отсюда, как и раньше, выводим, что $A \cap \mathrm{Aut}^{+}(R_n)$ отображаться на единицу группы G.

Доказательства следствия 2.2. Если $\phi(\tau) = 1$, то поскольку S_n порождается всевозможными сопряженными элемента τ (S_n порождается транспозициями),значит вся группа S_n имеет тривиальный образ. В силу теоремы 2.4, образ $A \cap \mathrm{Aut}^{+}(R_n)$ тривиален, и поскольку $\tau \notin A \cap \mathrm{Aut}^{+}(R_n)$, значит образ $\phi(A)$ группы A должен быть тривиальным.

Из следствия 2.2 следует, что группа A является нормальным замыканием транспозиции $(1\ 2)$.

Литература

[1] Hanna Neumann, *Varieties of Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[2] I.N. Sanov, Solution of the Burnside problem for exponent 4, Uchenye zapiski LSU. Ser. Math., 10 (1940), 166-170.

[3] M. Hall Jr., Solution of the Burnside problem for exponent six, Illinois J. Math., 2:4 (1958), 764-786.

[4] П. С. Новиков, С. И. Адян, О бесконечных периодических группах.I, II, III, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:1, **32**:2, **32**:3, (1968), 212-244, 251-524, 709-731.

[5] S. I. Adian, The Burnside problem and identities in groups, Ergeb. Math. Grenzgeb., 95, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[6] S. V. Ivanov, The free Burnside groups of sufficiently large exponents, Internat. J. Algebra Comput., 4:1-2 (1994), 1-308.

[7] I. G. Lysenok, Infinite Burnside groups of even exponent, Izv. Math., 60:3 (1996), 453-654.

[8] V.S.Atabekyan, The automorphisms of endomorphism semigroups of free Burnside groups. International Journal of Algebra and Computation, Volume 25, Issue 04, (2015). p. 669-674.

[9] E. Formanek, A question of B. Plotkin about the semigroup of endomorphisms of a free group, Proc. Amer. Math. Soc., 130:4 (2002), 935-937.

[10] G. Mashevitzky, B. M. Schein, Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup, Proc. Amer. Math. Soc., 131:6 (2003), 1655-1660.

[11] J. Nielsen, Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann., 91 (1924) 169-209.

[12] Ch.K.Gupta, Generating sets of certain automorphism groups, Resenhas IME-USP 1996, Vol. 3, No.2, 319 –332.

[13] R.Bryant, O.Macedonska. Automorphisms of relatively free nilpotent groups of infinite rank, Journal of algebra 121, 388-398 (1989).

[14] V.S. Atabekyan, Normal automorphisms of free Burnside groups, Izvestiya: Mathematics, 75:2 (2011), 223-237.

[15] E. A. Cherepanov, Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents, Internat. J. Algebra Comput, **16** (2006), no. 5, pp. 839-847.

[16] A. Lubotzky, Normal automorphisms of free groups, J. Algebra, 63:2 (1980), 494-498.

[17] J. Dyer and E. Formanek, The automorphism group of a free group is complete, J. London Math. Soc. (2) 11(2) (1975) 181-190.

[18] V. Tolstykh, The automorphism tower of a free group, J. London Math. Soc. 61(2) (2000) 423-440.

[19] V.S. Atabekyan, The groups of automorphisms are complete for free Burnside groups of odd exponents $n \geq 1003$, Int. J. Algebra Comput., 23:6 (2013), 1485-1496.

[20] V. S. Atabekyan, Monomorphisms of Free Burnside Groups, Mat. Zametki, 86:4 (2009), 483-490; Math. Notes, 86:4 (2009), 457-462.

[21] V.S.Atabekyan, A. L. Gevorgyan, On outer normal automorphisms of periodic products of groups, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, (2011), Vol. 46, N. 5, pp. 289-292.

[22] V.S.Atabekyan, Automorphism groups and endomorphism semigroups of groups $B(m,n)$, Algebra and Logic, Vol. 54, No. 1 (2015), p. 58-62.

[23] V. S. Atabekyan, Splitting Automorphisms of Order p^k of Free Burnside Groups are Inner, Math. Notes, 95:5 (2014), 586-589

[24] V.S.Atabekyan, The Automorphism Tower Problem for Free Periodic Groups, Proceedings of YSU. Physical and Mathematical Sciences, 2(231), (2013), pp. 3-7.

[25] V. S. Atabekyan, Splitting automorphisms of free Burnside groups, Sb. Math., 204:2 (2013), 182-189.

[26] V. D. Mazurov, Yu. I. Merzlyakov, V. A. Churkin (eds.), *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory*, ed. 8. Institute of Math. Novosibirsk. (1982).

