

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գրիգորյան Աշոտ Խաչիկի

ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇԱԿԻ ԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐ ԿՈՆԴԵՆՍԱՑՎԱԾ
ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՖԻԶԻԿԱՅՈՒՄ

Ա.04.07 – «Կոնդենսացված վիճակի ֆիզիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՄԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА
ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГРИГОРЯН АШОТ ХАЧИКОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ЯВЛЕНИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ В ФИЗИКЕ
КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.04.07 – «Физика конденсированного состояния»

ЕРЕВАН - 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Ֆիզիկայի կիրառական պրոբլեմների ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆ. Ա. Ա. Սահարյան
Պաշտոնական ընդհմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆ. Կ. Գ. Թրունի
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, Ա. Ս. Քոթանջյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան

Ատենախոսության պաշտպանությունը կայանալու է 2018թ. ապրիլի 21-ին ժամը 12:00-ին Երևանի պետական համալսարանում գործող Ֆիզիկայի 049 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ա. Մանուկյան փ. 1, ԵՊՀ):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Մեղմագիրն առաքված է 2018թ. մարտի 20-ին:

049 Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Կ.Պ. Քալանթարյան

Тема диссертации утверждена в Институте прикладных проблем физики НАН РА.

Научный руководитель: д.ф.м.н., проф. А. А. Саарян

Официальные оппоненты: д.ф.м.н., проф. К. Г. Труни
к.ф.м.н., А. С. Котанджян

Ведущая организация: Национальный политехнический университет
Армении

Защита диссертации состоится 21-го апреля 2018г. в 12:00 часов на заседании Специализированного совета по физике 049 при Ереванском государственном университете (0025, Ереван, ул. А. Манукяна 1, ЕГУ):

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 20 марта 2018 г.

Ученый секретарь 049 специализированного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент

В.П. Калантарян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одной из характерных черт современного этапа развития физики конденсированных сред является широкое применение методов квантовой теории поля (см. например, [1]). В рамках такого подхода получено много интересных результатов, включающих различные непертурбативные эффекты в системах с сильным взаимодействием. Такие эффекты играют важную роль, в частности, в физике высокотемпературных сверхпроводников, в квантовом эффекте Холла и в исследованиях различных топологических фаз вещества. В ряде систем физики конденсированных сред длинноволновые возбуждения электронной подсистемы описываются уравнением Дирака, в котором вместо скорости света фигурирует Ферми скорость электронов [2, 3]. Последняя намного меньше скорости света и "релятивистские" эффекты в эффективном описании длинноволновых свойств соответствующих систем проявляются при относительно малых скоростях. Примерами указанных систем являются графен, топологические изоляторы, d-волновые сверхпроводники, вейлевские полуметаллы. Для некоторых этих систем (графен, топологические изоляторы) фоновое пространство эффективной теории поля является двумерным. По сравнению с моделями в трехмерном пространстве, в двумерных теориях появляется ряд интересных особенностей, включающих нарушение четности, появление дробных зарядов, генерацию массы для калибровочных полей топологическими членами в действии. В таких моделях фоновые магнитные поля могут быть катализаторами нарушения четности и киральной симметрии. Фоновые калибровочные поля приводят также к генерации различных типов квантовых чисел, включающие плотности заряда и тока. В частности, индуцированные магнитным потоком токи исследовались в цилиндрических и тороидальных углеродных нанотрубках в рамках эффективной модели Дирака.

В ряде теоретико-полевых моделей, описывающих конденсированные системы, на оператор поля накладываются дополнительные граничные условия. Они могут иметь различную физическую природу. Например, в графеновых нанотрубках граничные условия обусловлены компактификацией пространственных измерений. Другой тип графеновых структур с граничными условиями на поле, являются нанорибоны, графеновый лист с краями. Одним из наиболее интересных эффектов наложения граничных условий является генерация управляемой щели в энергетическом спектре. В квантовой теории поля граничные условия приводят к изменениям спектра нулевых колебаний поля и, в результате, к сдвигам в вакуумных средних значениях (СЗ) физических величин. В частности, появляются силы, действующие на границы. Это хорошо известный эффект Казимира, который исследовался в литературе для различных полей и геометрий границ и с высокой точностью подтвержден в экспериментах [4].

Как в теории поля, так и в физике конденсированных сред, свойства основного состояния системы зависят также от топологии. В качестве источников нетривиальной топологии могут выступать топологические дефекты, возникающие в результате нарушающих симметрию фазовых переходов. В зависимости от топологии вакуумного многообразия, дефекты могут быть точечными, линейными или двумерными. Примерами линейных дефектов в кристаллах являются дисклинация (disclinations). Такие дефекты могут образовываться также фазовыми переходами в сверхтекучем He^3 и He^4 , в сверхпроводниках и в жидких кристаллах [5, 6]. Топологически устойчивые линейные дефекты могут формироваться и в результате фазовых переходов в ранней Вселенной. Эти дефекты называются космическими струнами и они являются источником ряда

интересных физических эффектов, в том числе гравитационного линзирования, анизотропии в космическом микроволновом фоновом излучении, генерации гравитационных волн, космических лучей высокой энергии и всплесков гамма-излучения. В ряде работ обсуждены лабораторные эксперименты, позволяющие исследовать образование дефектов в ходе фазовых переходов в сверхтекучем He^3 . Важность этих исследований обусловлена и тем, что на их основе можно прояснить природу космологических фазовых переходов [7, 8].

Целью работы является исследование СЗ локальных физических величин для фермионного и электромагнитного полей при наличии границ и в присутствии конического дефекта с произвольным значением дефицита угла. Рассмотрены:

- СЗ плотности заряда и тока для заряженного фермионного поля на двумерном плоском кольце, пронизываемом магнитным потоком,
- Фермионный конденсат, СЗ тензора энергии-импульса фермионного поля и силы, действующие на пластины перпендикулярные линейному коническому дефекту,
- СЗ квадратов электрического и магнитного полей, тензора энергии-импульса электромагнитного поля в геометрии параллельных проводящих пластин, перпендикулярных к коническому дефекту, а также силы Казимира и Казимира-Полдера.

Научная новизна. Получены аналитические выражения плотности заряда и тока фермионного поля в двумерных кольцах с граничными условиями модели мешка на краях. Явно выделены части индуцированные границами и исследована их зависимость от геометрических характеристик и от значения магнитного потока. Выведены формулы для фермионного конденсата и СЗ тензора энергии-импульса массивного фермионного поля в $(3 + 1)$ -мерном пространстве-времени с линейным коническим дефектом и при наличии параллельных пластин, перпендикулярных к оси дефекта. Исследованы силы Казимира действующие на границы и показано, что они имеют характер притяжения. Исследовано совместное воздействие линейного топологического дефекта и проводящих границ на квантовые свойства электромагнитного вакуума. Получены выражения СЗ квадратов электрического и магнитного полей, тензора энергии-импульса, сил Казимира-Полдера и Казимира. Исследован характер этих сил в зависимости от параметров.

Практическая ценность. Полученные в диссертации результаты могут быть применены для исследования эффектов границ на индуцированные магнитным потоком плотность заряда и тока в системах, длинноволновые возбуждения которых описываются моделью Дирака, а также к системам в физике конденсированных сред с линейными топологическими дефектами.

Основные положения выносимые на защиту

1. Магнитный поток, пронизывающий двумерное круговое плоское кольцо, индуцирует плотности заряда и азимутального тока в основном состоянии квантового фермионного поля. Они являются нечетными периодическими непрерывными функциями магнитного потока с периодом, равным кванту потока.
2. Зависимость плотностей заряда и тока от значения энергетической щели существенно различна для двух неэквивалентных представлений алгебры Клиффорда. На внешнем крае кольца плотность тока равна плотности заряда, тогда как на внутреннем крае они имеют противоположные знаки. При фиксированных значениях других параметров плотности заряда и тока уменьшаются по модулю с уменьшением внешнего радиуса.

3. В геометрии двух параллельных пластин, перпендикулярных коническому дефекту, топологические части в фермионном конденсате и в тензоре энергии-импульса основного состояния фермионного поля обращаются в нуль на пластинах. Фермионный конденсат положителен вблизи дефекта и отрицателен на больших расстояниях. Чисто топологический и индуцированный пластинами вклады в плотность энергии отрицательны.
4. Фермионные давления Казимира на пластинах обращаются в нуль в точках пересечения дефекта с пластинами и отрицательны в остальных точках. Соответствующие силы имеют характер притяжения.
5. В геометрии параллельных проводящих пластин, перпендикулярных коническому дефекту, среднее значение квадрата электрического поля отрицательно вблизи дефекта и положительно вблизи пластин. Среднее значение квадрата магнитного поля везде отрицательно. Индуцированная пластинами часть в среднем значении тензора энергии-импульса электромагнитного поля отлична от нуля только в области между пластинами и не зависит от координаты вдоль оси дефекта. Соответствующая плотность энергии положительна вблизи дефекта и отрицательна на больших расстояниях.
6. Электромагнитные давления Казимира на пластинах зависят от расстояния от дефекта, и эта зависимость не является монотонной. Соответствующие силы имеют характер притяжения. Действующие на поляризуемую микрочастицу силы Казимира-Полдера являются отталкивающими по отношению к дефекту и притягивающими по отношению к ближней пластине.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы обсуждались на семинарах Института прикладных проблем физики НАН РА, кафедры теоретической физики ЕГУ, Национальной лаборатории Фраскати Национального институт ядерных исследований (Италия), Федерального университета Параиба (Бразилия)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 181 наименований. Общий объем диссертации 133 страниц, включая 17 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертационной работы дан обзор научной литературы по теме диссертации, обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, представлены основные научные положения выносимые на защиту. Приводится краткое содержание диссертации. В **главе 1** исследованы средние значения (СЗ) плотности заряда и тока для квантового фермионного поля $\psi(x)$, индуцированные магнитным потоком в двумерном круговом кольце. В **параграфе 1.1** описана фоновая геометрия и предана постановка задачи. В фоновой геометрии, описываемой метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, и в присутствии внешнего электромагнитного поля с векторным потенциалом A_μ , уравнение Дирака имеет вид $(i\gamma^\mu D_\mu - sm)\psi(x) = 0$, где $D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu + ieA_\mu$, Γ_μ - спиновая связность, а e - заряд кванта поля. В качестве фоновой геометрии рассмотрено $(2 + 1)$ -мерное плоское пространство-время в полярных координатах $x^\mu = (t, r, \phi)$. Параметр

$s = \pm 1$ соответствует двум неэквивалентным неприводимым представлениям 2×2 матриц Дирака γ^μ . Поле локализовано в области, ограниченной двумя концентрическими окружностями с радиусами a и b , $a < b$ (двумерное кольцо). На краях этой области $r = a, b$ поле подчиняется граничному условию мешка

$$(1 + in_\mu \gamma^\mu) \psi(x) = 0, \quad (1)$$

где n_μ - внешняя нормаль к границам. В области $a \leq r \leq b$ имеем $n_\mu = n_u \delta_\mu^1$ для границы $r = u$, где $n_a = -1$, $n_b = 1$. Вследствие граничных условий (1) нормальная составляющая фермионного тока обращается в нуль на границах. Для векторного потенциала рассмотрена конфигурация, соответствующая магнитному потоку в области $r < a$. На кольце $a \leq r \leq b$ имеем $A_\mu = (0, 0, A_2)$, где ковариантная компонента связана с магнитным потоком, пронизывающим кольцо, соотношением $\Phi = -2\pi A_2$. Хотя напряженность магнитного поля в рассматриваемой области равна нулю, магнитный поток приводит к эффекту типа Ааронова-Бома. Заметим, что распределение магнитного потока в области $r < a$ может быть произвольным. Так как граница $r = a$ непроницаема для фермионного поля, эффект калибровочного поля является чисто топологическим и зависит только от общего потока.

Нулевые флуктуации рассматриваемого поля в области $a \leq r \leq b$ чувствительны к магнитному потоку. В результате СЗ физических величин зависят от потока. СЗ плотности тока $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, можно вычислить с помощью формулы

$$\langle j^\mu \rangle = -\frac{e}{2} \sum_\sigma \sum_{\kappa=-,+} \kappa \bar{\psi}_\sigma^{(\kappa)}(x) \gamma^\mu \psi_\sigma^{(\kappa)}(x), \quad (2)$$

где $\{\psi_\sigma^{(+)}(x), \psi_\sigma^{(-)}(x)\}$ - полный набор фермионных мод положительной и отрицательной энергии с набором квантовых чисел σ , удовлетворяющих граничным условиям (1).

В параграфе 1.2 рассмотрены модовые функции $\psi_\sigma^{(\pm)}(x)$. Они определяются радиальным квантовым числом γ и полным угловым моментом j с собственными значениями $\pm 1/2, \pm 3/2, \dots$. Вследствие граничных условий, собственные значения γ заданы неявно, как нули комбинации произведений функций Бесселя и Неймана с порядком $|j + \alpha| - 1/2$ и их производных, где $\alpha = -\Phi/\Phi_0$ и $\Phi_0 = 2\pi/e$ - квант магнитного потока. Если представить параметр α в виде $\alpha = N + \alpha_0$, $|\alpha_0| \leq 1/2$, где N - целое число, то физические величины не будут зависеть от N .

В параграфе 1.3 исследована плотность заряда. Для суммирования ряда по собственным значениям γ использована обобщенная формула Абеля-Плана. В результате плотность заряда в кольце $a \leq r \leq b$ представлена в виде

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle &= \langle j^0 \rangle_a + \frac{e}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=\pm} p \int_m^{\infty} dx x \left\{ \frac{sm}{\sqrt{x^2 - m^2}} \right. \\ &\times \text{Re} \left[\Omega_{an_p}(ax, bx) \left(G_{n_p, n_p}^{(a)2}(ax, rx) + G_{n_p, n_p+1}^{(a)2}(ax, rx) \right) \right] \\ &\left. + \text{Im} \left[\Omega_{an_p}(ax, bx) \left(G_{n_p, n_p+1}^{(a)2}(ax, rx) - G_{n_p, n_p}^{(a)2}(ax, rx) \right) \right] \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

где $n_p = n + \rho\alpha_0$ и определены функции

$$\begin{aligned} \Omega_{an_p}(ax, bx) &= \frac{K_{n_p}^{(b)}(bx)/K_{n_p}^{(a)}(ax)}{K_{n_p}^{(a)}(ax) I_{n_p}^{(b)}(bx) - I_{n_p}^{(a)}(ax) K_{n_p}^{(b)}(bx)}, \\ G_{n_p, \mu}^{(u)}(x, y) &= K_{n_p}^{(u)}(x) I_\mu(y) - (-1)^{\mu - n_p} I_{n_p}^{(u)}(x) K_\mu(y). \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь для модифицированных функций Бесселя $I_\mu(y)$ и $K_\mu(y)$ введено обозначение

$$f_{n_p}^{(u)}(z) = \delta_f z f_{n_p+1}(z) + n_u (sm_u + i\sqrt{z^2 - m_u^2}) f_{n_p}(z), \quad m_u = mu, \quad (5)$$

для $u = a, b$ и $f = I, K$. В (3), слагаемое $\langle j^0 \rangle_a$ - плотность заряда в области $r \geq a$ для геометрии одной границы при $r = a$. Оно представляется в виде $\langle j^0 \rangle_a = \langle j^0 \rangle_0 + \langle j^0 \rangle_a^{(b)}$, где $\langle j^0 \rangle_0$ - плотность заряда в геометрии без границ, $0 \leq r < \infty$, а слагаемое

$$\begin{aligned} \langle j^0 \rangle_a^{(b)} &= \frac{e}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=-,+} p \int_m^{\infty} dx x \left\{ sm \frac{K_{n_p}^2(rx) + K_{n_p+1}^2(rx)}{\sqrt{x^2 - m^2}} \operatorname{Re} \left[\frac{I_{n_p}^{(a)}(ax)}{K_{n_p}^{(a)}(ax)} \right] \right. \\ &\quad \left. + [K_{n_p+1}^2(rx) - K_{n_p}^2(rx)] \operatorname{Im} \left[\frac{I_{n_p}^{(a)}(ax)}{K_{n_p}^{(a)}(ax)} \right] \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

индуцировано границей $r = a$. Последнее слагаемое в (3) - вклад в плотность заряда, обусловленный добавлением границы $r = b$ к геометрии с одной границей при $r = a$. Плотности заряда $\langle j^0 \rangle_0$, $\langle j^0 \rangle_a$, $\langle j^0 \rangle$ являются нечетными функциями параметра α_0 . Вклад $\langle j^0 \rangle_0$ обращается в нуль для безмассового поля.