[27] W. Magnus, Uber diskontinuerliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz), J. reine angew. Math. 163 (1930) 141-165.

[28] G. Mashevitzky, B. I. Plotkin, On automorphisms of the endomorphism semigroup of a free universal algebra. *Int. J. Algebra Comput.* **17**(5-6) (2007) 1085–1106.

[29] B. I. Plotkin, *Seven Lectures on the Universal Algebraic Geometry*, Preprint, Institute of Mathematics, Hebrew University, (2000).

[30] Yurii V. Zhuchok, Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free commutative dimonoid, Communications in Algebra, 45:9 (2017), 3861-3871.

[31] Zhitomirski G., Automorphisms of the semigroup of all endomorphisms of free algebras. // arXiv.org, 2005.

[32] A.Belov-Kanel, R.Lipyanski, Automorphisms of the endomorphism semigroup of a polynomial algebra, Journal of Algebra, Vol. 333, No. 1 (2011), 40–54.

[33] S. I. Adian, Periodic products of groups, Proc. Steklov Inst. Maюh., 142 (1979), 1–19.

[34] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, Periodic product of groups. *Journal of contemporary mathematical analysis*, **52**:3, (2017) 111–117.

[35] S. I. Adian, New estimates for odd periods of infinite Burnside groups, Proc. Steklov Inst. Math., 289 (2015), 33-71.

[36] S. I. Adian, Infinite irreducible systems of group identities, *Math. USSR-Izv.*, **4**:4 (1970), 721–739.

[37] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, On free groups of infinitely based varieties of S.I.Adian, *Izvestiya: Mathematics*, **81**:5, (2017) 889–900.

[38] J. Howie, Some results on one-relator surface groups, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 10 (2004) 255–262.

[39] O.Bogopolski, A Magnus theorem for some one-relator groups V, Geometry and Topology Monographs, 14 (2008) 63–73.

[40] O.Bogopolski, A surface groups analogue of a theorem of Magnus, Geometric methods in group theory, Contemp. Math. 372, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005) 59–69.

[41] R.Lyndon, P.Schupp, Combinatorial theory of groups. Springer–Verlag, NY, 1977.

[42] S. Andreadakis, On the Automorphisms of Free Groups and Free Nilpotent Groups, Proceedings of the London Mathematical Society, Volume s3-15, Issue 1, 1 (1965), 239–268.

[43] S. Bachmuth, Induced Automorphisms of Free Groups and Free Metabelian Groups, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 122, No. 1 (Mar., 1966), pp. 1–17.

[44] M. R. Bridson, K Vogtmann, Automorphisms of automorphism groups of free groups, *J. Algebra* **229**(2000) 785–792.

[45] S. Gersten, A presentation for the special automorphism group of a free group, J. Pure Appl. Algebra 33 (1984), no. 3, 269–279.

[46] V.Roman'kov, Automorphisms of Groups. Acta Applicandae Mathematicae, V. 29, (1992)241–280.

[47] M.Hall, The theory of groups. The Macmillan Company, NY, 1959.

[48] С. И. Адян, Случайные блуждания на свободных периодических группах, *Изв. АН СССР. Сер. матем*, **46**:6, (1982) 1139-1149.

[49] С. И. Адян, Нормальные подгруппы свободных периодических групп, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:5, (1981), 931- 947.

[50] С. И. Адян, О подгруппах свободных периодических групп нечетного показателя, Сб. статей, посвещенный 80-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова, Тр.МИАН, **112**, (1971), 64-72.

[51] П. С. Новиков, С. И. Адян, Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, (1968), **32**:4, 971-979.

[52] П. С. Новиков, С. И. Адян, О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, (1968), **32**:5, 1176-1190.

[53] С. И. Адян, Аксиоматический метод построения групп с заданными свойствами: *УМН*, 1977, **32**:1(193), 3-15.

[54] С. И. Адян, Проблема Бернсайда о периодических группах и смежные вопросы, *Совр. пробл. матем.*, **1**, 2003, 5-28.

[55] В. Л. Ширванян, Вложение группы $B(\infty, n)$ в группу $B(2, n)$, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:1, (1976), 190-208.

[56] В. С. Атабекян, *Об аппроксимации и подгруппах свободных периодических групп*, Деп. ВИНИТИ 5380-В86.

[57] В. С. Атабекян, О простых и свободных периодических группах, *Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика*, №6, (1987), 76-78.

[58] V. S. Atabekian, On embeddings of free Burnside groups of odd exponent $n \geq 1003$, Combinatorial and Geometric Geometric Group Theory, May 5-10, Vanderbilt University, Nashville, TN, USA, (2006), 2.