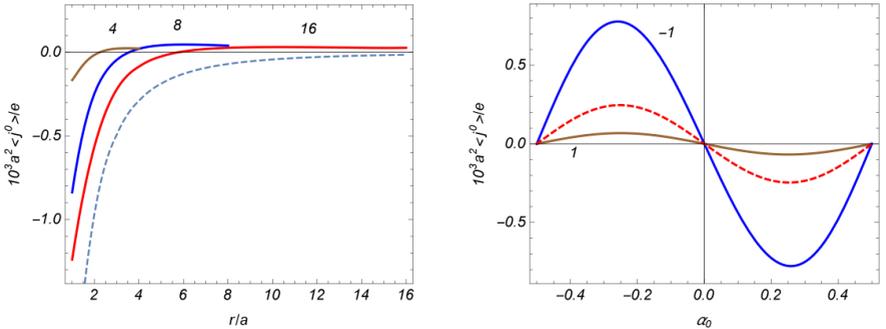


Рис. 1: Плотность заряда в кольце в зависимости от радиальной координаты для безмассового поля (левая панель) и в зависимости от параметра α_0 (правая панель).

На левой панели Рис. 1 приведена зависимость плотности заряда в кольце от радиальной координаты для безмассового фермионного поля и при $\alpha_0 = 1/4$. Числа вблизи кривых соответствуют значениям отношения b/a . Пунктирная кривая представляет плотность заряда и геометрии с одной границей в $r = a$, а именно, величину $10^3 a^2 \langle j^0 \rangle_a^{(b)}/e$. На правой панели рисунка 1, сплошными кривыми представлена зависимость плотности заряда от параметра α_0 для фиксированных значений $ma = 0.1$, $b/a = 8$, $r/a = 2$. Числа вблизи кривых соответствуют значениям параметра s . Пунктирная кривая соответствует плотности заряда для безмассового поля с теми же значениями других параметров. Как видно, плотность заряда в основном сосредоточена вблизи внутреннего края кольца. Отношение $\langle j^0 \rangle/e$ отрицательно вблизи внутреннего края и положительно вблизи

внешнего края. В геометрии с одной границей в $r = a$ это отношение отрицательно при $\alpha_0 > 0$. Плотность заряда равна нулю при $|\alpha_0| = 1/2$.

На Рис. 2 изображена плотность заряда в кольце в зависимости от b/a для фиксированных значений $\alpha_0 = 1/4$, $r/a = 1.5$. Числа вблизи кривых соответствуют значениям параметра ta . Пунктирные линии соответствуют плотности заряда в области $r \geq a$ в геометрии с одной границей $r = a$. Для левой панели $s = 1$, а для правой - $s = -1$. Как видно, модуль плотности заряда для представления $s = -1$ существенно больше. Наличие внешнего края приводит к уменьшению абсолютной величины плотности заряда. При больших значениях b/a сходимость плотности заряда в геометрии кольца к соответствующей величине в геометрии с одним краем быстрее с увеличением массы.

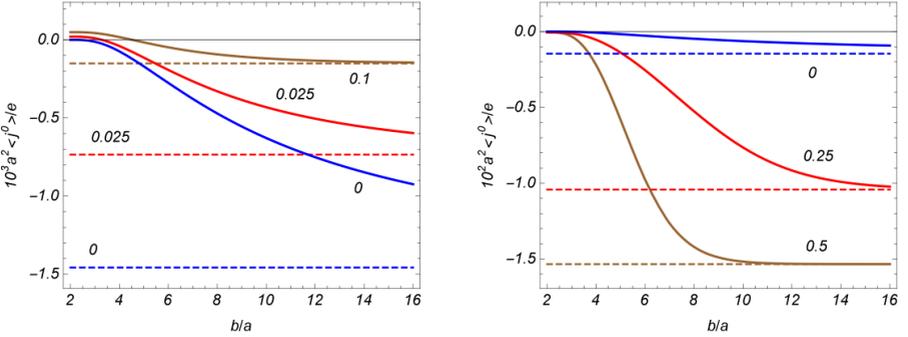


Рис. 2: Зависимость плотности заряда от отношения b/a для неприводимого представления $s = 1$ (левая панель) и $s = -1$ (правая панель).

Из Рис. 1 и 2 видно, что поведение плотности заряда при увеличении параметра ta от $ta = 0$ существенно различно для представлений $s = 1$ and $s = -1$. При начальном увеличении ta , модуль плотности заряда уменьшается для первого случая и возрастает для последнего. Для $ta \gg 1$ плотность заряда подавлена в обоих случаях.

В **параграфе 1.4** рассмотрены пространственные компоненты плотности фермионного тока. Радиальная компонента обращается в нуль, $\langle j^1 \rangle = 0$, и единственная ненулевая компонента соответствует азимутальному току. Физическая компонента $\langle j_\phi \rangle = r \langle j^2 \rangle$ представлена в форме

$$\begin{aligned} \langle j_\phi \rangle &= \langle j_\phi \rangle_0 + \langle j_\phi \rangle_a^{(b)} - \frac{e}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=\pm} p \int_m^{\infty} dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - m^2}} \\ &\quad \times \text{Re} \left[\Omega_{anp}(ax, bx) G_{np}^{(a)}(ax, rx) G_{n_{p+1}}^{(a)}(ax, rx) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где $\langle j_\phi \rangle_0$ - плотность тока в двумерном пространстве без границ. Слагаемое $\langle j_\phi \rangle_a^{(b)}$ соответствует вкладу границы $r = a$ в геометрии с одной границей, $a \leq r < \infty$ (вторая

граница в $r = b$ отсутствует) и задается формулой

$$\langle j_\phi \rangle_a^{(b)} = \frac{e}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=\pm} p \int_m^{\infty} dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - m^2}} \operatorname{Re} \left[\frac{I_{np}^{(a)}(ax)}{K_{np}^{(a)}(ax)} \right] K_{np}(rx) K_{n,p+1}(rx). \quad (8)$$

Плотность тока не зависит от целой части N параметра α и является нечетной функцией дробной части α_0 . Для безмассового поля и на больших расстояниях от границы, $r \gg a$, вклад, индуцированный одной границей (8) ведет себя как $(a/r)^{4-4|\alpha_0|}$, $|\alpha_0| < 1/2$, со знаком $\operatorname{sgn}(\alpha_0) \langle j_\phi \rangle_a^{(b)} / e < 0$. В этом пределе основной вклад в полное СЗ в геометрии с одной границей дает часть $\langle j_\phi \rangle_0$. В случае массивного поля и на расстояниях $r \gg a, m^{-1}$, часть тока (8) подавлена фактором $e^{-2mr} / r^{3/2}$ и вклад, индуцированный границей, имеет тот же порядок, что и $\langle j_\phi \rangle_0$. Полная плотность тока в области $r > a$ для геометрии с одной границей обращается в нуль в пределах $\alpha_0 \rightarrow \pm 1/2$ и непрерывна в этих точках. Это имеет место и для плотности тока (7) в кольце.

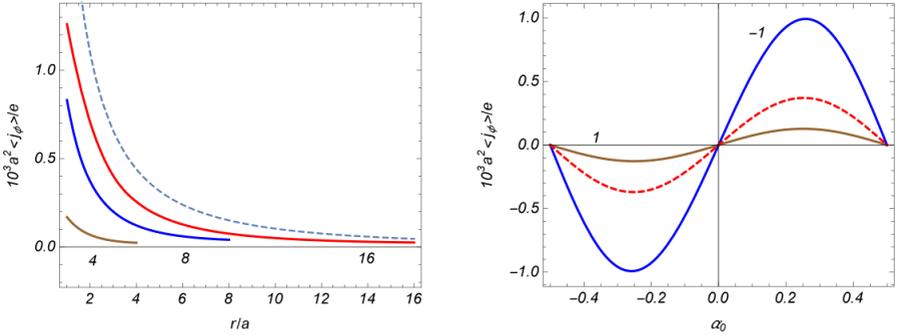


Рис. 3: Плотность тока в области между двумя границами в зависимости от радиальной координаты для безмассового поля (левая панель) и в зависимости от параметра α_0 (правая панель).

Поведение плотности тока в области $a \leq r \leq b$ в зависимости от радиальной координаты и параметра α_0 представлено на Рис. 3. Левая панель соответствует безмассовому полю и значению параметра $\alpha_0 = 1/4$. На этой панели, числа вблизи сплошных кривых соответствуют значениям отношения b/a , а пунктирная кривая представляет плотность тока в геометрии с одной границей $r = a$. Сплошные кривые на правой панели соответствуют значениям $b/a = 8$, $r/a = 2$, $ma = 0.1$, а числа вблизи кривых представляют значения параметра s . Пунктирная кривая на правой панели соответствует плотности тока для безмассового поля при тех же значениях b/a и r/a . Как и для плотности заряда, плотность тока на краях кольца конечна. Плотность тока обращается в нуль для полуцелых значений отношения магнитного потока к кванту потока, что соответствует $|\alpha_0| = 1/2$. Графики показывают, что плотность тока достигает максимума вблизи внутреннего края и уменьшается с уменьшением ширины кольца.

На Рис. 4 приведена плотность тока в зависимости от относительного положения внешней границы для фиксированных значений параметров $\alpha_0 = 1/4$, $r/a = 1.5$. Чис-

ла вблизи кривых соответствуют значениям ta . Левая и правая панели соответствуют представлениям с $s = 1$ and $s = -1$, соответственно. Пунктирные линии на обеих панелях представляют плотности тока в геометрии с одной границе $r = a$. Графики показывают, что при фиксированном внутреннем радиусе плотность тока увеличивается с увеличением ширины кольца. Аналогично случаю плотности заряда, видно существенно различное поведение плотности тока для представлений $s = 1$ и $s = -1$ в зависимости от массы поля. Плотность тока равна соответствующей плотности заряда на внешнем крае и имеет противоположный знак на внутреннем: $\langle j^0 \rangle_{r=a} = -\langle j_\phi \rangle_{r=a}$, $\langle j^0 \rangle_{r=b} = \langle j_\phi \rangle_{r=b}$.

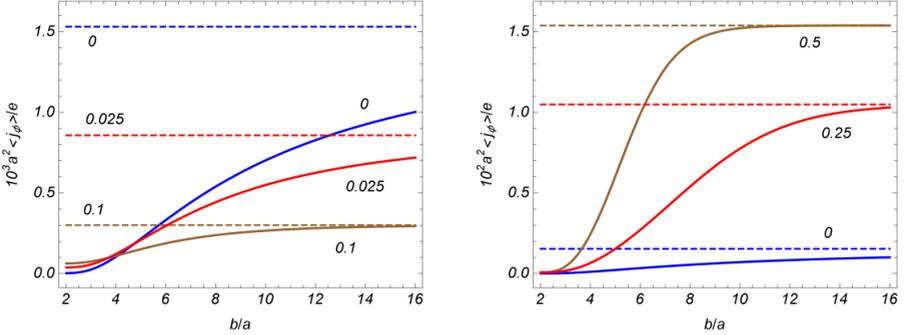


Рис. 4: Плотность тока в зависимости от отношения b/a для неприводимых представлений $s = 1$ (левая панель) и $s = -1$ (правая панель).

В параграфе 1.5 рассмотрены плотности заряда и тока в моделях, симметричных относительно преобразований четности (P -) и обращения времени (T -). Соответствующие результаты применяются к графеновым кольцам. В неприводимых представлениях массовый член нарушает как P -, так и T -инвариантности. P - и T -симметричные модели могут быть построены комбинируя фермионные поля в двух неэквивалентных неприводимых представлениях алгебры Клиффорда. Суммарные плотности заряда и тока получаются из результатов в параграфах 1.3 и 1.4 для $s = 1$ и $s = -1$. Предполагая, что массы для полей в двух неэквивалентных неприводимых представлениях одинаковы, показано, что вклады этих полей в плотность заряда компенсируют друг друга и СЗ полной плотности заряда обращается в нуль. Для плотности тока вклады неэквивалентных неприводимых представлений совпадают. Соответствующее выражение для полного тока получается из формул в параграфе 1.4 для случая $s = 1$ с дополнительным коэффициентом 2.

Рассматриваемые теоретическо-полевые модели могут быть реализованы с помощью различных графеновых структур. Например, геометрия с одной границей при $r = a$ соответствует круговой графеновой точке, если рассматривать область $r < a$ и круговому нанохорну (nanohorn) для области $r > a$. Влияние границ на электронные свойства круговой графеновой квантовой точки в магнитном поле обсуждалось в [9]. Сравнивая аналитические результаты, полученные в рамках сплошной модели, с результатами, полученными в рамках модели сильной связи, показано, что модель Дирака с граничным

условием мешка достаточно хорошо согласуется с экспериментами.

Полученные результаты могут быть применены для исследования плотности заряда и плотности тока основного состояния в графеновых кольцах. Графен представляет собой монослой атомов углерода с гексагональной решеткой, содержащей две треугольные подрешетки A и B . Электронная подсистема в графеновом листе является одной из самых популярных реализаций физики Дирака в двух пространственных измерениях. При заданном значении спина S соответствующие длинноволновые возбуждения описываются в терминах 4-компонентного спинора $\Psi_S = (\psi_{+,AS}, \psi_{+,BS}, \psi_{-,AS}, \psi_{-,BS})^T$ с плотностью лагранжиана (в стандартных единицах)

$$L = \sum_{S=\pm 1} \bar{\Psi}_S (i\hbar\gamma^0 \partial_t + i\hbar v_F \gamma^l D_l - \Delta) \Psi_S. \quad (9)$$

Здесь, $D_l = (\nabla - ie\mathbf{A}/\hbar c)_l$, $l = 1, 2$, - пространственная часть калибровочно-расширенной ковариантной производной и $e = -|e|$ для электронов. Скорость Ферми v_F играет роль скорости света. Компоненты $\psi_{\pm,AS}$ и $\psi_{\pm,BS}$ спинора Ψ_S дают амплитуду волновой функции электрона на подрешетках A и B . Индексы $+$ и $-$ этих компонент соответствуют неэквивалентным вершинам \mathbf{K}_+ и \mathbf{K}_- двумерной зоны Бриллюэна. Энергетическая щель Δ связана с соответствующей массой Дирака соотношением $\Delta = mv_F^2$. В зависимости от физического механизма генерации энергетическая щель может принимать значения в интервале $1 \text{ meV} \lesssim \Delta \lesssim 1 \text{ eV}$.

Значения параметра $s = +1$ и $s = -1$ соответствуют вершинам \mathbf{K}_+ и \mathbf{K}_- . При заданном значении спина выражения для СЗ плотности заряда и тока для вкладов, соответствующие \mathbf{K}_+ и \mathbf{K}_- получаются из формул в параграфах 1.3 и 1.4 заменой $m \rightarrow \Delta/\hbar v_F$. В выражениях для плотности тока необходимо добавить дополнительный множитель v_F , так как для оператора тока $j^\mu = ev_F \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$, $\mu = 1, 2$. В рассматриваемой задаче две проекции спина S дают одинаковые вклады в суммарное СЗ. Плотность заряда обращается в нуль в результате сокращения вкладов от \mathbf{K}_+ и \mathbf{K}_- . Однако эффективная плотность заряда может появиться, если механизм генерации щели нарушает симметрию относительно \mathbf{K}_+ и \mathbf{K}_- и массы для $s = +1$ и $s = -1$ различны. Заметим, что это нарушает P - и T -инвариантности модели.

В **главе 2** исследованы эффекты нетривиальной топологии, индуцированной коническим дефектом, и границ на фермионный конденсат (ФК) и СЗ тензора энергии-импульса для массивного фермионного поля $\psi(x)$. В **параграфе 2.1** описана фоновая геометрия. В цилиндрических координатах $x^\mu = (t, r, \phi, z)$ соответствующий метрический тензор имеет вид $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -r^2, -1)$. Отличие от пространства-времени Минковского обусловлено дефицитом $2\pi - \phi_0$ азимутального угла ϕ , $0 \leq \phi \leq \phi_0$. Для точек вне ядра дефекта локальная геометрия плоская, однако нетривиальная топология, обусловленная наличием дефекта, приводит к изменениям СЗ физических наблюдаемых. Динамика поля описывается уравнением Дирака $[i\gamma^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m]\psi(x) = 0$, с 4×4 матрицами γ^μ . Предполагается наличие двух границ, расположенных в $z = 0$ и $z = a$, на которых оператор поля удовлетворяет граничным условиям модели мешка (1). Границы представляют собой двумерные конусы с угловым дефицитом $2\pi - \phi_0$. Представлен полный набор функций фермионных мод $\psi_\sigma^{(\pm)}$. Вследствие наложенных граничных условий собственные значения импульса k вдоль оси дефекта квантованы. Они являются корнями трансцендентного уравнения $ma \sin(ka) + ka \cos(ka) = 0$.