[59] D.V.Osin, Uniform non-amenability of free Burnside groups, *Arch. Math. (Basel)*, **88**:5, (2007), 403-412.

[60] В. С. Атабекян, Равномерная неаменабельность подгрупп свободных бернсайдовых групп нечетного периода, (принята в печать в журнале "Мат. заметки").

[61] A. S.-T. Lue, Normal automorphisms of free groups, *J. Algebra*, **64**:1, (1980), 52-53.

[62] В. С. Атабекян, О периодических группах нечетного периода $n \geq 1003$, *Матем. заметки*, **82**:4, (2007), 495-500.

[63] *Коуровская тетрадь*, Нерешенные вопросы теории групп, Новосибирск. 1980.

[64] A. Yu. Olshanskii, Self-normalization of free soubgroups in the free Burnsaide groups, *Groups, rings, Lie and Hopf algebras (St. John's, NF, 2001)*, Math. Appl., **555**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003, 179–187.

[65] С. В. Иванов, О подгруппах свободных бернсайдовых групп нечетного составного периода, *Вестн. МГУ, Сер. матем., механика*, 1989, №2, 7-11.

[66] С. И. Адян, О простоте периодических произведений групп, *Докл. АН СССР*, **241**:4, (1978), 745-748.

[67] M. V. Neshadim, Free products of groups have no outer normal automorphisms, Algebra and Logic, **35**(1996), no. 5, pp.316-318.

[68] A. Minasyan, D. Osin, Normal automorphisms of relatively hyperbolic groups, Transaction of the Amer. Math. Soc., **362**(2010), no. 11, pp. 6079-6103.

[69] И. Г. Лысенок, Доказательство теоремы М. Холла о конечности групп $B(m, 6)$, Матем. заметки, **41**(1987), no. 3, pp. 422–428.

[70] M. Jarden, Normal automorphisms of free profinite groups, J. Algebra, **62** (1980), no. 1 pp. 118–123.

[71] M. Jarden, J. Ritter, Normal automorphisms of absolute Galois groups of $\mathfrak{p}$-adic fields, Duke Mathematical Journal, **47** (1980), no. 1, pp. 47–56.

[72] В. А. Романьков, Нормальные автоморфизмы дискретных групп, Сибирск. Мат. Ж., **24** (1983), no. 4, pp. 138–149.

[73] Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, Нормальные автоморфизмы свободной в многообразии $\mathcal{N}_2\mathcal{A}$ про-p-группы, Алгебра и логика, **35** (1996), no. 3, pp. 249–267.

[74] Н. С. Романовский, Нормальные автоморфизмы свободных разрешимых про-p-групп, Алгебра и логика, **36** (1997), no. 4, pp. 441–453.

[75] G. Endimioni, Pointwise inner automorphisms in a free nilpotent group, Q. J. Math., **53** (2002), no. 4, pp. 397–402.

[76] O. Bogopolski, E. Kudryavtseva, H. Zieschang, Simple curves on surfaces and an analog of a theorem of Magnus for surface groups, Math. Z., **247** (2004), no. 3, pp. 595–609.

[77] А.Т.Асланян, Об автоморфизмах относительно свободных групп, Сборник статей. 11 год. науч. конф. (2017), 56-59.

[78] V.S.Atabekyan, H.T.Aslanyan, H.A.Grigoryan, A.E.Grigoryan, Analogues of Nielsen's and Magnus's theorems for free Burnside groups of period 3, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences, (2017), v. 51, #3, p. 217-223.

[79] Atabekyan, V., Aslanyan, H., & Grigoryan, A. E. Normal Automorphisms of Free Burnside Groups of Period 3. Armenian Journal of Mathematics, (2017), 9(2), 60-67.

[80] V. S. Atabekyan and H. T. Aslanyan, The automorphisms of endomorphism semigroups of relatively free groups, Int. J. Algebra Comput.,(2018), v. 28, 02 pp, 207–215.

[81] H.T.Aslanyan, On automorphisms and endomorphisms of CC groups, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences, 2018, v. 52, #1, p. 60-63.

[82] H.T.Aslanyan, V. S. Atabekyan, A. E. Grigoryan. On free Burnside groups of period 3, Мальцевские чтения, (2017), p. 96-97.

[83] H.T.Aslanyan, On endomorphisms of CC-groups, EMS Conference Emil Artin International Conference Dedicated to the 120th Anniversary of Emil Artin (03.07.1898-20.12.1962) Yerevan, the Republic of Armenia, (May 27-June 2, 2018), p. 27