Используя фермионные моды, в **параграфе 2.2** рассмотрен ФК, определяемый как СЗ $\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle$, где $|0\rangle$ основное состояние. Перенормированный ФК в области

между пластинами представляется в виде $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_s + \langle \bar{\psi}\psi \rangle_b$, где $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_s$ - ФК в геометрии без границ. Вклад, индуцированный границами, задается формулой

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_b = \frac{1}{2\pi^2} \left[\sum_{l=0}^p (-1)^l c_l C(z, r s_l) + \frac{2q}{\pi} \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) \int_0^\infty dx \frac{\sinh(qx) \sinh(x) C(z, r \cosh x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} \right].$$

с $q = 2\pi/\phi_0$, $s_l = \sin(\pi l/q)$, $c_l = \cos(\pi l/q)$ и

$$C(z, y) = \frac{2}{y} \int_m^\infty dx \frac{\sin(2y\sqrt{x^2 - m^2})}{\frac{x+m}{x-m} e^{2ax} + 1} \left[2m - (m+x) \left(e^{2zx} + e^{2(a-z)x} \right) \right]. \quad (10)$$

Здесь p - целая часть $q/2$, $p = [q/2]$, а штрих над знаком суммы означает, что слагаемые $l = 0, l = p$, для четных значений q , следует брать с коэффициентами $1/2$. Для массивных полей ФК $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_s$ положителен. Он расходится на оси дефекта как $1/r^2$ и экспоненциально подавлен на больших расстояниях $mr \gg 1$. Для безмассового поля $m = 0$, имеем

$$C(z, y) = \frac{\pi}{ay} \partial_z \frac{\sinh(\pi y/a) \cos(\pi z/a)}{\cosh(2\pi y/a) - \cos(2\pi z/a)}. \quad (11)$$

В этом частном случае часть без границ равна нулю, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_s = 0$. Слагаемое $l = 0$ в (10) совпадает с ФК двумя параллельными пластинами в пространстве-времени Минковского, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_M$. При $q = 1$ остается только это слагаемое.

Для точек вблизи пластины $z = 0$ и при условии $z \ll r$ для главного члена в асимптотическом разложении ФК имеем $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx -1/(4\pi^2 z^3)$. При $z \neq 0, a$, индуцированный границей вклад обращается в нуль на оси дефекта, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{b, r=0} = 0$. На больших расстояниях, $r \gg a, m^{-1}$, и при $q > 2$, вклад в ФК, обусловленный дефектом, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_t = \langle \bar{\psi}\psi \rangle - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_M$, стремится к нулю как $e^{-2mr \sin(\pi/q)}$ для массивного поля и как $e^{-\pi r \sin(\pi/q)/a}$ для безмассового. При $q \leq 2$ имеем соответственно, e^{-2mr} и $e^{-\pi r/a}$ для массивного и безмассового случая. Следовательно, на больших расстояниях от дефекта в ведущем порядке, ФК совпадает с соответствующей величиной для пластин на фоне Минковского и отрицателен. Принимая во внимание, что ФК положителен вблизи дефекта, заключаем, что ФК обращается в нуль при некотором промежуточном значении радиальной координаты r . На больших расстояниях от дефекта, топологическая часть ФК в области между пластинами экспоненциально подавлена как для массивных так и для безмассовых полей. Топологический вклад в ФК обращается в нуль на пластинах $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_t|_{z=0, a} = 0$.

В **параграфе 2.3** рассмотрено СЗ тензора энергии-импульса в окрестности конического дефекта. Недиагональные компоненты обращаются в нуль, а диагональные компоненты в области между пластинами представляются в виде $\langle T_\nu^\nu \rangle = \langle T_\nu^\nu \rangle_s + \langle T_\nu^\nu \rangle_b$, где $\langle T_\nu^\nu \rangle_s$ - перенормированное СЗ в геометрии без границ, а вклад $\langle T_\nu^\nu \rangle_b$ индуцирован границами и определяется выражением

$$\langle T_\nu^\nu \rangle_b = \frac{1}{2\pi^2} \left[\sum_{l=0}^p (-1)^l c_l C_\nu(z, r s_l) + \frac{2q}{\pi} \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) \int_0^\infty du \frac{\sinh(qu) \sinh(u) C_\nu(z, r \cosh u)}{\cosh(2qu) - \cos(q\pi)} \right],$$

с $\nu = 0, 1, 2, 3$, и введено обозначение

$$C_\nu(z, y) = \hat{D}_\nu \int_m^\infty dx \frac{\sin(2y\sqrt{x^2 - m^2})}{\frac{x+m}{x-m} e^{2ax} + 1} \left[1 + \frac{m}{2} (1 - \delta_3^\nu) \frac{e^{2xz} + e^{2(a-z)x}}{x - m} \right]. \quad (12)$$

Операторы \hat{D}_ν определяются выражениями

$$\hat{D}_0 = \hat{D}_1 = \frac{y\partial_y - 1}{y^3}, \quad \hat{D}_2 = \frac{2 - 2y\partial_y + y^2\partial_y^2}{y^3}, \quad \hat{D}_3 = \frac{4m^2 - \partial_y^2}{y}. \quad (13)$$

Радиальное напряжение равно плотности энергии. Часть обусловленная границами, и полная плотность энергии отрицательны, $\langle T_0^0 \rangle_b, \langle T_0^0 \rangle < 0$. В области между пластинами СЗ симметричны относительно плоскости $z = a/2$. Для безмассового поля СЗ тензора энергии-импульса имеет вид

$$\begin{aligned} \langle T_\nu^\nu \rangle &= \langle T_\nu^\nu \rangle_M - \frac{\pi^2}{8a^4} \left[\sum_{l=1}^P (-1)^l c_l A_\nu(\pi s_l r/a) + \frac{2q}{\pi} \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) \right. \\ &\times \left. \int_0^\infty du \frac{\sinh(qu) \sinh(u) A_\nu(\pi(r/a) \cosh u)}{\cosh(2qu) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

с функциями $A_\nu(y) = \hat{D}_\nu \sinh^{-1}(y)$ а $\langle T_\nu^\nu \rangle_M$ представляет СЗ для параллельных границ в пространстве-времени Минковского ($q = 1$). Заметим, что для безмассового поля СЗ тензора энергии-импульса в области между пластинами не зависит от координаты z . Можно показать, что вклад, индуцированный границами, удовлетворяет соотношению $\langle T_\nu^\nu \rangle_b = m \langle \bar{\psi} \psi \rangle_b$ и уравнению ковариантного сохранения $\nabla_\mu \langle T_\nu^\mu \rangle_b = 0$. Для рассматриваемой геометрии оно сводится к единственному уравнению $\partial_r (r \langle T_1^1 \rangle_b) = \langle T_2^2 \rangle_b$.

Индукцированный границами вклад в СЗ тензора энергии-импульса обращается в нуль на оси дефекта. Это означает, что вблизи дефекта доминирует чисто топологический вклад и соответствующая плотность энергии отрицательна. На больших расстояниях от дефекта, для массивного поля топологическая часть $\langle T_\nu^\nu \rangle_b - \langle T_\nu^\nu \rangle_M$ стремится к нулю по закону $e^{-2mr \sin(\pi/q)}$ при $q > 2$ и e^{-2mr} при $1 \leq q \leq 2$. Для безмассового поля топологическая часть стремится к нулю по закону $e^{-\pi(r/a) \sin(\pi/q)}$ при $q > 2$ и по закону $e^{-\pi r/a}$ при $1 \leq q \leq 2$. Для безмассового поля часть $\langle T_\nu^\nu \rangle_s$ стремится к нулю по закону $1/r^4$. При $r \neq 0$, индуцированный дефектом вклад $\langle T_\nu^\nu \rangle_t = \langle T_\nu^\nu \rangle - \langle T_\nu^\nu \rangle_M$, конечен на пластинах. На Рис. 5 приведено отношение индуцированных границами частей в плотности энергии ($\nu = 0$, полные кривые) и в азимутальном напряжении ($\nu = 2$, пунктирные кривые) к соответствующей величине для параллельных пластин в пространстве-времени Минковского в зависимости от расстояния до оси дефекта. Графики построены для безмассового фермионного поля, а числа вблизи кривых соответствуют значениям q .

В параграфе 2.4 исследованы силы, действующие на пластины. Сила, действующая на единицу поверхности пластины, определяется нормальным напряжением $\langle T_3^3 \rangle$. Для соответствующего эффективного давления имеем $p = -\langle T_3^3 \rangle$. Давления соответствующие части для геометрии без границ, одинаковы на противоположных сторонах пластины и не дают вклада в полную силу. Следовательно, сила на единицу поверхности пластины определяется частью давления индуцированной границами и имеет вид

$$p(r) = p_M - \frac{2}{\pi^2} \left[\sum_{l=1}^P (-1)^l c_l F(rs_l) + \frac{2q}{\pi} \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) \int_0^\infty dx \frac{\sinh(qx) \sinh(x) F(r \cosh x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} \right],$$

с функцией

$$F(y) = \frac{1}{y} \int_m^\infty dx \frac{x^2 \sin(2y\sqrt{x^2 - m^2})}{\frac{x+m}{x-m} e^{2ax} + 1}. \quad (15)$$

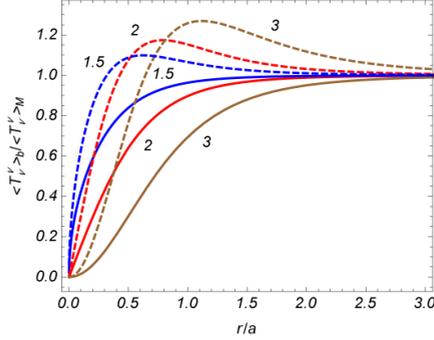


Рис. 5: Отношение индуцированных границами вкладов в плотности энергии (сплошные кривые) и в азимутальном напряжении (пунктирные кривые) к соответствующим величинам в пространстве-времени Минковского в зависимости от расстояния до оси дефекта для безмассового фермионного поля

Здесь p_M соответствующее давление Казимира для пластин на фоне Минковского. На оси дефекта давление Казимира стремится к нулю по закону r^{q-1} . При $r \neq 0$ оно отрицательно, и соответствующие силы имеют характер притяжения.

На Рис. 6 представлена p/p_M зависимость отношения от расстояния до оси дефекта. Левая панель соответствует безмассовому полю, а для правой панели выбран $ta = 0,5$. В безмассовом случае $p_M \approx -0.0384/a^4$. Числа вблизи кривых соответствуют значениям параметра q . Как видно, зависимость в общем случае не является монотонной.

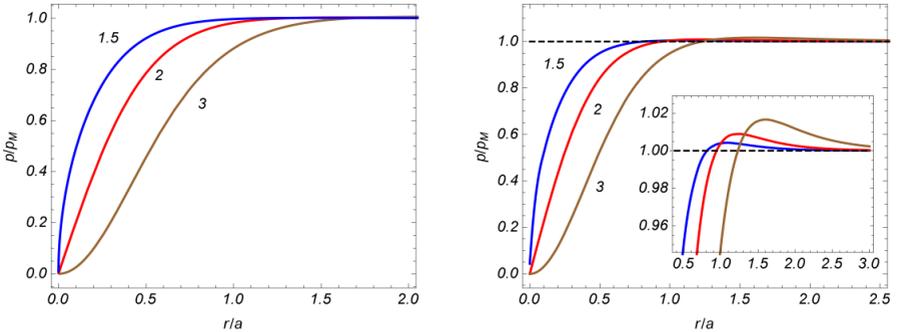


Рис. 6: Отношение p/p_M в зависимости от расстояния до оси конического дефекта.

В главе 3 исследованы СЗ квадратов электрического и магнитного полей и тензор энергии-имп. в окрестности конического дефекта в геометрии двух параллельных про-

водящих пластин, перпендикулярных к оси дефекта и расположенных в $z = 0$ и $z = a$. Эти величины относятся к числу наиболее важных локальных характеристик электромагнитного вакуума. Хотя соответствующие операторы локальны, из-за глобального характера вакуумного состояния эти СЗ содержат важную информацию о топологии фонового многообразия. В **параграфе 3.1** рассмотрен полный набор электромагнитных мод, удовлетворяющих граничным условиям идеальной проводимости на пластинах.

В **параграфе 3.2** исследованы СЗ квадрата электрического и магнитного полей. В области между пластинами они представлены в виде

$$\begin{aligned} \langle F^2 \rangle &= \langle F^2 \rangle^{(s)} - \frac{4q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\gamma \gamma^3 [G_{qm}(\gamma r) Q(2na\gamma) - J_{qm}^2(\gamma r) K_0(2na\gamma)] \\ &+ \delta_F \frac{2q}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\gamma \gamma^3 [G_{qm}(\gamma r) Q(2|na - z|\gamma) + J_{qm}^2(\gamma r) K_0(2|na - z|\gamma)], \end{aligned}$$

где $F = E$ и $F = B$ для электрического и магнитного полей соответственно, $\delta_E = 1$, $\delta_B = -1$, штрих над знаком суммы означает, что слагаемое $m = 0$ нужно брать с коэффициентом $1/2$, и

$$G_{qm}(x) = J_{qm}'^2(x) + (qm/x)^2 J_{qm}^2(x), \quad Q(x) = K_0(x) + 2K_1(x)/x. \quad (16)$$

СЗ инвариантны относительно замены $z \rightarrow a - z$, что является прямым следствием симметрии задачи относительно плоскости $z = a/2$. Перенормированные СЗ в геометрии без границ определяются выражением $E^2 \rangle^{(s)} = \langle B^2 \rangle^{(s)} = -(q^2 - 1)(q^2 + 1)/(180\pi r^4)$. Остальные слагаемые в правой части (16) индуцированы пластинами. В области $z < 0$ ($z > a$) СЗ, индуцированное границами, дается слагаемым $n = 0$ ($n = 1$) в последнем суммировании в правой части (16). Часть, индуцированная границей, положительна для электрического поля и отрицательна для магнитного поля. Для целых значений q выражение для СЗ примет вид

$$\langle F^2 \rangle = \langle F^2 \rangle^{(s)} - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{q-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - 4s_l^2) n^2 a^2 + r^2 s_l^2}{(n^2 a^2 + r^2 s_l^2)^3} - \frac{\delta_F}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(3 - 4s_l^2) (na - z)^2 - r^2 s_l^2}{[(na - z)^2 + r^2 s_l^2]^3} \right].$$

В **параграфе 3.3** выведено альтернативное выражение для СЗ квадрата электрического поля. Соответствующий результат применяется для исследования силы Казимира-Полдера, действующей на поляризуемую частицу. Вблизи пластин и для точек, не слишком близких к дефекту, главный член в асимптотическом разложении совпадает с потенциалом взаимодействия Казимира-Полдера для одной пластины на фоне Минковского. Для точек, близких к дефекту, основной вклад обусловлен частью, соответствующей геометрии в отсутствии пластин, а радиальная составляющая силы Казимира-Полдера ведет себя по закону $1/r^5$.

В **параграфе 3.4** исследовано СЗ тензора энергии-импульса электромагнитного поля и соответствующие силы Казимира. Тензор энергии-импульса представлен в виде $\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle T_{\mu\nu} \rangle^{(s)} + \langle T_{\mu\nu} \rangle^{(b)}$, где $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{(s)}$ - СЗ в отсутствии пластин, часть $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{(b)}$ индуцирована пластинами. Вклад, $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{(b)}$ равен нулю в областях $z < 0$ и $z > a$. В области

между пластинами $0 < r < a$ соответствующие компоненты даются выражениями

$$\langle T_l^l \rangle^{(b)} = \frac{q}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\gamma \gamma^3 \left[J_{qm}^2(\gamma r) K_0(2an\gamma) - (-1)^l G_{qm}(\gamma r) Q(2an\gamma) \right],$$

$$\langle T_j^j \rangle^{(b)} = \frac{(-1)^j q}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\gamma \gamma^3 \left\{ J_{qm}^2(\gamma r) - \left[\left(\frac{qm}{\gamma r} \right)^2 + (-1)^j \right] J_{qm}^2(\gamma r) \right\} K_0(2an\gamma),$$

где $l = 0, 3$ и $j = 1, 2$, а недиагональные компоненты равны нулю. Вклад, индуцированный границами, является бесследовым. В окрестности дефекта соответствующая часть в плотности энергии положительна. В этой области полное СЗ доминировано вкладом $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{(s)}$. На больших расстояниях от дефекта $r \gg a$ эффекты, индуцированные нетривиальной топологией малы и в ведущем порядке СЗ совпадают с соответствующими выражениями для металлических пластин в пространстве-времени Минковского. На левой панели Рис. 7 представлено отношение части плотности энергии, индуцированной пластинами, к соответствующей величине для параллельных пластин на фоне Минковского, в зависимости от расстояния от дефекта. Числа вблизи кривых соответствуют значениям параметра q .

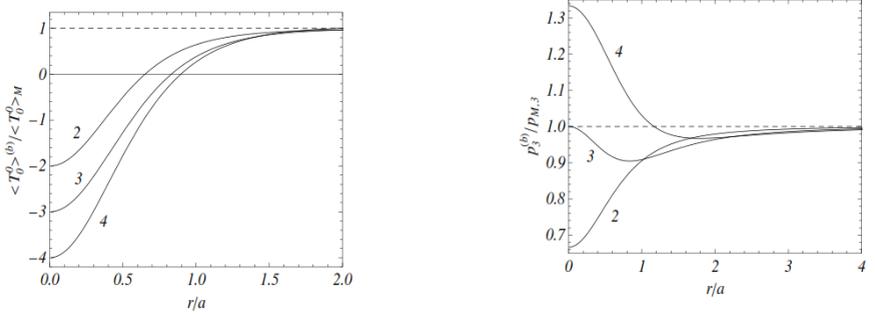


Рис. 7: Отношение части в плотности энергии индуцированной границами (левая панель) силы Казимира (правая панель) к соответствующим величинам для параллельных пластин в пространстве-времени Минковского.

Сила Казимира, действующая на единицу поверхности пластины, определяется компонентой $\langle T_3^3 \rangle$. Для соответствующего эффективного давления имеем: $p_3 = -\langle T_3^3 \rangle$. Часть давления, обусловленная $\langle T_3^3 \rangle^{(s)}$, одинакова для обеих сторон пластины и не дает вклада в полную силу. Следовательно, сила на единицу поверхности пластины определяется частью, индуцированной границами и $p_3^{(b)} = -\langle T_3^3 \rangle^{(b)}$. В отличие от случая пространства-времени Минковского, давление Казимира на пластинах неоднородно. Эффективное давление отрицательно и, следовательно, сила Казимира имеет характер

притяжения. Для целых значений параметра q имеем:

$$p_3^{(b)} = -\frac{a^{-4}}{8\pi^2} \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 - 4s_l^2) n^2 - (rs_l/a)^2}{[n^2 + (rs_l/a)^2]^3}. \quad (17)$$

Слагаемое $l = 0$ в этом выражении совпадает с соответствующей величиной для пластин в пространстве-времени Минковского: $p_{M,3} = -\pi^2 a^{-4}/240$. На правой панели Рис. 7 приведено отношение $p_3^{(b)}/p_{M,3}$ в зависимости от расстояния до оси дефекта (в единицах расстояния между пластинами) для различных значений параметра q (числа вблизи кривых).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Магнитный поток, пронизывающий двумерное круговое плоское кольцо, генерирует плотности заряда и азимутального тока в основном состоянии квантового фермионного поля. Они являются нечетными периодическими функциями магнитного потока с периодом, равным кванту потока. На внешнем крае кольца плотность тока равна плотности заряда, тогда как на внутреннем крае они имеют противоположные знаки. При фиксированных значениях других параметров плотность заряда и тока уменьшается по модулю с уменьшением внешнего радиуса.
2. В отличие от геометрии без границ, плотности заряда и тока в кольце непрерывны для полуцелых значений отношения магнитного потока к кванту потока и обращаются в нуль в этих точках. Поведение плотностей заряда и тока в зависимости от массы поля существенно различно для двух неэквивалентных представлений алгебры Клиффорда. При начальном увеличении массы от нулевого значения модули плотности заряда и тока уменьшаются для одного из неприводимых представлений и увеличиваются для другого. При дальнейшем увеличении массы плотности стремятся в обоих случаях.
3. Плотности заряда и тока в моделях, симметричных относительно четности и обращения времени, получаются комбинацией результатов для двух неэквивалентных представлений. Если граничные условия и массы одинаковы в обоих представлениях, то суммарная плотность заряда равна нулю, а плотность тока удваивается. Эффективная плотность заряда может появиться, если механизм генерации энергетической щели нарушает симметрию относительно представлений.
4. В выражениях фермионного конденсата и тензора энергии-импульса основного состояния фермионного поля в геометрии двух параллельных пластин, перпендикулярных коническому дефекту, явно выделены вклады, индуцированные пластинами. Фермионный конденсат положителен вблизи струны и отрицателен на больших расстояниях, а плотность энергии вакуума всюду отрицательна. Радиальное напряжение равно плотности энергии. Для безмассового поля вклад границы в СЗ тензора энергии-импульса отличен от нуля только в области между пластинами и не зависит от координаты вдоль оси дефекта.
5. Фермионные давления Казимира на пластинах неоднородны и обращаются в нуль в точках пересечения дефекта с пластинами. Соответствующие силы Казимира имеют характер притяжения.

6. Исследовано совместное воздействие конического дефекта и параллельных проводящих пластин на нулевые флуктуации электромагнитного поля. СЗ квадрата электрического поля отрицательно для точек с радиальным расстоянием до струны, меньшим расстояния до пластин, и положительным в противоположной ситуации. СЗ квадрата магнитного поля везде отрицательна. Индуцированная пластинами часть в СЗ тензора энергии-импульса отлична от нуля только в области между пластинами. Эта часть зависит только от расстояния до оси дефекта. Индуцированная пластинами часть в плотности энергии положительна на расстояниях до струны, меньших расстояния до пластин, и отрицательна в обратном случае.
7. Электромагнитные давления Казимира на пластинах зависят немонотонно от расстояния от дефекта, а соответствующие силы имеют характер притяжения. Силы Казимира-Полдера, действующие на поляризуемую микрочастицу, являются отталкивающими по отношению к дефекту и притягивающими по отношению к ближней пластине.

Список литературы

- [1] E. Fradkin, *Field theory of condensed matter systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [2] N. Nagaosa, *Quantum field theory in condensed matter physics and quantum field theory in strongly correlated electronic systems* (Springer, Berlin, 1999).
- [3] V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, and J.P. Carbotte, AC conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics, *Int. J. Mod. Phys. B* **21**, 4611 (2007).
- [4] M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect* (Oxford University Press, Oxford, 2009).
- [5] G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet* (Clarendon Press, Oxford, 2003).
- [6] M. O. Katanaev and V. O. Volovich, Theory of defects in solids and three-dimensional gravity, *Ann. Phys.* **216**, 1 (1992).
- [7] M. J. Bowick, L. Chander, E. A. Schiff, A. M. Srivastava, The cosmological Kibble mechanism in the laboratory: String formation in liquid crystals, *Science* **263**, 943 (1994).
- [8] C. Bäuerle, Yu. M. Bunkov, S. N. Fisher, H. Godfrin, G. R. Pickett, Laboratory simulation of cosmic string formation in the early Universe using superfluid He³, *Nature* **382**, 332 (1996).
- [9] M. Grujic, M. Zarenia, A. Chaves, M. Tadic, G.A. Farias, F.M. Peeters, Electronic and optical properties of a circular graphene quantum dot in a magnetic field: Influence of the boundary conditions, *Phys. Rev. B* **84**, 205441 (2011).

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. E. R. Bezerra de Mello, A. A. Saharian, A. Kh. Grigoryan, Casimir effect for parallel metallic plates in cosmic string spacetime, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 374011 (2012) (15 pages).
2. S. Bellucci, A. A. Saharian, A. Kh. Grigoryan, Induced fermionic charge and current densities in two-dimensional rings, *Phys. Rev. D* **94**, 105007 (2016) (21 pages).
3. A. Kh. Grigoryan, A. R. Mkrtchyan, A. A. Saharian, Fermionic condensate and the Casimir effect in cosmic string spacetime, *Int. J. Mod. Phys. D* **26**, 1750064 (2017) (26 pages).
4. A. Kh. Grigoryan, Casimir-Polder potential for parallel metallic plates in background of a conical defect, *Arm. J. Phys.* **10**, 81 (2017).

SOME PHENOMENA OF QUANTUM THEORY IN CONDENSED MATTER PHYSICS

SUMMARY

The combined effects of boundaries and topology on the ground state characteristics for fermionic and electromagnetic fields are investigated. For a massive quantum fermionic field, we investigate the vacuum expectation values (VEVs) of the charge and current densities induced by an external magnetic flux in a two-dimensional circular ring. Both the irreducible representations of the Clifford algebra are considered. On the ring edges the bag (infinite mass) boundary conditions are imposed for the field operator. This leads to the Casimir type effect on the vacuum characteristics. The radial current vanishes. The charge and the azimuthal current are decomposed into the boundary-free and boundary-induced contributions. The influence of a conical defect and boundaries on the fermionic condensate and on the VEV of the energy-momentum tensor for a massive fermionic field is studied. As geometry of boundaries we consider two plates perpendicular to the defect axis on which the field is constrained by the MIT bag boundary condition. The renormalized VEVs of electric and magnetic field squared and the energy-momentum tensor for the electromagnetic field are evaluated in the geometry of two parallel conducting plates on the background of a conical defect. On the basis of these results, the Casimir-Polder force acting on a polarizable particle and the Casimir forces acting on the plates are investigated. The **research results** are as follows.

1. The magnetic flux threading a two-dimensional circular planar ring induces the charge and azimuthal current densities in the ground state of a quantum fermionic field. They are odd periodic functions of the magnetic flux with the period equal to the flux quantum. On the outer edge of the ring the current density is equal to the charge density whereas on the inner edge they have opposite signs. For a fixed values of the other parameters, both the charge and current densities decrease by the modulus with decreasing outer radius.

2. Unlike the case of the boundary-free geometry the charge and current densities in the ring are continuous at half-odd integer values for the ratio of the magnetic flux to the flux quantum, and both of them vanish at these points. The behaviour of the mean charge and current densities as functions of the field mass (energy gap in field theoretical models of planar condensed matter system) is essentially different for two inequivalent representations of the Clifford algebra. With the initial increase of the mass from the zero value, the modulus for the charge and current densities decreases for one of the irreducible representations and increases for the other. With further increase of the mass the vacuum densities are suppressed in both cases.
3. The charge and current densities in parity and time-reversal symmetric models are obtained combining the results for two inequivalent representations. Assuming that for both these representations the boundary condition and the masses are the same, the resulting charge density vanishes, whereas the current density is doubled. The effective charge density may appear if the energy gap generation mechanism breaks the symmetry with respect to the representations.
4. The fermionic condensate and the ground state energy-momentum tensor for a fermionic field in the geometry of two parallel plates perpendicular to the conical defect are decomposed into the boundary-free and boundary-induced contributions. Fermionic condensate is positive near the string and negative at large distances, whereas the vacuum energy density is negative everywhere. The radial stress is equal to the energy density. For a massless field, the boundary induced contribution in the VEV of the energy-momentum tensor is different from zero in the region between the plates only and it does not depend on the coordinate along the defect axis.
5. The fermionic Casimir pressures on the plates are inhomogeneous and vanish at the location of the conical defect. The corresponding Casimir forces are attractive.
6. Combined effects from a conical defect and parallel conducting plates on the zero-point fluctuations of the electromagnetic field are investigated. The expectation value of the electric field squared is negative for points with the radial distance to the string smaller than the distance to the plates, and positive for the opposite situation. The expectation value for the magnetic field squared is negative everywhere. The boundary-induced part in the VEV of the energy-momentum tensor is different from zero in the region between the plates only. This part only depends on the distance from the string. The boundary-induced part in the vacuum energy density is positive for points with a distance to the string smaller than the distance to the plates and negative in the opposite situation.
7. The electromagnetic Casimir stresses on the plates depend non-monotonically on the distance from the defect. The corresponding forces are always attractive. The Casimir-Polder forces acting on a polarizable microparticle are repulsive with respect to the defect and attractive with respect to the closer plate.

ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇԱԿԻ ԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐ ԿՈՆԴԵՆՍԱՅՎԱԾ ՄԻՋՎԱՅՅՐԻ ՖԻԶԻԿԱՅՈՒՄ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ուսումնասիրված է սահմանների և տոպոլոգիայի համատեղ ազդեցությունը ֆերմիոնային և էլեկտրամագնիսական դաշտերի հիմնական վիճակի բնութագրերի վրա: Չանգվածեղ քվանտային ֆերմիոնային դաշտի համար ուսումնասիրված են երկչափ օղակում արտաքին մագնիսական հոսքի մակաձած լիցքի և հոսանքի խտությունների միջին արժեքները (ՄԱ): Դիսարկված են Քլիֆորդի հանրահաշվի երկու չբերվող ներկայացումները: Օղակի եզրերին դաշտի օպերատորի վրա դրված են պարկի մոդելի եզրային պայմանները: Հետագուոված է կոնական գծային դեֆեկտի և սահմանների ազդեցությունը զանգվածեղ ֆերմիոնային դաշտի ֆերմիոնային կոնդենսատի և Էներգիա-իմպուլսի թենզորի ՄԱ-ի վրա: Որպես խնդրի երկրաչափություն դիտարկված են դեֆեկտի առանցքին ուղղահայաց երկու թիթեղ, որոնց վրա դաշտը բավարարում է պարկի մոդելի սահմանային պայմանին: Էլեկտրամագնիսական դաշտի համար հետագուոված են էլեկտրական ու մագնիսական դաշտերի քառակուսիների և Էներգիա-իմպուլսի թենզորի ՄԱ-ները՝ կոնական դեֆեկտի և երկու զուգահեռ հաղորդիչ թիթեղների առկայությամբ: Այդ հաշվարկների հիման վրա ուսումնասիրված են բևեռացվող մասնիկի վրա ազդող Կազիմիր-Պոլդերի և թիթեղների վրա ազդող Կազիմիրի ուժերը:

Հետագոտության արդյունքները.

1. Երկչափ օղակով պարփակված մագնիսական հոսքը մակաձուսում է լիցքի և հոսանքի խտություններ քվանտային ֆերմիոնային դաշտի հիմնական վիճակում: Դրանք մագնիսական հոսքից կախված կենտ պարբերական ֆունկցիաներ են՝ հոսքի քվանտին հավասար պարբերությամբ: Օղակի արտաքին եզրի վրա հոսանքի խտությունը հավասար է լիցքի խտությանը, իսկ ներքին եզրի վրա դրանք ունեն հակառակ նշաններ:
2. Ի տարբերություն առանց սահմանների երկրաչափության դեպքի, լիցքի և հոսանքի խտություններն օղակում անընդհատ ֆունկցիաներ են մագնիսական հոսքից: Լիցքի և հոսանքի խտությունների վարքը, որպես ֆունկցիա դաշտի զանգվածից, Էսպես տարբեր է Քլիֆորդի հանրահաշվի երկու չբերվող ներկայացումների համար: Լիցքի և հոսանքի խտությունների բացարձակ արժեքները, զանգվածի սկզբնական աճին զուգընթաց աճում են մի ներկայացման համար և նվազում՝ մյուսի դեպքում: Չանգվածի հետագա աճի հետ դրանք երկու դեպքում էլ ճնշվում են:
3. Լիցքի և հոսանքի խտությունները գույգության և ժամանակային ինվերսիայի նկատմամբ համաչափ մոդելներում ստացվում են՝ երկու չբերվող ներ-

կայացումների արդյունքները համադրելով: Ենթադրելով, որ երկու ներկայացումների համար էլ դաշտի զանգվածը նույնն է՝ արդյունարար լիցքի խտությունը գրոյանում է, իսկ հոսանքի խտությունը՝ կրկնապատկվում: Արդյունարար լիցքի խտություն կարող է դիտվել, եթե էներգիական ճեղքի առաջացման մեխանիզմը խախտում է տարբեր ներկայացումների նկատմամբ համաչափությունը:

4. Կոնական դեֆեկտի առանցքին ուղղահայաց երկու զուգահեռ թիթեղների երկրաչափությունում ֆերմիոնային կոնդենսատը և ֆերմիոնային դաշտի հիմնական վիճակում էներգիա-իմպուլսի թենզորի միջինը տրոհված են առանց սահմանների և սահմաններով մակածված ներդրումների: Ֆերմիոնային կոնդենսատը դրական է դեֆեկտին մոտ և բացասական՝ դրանից մեծ հեռավորությունների վրա: Էներգիայի խտությունը բացասական է ամենուր և հավասար է շառավղային ճնշմանը: Չորայական զանգվածով դաշտի համար էներգիա-իմպուլսի թենզորում սահմաններով մակածված մասը տարբեր է գրոյից միայն թիթեղների միջև ընկած տիրույթում և կախված չէ դեֆեկտի առանցքի երկայնքով կոորդինատից:
5. Կազիմիրի ֆերմիոնային ճնշումը թիթեղների վրա անհամասեռ է և վերանում է կոնական դեֆեկտի վրա: Համապատասխան Կազիմիրի ուժերը ձգողական են:
6. Ուսումնասիրված են էլեկտրամագնիսական դաշտի գրոյական ֆլուկտուացիաների վրա կոնական դեֆեկտի և զուգահեռ հաղորդիչ թիթեղների համատեղ ազդեցությունը: Էլեկտրական դաշտի քառակուսու միջինը բացասական է այն կետերում, որոնց հեռավորությունը դեֆեկտի առանցքից ավելի փոքր է քան հեռավորությունը թիթեղներից, և դրական՝ հակառակ դեպքում: Մագնիսական դաշտի քառակուսու միջինը բացասական է ամենուր: Էներգիա-իմպուլսի թենզորում սահմանով մակածված մասը գրոյից տարբեր է միայն թիթեղների միջև տիրույթում: Այս մասը կախված է միայն դեֆեկտի առանցքից ունեցած հեռավորությունից: Էներգիայի խտությունում սահմանով մակածված մասը դրական է այն կետերի համար, որոնց հեռավորությունը դեֆեկտի առանցքից ավելի փոքր է քան հեռավորությունը թիթեղներից և բացասական՝ հակառակ դեպքում:
7. Էլեկտրամագնիսական Կազիմիրի ճնշումները թիթեղների վրա ոչ-մոնոտոն կերպով են կախված դեֆեկտից ունեցած հեռավորությունից: Համապատասխան ուժերը բացառապես ձգողական են: Բևեռացվող միկրոմասնիկի վրա ազդող Կազիմիր-Պոլդերի ուժերը վանողական են դեֆեկտի նրկատմամբ և ձգողական՝ մոտակա թիթեղի նկատմամբ: