ՀՀ ԳԱԱ ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Սահակյան Հասմիկ Արտեմի

# ԴԻՍԿՐԵՏ ՄՈԴԵԼՆԵՐՈՒՄ ՄԱՍՆԱԿԻ ԲՆՈՒԹԱԳՐՄԱՄԲ ՏՐՎՈՂ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆ, ԿԱՌՈՒՑՈՒՄ, ՆԿԱՐԱԳՐՈՒՄ

Ատենախոսություն

Ե.13.05 “Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի համալիրներ” մասնագիտությամբ ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի համար

Գիտական խորհրդատու՝ ֆ.մ.գ.դ. Լ.Հ.Ասլանյան

Երևան - 2018

## Բովանդակություն

ԱՌԱՋԱԲԱՆ ..... 5

ԳԼՈՒԽ 1. ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ, ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ..... 16

1.1 Խնդիրներ ..... 16

1.1.1 Բազմությունների համակարգեր /հիպերգրաֆներ/ ..... 16

1.1.2 Դիսկրետ տոմոգրաֆիա ..... 22

1.1.3 Բազմարժեք բազմաչափ ցանց ..... 29

1.2 Մոդելավորման հարակից գործիքներ ..... 37

1.2.1 Սահմանափակումների բավարարման խնդիրներ ..... 37

1.2.2 Գծային ծրագրավորում ..... 40

1.2.3 Ասոցիատիվ կանոնների պեղում ..... 44

1.3 Հիմնական հասկացություններ և սահմանումներ ..... 47

1.3.1 NP լրիվ/դժվար, օպտիմիզացիոն խնդիրներ ..... 47

1.3.2 Մասնակի կարգավորված բազմություններ ..... 52

Եզրակացություններ առաջին գլխի վերաբերյալ ..... 56

ԳԼՈՒԽ 2. ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ - ՀԻՊԵՐԳՐԱՖԱՅԻՆ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒՄ ..... 57

2.1 Բազմաչափ միավոր խորանարդի ենթաբազմությունների տրոհումների ասոցացված վեկտորների բազմության ընդհանուր նկարագիր ..... 57

2.1.1 Էլեմենտների դասեր $\Xi_{m+1}^{n}$-ում ..... 61

2.1.2 $\boldsymbol{D_m(n)}$-ի կարևոր հատկություններ ..... 63

2.1.3 $\boldsymbol{D_m(n)}$-ի եզրային էլեմենտներ ..... 65

2.1.4 Նկարագիր եզրային էլեմենտների միջոցով ..... 66

2.1.5 $\boldsymbol{D_m(n)}$-ի ուռուցիկության հետ կապված հարցեր ..... 68

2.1.6 Եզրային բազմությունների գեներացումը մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների միջոցով 69

2.2 Բազմաչափ միավոր խորանարդի ենթաբազմությունների տրոհումների ասոցացված վեկտորների տիրույթի բնութագրում ..... 74

2.2.1 $\widehat{\boldsymbol{D}}_{max}$- ի մինիմալ ռանգի էլեմենտներ ..... 74

2.2.2 $\widehat{\boldsymbol{D}}_{max}$- ի մինիմալ ռանգի էլեմենտների միակության մասին ..... 87

2.2.3 $\widehat{D}_{max}$- ի մինիմալ ռանգի քանակական նկարագիր ..... 90
2.2.4 $\widehat{D}_{max}$- ի մաքսիմալ ռանգի էլեմենտներ ..... 92
2.3 Ռեգուլյար հիպերգրաֆներ – գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման ..... 94
Եզրակացություններ երկրորդ գլխի վերաբերյալ ..... 98
ԳԼՈՒԽ 3. ՀԱՐԱԿԻՑ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐ ..... 99
3.1 Հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության կառուցվածքը $\Xi_{m+1}^{n}$-ի վերին /ստորին/ տիրույթում ..... 99
3.2 $\Xi_{m+1}^{n}$-ի խորանարդատիպ տրոհումը ..... 102
3.3 Հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության գեներացում ..... 105
3.3.1 Ամենաանհարթ աստիճանային հաջորդականությունների դասեր ..... 109
3.4 $D_m(n)$-ի լրացումը $\Xi_{m+1}^{n}$-ում ..... 114
3.4.1 $\widehat{\widehat{D}}_{max}$- ի մինիմալ ռանգի էլեմենտներ ..... 117
3.4.2 $\widehat{\widehat{D}}_{max}$- ի մաքսիմալ ռանգի էլեմենտներ ..... 121
3.4.3 Հեռավորությունների դիտարկում $\widehat{H}$-ում ..... 123
3.5 Մասնակի արդյունքներ համասեռ հիպերգրաֆների համար ..... 125
Եզրակացություններ երրորդ գլխի վերաբերյալ ..... 127
ԳԼՈՒԽ 4. ԴԻՍԿՐԵՏ ՏՈՄՈԳՐԱՖԻԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՆՈՐ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ԵՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒՄՆԵՐՈՎ, ՆՐԱՆՑ ՄՈՏԱՎՈՐ ԼՈՒԾՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐ ..... 128
4.1 Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրների ներկայացումը ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման մոդելում ..... 128
4.1.1 Խնդիրներ՝ տարբեր տողերի սահմանափակումով ..... 135
4.1.2 Լագրանժյան ռելաքսացիայի մոդելը և փոփոխականների տրոհման մոտեցման կիրառումը ..... 137
4.1.3 Տրոհված խնդիրների լուծման ալգորիթմներ ..... 143
4.1.4 Ներկայացում ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման խնդրի կանոնական տեսքով 146
4.1.5 Խնդիրը հավանականային կոմբինատորիկայի տեսանկյունից ..... 149
4.2 Ագահ ալգորիթմական տեխնիկայի կիրառումը դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրների մոտավոր լուծման համար ..... 151
4.2.1 ($V_d^{opt}$) խնդրի լուծման $G$ ալգորիթմ ..... 154
4.2.2 $G$ ալգորիթմի հատկությունները ..... 165
4.2.3 $G$ ալգորիթմի գնահատումը ..... 176

4.2.4. $\boldsymbol{G}$ ալգորիթմի կիրառման օրինակներ ..... 181

4.3 Գումարային տարբերական բալանսով ծառի մոդել պատկերների՝ ըստ գրաֆիկական բնութագրերի դասակարգման խնդրի համար ..... 187

Եզրակացություններ չորրորդ գլխի վերաբերյալ ..... 190

ԳԼՈՒԽ 5. ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐ ՄՈՆՈՏՈՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՄԱՆԸ ԵՆԹԱԿԱ ՄՈԴԵԼՆԵՐՈՒՄ ..... 191

5.1 Մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչում $\boldsymbol{\Xi_{m+1}^{n}}$ ցանցում ..... 191

5.1.1 Մոնոտոնության պահպանումը $\boldsymbol{\Xi_{m+1}^{n}}$-ի խորանարդատիպ տրոհման շրջանակում 193

5.1.2 Մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչում՝ հիմնված բազմարժեք ցանցի խորանարդատիպ տրոհման վրա ..... 194

5.1.3 Քանակների պարզեցված գնահատականներ ..... 198

5.2 Քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղում հիմնված բազմարժեք ցանցի խորանարդատիպ տրոհման վրա ..... 200

5.2.1 $\boldsymbol{\Xi_{m_1,m_2,\cdots,m_n}^{n}}$ ցանցի խորանարդատիպ տրոհումը ..... 202

5.2.2 Մոնոտոն ֆունկցիայի ճանաչում $\boldsymbol{\Xi_{m_1,m_2,\cdots,m_n}^{n}}$-ում ..... 205

5.2.3. Քանակական ատրիբուտներով ասոցիատիվ կանոնների պեղում – հաճախ հանդիպող առարկաների խմբերի դուրսբերում ..... 206

5.1 Մասնակի կարգավորված բազմության շղթաների տրոհման մեթոդ ..... 209

5.3-1 Քանակներ և բանաձևեր $\boldsymbol{P(n,3)}$-ում ..... 211

5.3-2 $\boldsymbol{P(n,3)}$-ի տրոհումը շղթաների ..... 219

Եզրակացություններ հինգերորդ գլխի վերաբերյալ ..... 223

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ ..... 224

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ..... 229

# ԱՌԱՋԱԲԱՆ

## Աշխատանքի ընդհանուր բնութագիրը

**Թեմայի արդիականությունը**

Աշխատանքը նվիրված է դիսկրետ մոդելավորման մաթեմատիկական խնդիրների ուսումնասիրմանը: Դիսկրետ մոդելները, որոնցում հայտնի են առարկայի միայն որոշակի մասնակի բնութագրեր, առնչվում են ըստ տրված բնութագրերի առարկայի գոյության, կառուցման և նկարագրման խնդիրների հետ: Նրանք առաջ են գալիս գիտական տարբեր տիրույթներում և բազմաթիվ կիրառական խնդիրներում, ինչպիսիք են օրինակ ցանցերի մոդելավորումը, փորձերի նախագծումը, պատկերների ճանաչումը, և շատ ուրիշներ:

Ամբողջի և նրա մասերի հարաբերակցման սկզբունքների ուսումնասիրումը մաթեմատիկայի զարգացման լուրջ խթան է հանդիսացել: Նշենք երկու խումբ հարակից խնդիրներ և տեսություններ, որոնք ձևավորվել և ուսումնասիրվել են ժամանակի ընթացքում: 1936 թ. Վ. Համբարձումյանը ձևակերպեց հակադարձ խնդիրների մոդելը՝ մաթեմատիկական խնդիրների դասեր, որոնք ծագում են, երբ հարկ կա ստանալ/հաշվել ինֆորմացիա ներքին կամ թաքնված տվյալների մասին, - արտաքին /կամ հասանելի/ չափումների միջոցով [22]: 1965 թ. Յու. Ժուռավլյովը իր “Ինֆորմացիայի հաշվարկման լոկալ ալգորիթմներ” աշխատանքում ձևավորեց լոկալ շրջակայքերի օգնությամբ ընդհանրական գիտելիքի ձեռքբերման սխեման և ապացուցեց, որ որոշ բնական սահմանափակումների դեպքում կան խնդիրներ, որոնք այս դեպքում ալգորիթմական լուծում չունեն [4]:

Այսօր դիսկրետ մոդելավորման տիրույթը ներկայանում է մի շարք ստանդարտ մաթեմատիկական մոտեցումների տեսքով, որոնք ձևավորվել և օգտագործվում են կիրառական խնդիրների լայն դասերի շուրջ [45], [162], [100], [10], [180]: Դիսկրետ մոդելավորման գործիքների թվում են գրաֆների/հիպերգրաֆների տեսությունը, կոմբինատորիկան, գծային և ամբողջարժեք ծրագրավորումը, դիսկրետ տոմոգրաֆիան, խաղերի տեսությունը, ստոխաստիկ պրոցեսների և Մարկովյան շղթաների սխեմաները, բինար ծառերը, և այլք:

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում են տիրույթում առկա բաց խնդիրներ մասնակի բնութագրմամբ տրվող կառուցվածքների գոյության, կառուցման, նկարագրման մոդելների տեսքով՝ հիպերգրաֆների, դիսկրետ տոմոգրաֆիայի, բազմաչափ-բազմարժեք խորանարդի/ցանցի, բինար ծառերի տերմիններով, որոնք մի կողմից ունեն տեսական կարևորություն, մյուսից՝ մասն են հանդիսանում տարբեր կիրառությունների:

<u>Հիպերգրաֆներ:</u> Հիպերգրաֆները մաթեմատիկական մոդելավորման կարևոր գործիք են տարբեր տիրույթների խնդիրների մեկնաբանման համար [148], [178], [37]: Դրանց թվում են ցանցերի մոդելավորման, տվյալների պեղման, գործընթացների պլանավորման և այլ խնդիրներ, որտեղ հիպերգրաֆի գագաթներով ներկայացվում են առարկաներ, իսկ հիպերկողերով տրվում են առարկաների միջև առկա բարդ հարաբերությունները: Հիպերգրաֆի գագաթների աստիճանները, հիպերկողերի հզորությունները, նրանց տարբեր լինելը, մեկը մյուսին չկլանելը, և այլ հատկություններ հանդես են գալիս որպես *մոդելի բնութագրեր կամ սահմանափակումներ:* Հիպերգրաֆային մոդելների տիրույթի հայտնի և բաց խնդիրներից մեկը՝ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների խնդիրը ներկա աշխատանքի հիմնական նպատակներից մեկն է: Կ. Բերժի [36] ձևակերպմամբ այս խնդիրը հանդիսանում է կարևորագույն տեսական թիրախ, իսկ կիրառություններն ընդգրկում են տրանսպորտային ցանցերի գեներացման, մեծածավալ վեբ ինֆորմացիոն համակարգերի և սոցիալական ցանցերի համագործակցային կառուցվածքների վերլուծման և նմանատիպ այլ խնդիրներ: Արդեն երեք տասնամյակ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների խնդիրը ակտիվ հետազոտման առարկա է՝ Ա.Դյուդնեյ, Չ.Կոլբորն, Դ.Սթինսոն, Վ.Կոկեյ, Դ.Բիլինգտոն, Պ.Լի, Մ.Կորեն, Ն.ԲհանուՄուրթի, Մ.Սրինիվասան, Ռ.ԻնիԼյու, Կ.Կլիվանս, Վ.Ռեյներ, Ս.Բեհրենս, Մ.Ֆեռարա, և ուրիշներ (տարված հետազոտությունները և ստացված արդյունքները հիմնականում վերաբերվում են համասեռ հիպերգրաֆների մասնավոր դեպքերին), սակայն մինչև այսօր այն մնում է բաց խնդիր ինչպես բարդության գնահատման տեսանկյունից, այնպես էլ լուծումների տիրույթի ստացման և բնութագրման հարցերում: Խնդիրը համարժեք է բազմաչափ բինար խորանարդի գագաթների ենթաբազմությունների տրոհումների հզորությունների նկարագրման խնդրին, որն առաջադրվել է Լ.Ասլանյանի կողմից դիսկրետ

իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծման կապակցությամբ [1]: *Ներկա աշխատանքում ստացված արդյունքները, որոնք ներկայացվում են ինչպես բազմաչափ խորանարդի, այնպես էլ հիպերգրաֆի տերմիններով, - առաջինն են, որոնք վերաբերվում են հիպերգրաֆների ընդհանուր դեպքին, և որտեղ տրվում է լուծումների տիրույթի ամբողջական նկարագիրը, այդ տիրույթի կառուցվածքն ու հատկությունները:*

<u>Դիսկրետ տոմոգրաֆիա:</u> Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի մոդելը առաջացել է կիրառական խնդիրներից, ինչպիսիք են բժշկական պատկերների վերլուծումը, բյուրեղի կառուցվածքի վերականգնումը ըստ էլեկտրոնային միկրոսկոպի ճառագայթային դիտարկումների տվյալների և այլն [112], [113]: Դիսկրետ տոմոգրաֆիայում հիմնական խնդիրը հետևյալն է. $T$ առարկան (օրինակ՝ բազմաչափ ամբողջարժեք ցանցի բջիջների որևէ բազմություն) տրված է վերջավոր թվով պրոյեկցիաների միջոցով, և պահանջվում է վերականգնել այն, կամ՝ կառուցել տրված պրոյեկցիաներն ունեցող որևէ առարկա: Հայտնի է, որ տրված պրոյեկցիաներով առարկայի գոյության խնդիրը պատկանում է NP-լրիվ խնդիրների դասին՝ նույնիսկ 2 չափանի ցանցում 3 ոչ զուգահեռ պրոյեկցիաների համար: 2 չափանի ցանցի դեպքում $T$-ն կարող է ներկայացվել որպես բինար մատրից: Այս դեպքում 2 օրթոգոնալ պրոյեկցիաներով խնդիրն ունի բազմանդամային բարդություն; սակայն լուծումների քանակը կարող է լինել շատ մեծ: Վերականգնվող առարկայի որևէ լրացուցիչ նախնական հատկություն /սահմանափակում/, կարող է նեղացնել հնարավոր լուծումների տիրույթը: Տարբեր սահմանափակումների առկայությամբ /ուռուցիկություն, կապակցվածություն, և այլն/ առարկայի գոյության խնդիրը հետազոտվել է բազմաթիվ հեղինակների կողմից՝ Ռ.Գարդներ, Պ.Գրիթզման, Ա.ԴելԼունգո, Ե.Բարկուչի, Մ.Նիվա, Ռ.Պինզանի, Գ.Վոեջինջեր, և ուրիշներ: Որոշ դեպքերում ապացուցվել է խնդրի NP-լրիվությունը: Որոշ մասնավոր դեպքեր ունեն լուծման բազմանդամային ալգորիթմներ, բայց և կան խնդիրներ, որոնց բարդության դասը դեռևս հայտնի չէ: Այս կապակցությամբ պրակտիկ խնդիրների լուծման համար կարևոր է նաև արդյունավետ մոտավոր լուծման ալգորիթմների մշակումը, ինչպես նաև հետազոտումն այն բանի, թե որ սահմանափակումների առկայությունը /բացակայությունն է խնդիրը դարձնում հեշտ լուծելի: *Ներկա աշխատանքում դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրներում ներմուծվել է*

*նոր սահմանափակում՝ վերականգնվող բինար մատրիցի տողերի տարբեր լինելը, որն ի հայտ է գալիս տարբեր կիրառություններում, ինչպես օրինակ, փորձերի նախագծման (design of experiments) խնդիրները: Մշակվել է տրված պրոյեկցիաներով և տարբեր տողերով բինար մատրիցի կառուցման ագահ ալգորիթմ, որը կիրառելի է սահմանափակ ռեսուրսներով կենսաբժշկական փորձերի նախագծման խնդիրներում, և որը կիրառվել է հայերեն տպատառ տեքստերի ավտոմատ ճանաչման համակարգերում:*

<u>Բազմաչափ բազմարժեք ցանց:</u> Աշխատանքում հետազոտությունների հաջորդ հատվածն անդրադառնում է կիրառական ալգորիթմների մշակմանը մոնոտոնության սահմանափակմանը ենթակա դիսկրետ մոդելների համար: Ընդհանուր առմամբ, խնդիրը մոնոտոն կառուցվածքի վերծանումն է՝ որոշակի մասնավոր արժեքների հարցման ճանապահով: Մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների դեպքում խնդրի օպտիմալ լուծումը՝ հարցումների մինիմալ քանակը, հայտնի է Գ.Հանսելի թեորեմով (1966թ.); համապատասխան ալգորիթմը կառուցվել է բազմաչափ բինար խորանարդը հատուկ տիպի շղթաների տրոհման ճանապարհով: Նմանատիպ ալգորիթմ, սակայն մինիմալ հիշողության օգտագործմամբ, մշակվել է Գ.Տոնոյանի կողմից 1979թ. և Դ.Սոկոլովի կողմից 1982թ.: Բազմարժեք բազմաչափ ցանցում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի դեպքում վերծանման խնդիրը ավելի բարդ է; հայտնի են մինիմալ հարցումների քանակի գնահատականներ, հայտնի է նաև Վ.Ալեքսեևի կողմից 1976թ. առաջարկված ալգորիթմը, որտեղ ալգորիթմի բարդության գնահատականները տրված են ցանցի միջին շերտերի կետերի քանակների տեսքով: *Ներկա աշխատանքում բերվում է նշված գնահատականների պարզեցված և օգտագործելի տեսքը: Կազմվել է մոնոտոն բինար ֆունկցիաների վերծանման նոր մոտեցում՝ հիմնված աշխատանքում ներմուծված բազմարժեք բազմաչափ ցանցի խորանարդատիպ տրոհման մեթոդի վրա, որի միջոցով հասանելի է դառնում պարզ և մեկնաբանելի կառուցվածքների օգտագործումը և ապահովվում է ալգորիթմների հաշվարկների զուգահեռ իրականացումը: Բազմարժեք բազմաչափ ցանցի խորանարդատիպ տրոհումը ներդրվել է նաև տվյալների պեղման ասոցիատիվ կանոնների դուրսբերման ընդհանրական մոդելում, որտեղ ի տարբերություն բինար դեպքի, տարրերի առկա կամ բացակա լինելուց բացի հնարավոր է դառնում հաշվի առնել նաև տարրերի պատիկությունը:*

**Աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները**

Ներկա աշխատանքի նպատակը դիսկրետ մաթեմատիկական մոդելավորման սահմանափակումների բավարարման տիպի խնդիրների կարևոր դասերի ուսումնասիրումն է: Սահմանափակումները, որոնց ենթակա են մոդելները, իրական կամ աբստրակտ առարկայի կամ երևույթի պարամետրեր են, որոնք չափված կամ գնահատված են և ունեն իրական կամ ենթադրյալ արժեքներ: Այդպիսիք են, օրինակ, տրանսպորտային և հեռահաղորդակցման ցանցերի խնդիրները, որոնցում տրված են հանգույցների հարևանության և կապերի կշիռների տիպի սահմանափակումներ: Նշված արժեքներին համապատասխանող մոդելների գոյությունը, դրանց կառուցումը և վերլուծումը հաճախ հանգում են բարդ մաթեմատիկական խնդիրների լուծմանը:

Սահմանափակումների համակարգի ձևավորման նպատակով դիտարկվում են արտապատկերումներ՝ սահմանված պրոյեկցիաների և հարևանության շրջակայքերի տեսքով: Առաջին խումբը մեկնաբանվում է դիսկրետ տոմոգրաֆիայի և տրոհման կառուցվածքների, երկրորդը՝ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների և հիերարխիկ ծառերի տերմիններով: Իրականում դիտարկվում է մեկ հիմնական խնդիր տարբեր մեկնաբանություններով, որոնցից յուրաքանչյուրը առաջացնում է իր ուրույն մոտեցումները, և որոնց հետևանքները տարածվում և հարստացնում են այլ սահմանման դրվածքները:

Հետազոտությունները տարվել են հետևյալ հիմնական ուղղություններով.

- Շրջակայքային արտապատկերումների ուսումնասիրություններ դիսկրետ մոդելավորման խնդիրներում՝ աստիճանային հաջորդականությունների միջոցով տրվող հիպերգրաֆների գոյության և կառուցման խնդիրների տեսքով: Այս մասով աշխատանքի հիմնական նպատակն է՝ ստանալ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության ճշգրիտ նկարագիրը, որը տրվել և վերլուծվել է աշխատանքում՝ մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների տերմիններով, ինչն իրենից ներկայացնում է աշխատանքի <u>հիմնական մաթեմատիկական արդյունքներից մեկը</u>:
- Հետազոտություններ դիսկրետ տոմոգրաֆիայի տիրույթում, որտեղ հիմնական նպատակն է նոր սահմանափակումների ներառումը շերտային պրոյեկցիաների և տարրերի չվերադրման տեսքով: Սրանք այն սահմանափակումներն են, որոնք հանդես

են գալիս կիրառական տարբեր խնդիրներում և մոդելներում, և արտացոլում են հիպերգրաֆի պարզ լինելու և գագաթների տրված ընդհանրացված աստիճանային հաջորդականություններն ունենալու պայմանները: Աշխատանքի այս մասով կարևոր ձեռքբերում են տոմոգրաֆիայի խնդրի լուծման արդյունավետ ալգորիթմների մշակումը, լոկալ քայլում օպտիմալության ապահովումը, և արդյունքի երաշխիքի գնահատումը:

- Դիսկրետ մոդելավորման գործիքների ուսումնասիրում: Աշխատանքում ներմուծվել են խորանարդատիպ տրոհման և գումարային հիերարխիաների մոտեցումները, որոնք հավելյալ կիրառությունների հիմք են հանդիսացել, մասնավորապես.
  - խորանարդատիպ տրոհման կիրառմամբ մշակվել է բազմարժեք ցանցում մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման նոր մեթոդ՝ խնդիրը հանգեցնելով բինար խորանարդում մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների վերծանմանը: Սա հիմք է հանդիսացել քանակական ատրիբուտներով ասոցիատիվ կանոնների պեղման նոր մոտեցման ձևավորման համար, ինչը նպատակ ունի նոր գործիքներ տրամադրել կիրառական խնդիրների կարիքների համար, ինչպես օրինակ կիրառական ծրագրերի LOG ֆայլերի վերլուծման օգնությամբ ցանցերի ներխուժման հայտնաբերումը;
  - գումարային հիերարխիաների կիրառմամբ կառուցվել է բինար ծառի մոդել, օգտագործելով այն դասակարգման, մասնավորապես՝ գրանշանների ավտոմատ ճանաչման համակարգում:

Աշխատանքի ընդհանուր բնութագիրը ըստ դիտարկված մոդելների, մաթեմատիկական խնդիրների և կիրառությունների ամփոփվում է հետևյալ տեսքով.

| | |
|---|---|
| Մոդելներ | •Դիսկրետ մաթեմատիկական մոդելներ ուղղաձիգ և շրջակայքային արտապատկերումներով, այդ թվում.<br>- *Բազմությունների համակարգեր / Բազմաչափ միավոր խորանարդ*<br>- *Դիսկրետ տոմոգրաֆիա / Բինար մատրիցներ*<br>- *Խորանարդատիպ տրոհման մոդել / Բազմաչափ բազմարժեք խորանարդ* |
| Խնդիրներ | •Հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների նկարագրում<br>•Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիր նոր սահմանափակումներով<br>•Դիսկրետ մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանում<br>•Պատկերների դասակարգում ըստ գրաֆիկական բնութագրերի<br>•Քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղում |
| Կիրառություններ | •Տրանսպորտային և հեռահաղորդակցման ցանցեր սահմանափակումներով / Ցանցերի գեներացում<br>•Փորձերի նախագծում կենսաբժշկական խնդիրներում<br>•Տպագիր տեքստերի ավտոմատ վերծանում<br>•Ցանցերի ներխուժման հայտնաբերում |

**<u>Հետազոտման մեթոդները</u>**

Կիրառվում են դիսկրետ մոդելավորման մաթեմատիկական մոտեցումներ՝ դիսկրետ կառուցվածքների տրոհումներ և ձևափոխություններ, ինդուկցիայի սկզբունք, կերպարների վերծանում, հավանականային կոմբինատորիկա, ամբողջարժեք գծային ծրագրավորում: Օգտագործվել է նաև բինար խորանարդի շղթաների տրոհման մոտեցումը, և այն լրացվել է խորանարդատիպ տրոհման գաղափարի միջոցով: Արդյունքների մի հիմնական խումբ հիմնվում է ագահ/գրադիենտ ալգորիթմների կառուցման մեթոդների վրա:

**<u>Գիտական նորույթը</u>**

- ✓ Պարզ հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների տիրույթի ամփոփ նկարագիր՝ տրված մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների տերմիններով; նշված տիրույթի կարևոր կառուցվածքային առանձնահատկությունների բնութագրում;
- ✓ Նոր սահմանափակման (մատրիցի տողերի տարբեր լինելը) և նոր բնութագրերի (շերտային պրոյեկցիաներ ըստ մատրիցի սյուների որոշակի խմբերի) առկայությամբ

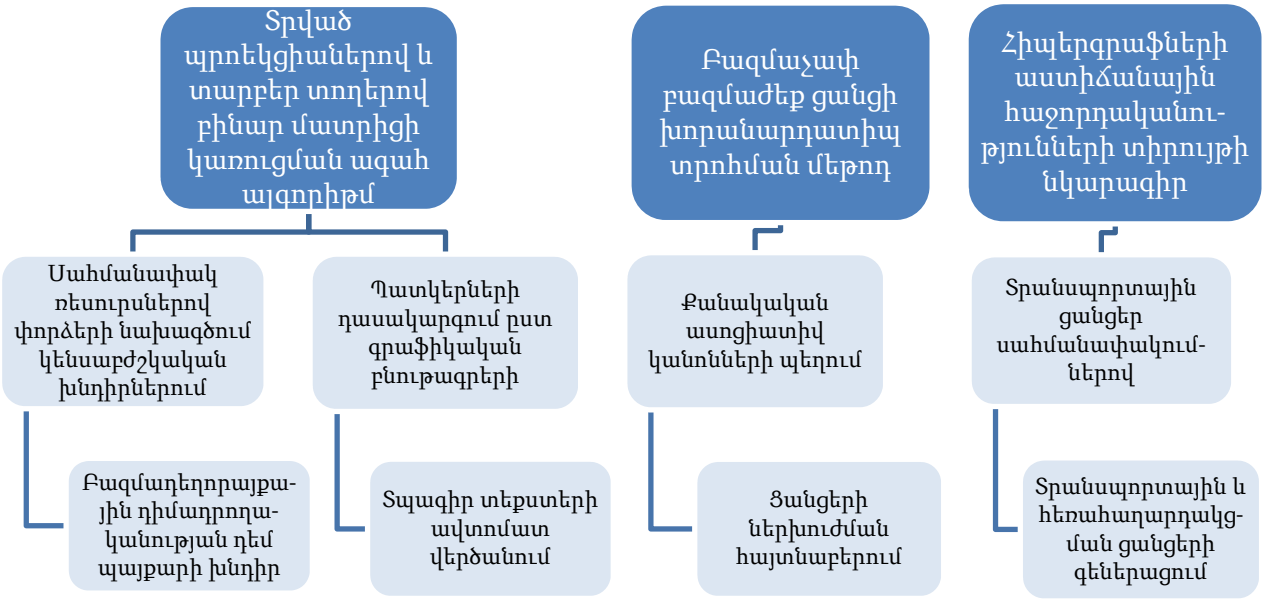
դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրների մոտավոր լուծման ալգորիթմներ; օպտիմալության ապահովում լոկալ քայլում; և արդյունքի երաշխիքի գնահատում;

- ✓ Մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման նոր մեթոդ՝ հիմնված աշխատանքում ներմուծված բազմարժեք բազմաչափ ցանցի խորանարդատիպ տրոհման վրա:

**<u>Ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը</u>**

Դիտարկված խնդիրներն ունեն սկզբունքային տեսական նշանակություն և ուղղակի կապի մեջ են կիրառական խնդիրների հետ՝ այն որ գործ ունեն բազմությունների համակարգերի մոդելների, հակադարձ դիսկրետ մաթեմատիկական խնդիրների, սահմանափակումների բավարարման խնդիրների լայն դասերի հետ: Դիտարկված կիրառական հարցերը առնչվել են ցանցերի ներխուժման հայտնաբերման (ասոցիատիվ կանոնների պեղում), տպագիր տեքստերի ավտոմատ վերծանման (պատկերների դասակարգում ըստ գրաֆիկական բնութագրերի), և ուրիշ խնդիրների հետ (կենսաբժշկություն, ինֆորմացիոն կառավարում ըստ տեքստերի պեղման): Այս աշխատանքները մաս են կազմել մի շարք գիտական նախագծերի, որոնց թվում են՝ INTAS 00-626 “Data Mining Algorithm Incubator”, INTAS 04-77-7173 "Data Flow Systems: Algorithms and Complexity"; c/o PolyBase Inc. USA “Development of Armenian Optical Recognition software system”; EC FP5 IST-12637 "Security Policy Adaptation Reinforced through Agents”; ԿԳՆ ԳՊԿ 11-1b193 “Կոմբինատոր օպտիմիզացիայի նոր, բարդ և չլուծված խնդիրների ալգորիթմական մոտարկման ուսումնասիրում”, 12GE-020 “Մաթեմատիկական համալրում կանաչ ինքնավար ցանցերի կազմակերպմանը”, 13-1B340 “Փակ հասանելի բազմությունների համակարգերի հետազոտում և կիրառում”, 15T-1B417 “Կիրառական ուղղվածության հակադարձման տիպի սահմանափակումների բավարարման խնդիրներ” նախագծերը - ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտի մասնակցությամբ: Այս հետազոտություններին մասնակից այլ կազմակերպությունների թվում հարկ է նշել՝ ՌԳԱ Հաշվողական Կենտրոնը, Մադրիդի տեխնիկական համալսարանը, Ռոստոկի համալսարանը, Հունգարիայի գիտությունների ակադեմիայի մաթեմատիկայի ինստիտուտը, Պատրասի համալսարանը, և ուրիշներ:

Աշխատանքում ստացված արդյունքների կիրառությունները ամփոփված են հետևյալ սխեմայով.




**<u>Աշխատանքի հիմնական դրույթները</u>**

✓ Հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության ամփոփ նկարագիր բազմարժեք բազմաչափ $\Xi_{m+1}^{n}$ ցանցի ենթաբազմության տեսքով՝ դրանց եզրային էլեմենտների և նրանցով ծնվող մոնոտոն տիրույթների տերմիններով: Եզրային էլեմենտների բազմության մինիմալ կշռով տարրերի դուրսբերում և միակության հավաստում (կոորդինատների տեղափոխության ճշտությամբ); մաքսիմալ կշռով տարրերի նկարագրում, և նրանց համարժեքության հաստատում հիպերգրաֆային հաջորդականությունների խնդրին՝ համասեռ հիպերգրաֆների դեպքում:

✓ $\bar{r}_{min}$ և $r_{max}$ շեմերի հայտնաբերում այնպես, որ $\bar{r}_{min}$ -ից փոքր կշռով հաջորդականությունները հիպերգրաֆային են, և $r_{max}$ -ից մեծ կշռով հաջորդականությունները հիպերգրաֆային չեն;

✓ Պարզ ռեգուլյար հիպերգրաֆի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման ըստ տրված աստիճանային հաջորդականության:

✓ Սյուների տրված կշիռներով (ուղղահայաց պրոյեկցիա) և տարբեր տողեր ունեցող (նոր սահմանափակում դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրներում) բինար մատրիցի սյուն-

առ-սյուն կառուցման $G$ արդյունավետ ալգորիթմ; օպտիմալություն լոկալ քայլում; արդյունքի երաշխիքի տեսական գնահատական:

- ✓ Սյուների որոշակի խմբերի կշիռներով (շերտային պրոյեկցիաներ) և տարբեր տողերով բինար մատրիցի գոյության/կառուցման խնդիրների բարդության հետազոտում, նրանց մոտավոր լուծման ալգորիթմներ:
- ✓ $\Xi_{m+1}^{n}$ ցանցի խորանարդատիպ տրոհում, և նրա հիման վրա՝ $\Xi_{m+1}^{n}$-ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման նոր մոտեցում:
- ✓ Մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման $CS$ ալգորիթմ՝ ներկայացված օպտիմալ բինար վերծանիչների չհատվող բազմությունների տեսքով; ալգորիթմի բարդության գնահատական-բանաձև;
- ✓ Ստացված արդյունքների կիրառություններ. $G$ ալգորիթմի կիրառումը գումարային բալանսով բինար ծառի մոդել կառուցելու համար պատկերների, ըստ գրաֆիկական բնութագրերի դասակարգման խնդրում; $CS$ ալգորիթմի կիրառումը տվյալների պեղման քանակական ասոցիատիվ կանոնների (հաճախ հանդիպող հավաքների բազմության) դուրսբերման համար մոնոտոն ատրիբուտներով տվյալների դեպքում:

**<u>Աշխատանքի արդյունքները զեկուցվել են</u>**

Աշխատանքում ստացված արդյունքները զեկուցվել են ՀՀ Գիտությունների ազգային ակադեմիայում, ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում, Մադրիդի տեխնիկական համալսարանի ինֆորմատիկայի ֆակուլտետում (2002թ.), Ռոստոկի համալսարանում (2015թ.), մի շարք միջազգային գիտաժողովներում, այդ թվում՝ Computer Science and Information Technologies /CSIT 1997 - CSIT 2017/, Extremal Combinatorics, Cryptography and Coding Theory /2014/ (Հայաստան), Optimal Discrete Structures and Algoritms /ODSA 2006, ODSA 2010/ (Գերմանիա), Natural Information Technologies /NIT 2010/ (Իսպանիա), Mathematics of Distances and Applications /MDA 2012/ (Բուլղարիա), Seventh Czech-Slovak International Symposium on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications /CSGT 2013/ (Սլովակիա), և Information Technologies /iTech/, Classification, Forecasting, Data Mining

/CFDM/, Theoretical Foundations of Informational Modelling /TFIM/ գիտաժողովների շարքում 2003-2017 թթ. (Բուլղարիա):

**Հրապարակումները**

Ատենախոսության թեմայով հրատարակված է 31 գիտական աշխատանք, որոնք թվարկված են ատենախոսության վերջում:

**Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը**

Ատենախոսությունը կազմված է առաջաբանից, հինգ գլուխներից, եզրակացությունից, օգտագործված գրականության ցանկից: Այն շարադրված է 244 էջում, ներառյալ 191 անուն օգտագործված գրականության ցանկը:

# ԳԼՈՒԽ 1. ՀԵՏԱԶՈՏԱԿԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ, ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ներկա աշխատանքում դիտարկվող խնդիրները առաջացել են տարբեր ոլորտներում և մոդելավորվել են տարբեր տերմիններով՝ *բազմությունների համակարգեր, դիսկրետ տոմոգրաֆիա, բազմաչափ միավոր խորանարդ*: Ստորև ըստ տիրույթների տրվում է հետազոտությունների արդի վիճակի և ստացված արդյունքների սեղմ նկարագիրը, նշվում են առկա բաց խնդիրները, և բերվում են ամփոփիչ դիտողություններ՝ աշխատանքում այդ տիրույթների առնչությամբ ստացված արդյունքների համառոտ ներկայացմամբ: Դիտարկվում են նաև հարակից գործիքներ՝ ընդհանուր օգտագործման հաշվարկային մոդելներ, որոնցում կարելի է օգտագործել հետազոտվող խնդիրների շուրջ ստացված արդյունքները: Աշխատանքի առաջին գլուխը պարունակում է նաև աշխատանքում օգտագործվող այլ հասկացություններն ու սահմանումները:

## 1.1 Խնդիրներ

### *1.1.1 Բազմությունների համակարգեր /հիպերգրաֆներ/*

Գրաֆների տեսությունը կոմբինատոր խնդիրների լուծման և կոմբինատոր մոդելավորման կարևոր գործիք է ([107], [50], [111]) և բնական է, որ գրաֆի հասկացությունը բազմիցս ընդհանրացվել է լրացուցիչ կոմբինատոր խնդիրների հաղթահարման ճանապարհին: Սա կապված է բազմությունների ընտանիքների /set system/ դիտարկմամբ ([123], [79], [138], [17], [102], [101]) և դրա մեկնաբանմամբ՝ որտեղ բազմությունը հանդես է գալիս որպես “ընդհանրացված կող”, - և բազմությունների ընտանիքը այս մեկնաբանմամբ անվանվում է հիպերգրաֆ ([35], [36]): Նախնական նպատակը գրաֆների տեսության դասական արդյունքների ընդհանրացումն էր: Այնուհետև, հիպերգրաֆների տեսությունը վերածվեց մաթեմատիկական մոդելավորման կարևոր գործիքի տարբեր տիրույթների խնդիրների մեկնաբանման համար ([56], [94], [148], [147], [178], [37], [164]): Դրանց թվում են ցանցերի մոդելավորման, տվյալների պեղման, գործընթացների պլանավորման և այլ խնդիրներ,

որտեղ հիպերգրաֆի գագաթներով ներկայացվում են առարկաներ, իսկ հիպերկողերով տրվում են առարկաների միջև առկա բարդ հարաբերությունները

Բացի այդ, ստացվեցին նաև հիպերգրաֆների տեսական արդյունքներ, որոնք տրամադրում են այլ մակարդակի հարաբերություններ և չեն հետևում գրաֆների տեսությունից:

**Սահմանում 1.1.1** ([36]): Դիցուք՝ $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ -ն վերջավոր բազմություն է: *Հիպերգրաֆ* $V$ բազմության վրա՝ դա $V$ բազմության $E_i \subseteq V, \quad i = 1,2, \cdots, m$ *ենթաբազմությունների ընտանիք* է՝ $H = \{E_1, E_2, \cdots, E_m\}$, այնպես, որ.

(1) $E_i \neq \emptyset, i = 1,2, \cdots, m$

(2) $\cup_{i=1}^{m} E_i = V$:

Եթե տեղի ունի նաև հետևյալ պայմանը.

(3) $E_i \subseteq E_j \implies i = j$,

ապա $H = \{E_1, E_2, \cdots, E_m\}$ հիպերգրաֆը կոչվում է *պարզ:*

$v_1, v_2, \cdots, v_n$ էլեմենտները կոչվում են հիպերգրաֆի *գագաթներ*, իսկ $E_1, E_2, \cdots, E_m$ բազմությունները՝ *կողեր/հիպերկողեր*:

Հիպերգրաֆի պարզության ավելի ընդհանուր սահմանում է, երբ (3)-ի փոխարեն տեղի ունի հետևյալը.

(3’) $E_i = E_j \implies i = j$:

Հիպերգրաֆը կարելի է ներկայացնել *ինցիդենտության* $A = \{a_{i,j}\}$ մատրիցով, որի տողերը ներկայացնում են $E_1, E_2, \cdots, E_m$ կողերը, իսկ սյուները՝ $v_1, v_2, \cdots, v_n$ գագաթները, որտեղ $a_{i,j} = 1$, երբ $v_j \in E_i$, և $a_{i,j} = 0$ հակառակ դեպքում:

Հիպերգրաֆը կարելի է ներկայացնել նաև որպես բինար խորանարդի գագաթների բազմություն կամ գագաթների ընտանիք:

Հիպերգրաֆը կոչվում է $r$-*համասեռ*, եթե նրա յուրաքանչյուր կողի հզորությունը $r$ է: *Պարզ գրաֆը* դա 2-*համասեռ* պարզ հիպերգրաֆն է:

Հիպերգրաֆի $v_j \in V$ *գագաթի աստիճանը*՝ $d_j$-ն, այդ գագաթը պարունակող կողերի քանակն է: Հիպերգրաֆը $s$-*ռեգուլյար է*, եթե նրա յուրաքանչյուր գագաթի աստիճանը $s$ է:

$H$ հիպերգրաֆի գագաթների աստիճաններից կազմված $d(H) = \{d_1, \cdots, d_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է *հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականություն*: *Հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության խնդիրը /հիպերգրաֆային հաջորդականությունների խնդիրը/ հետևյալն է՝ գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի* տրված թվերի հաջորդականությունը հանդիսանա որևէ պարզ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականություն:

Գրաֆի դեպքում աստիճանային հաջորդականության խնդրի լուծումը հայտնի է Էրդյոշ-Գալլեյի թեորեմով ([78]):

**Թեորեմ 1.1.1-1** ([78]): $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ ամբողջ ոչ բացասական թվերի չաճող հաջորդականությունը հանդիսանում է $n$ գագաթ ունեցող պարզ գրաֆի աստիճանային հաջորդականություն այն և միայն այն դեպքում, երբ

(1) $\sum_{i=1}^{n} d_i$-ն զույգ է, և

(2) $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}, k = 1, \cdots, n-1$:

Դիտարկենք նույն խնդիրը հիպերգրաֆների համար: Կրկնվող կողերի թույլտվությամբ հայտնի են՝

**Թեորեմ 1.1.1-2** ([36]): $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ ամբողջ ոչ բացասական թվերի չաճող հաջորդականությունը հանդիսանում է $n$ գագաթ ունեցող $r$-համասեռ հիպերգրաֆի (թույլատրվում են կրկնվող կողեր) աստիճանային հաջորդականություն այն և միայն այն դեպքում, երբ

(1) $\sum_{i=1}^{n} d_i$-ն $r$-ի պատիկ է, և

(2) $d_n \geq 1$:

**Թեորեմ 1.1.1-3** ([87], [166]): Տրված են $r_1, r_2, \cdots, r_m$ ամբողջ թվերը և ամբողջ թվերի $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ հաջորդականությունը: Գոյություն ունի $n$ գագաթ ունեցող $H = \{E_1, E_2, \cdots, E_m\}$ հիպերգրաֆ, որի համար $d_i$-ն $i$-րդ գագաթի աստիճանն է, և $r_j$-ն $E_j$ կողի հզորությունն է, - այն և միայն այն դեպքում, երբ

1) $\sum_{j=1}^{m} \min\{r_j, k\} \geq d_1 + \cdots + d_k, \ (k < n)$

2) $\sum_{j=1}^{m} r_j = d_1 + \cdots + d_n$:

Պարզ հիպերգրաֆի դեպքում՝ աստիճանային հաջորդականության խնդիրը հայտնի բաց խնդիր է ([36]):

#### *1.1.1.1 Արդի վիճակի սեղմ նկարագիր*

Խնդիրը ինտենսիվորեն հետազոտվել է պարզ համասեռ հիպերգրաֆների համար, ([71], [51], [64], [42], [43], [44], [62], [40], [130], [154], [161], [33], [103], և ուրիշներ), սակայն մնում է բաց ինչպես բարդության գնահատման տեսանկյունից՝ հայտնի չէ խնդրի լուծման բազմանդամային ալգորիթմ, ոչ էլ ապացուցված է խնդրի NP-լրիվությունը ; այնպես էլ լուծումների տիրույթի նկարագրման հարցում՝ հայտնի չէ պարզ համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների պարզ նկարագիր: Այս երկու խնդիրները որոնք հիպերգրաֆների տեսության հայտնի մարտահրավերային խնդիրներ են, մնում են բաց նույնիսկ 3-համասեռ պարզ հիպերգրաֆների համար: Այս խնդիրների հետ կապված հայտնի են մի շարք օգտակար պնդումներ/մասնակի արդյունքներ: Պարզ է, որ խնդրի լուծված չլինելը և միայն մասնակի արդյունքների առկայությունը սահմանափակում է նրա արդյունավետ կիրառումը համապատասխան խնդիրների լուծման մեջ:

[64] աշխատանքում ուսումնասիրվել են հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության հետ կապված խնդիրներ, և ապացուցվել է նրանց NP-լրիվությունը: Դիցուք՝ $H=(V,E)$-ն $k$-համասեռ հիպերգրաֆ է գագաթների $V(H)$ բազմությամբ և կողերի $E(H)$ բազմությամբ: Յուրաքանչյուր $v\in V$ գագաթի համար սահմանվում է $(k-1)$-համասեռ $H_v$ հիպերգրաֆը հետևյալ ձևով: $H_v$-ի գագաթների բազմությունն է՝ $V(H_v)=V(H)\backslash\{v\}$, և կողերի $E(H_v)$ բազմությունը կազմված է $E(H)$-ի բոլոր այն $B$ կողերից, որոնք պարունակում են $v$ գագաթը՝ առանց այդ գագաթի՝ $B\backslash\{v\}$: Կասենք, որ $H$ հիպերգրաֆը *ընդգրկում է /պարունակում է*, subsumes/ $H_v$, $v\in V(H)$ հիպերգրաֆների հավաքածուն: Նշենք, որ $H$ հիպերգրաֆը պարզ է այն և միայն այն դեպքում, երբ պարզ են *ընդգրկվող* $H_v$ հիպերգրաֆները:

***Ընդգրկվող հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների խնդիր.*** Դիցուք՝ $d(h_1),d(h_2),\cdots,d(h_n)$ -ը հանդիսանում են $(k-1)$ -համասեռ $h_1,h_2,\cdots,h_n$ հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունները: Գոյություն ունի արդյոք $k$ -

համասեռ $H$ հիպերգրաֆ այնպես, որ նրա ընդգրկվող $H_1, H_2, \cdots, H_n$ հիպերգրաֆների համար տեղի ունենան $d(H_i) = d(h_i), i = 1, \cdots, n$ պայմանները:

Ապացուցվել է խնդրի NP-լրիվությունը նույնիսկ $k = 3$ դեպքում: Ապացուցվել է խնդրի NP-լրիվությունը նաև պարզ համասեռ հիպերգրաֆների համար:

[42]-ում տրվել են 3-համասեռ պարզ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականություն հանդիսանալու անհրաժեշտ պայմաններ.

**Թեորեմ 1.1.1-4** ([42]): Դիցուք՝ $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ հաջորդականությունը 3-համասեռ պարզ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականություն է: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները.

1) $d_1 + \cdots + d_n = 3q$ որևէ $q$ ամբողջ թվի համար,

2) $d_1 \leq C_{n-1}^2$,

3) $d_1 - d_n \leq C_{n-2}^2$,

4) $d_1 + \cdots + d_i \leq 2q + C_n^i, i = 1, \cdots, n$,

5) $d_1 + \cdots + d_i \leq q + (n-1)C_i^2, i = 1, \cdots, n$:

Առաջարկվել է նաև 3-համասեռ պարզ հիպերգրաֆի կառուցման (ըստ աստիճանային հաջորդականության) էվրիստիկ բազմանդամային ալգորիթմ, և ցույց է տրվել ալգորիթմի աշխատանքի արդյունավետությունը փոքր $n$-երի համար:

[130]-ում սահմանվել են կողերի փոխարինումներ, որոնց միջոցով նույն աստիճանային հաջորդականությունն ունեցող 3-համասեռ հիպերգրաֆները ձևափոխում են մեկը մյուսին: [33]-ում հեղինակները ընդհանրացրել են այս արդյունքը $k$ -համասեռ հիպերգրաֆների համար:

[131], [40], [127], [161]-ում ուսումնասիրվել է $r$ -համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների ուռուցիկ թաղանթը (convex hull)՝ $D_n(r)$ -ը: [132]-ում ապացուցվել է, որ 2-համասեռ հիպերգրաֆների /սովորական գրաֆների/ դեպքում Էրդյոշ-Գալլեյի անհավասարություններով տրվում է գրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների ուռուցիկ թաղանթը՝ ուռուցիկ թաղանթին պատկանող հաջորդականությունները հանդիսանում են գրաֆի աստիճանային հաջորդականություններ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց կոմպոնենտների

գումարը զույգ է: [40]-ում տրվել են պայմաններ, երբ է $D_n(r)$-ի եզրանիստը (facet) որոշվում գծային անհավասարություններով: Տրվել են նաև բավարար պայմաններ, թե երբ է $D_n(r)$ -ի եզրանիստը բնութագրվում Էրդյոշ-Գալլեյի տիպի անհավասարություններով: [127]-ում համակարգչով հաշվարկների արդյունքում պարզվել է, որ $k$-համասեռ հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների բազմությունը ուռուցիկ է, երբ $k = 3$ և $n \leq 8$ : [161]-ում ցույց է տրված, որ $k \geq 3$ և $n \geq k + 13$ դեպքում $k$ -համասեռ հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների բազմությունը ուռուցիկ չէ:

#### *1.1.1.2 Ամփոփիչ դիտողություններ*

Ըստ [36]-ի սահմանման, պարզ հիպերգրաֆներում կողերը անհամեմատելի են ըստ կլանման: Հիպերգրաֆի պարզության ավելի ընդհանուր սահմանում է՝ երբ կողերը չեն կրկնվում: Համասեռ հիպերգրաֆի դեպքում, երբ կողերը ունեն միևնույն հզորությունը, այս սահմանումները համընկնում են: Կարևոր է նշել, որ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների խնդրին առնչվող տարբեր հեղինակների հետազոտությունները և ստացված արդյունքները համասեռ հիպերգրաֆների դեպքի համար են: Բացի այդ, թեկուզ և այս մասնավոր դեպքի համար ստացված չէ լուծումների տիրույթի որևէ ընդհանուր նկարագիր:

Ներկա աշխատանքը աստիճանային հաջորդականությունների խնդիրը դիտարկում է ընդհանուր դեպքում, երբ կողերի հզորությունները կամայական են, և հիպերգրաֆը պարզ է՝ կողերը չեն կրկնվում: Հետազոտվում է խնդրի բոլոր լուծումներով կազմված տիրույթը; տրվում է նրա կառուցվածքային պարզ և ամբողջական նկարագիրը: Ցույց է տրվում նաև, որ տիրույթն ուռուցիկ չէ: Կարևոր է նաև լուծումների որոնման տիրույթի նեղացումը, որն իրականացվում է երկու փոխլրացնող ճանապարհներով:

Աշխատանքում հետազոտված մեկ այլ կարևոր խնդիր է հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության լրացման տիրույթի նկարագրումը: Պարզվում է, որ այս տիրույթը նույնպես ունի կառուցվածքային ընկալելի նկարագիր, որը հնարավորություն է տալիս գտնելու մինիմալ և մաքսիմալ շեմեր, որոնց միջոցով որոշվում են հիպերգրաֆային և ոչ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների դասեր:

### *1.1.2 Դիսկրետ տոմոգրաֆիա*

Հետազոտվող խնդիրների հաջորդ մոդելը և մեկնաբանությունը պատկանում է դիսկրետ տոմոգրաֆիայի տիրույթին ([112], [139], [113], [31]):

Խնդիրները, որտեղ դիտարկման առարկան տրված է, և անհրաժեշտ է հաշվել նրա բնութագրերը - կոչվում են *ուղիղ* խնդիրներ ի տարբերություն հ*ակադարձ* խնդիրների, որոնցում առարկան հասանելի չէ, և անհրաժեշտ է այն վերականգնել նրա մասին ունեցած մասնակի տվյալների հիման վրա, որոնք հաճախ կողմնակի չափումների տեսքով են ստացվում ([114], [70]): Այսպիսով, հակադարձ խնդիրները մաթեմատիկական խնդիրների դաս են, որոնք ծագում են, երբ պահանջվում է ստանալ ինֆորմացիա ներքին կամ թաքնված տվյալների մասին արտաքին/կամ հասանելի չափումների միջոցով:

Հակադարձ խնդիրները, որպես կանոն – "*թույլ ձևակերպված են*" /ill-posed/: Ըստ Հադամարի սահմանման [105], որպեսզի խնդիրը դասակարգվի որպես "*լավ ձևակերպված*" /well-posed/ պետք է ունենա հետևյալ երեք հատկությունները:

1. Բոլոր թույլատրելի տվյալների համար լուծումը պետք է գոյություն ունենա /For all admissible data, a solution exists/,
2. Բոլոր թույլատրելի տվյալների համար լուծումը պետք է լինի միակը /For all admissible data, the solution is unique/,
3. Լուծումը պետք է անընդհատ կախված լինի տվյալներից /The solution depends continuously on the data/:

Խնդիրը, որը չունի նշված հատկություններից որևէ մեկը, ըստ սահմանման՝ "*թույլ ձևակերպված* է": Հակադարձ խնդիրներում հիմնականում խախտվում է երրորդ պայմանը, որը հաճախ անվանվում է *կայունության պայման*:

Որոշ հակադարձ խնդիրներ կարող են նկարագրվել X-ճառագայթների (ռենտգենյան ճառագայթների) միջոցով առարկայի վերականգնման տերմիններով: Բժշկական կամ արդյունաբերական CT (computer tomography, կոմպյուտերային տոմոգրաֆիա) սկանավորման արդյունքում, երբ ռենտգենյան ճառագայթները անցնում են առարկայի

միջով, ձեռք է բերվում առարկայի պատկերի 2-չափանի (2D) շերտ: Ճառագայթներն անցկացնում են տարբեր անկյուններով, և նշված շերտում յուրաքանչյուր անկյան տակ չափում են ռենտգենյան ճառագայթի թուլացումները, որը բերում է շերտի 1-չափանի (1D) պրոյեկտմանը: Այնուհետև, ստացված պրոյեկցիաների բազմությունից վերականգնվում է 2-չափանի շերտը՝ օգտագործելով Ջ.Ռադոնի թեորեմը [156]: Վ.Համբարձումյանն առաջինն էր, որ տվեց Ջ.Ռադոնի ձևափոխության թվային հակադարձումը:

*Տոմոգրաֆիան* հակադարձ խնդիրների/մոդելների ենթաբազմություն է առարկայի՝ նրա մասնակի չափումների հիման վրա, վերականգնման մասին: Սովորաբար, չափումները իրենցից ներկայացնում են մոդելի պարամետրերի ինտեգրում X-ճառագայթների ուղղությամբ: Պարզագույն դեպքում *դիսկրետ տոմոգրաֆիան* դիտարկում է առարկաներ, որոնք կազմում են բազմաչափ ամբողջարժեք ցանցի բջիջների վերջավոր ենթաբազմություն: Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրների մի մասը առաջանում է բնականոն ձևով, այլ դեպքերում դրանք դիսկրետ սիմուլյացիայի կամ մոտավոր մոդելների կառուցման արդյունք են:

Սովորաբար, ֆիզիկական կառուցվածքը ունի խտության արժեքների մեծ բազմազանություն, և հետևաբար, մեծ թվով X-ճառագայթներ են անհրաժեշտ ապահովելու համար նրանց բաշխվածությունների վերականգնումը: Որոշ դեպքերում, առարկան ունենում է փոքր թվով խտության արժեքներ, և հավանաբար, բավարար կլինի փոքր թվով X-ճառագայթներ օգտագործել խնդրի լուծման մեջ: *Դիսկրետ տոմոգրաֆիան* այն տիրույթն է, որը ի զորու է ուսումնասիրել այս հատուկ դեպքերը: Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի անվանումը ըստ Լարի Շեփի է, որը կազմակերպեց այս տիրույթին նվիրված առաջին հանդիպումը 1994թ.:

Վերջին տարիների ընթացքում դիսկրետ տոմոգրաֆիան մեծ հետաքրքրություն է առաջացրել իր մաթեմատիկական ձևակերպումների, ինչպես նաև կիրառությունների բազմազանության պատճառով: Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի ընդհանուր տեսությունը լայնորեն օգտագործվում է, մասնավորապես, բժշկական պատկերների մշակման ժամանակ: Կիրառությունները առնչվում են նաև երկրակեղևի կառուցվածքի ուսումնասիրմանը և նրանում սեյսմիկ ալիքների տարածման ուսումնասիրմանը,

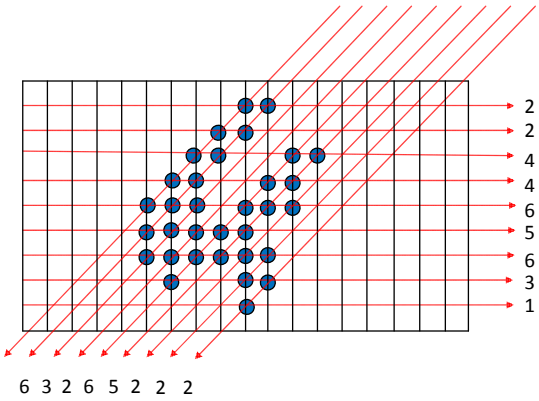
բյուրեղի կառուցվածքի վերականգնմանը ըստ էլեկտրոնային միկրոսկոպի ճառագայթային դիտարկումների, և այլն ([171], [155], [117], [119], [125]):

Դիսկրետ տոմագրաֆիային առնչվող խնդիրներ հետազոտվել են շատ ավելի վաղ, քան հաստատվել է տիրույթի անվանումը:

#### *1.1.2.1 Արդի վիճակի սեղմ նկարագիր*

Դիտարկենք $T$ դիսկրետ բազմությունը, որն իրենից ներկայացնում է ամբողջարժեք երկու չափանի ցանցի վերջավոր ենթաբազմություն: $T$-ում կատարվում են չափումներ, որոնցից յուրաքանչյուրն իր մեջ ներառում է պրոյեկտում, որը հաշվում է $T$-ի կետերի քանակը պրոյեկտման ուղղությանը զուգահեռ ուղիղների վրա: Տրված են վերջավոր թվով այդպիսի չափումներ/պրոյեկցիաներ, պահանջվում է վերականգնել $T$ բազմությունը, կամ՝ կառուցել այդ պրոյեկցիաներին համապատասխանող որևէ բազմություն:

$T$ բազմությունը կարող է ներկայացվել որպես բինար պատկեր /կամ բինար մատրից/: Նկար 1.1.2-1-ում պատկերված է բինար պատկեր և նրա պրոյեկցիաները ըստ նշված ուղղությունների:

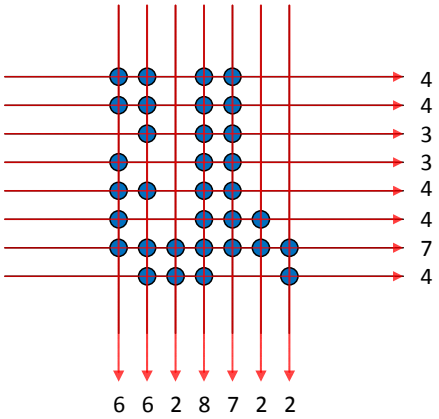



**Նկար 1.1.2-1**: Բինար պատկեր և նրա պրոյեկցիաները:

**Օրթոգոնալ պրոյեկցիաներ, բարդությունը**

Տարբեր հեղինակների կողմից բազմաթիվ ուսումնասիրություններ են նվիրվել այն դեպքի ուսումնասիրմանը, երբ դիտարկվում են միայն *օրթոգոնալ՝ հորիզոնական և ուղղահայաց պրոյեկցիաները*: Բինար մատրիցի տերմիններով՝ տողերի գումարների վեկտորը համապատասխանում է $T$ -ի հորիզոնական պրոյեկցիաներին, սյուների

գումարների վեկտորը՝ ուղղահայաց պրոյեկցիաներին: Նկար 1.1.2-2-ում պատկերված է բինար պատկեր իր օրթոգոնալ պրոյեկցիաներով, և՝ համապատասխան բինար մատրիցը:




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 6 | 6 | 2 | 8 | 7 | 2 | 2 | |

**Նկար 1.1.2-2:** Բինար պատկեր իր օրթոգոնալ պրոյեկցիաներով; համապատասխան բինար մատրիցը:

Դիցուք՝ տրված է $m$ տող և $n$ սյուն ունեցող $A = \{a_{i,j}\}$ բինար մատրիցը: $R$-ով և $S$-ով, համապատասխանաբար, նշանակենք մատրիցի տողերի գումարների և սյուների գումարների վեկտորները.

$$R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$$

$$S = (s_1, s_2, \cdots, s_n),$$

որտեղ $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ , $i = 1, \cdots, m$ և $s_j = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}$ , $j = 1, \cdots, n$:

$U(R,S)$-ով նշանակում ենք $R$ և $S$ տողերի և սյուների գումարներ ունեցող բոլոր բինար մատրիցների բազմությունը: Պարզ է, որ այդ մատրիցների համար $\sum_{i=1}^{m} r_i = \sum_{j=1}^{n} s_j$: Ակնհայտ է ենթադրել նաև, որ $r_i \leq m$ և $s_j \leq n$, - այս դեպքում ասում են, որ այդպիսի վեկտորների զույգը *թույլատրելի է*:

$U(R,S)$ դասում մատրիցի գոյության խնդիրը դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդրի պարզագույն դեպքն է, երբ դիտարկվում է պատկերի վերականգնումը տրված հորիզոնական և ուղղահայաց պրոյեկցիաներով: $U\ (R,S)$ դասում մատրիցի գոյությունը, և գոյության դեպքում՝ վերականգնումը, լուծվել է Գեյլի և Ռայզերի կողմից կոմբինատոր

տերմիններով դեռևս 1957 թ., [166], [87], [165], [57]: Նրանք գտել են մատրիցի գոյության պարզ անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

**Թեորեմ 1.1.2-1** [166]: Դիցուք՝ $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$ -ը և $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$-ը ամբողջ ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորներ են, որոնց կոմպոնենտները դասավորված են ըստ նվազման (չաճման) կարգի: $S^* = (s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*)$-ը $R$-ի համակցված/conjugate վեկտորն է՝ $s_i^* = |\{r_i : r_i \geq j, j = 1, \cdots, m\}|$: Այդ դեպքում, $U(R,S)$ դասը դատարկ չէ այն և միայն այն դեպքում, երբ՝

$\sum_{i=1}^{k} s_i \leq \sum_{i=1}^{k} s_i^*$, $k = 1, \cdots, n-1$, և $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} s_i^*$:

**Փոխանակման գործողություն**

[165]-ում ապացուցվում է նաև, որ $U(R,S)$ դասի բոլոր մատրիցները կարելի է ստանալ մեկը մյուսից՝ վերջավոր թվով պարզ ձևափոխությունների միջոցով:

**Սահմանում 1.1.2-1** [165]: Դիցուք՝ $A \in U(R,S)$ : $A$ մատրիցի էլեմենտների այնպիսի ձևափոխությունը, որը որևէ $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ տիպի ենթամատրիցը տանում է $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ տիպի ենթամատրիցի, կամ հակառակը, իսկ մյուս բոլոր էլեմենտները թողնում է անփոփոխ, կանվանենք *փոխանակում*:

Մատրիցում փոխանակման գործողությունը հնարավոր է, եթե այն պարունակում է $A_1$ կամ $A_2$ տիպի ենթամատրից /*փոխանակման կոմպոնենտ*/, հակառակ դեպքում մատրիցը կոչվում է *փոխանակումից ազատ*:

Փոխանակման կիրառումը $U(R,S)$ դասի մատրիցի վրա, այն դուրս չի բերում $U(R,S)$ դասից՝

**Թեորեմ 1.1.2-2** [165]: Դիցուք՝ $A$ -ն և $A'$ -ը մատրիցներ են $U\ (R,S)$ դասից: Այդ դեպքում, $A$ մատրիցը կարելի է ձևափոխել $A'$-ի վերջավոր թվով փոխանակումների միջոցով:

$U(R,S)$ դասին պատկանող $A$ մատրիցը միակն է, այն և միայն այն դեպքում, երբ այն չի պարունակում փոխանակման կոմպոնենտ:

Այստեղ դիտարկվում է նաև մեկ այլ խնդիր՝ գտնել մատրիցի բոլոր այն 0 էլեմենտները /կամ 1 էլեմենտները/, որոնց 1-ով փոխանակման /0-ով փոխանակման/ արդյունքում մատրիցը չի ունենա փոխանակման կոմպոնենտ: Սակայն, մատրիցում մինիմալ թվով

այսպիսի էլեմենտների գտնելու խնդիրը NP-դժվար է ([143]): [132]-ում ուսումնասիրվում են $U(R,S)$ դասում մատրիցի միակության հարցերը (տողերի և սյուների տեղափոխությունների ճշտությամբ):

**Բարդությունը ընդհանուր դեպքում**

Պարզ է, որ պրոյեկցիաների տրված վերջավոր բազմության համար կարող են գոյություն ունենալ նույն պրոյեկցիաներն ունեցող տարբեր առարկաներ ([88]), իսկ փոքր թվով պրոյեկցիաներով առարկայի վերականգնման խնդիրը կարող է ունենալ մեծ թվով լուծումներ: Ընդհանուր առմամբ, եթե տրված են միայն հորիզոնական և ուղղահայաց պրոյեկցիաները, ապա լուծումների քանակը կարող է լինել էքսպոնենցիալ ([69]): Մյուս կողմից, պրոյեկցիաների կամայական բազմության համար, որը պարունակում է թվով երկուսից մեծ իրարից տարբեր (ոչ կոլինեար) ուղղություններով պրոյեկցիաներ, - առարկայի վերականգնման /վերակառուցման/ խնդիրը NP-լրիվ է ([89], [90]): Երկուսից մեծ թվով պրոյեկցիաների դեպքում վերակառուցման խնդիրը շատ անկայուն է, այսինքն, X-ճառագայթների փոքր շեղումը կարող է բերել միանգամայն այլ առարկայի վերակառուցման [21], [184], [185], և այն կայուն է, երբ պրոյեկցիաների քանակը երկուս է [20], [84], [85]:

Վերականգնվող առարկայի մասին որևէ այլ նախնական հատկություն/ինֆորմացիա կարող է նեղացնել հնարավոր լուծումների դասը: Այս իմաստով առարկայի հաճախ օգտագործվող երկրաչափական հատկություններից են *ուռուցիկությունը* և *կապակցվածությունը*: Այս հատկությունների տարբեր կոմբինացիաների կիրառմամբ խնդրի բարդությունը կարող է փոխվել կամ մնալ նույնը:

**Երկրաչափական սահմանափակումներ**

**Սահմանում 1.1.2-2 (**[30]**):** Բինար մատրիցը *հորիզոնական ուռուցիկ* է՝ $h$-ուռուցիկ, եթե բոլոր տողերում 1-երը հաջորդում են միմյանց (կազմում են ինտերվալ): Մատրիցը *ուղղահայաց ուռուցիկ* է՝ $v$-ուռուցիկ, եթե բոլոր սյուներում 1-երը հաջորդում են միմյանց: Մատրիցը $hv$*-ուռուցիկ* է, եթե այն և՛ հորիզոնական, և՛ ուղղահայաց ուռուցիկ է:

**Սահմանում 1.1.2-3** ([97], [93])**:** Բինար մատրիցը *կապակցված* է, եթե նրա 1-երը կապակցված են ըստ հարևանության հարաբերության: Սահմանվում է 4-հարևանություն, երբ յուրաքանչյուր էլեմենտ կից է իր հորիզոնական և ուղղահայաց հարևաններին, և 8-հարևանություն, երբ յուրաքանչյուր էլեմենտ կից է նաև ըստ անկյունագծերի իր հարևաններին: 4-հարևանությամբ կապակցված պատկերը անվանում են նաև *պոլիոմինո/polyomino*:

Եթե որևէ սահմանափակում չկա, ապա ինչպես տեսանք, օրթոգոնալ պրոյեկցիաներով բինար մատրիցի գոյության խնդիրը բազմանդամային բարդության է: [30]-ում ցույց է տրվել, որ մատրիցի գոյության խնդիրը NP-լրիվ է $h$-ուռուցիկ, $v$-ուռուցիկ, $h$-ուռուցիկ պոլիոմինոյի, և $v$-ուռուցիկ պոլիոմինոյի դեպքում: Առաջարկվել է նաև բազմանդամային ալգորիթմ $hv$-ուռուցիկ պոլիոմինոյի համար ([30], [74]): Այնուհետև, [63]-ում գտնվել է $O\,(mn\,(m+n)$ ժամանակում աշխատող ալգորիթմ: [189]–ում ապացուցվել է $hv$-ուռուցիկ մատրիցի գոյության և կապակցված մատրիցի գոյության խնդիրների NP-լրիվությունը: [68], [118]-ում դիտարկվում են $hv$-ուռուցիկ մատրիցի կառուցման մոտավոր ալգորիթմներ:

Աղյուսակ 1.1.2-1-ում ներկայացված է ըստ տրված օրթոգոնալ պրոյեկցիաների/կշիռների բինար մատրիցի գոյության խնդրի բարդությունը տարբեր պայմանների/սահմանափակումների առկայության դեպքում:

**Աղյուսակ 1.1.2-1**: Խնդրի բարդությունը՝ ըստ տարբեր պայմանների /սահմանափակումների:

| Օրթոգոնալ պրոյեկցիաներ | $hv$-ուռուցիկ | $h$-ուռուցիկ | $v$-ուռուցիկ | Սահմանափակում չկա |
|---|---|---|---|---|
| Պոլիոմինո | P | NP-լրիվ | NP-լրիվ | NP-լրիվ |
| Սահմանափակում չկա | NP-լրիվ | NP-լրիվ | NP-լրիվ | P |

#### *1.1.2.2 Ամփոփիչ դիտողություններ*

Ինչպես տեսանք, դիսկրետ տոմոգրաֆիայի գոյության և կառուցման խնդիրները ներկայացվում են կշռված (0,1) մատրիցի միջոցով: Կախված տարբեր լրացուցիչ պայմանների և սահմանափակումների առկայությունից, որոնք այս դեպքում տրվում են ուռուցիկության և կապակցվածության տերմիններով, խնդրի բարդությունը կարող է փոխվել P-ից NP-լրիվ, և հակառակը: Մի կողմից, կարևոր է հետազոտել, թե որ սահմանափակումների առկայությունը/բացակայությունն է խնդիրը դարձնում հեշտ լուծելի, մյուս կողմից, կան բնական սահմանափակումներ, որոնք գալիս են կիրառական խնդիրներից, մեկ այլ դեպքում՝ տվյալ սահմանափակման առկայությամբ խնդիրը հանգում է /կամ համարժեք է/ այլ տիրույթի հայտնի խնդիրներին: Այս կետի ձևակերպումներում բնութագրական են նաև հակադարձ խնդրի և փոխանակումների դերը: Աշխատանքում (Գլուխ 4) դիտարկվում են դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրներ նոր կարևոր սահմանափակումներով, հետազոտվում են նրանց բարդության հետ կապված հարցեր, կառուցվում են նրանց լուծման ալգորիթմներ: Այդ ընթացքում ներմուծում է նաև շերտային պրոյեկցիայի գաղափարը ըստ մատրիցի սյուների որոշակի խմբերի:

### *1.1.3 Բազմարժեք բազմաչափ ցանց*

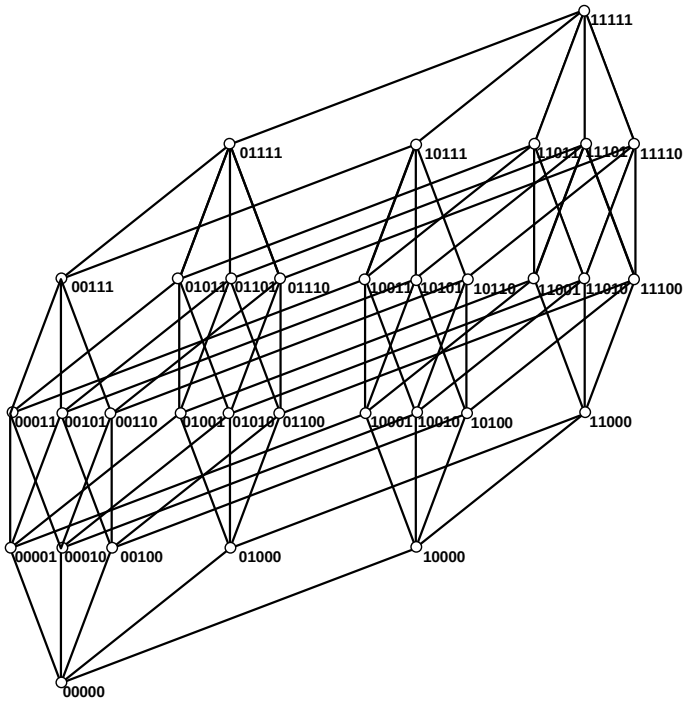
Դիտարկվող խնդիրների ուսումնասիրությունների հաջորդ խումբը տարվել է $n$-չափանի միավոր խորանարդի տերմիններով ([3], [2], [1], [49], [142], [121]): $n$-չափանի միավոր խորանարդի գագաթների $E^n$ բազմությունը իրենից ներկայացնում է $E = \{0,1\}$ բազմության $n$ -րդ դեկարտյան աստիճանը.

$$E^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in E, i = 1, \cdots, n\}:$$

Կամայական $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in E^n$ գագաթը ստացվում է $E^n$ -ը կազմող $x_1, x_2, \cdots, x_n$ բինար փոփոխականների արժեքների ֆիքսումով (վերագրումով):

$E^n$-ի երկրաչափական պատկերումը հարմար է ըստ Հասսեի դիագրամի ([179])՝ այն ունի $n+1$ մակարդակ՝ համարակալված 0-ից $n$ : $k$ -րդ մակարդակում /կամ խորանարդի շերտում/ գտնվում են $E^n$-ի այն բոլոր գագաթները /վեկտորները/, որոնք

ունեն ճիշտ $k$ հատ մեկ արժեքով կոմպոնենտ: Երկու հարևան գագաթներ՝ այն որ միացված են կողով, անմիջապես նախորդում են /ծածկում են/ մեկը մյուսին: Նկար 1.1.3-1-ում պատկերված է $E^5$-ի Հասսեի դիագրամը:




**Նկար 1.1.3-1**: $E^5$-ի Հասսեի դիագրամը:

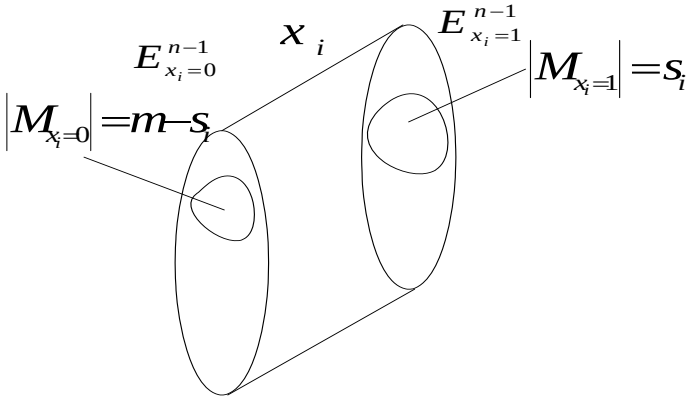
**Միավոր խորանարդի տրոհում**

Կամայական $x_i$-ի համար դիտարկենք $E^n$-ի *տրոհումը* ըստ $x_i$ փոփոխականի արժեքի (այն կանվանենք նաև 1-տրոհում): Կստանանք $(n-1)$ -չափանի երկու ենթախորանարդներ.

$$E^{n-1}_{x_i=0} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E^n | x_i = 0\}$$

$$E^{n-1}_{x_i=1} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E^n | x_i = 1\}:$$

Յուրաքանչյուր $M \subseteq E^n$ բազմություն կտրոհվի համապատասխանաբար $M_{x_i=1}$ և $M_{x_i=0}$ ենթաբազմությունների (որոնք կարող են և դատարկ լինել)՝ $M_{x_i=1} \subseteq E^{n-1}_{x_i=1}$, $M_{x_i=0} \subseteq E^{n-1}_{x_i=0}$: Նկար 1.1.3-2-ում բերված է տրոհման սխեմատիկ պատկերը:




**Նկար 1.1.3-2:** $E^n$-ի տրոհումը ըստ $x_i$ փոփոխականի արժեքի

**Տրոհումների ասոցացված վեկտոր**

Ներկա աշխատանքում ներմուծվում է $M \subseteq E^n$ բազմության *տրոհումների ասոցացված վեկտոր* գաղափարը, որը կազմված է 1-տրոհումների հզորություններից ըստ $x_i = 1$ արժեքների.

**Սահմանում 1.1.3-1:** $S = (s_1, \cdots, s_n)$ ամբողջարժեք վեկտորը կոչվում է $M \subseteq E^n$ բազմության *տրոհումների /1-տրոհումների/ ասոցացված վեկտոր*, եթե $s_i = |M_{x_i=1}|$, $i = 1, \cdots, n$:

Եթե $M$ բազմության տրոհումների ասոցացված վեկտորը բավարարում է $s_i \geq |M|/2$ $(i = 1, \cdots, n)$ պայմանին, ապա բազմությունը կանվանենք *բերված տեսքի*: Պարզ է, որ խորանարդի կամայական ենթաբազմություն փոփոխականների բացասմամբ կարելի է բերել բերված տեսքի, որը միակն է:

$E^n$-ը կարելի է տրոհել նաև ըստ փոփոխականների խմբերի: Տրոհելով ըստ $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ փոփոխականների, կստանանք $2^k$ հատ $(n-k)$-չափանի ենթախորանարդներ, որտեղ նրանցից յուրաքանչյուրում $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ փոփոխականների արժեքները ֆիքսված են համապատասխան ձևով: Օրինակ, $E^{n-k}_{x_{i_1}=1,\cdots,x_{i_k}=1} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E^n | x_{i_1} = 1, \cdots, x_{i_k} = 1\}$:

Այսպիսի ենթաբազմությունը, որի համար որևէ $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ փոփոխականների արժեքները ֆիքսված են, իսկ մնացած փոփոխականների արժեքները կամայական են, - կանվանենք *ինտերվալ;* տվյալ դեպքում, $E^{n-k}_{x_{i_1}=1,\cdots,x_{i_k}=1}$-ը $n-k$-*չափանի* ինտերվալ է:

**Ստվեր/shadow** [108]

Դիցուք՝ $\mathcal{M} \subseteq E^n$-ը գագաթների ենթաբազմություն է: $\mathcal{M}$-ի $i$-*ստվերը/shadow*՝ $\delta^i\mathcal{M}$-ը, - դա $E^n$-ի $i$-րդ շերտի այն գագաթների բազմությունն է, որոնք փոքր են $\mathcal{M}$-ի որևէ գագաթից:

Այն դեպքում, երբ $\mathcal{M}$-ի բոլոր գագաթները միևնույն շերտից են, դիցուք՝ $k$-րդ, ապա $\mathcal{M}$-ի *ստվերը*՝ $\delta\mathcal{M}$-ը դա $\delta^{k-1}\mathcal{M}$-ն է, այսինքն, $k-1$-րդ շերտի այն բոլոր գագաթների բազմությունը, որոնք փոքր են $\mathcal{M}$-ի որևէ գագաթից:

**Տեղաշարժի գործողություն/shifting operation or exchange,** ([79], [18]) Տեղաշարժի գործողությունը դա կոմբինատոր կամ հանրահաշվական գործողությունների մի յուրահատուկ խումբ է: Դիցուք՝ $\mathcal{M} \subseteq E^n$-ը գագաթների ենթաբազմություն է, և $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathcal{M}$, $\widetilde{\alpha'} = (\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_n) \in E^n$:

$S_{i,j}(\tilde{\alpha})$ *տեղաշարժի գործողությունը* կատարում է հետևյալը.

- եթե $\tilde{\alpha}$-ում $\alpha_i = 0$ և $\alpha_j = 1$, և $\widetilde{\alpha'} \notin \mathcal{M}$, որտեղ $\alpha'_i = 1$ և $\alpha'_j = 0$, և $\alpha'_k = \alpha_k$ $k \neq i, j$ համար, ապա $\tilde{\alpha}$-ն փոխարինվում է $\widetilde{\alpha'}$-ով;
- հակառակ դեպքում $\tilde{\alpha}$-ն մնում է նույնը:

Սովորաբար, $S_{i,j}(\tilde{\alpha})$ գործողությունը կիրառվում է հաջորդաբար, ենթադրելով, որ $i < j$ ըստ $E^n$-ի փոփոխականների կարգի: Արդյունքում ստացվում է $\mathcal{M}$ բազմության այսպես կոչված "սեղմումը":

Ներկա աշխատանքում մենք կներմուծենք և կօգտագործենք ևս մեկ տեղաշարժի գործողություն՝ $S_i(\tilde{\alpha})$:

$S_i(\tilde{\alpha})$ *տեղաշարժի գործողությունը* կատարում է հետևյալը.

- եթե $\tilde{\alpha}$-ում $\alpha_i = 0$, և $\widetilde{\alpha'} \notin \mathcal{M}$, որտեղ $\alpha'_i = 1$, և $\alpha'_k = \alpha_k$ $k \neq i$ համար, ապա $\tilde{\alpha}$-ն փոխարինվում է $\widetilde{\alpha'}$-ով;
- հակառակ դեպքում $\tilde{\alpha}$-ն մնում է նույնը:

**Ներքին և եզրային գագաթներ** [2]

Կամայական $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ և $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ գագաթների համար $E^n$ -ից, սահմանենք նրանց միջև Հեմինգի հեռավորություն՝ $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$: Կասենք, որ $\tilde{\alpha} \in E^n$ գագաթը նախորդում է $\tilde{\beta} \in E^n$ գագաթին՝$\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, եթե $\alpha_i \leq \beta_i, i = 1, \cdots, n$: Եթե այդ

դեպքում $\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) = 1$ , ապա կասենք, որ գագաթները անմիջական են հաջորդում միմյանց: *Շղթան՝* գագաթների անմիջական հաջորդումների մոնոտոն շարք է: $r$ շառավղով և $\tilde{\alpha}$ կենտրոնով $S_r(\tilde{\alpha})$ գունդ՝ $E^n$-ի այն գագաթների բազմությունն է, որոնք ունեն $\leq r$ հեմինգյան հեռավորութուն $\tilde{\alpha}$-ից:

$A \in E^n$ բազմության $\tilde{\alpha}$ գագաթը կանվանենք *ներքին,* եթե $S_1(\tilde{\alpha}) \subseteq A$: Հակառակ դեպքում գագաթը կանվանենք *եզրային*: A բազմության ներքին և եզրային գագաթների բազմությունները, համապատասխանաբար, նշանակենք $I(A)$-ով և $B(A)$-ով:

**Բուլյան արտահայտություն** [3]

*Բուլյան կամ propositional-logic արտահայտություն ասելով կհասկանանք* բինար փոփոխականներից և հաստատուններից կազմված բանաձև, որն օգտագործում է AND /կոնյունկցիա/, OR /դիզյունկցիա/, և NOT /բացասում/ տրամաբանական գործողությունները: Հատատունները “ճիշտ”/1 և “սխալ”/0 արժեքներն են:

Բուլյան արտահայտությունը տրված է *կոնյունկտիվ նորմալ ձևի տեսքով* (CNF), եթե այն դիզյունկտների կոնյունկցիա է, այսինքն $C_1 \& \cdots \& C_m$ տեսքի է, որտեղ յուրաքանչյուր $C_i$-ն լիտերալների դիզյունկցիա է՝ $C_i = u_{i_1} \vee \cdots \vee u_{i_k}$ , և յուրաքանչյուր $u_{i_j}$ լիտերալը կամ $x_{i_j}$ փոփոխականն է, կամ նրա բացասումը:

Բուլյան արտահայտությունը տրված է *դիզյունկտիվ նորմալ ձևի* տեսքով (DNF), եթե այն կոնյունկտների դիզյունկցիա է, այսինքն, $C_1 \vee \cdots \vee C_m$ տեսքի է, որտեղ յուրաքանչյուր $C_i$-ն - լիտերալների կոնյունկցիա է:

**Բուլյան ֆունկցիա** [3]

*Բուլյան ֆունկցիան՝ դա* $f(x_1, x_2, \cdots, x_n): E^n \to \{0,1\}$ արտապատկերում է:

**Սահմանում 1.1.3-2** ([3]): $f$ բուլյան ֆունկցիան կոչվում է *մոնոտոն*, եթե $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ -ից հետևում է, որ $f\ (\tilde{\alpha}) \ \leq f\ (\tilde{\beta})$, կամայական $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E^n$ համար:

Յուրաքանչյուր բուլյան $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ֆունկցիա երկրաչափորեն կարելի է պատկերել $E^n$-ում՝ ֆունկցիային համապատասխանեցնելով $E^n$-ի բոլոր այն գագաթների բազմությունը, որոնց վրա ֆունկցիան ընդունում է 1 արժեք: Այս ձևով, մոնոտոն բուլյան

ֆունկցիաների 1 արժեքների բազմությունները ներկայացնում են $E^n$ -ում բազմությունների հատուկ դաս:

### *1.1.3.1 Արդի վիճակի սեղմ նկարագիր*

**Իզոպերիմետրիկ խնդիր**

Դիտարկվում են այսպես կոչված գագաթային ([1]) և կողային ([39]) *դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդիրներ*: Անդրադառնանք *գագաթային իզոպերիմետրիային*: Դիցուք՝ տված է $m$ թիվ, $0 \leq m \leq 2^n$: Դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդիրը փնտրում է այնպիսի $A \subseteq E^n$, $|A| = m$ բազմություն, որ

$$I(A) = \min_{M \subseteq E^n, |M|=m} B(M):$$

Իրականում, դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդիրների դասը շատ լայն է, այն կախված է դիտարկվող դիսկրետ տարածությունից և կիրառվող սահմանափակումներից, բայց մենք կբավարարվենք ձևակերպված հիմնական խնդրի դիտարկմամբ: Խնդրի հետ կապված առաջին ուսումնասիրությունները կատարվել են Լ.Հարպերի և Ռ.Նիգմատուլինի աշխատանքներում ([108], [8], [9]): Լ.Հարպերը, օգտագործելով «տեղաշարժ» գործողությունը, ստացել է իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծում՝ կառուցելով աճեցվող լուծումներ բառարանային հաջորդականության սկզբնահատվածների տեսքով: Հայտնի են Ռ.Նիգմատուլինի իզոպերիմետրիկ երեք անհավասարությունները.

I. Կամայական $A \subseteq E^n$-ի և $i \in \overline{1,n}$-ի համար $B\ (A)\ \supseteq (B\ (A_{x_{i=0}}) \cup B\ (A_{x_{i=1}}))$:

II. Կամայական բերված տեսքի $A \subseteq E^n$-ի և $i \in \overline{1,n}$-ի համար

$|B\ (A)| \geq \left|B\left(A_{x_{i=1}}\right)\right| + \left|A_{x_{i=1}}\right| - \left|A_{x_{i=0}}\right|$:

III. Եթե $A \subseteq E^n$, $|A| = m = \sum_{t=0}^{k} C_n^t + \delta$, $0 \leq k \leq n$ և $0 \leq \delta \leq C_n^{k+1}$ ապա $\exists i \in \overline{1,n}$ այնպես որ $\left|A_{x_{i=1}}\right| \geq \sum_{t=0}^{k-1} C_{n-1}^t + \delta \frac{k+1}{n}$:

Եթե ենթադրենք, որ $A$-ն բերված բազմություն է, ապա

$\sum_{t=0}^{k-1} C_{n-1}^t + \delta \frac{k+1}{n} \leq \left|A_{x_{i=0}}\right| \leq \left|A_{x_{i=1}}\right| \leq \sum_{t=0}^{k-1} C_{n-1}^t + \delta \frac{n-k-1}{n}$:

Լ.Ասլանյանը, օգտագործելով Ռ.Նիգմատուլինի III անհավասարությունը, տվել է դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծումների բազմության նկարագիրը ([1], [25], [26]):

Խնդրի լուծման ընթացքով պայմանավորված էլ կարևորվել է $E^n$ -ի ենթաբազմությունների *տրոհումների հզորությունների նկարագրման խնդիրը*:

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է տրոհումների հզորությունների նկարագրման խնդիրը $E^n$-ի տրված $m$ հզորության ենթաբազմությունների համար:

**Մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի վերծանում**

Աշխատանքում ակտիվորեն օգտագործվում է բինար խորանարդի հայտնի կառուցվածքները կապված շղթաների տրոհման և Շպերների համակարգերի հետ ([76]): Բերենք դասական սահմանումները և գաղափարները այս տիրույթից:

Մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի *վերծանումը* ալգորիթմական խնդիր է, որը խորանարդի գագաթների ընտրության և նրանցում ֆունկցիայի արժեքի հարցման ճանապահով, օգտագործելով նաև այն, որ ենթադրյալ ֆունկցիան մոնոտոն է, փորձում է այն վերականգնել ([106], [126], [150]):

Դիցուք՝ $A$-ն $E^n$-ում որոշված մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի ճանաչման որևէ ալգորիթմ է: $\phi_A(f)$-ով նշանակենք հարցումների մինիմալ քանակը, որը բավարար է $A$ ալգորիթմով տրված $f$ ֆունկցիայի ճանաչման համար: $\phi_A(n)$ -ով նշանակենք հարցումների մինիմալ քանակը, որը բավարարում է $n$ փոփոխականի կամայական ֆունկցիայի $A$ ալգորիթմով ճանաչման համար: Եվ, $\phi(n) = min\phi_A(n)$, որտեղ մինիմումը ըստ մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի ճանաչման բոլոր ալգորիթմների է: $\phi(n)$-ի համար մի շարք ստորին և վերին գնահատականներ/եզրեր են գտնվել Վ.Կորոբկովի կողմից [133]-ում: Ի լրումն այս խնդրի շուրջ Վ.Կորոբկովի ([133]) և Ա.Կորշունովի ([6], [134], [135]) հիմնարար հետազոտությունների, հարկ է նշել Գ.Հանսելի ([106]) արդյունքը, ինչը առանձնահատուկ տեղ ունի այս տիրույթում:

**Թեորեմ 1.1.3-1** ([106]) : $\phi(n) = C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} + C_n^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$:

Վերին եզրը ապացուցելու համար Գ.Հանսելը կառուցել է ալգորիթմ, որը հիմնվում է խորանարդի՝ հատուկ չհատվող շղթաների տրոհման վրա:

**Գ.Հանսելի շղթաներ [106]**

$E^n$ - ը կարելի է ծածկել $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ չհատվող շղթաներով, որոնք ունեն հետևյալ հատկությունները.

ա/ $n-2p+1$ երկարության շղթաների քանակը $C_n^p - C_n^{p-q}$ է, $0 \le p \le \lfloor n/2 \rfloor$:

բ/ $n-2p+1$ երկարության շղթայի մինիմալ տարրը պատկանում է $p$ շերտին,

գ/ $n-2p+1$ երկարության կամայական շղթայի երեք հաջորդական $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \alpha_3$ տարրերի համար նրանց հարաբերական լրացումը պատկանում է $n-2p-1$ երկարության շղթայի:

Այս հատկությունների հիման վրա մոնոտոն ֆունկցիայի վերծանման ալգորիթմը, սկսելով աշխատանքը ամենակարճ շղթաներից, ընթացիկ գագաթների վրա հարցնում է ֆունկցիայի արժեքը, ըստ հարաբերական լրացման ինֆորմացիան տարածում է հաջորդ երկարության շղթաների վրա այնպես, որ նրանցում մնում է ամենաշատը երկու անորոշ կետ, և հարցնում է ֆունկցիայի արժեքը նրանց վրա: Արդյունքում՝ հարցերի քանակը չի գերազանցում $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} + C_n^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$-ը:

Չնայած ալգորիթմը պարզ է և էլեգանտ, այնուամենայնիվ, այն օգտագործում է $|E^n|$ հիշողություն՝ $E^n$-ի բոլոր գագաթները պահելու համար:

Գ.Տոնոյանի կողմից ([182]) մշակվել է հանրահաշիվ, որը թույլ է տալիս առանց շղթաները կառուցելու, պարզ հաշվարկների օգնությամբ ապահովել վերծանման նշված ալգորիթմի պահանջները: Սա բերում է ըստ ժամանակի և հիշողության վերծանման օպտիմալ ալգորիթմին: Հետագայում նման ալգորիթմներ մշակվեցին Դ.Սոկոլովի, Ա.Սերժանտովի, և այլոց կողմից ([175], [176], [170]):

Մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման խնդիրը ավելի բարդ է բազմարժեք բազմաչափ խորանարդի/ցանցի համար: Այն հետազոտվել է Վ.Կորոբկովի, Վ.Ալեքսեևի, Զոլոտիխի և ուրիշների կողմից ([133], [16], [170], [191]): Դիցուք՝ $M$-ը և $N$-ը բազմարժեք բազմաչափ խորանարդի երկու միջին շերտերն են ([124]): [16]-ում Վ.Ալեքսեևը կառուցում է Գ.Հանսելի շղթաների անալոգը և կազմում է մոնոտոն վերծանման ալգորիթմ $|M| + \log_2 n \cdot |N|$ բարդությամբ: $\log_2 n$ արտադրյալը առաջանում է կապված այն բանի հետ, որ շղթաները մեկ կոորդինատով շարունակում են աճել երկար:

#### *1.1.3.2 Ամփոփիչ դիտողություններ*

Ներկա աշխատանքում ներկայացվում է բազմարժեք բազմաչափ ցանցի՝ *չհատվող բինար խորանարդների տրոհման նոր տեխնիկա*, որի հիման վրա կառուցվում են մոնոտոն բինար ֆունկցիաների վերծանման ալգորիթմներ: Սա այլընտրանք է Վ.Ալեքսեևի ալգորիթմին, ունի նրա հետ համադրելի բարդություն, սակայն կարևոր է, որ այս ալգորիթմները օգտագործում են պարզ, մեկնաբանելի կառուցվածքներ և հեշտորեն զուգահեռացվող են:

## 1.2 Մոդելավորման հարակից գործիքներ

Այս կետը ներկայացնում է երկու հանրահայտ հաշվարկային մոդելներ, որոնցում կարելի է ներկայացնել մեր հետազոտության առարկան, ինչը և հնարավորություն է տալիս օգտագործել այդ մոդելների շուրջ ստեղծված հարուստ տեսական և կիրառական դրույթները: Իր այս տեսքով սա, նվազագույնը, տեղեկատվություն է օգտակար գործիքների մասին լրացնելով ընդհանուր պատկերը, սակայն որոշ կոնկրետ դիտարկումներ ևս իրականացված և բերված են համապատասխան մոտավոր լուծման ալգորիթմների բաժնում:

Այս բաժնում, հարակից գործիքների շարքում ներկայացվում է նաև տվյալների պեղման հիմնական մեթոդներից մեկը՝ ասոցիատիվ կանոնների պեղման մոդելը: Ներկա աշխատանքում ներմուծված բազմարժեք բազմաչափ ցանցի խորանարդատիպ տրոհումն իր կիրառումն ունի քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղման ընդհանրական մոդելում, որտեղ ի տարբերություն բինար դեպքի, տարրերի առկա կամ բացակա լինելուց բացի հաշվի է առնվում նաև տարրերի պատիկությունը:

### *1.2.1 Սահմանափակումների բավարարման խնդիրներ*

Սահմանափակումների բավարարման խնդիրը (Constraint Satisfaction Problems - CSP) ([183], [168], 99], [54]), ընդհանուր առմամբ, տրամադրում է միավորող մաթեմատիկական ձևաչափ /մոդել/, որտեղ հնարավոր է բնական ճանապարհով ներկայացնել բազմազան հաշվողական խնդիրներ, որոնք գործ ունեն արտապատկերման և վերագրման հետ: CSP խնդիրների հետազոտումը սկիզբ է առել

իրարից անկախ՝ արհեստական բանականության, տվյալների հենքերի տեսության և գրաֆների տեսության մեջ երեք տարբեր ձևաչափերով, և միայն 25-30 տարի անց, 1990-ականների վերջին պարզ է դարձել, որ դրանք ըստ էության, նույն հիմնարար խնդրի տարբեր տեսքերն են: Այսօր CSP-ն լայնորեն օգտագործվում է տեսական համակարգչային գիտության մեջ, քանի որ լինելով կառուցվածքով շատ հարուստ մաթեմատիկական օբյեկտ, այն ապահովում է գերազանց միջավայր ինչպես մասնավոր, այնպես էլ ընդհանրական մոդելների, և թե ալգորիթմական տեխնիկայի մշակման համար:

*Սահմանափակումների բավարարման խնդիրը* ձևակերպվում է $< X, D, C >$ եռյակի տեսքով, որտեղ.

$X = \{X_1, \cdots, X_n\}$-ը փոփոխականների բազմություն է;

$D = \{D_1, \cdots, D_n\}$-ը փոփոխականների արժեքների համապատասխան տիրույթներն են;

$C = \{C_1, \cdots, C_m\}$-ը սահմանափակումների բազմություն է:

Յուրաքանչյուր $C_j \in C$ սահմանափակում ներկայացվում է $< t_j, R_j >$ զույգով, որտեղ $t_j \subset X$ հանդիսանում է փոփոխականների ենթաբազմություն, դիցուք՝ $k$ հզորության, և $R_j$ -ն՝ $k$ -տեղանի հարաբերություն է $D$ բազմության համապատասխան ենթաբազմության վրա: *Վերագրումը*՝ արտապատկերում է սահմանափակման փոփոխականների ենթաբազմությունը արժեքների որոշակի բազմության վրա: Կասենք, որ $v$ *վերագրումը բավարարում է* $< t_j, R_j >$ սահմանափակմանը, եթե $t_j$ բազմության փոփոխականներին վերագրված արժեքները բավարարում են $R_j$ հարաբերությանը: Կասենք, որ վերագրումը *հավաստի* է, եթե այն բավարարում է խնդրի բոլոր սահմանափակումներին: Վերագրումը *ամբողջական է* /complete/, եթե այն պարունակում է բոլոր փոփոխականները: Վերագրումը *հանդիսանում է լուծում*, եթե այն հավաստի է և ամբողջական: Այդ դեպքում ասում են, որ այդ վերագրումը *լուծում է* սահմանափակումների բավարարման խնդիրը:

Հայտնի է, որ CSP խնդիրները NP-լրիվ դասի խնդիրներ են ([91]): CSP խնդիրներում դիտարկվում են սահմանափակումների նկարագրման որոշակի մասնավոր տիպեր՝ տրամաբանական, հանրահաշվական, և այլն, որոնք և կազմում են այսպես կոչված CSP լեզուները: Ընտրելով համապատասխան լեզու, կարելի է ստանալ գրաֆների

տեսության, տրամաբանության, հանրահաշվի բազմաթիվ հայտնի հաշվողական խնդիրների համարժեք ձևակերպումներ: Այս տերմիններով է տրվում Տ.Ֆեդերի և Մ.Վարդի CSP դիխոտոմիայի /երկատման/ *հիպոթեզը* [80], ըստ որի սահմանափակումների յուրաքանչյուր ֆիքսված լեզվի համար, համապատասխան CSP-ն կամ P կամ NP-լրիվ դասում է: Նկարագրման լեզվից բացի, մյուս հիմնական ուսումնասիրման առարկան CSP սահմանափակումների կառուցվածքն է, որտեղ խոսվում է մաթեմատիկական հատկությունների մասին, որոնք երբեմն այս բարդ հաշվողական խնդիրը դարձնում են հեշտ լուծելի ([120], [98], [145], [146], [137]):

Չնայած $P/NP$ համակարգում բարդության միջանկյալ խնդիրների հնարավոր գոյությանը ([140]), հաշվողական բարդության հետազոտությունները բերել են հետևյալ զարմանալի երկատմանը. «Բնական հաշվողական խնդիրները համարյա միշտ լրիվ են բարդության ստանդարտ $P/NP$ դասերում» [29]: Եթե դիխոտոմիայի հիպոթեզը ապացուցվի, ապա CSP խնդիրները կհանդիսանան $NP$ դասի խնդիրների մեծ ենթադաս, որոնք $NP$ միջանկյալ չեն:

1978 թ. Տ.Շեֆերը [172] դիտարկել է NP դասի խնդիրների մի ենթադաս, և այդ դասի համար ապացուցել է “դիխոտոմիայի” մասին թեորեմը՝ այդ ենթադասի կամայական խնդիր կամ պատկանում է $P$ դասին, կամ $NP$-դժվար է:

**Իրագործելիության ընդհանրացված խնդիր**

Դիցուք՝ $\mathcal{F}$-ը Բուլյան ֆունկցիաների վերջավոր բազմություն է: *$\mathcal{F}$-սահմանափակումների բազմությունը* սահմանափակումների այնպիսի բազմություն է, որտեղ օգտագործվում են միայն $\mathcal{F}$-ի ֆունկցիաները:

**$\mathcal{F}$-իրագործելիության խնդիր**: Գոյություն ունի արդյոք փոփոխականներին արժեքների այնպիսի վերագրում, որ բավարարի $\mathcal{F}$- սահմանափակումների բազմությանը:

Տ.Շեֆֆերը բացահայտել է Բուլյան ֆունկցիաների 6 դաս, որոնցից յուրաքանչյուրի համար $\mathcal{F}$-իրագործելիության խնդիրը $P$ դասից է, և ապացուցել է, որ եթե խնդիրը չի պատկանում այս դասերից որևէ մեկին, ապա այն $NP$ –լրիվ է:

**Դիխոտոմիայի/երկատման թեորեմ** [172]: Տրված է $\mathcal{F}$ -սահմանափակումների բազմությունը: Եթե $\mathcal{F}$-ը բավարարում է հետևյալ պայմաններից որևէ մեկին. 0-վավեր է;

1-վավեր է; Horn-ի ֆունկցիա է; anti-Horn ֆունկցիա է; Աֆինական է; Բիեկտիվ է, - ապա $\mathcal{F}$-իրագործելիության խնդիրը $P$ դասում է; - հակառակ դեպքում, այն $NP$-լրիվ է:

**Սահմանափակումների բավարարման խնդիրների հեշտ լուծվող դասեր**

Այսպիսով, սահմանափակումների բավարարման խնդիրը ընդհանուր դեպքում, երբ մուտքային տվյալների վրա որևէ լրացուցիչ սահմանափակում չի դրված, - $NP$-լրիվ է: CSP խնդիրների հեշտ լուծվող դասերի հարցը ուսումնասիրվում է երկար ժամանակ տարբեր հեղինակների կողմից, և այժմ էլ այն ակտիվ հետազոտությունների առարկա է: Այնուամենայնիվ, հեշտ լուծվող դասերի հետազոտությունները տեսական են ([172], [58], [120], [80], [83], [98], [47]):

### *1.2.2 Գծային ծրագրավորում*

Գծային ծրագրավորման խնդրի ([169], [96], [11]) կանոնական տեսքով ներկայացումը հետևյալն է.

$$max\{c^T x|\ Ax \leq b, x \geq 0\} \qquad (LP)$$

որտեղ. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$–ը անհայտ փոփոխականների վեկտորն է, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$-ը և $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$-ը գործակիցների վեկտորներ են, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$-ն՝ գործակիցների մատրից է: $c^T x$-ը նպատակային ֆունկցիան է, $Ax \geq b$՝ սահմանափակումներ են:

$x$ վեկտորը, որը բավարարում է $Ax \geq b$ սահմանափակումներին, կոչվում է *թույլատրելի լուծում*: Այն թույլատրելի լուծումը, որի համար նպատակային ֆունկցիայի արժեքը մաքսիմալ է, կոչվում է *օպտիմալ լուծում*:

Գծային ծրագրավորման խնդիրը կարող է ձևակերպվել նաև որոշում կայացնելու խնդրի տարբերակով /decision version/: Տրված է $A$ մատրիցը, $b$ վեկտորը և $v$ նպատակային շեմը: Գոյություն ունի արդյոք $x$ վեկտոր, որը բավարարում է $Ax \leq b$ համակարգին այնպես, որ $c^T x \geq v$ ([61]):

Որևէ $Q$ խնդրի համար $FS\,(Q)$ -ով կնշանակենք $Q$ խնդրի *թույլատրելի լուծումների բազմությունը*, և $v\,(Q)$-ով՝ *օպտիմալ լուծման արժեքը*:

**Գծային ծրագրավորման խնդրի երկրաչափական ներկայացումը**

Գծային ծրագրավորման խնդրում թույլատրելի լուծումների տիրույթը ուռուցիկ բազմանիստ է: Օպտիմալ լուծումը՝ բազմանիստի կետ/գագաթ է, որտեղ նպատակային ֆունկցիան ունի մաքսիմալ արժեք:

**Ամբողջարժեք գծային ծրագրավորում**

Երբ գծային ծրագրավորման խնդրում փոփոխականները /կամ դրանց մի մասը/ ամբողջ թվեր են, ապա խնդիրը կոչվում է ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման խնդիր ([66]): Կանոնական տեսքով՝

$$max\{c^T x|\ Ax \leq b, x \in N_0^n\} \qquad (IP)$$

Ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման խնդիրը NP-դժվար է [91]: Հատուկ դեպք է 0-1 գծային ծրագրավորումը, որտեղ փոփոխականները բուլյան են, այն [5]-ի 21-$NP$-լրիվ խնդիրներից մեկն է:

Ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման խնդրում, ի տարբերություն գծային ծրագրավորման դեպքի, թույլատրելի լուծումների տիրույթը ուռուցիկ չէ: Հետևաբար, գծային ծրագրավորման տեսությունը, ինչպես նաև համապատասխան ալգորիթմները ուղղակիորեն չեն կարող կիրառվել այս խնդիրների համար:

**Օպտիմիզացիոն խնդիրների ռելաքսացիա**

$(RP_{max})$: $max\{g(x)|x \in W\}$ խնդիրը հանդիսանում է $(P_{max})$: $max\{f(x)|x \in V\}$ խնդրի (միևնույն անհայտ $x$ փոփոխականի համար) *ռելաքսացիա*, եթե.

(1) $(RP_{max})$ խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը պարունակում է $(P_{max})$ խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը՝ $W \supseteq V$,

(2) $(P_{max})$ խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմության վրա $(RP_{max})$ խնդրի նպատակային ֆունկցիան դոմինանտ է $(P_{max})$ խնդրի նպատակային ֆունկցիայի նկատմամբ, այսինքն, $\forall x \in V, g\,(x)\ \geq f\,(x)$:

Համանման ձևով սահմանվում է մինիմիզացիայի խնդիրների ռելաքսացիան:

Ռելաքսացիան ունի երկակի նպատակ/դեր՝

- Այն ապահովում է օպտիմալ լուծման վերին /կամ ստորին/ եզր:
- Ռելաքսացված խնդրի լուծումը հաճախ օգտագործվում է էվրիստիկ ալգորիթմներում որպես հաշվարկման նախնական կետ/սկիզբ, - չնայած այն մեծ մասամբ նույնիսկ չի հանդիսանում խնդրի թույլատրելի լուծում:

Ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման խնդրի ամենահաճախ օգտագործվող ռելաքսացիան գծային ծրագրավորման ռելաքսացիան է ([92], [84], [104]), երբ անհայտների վրայից հանվում է ամբողջարժեք լինելու պայմանը: Մեկ այլ հաճախ հանդիպող ռելաքսացիա է Լագրանժյան ռելաքսացիան:

**Լագրանժյան ռելաքսացիա (**[92], [84])

Դիտարկենք ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման խնդիր, և դիցուք՝ սահմանափակումները ներկայացված են երկու խմբով՝

$$\max_x\{c^T x | A_1 x \le b_1,\ \ A_2 x \le b_2,\ \ x \in X\} \qquad (P)$$

Ենթադրում ենք, որ $X$-ը ունի արժեքների նշանի տեսքով տրվող կամ արժեքների ամբողջարժեք լինելու հետ կապված սահմանափակումներ:

Ենթադրենք, որ ($P$)-ում $A_1 x \le b_1$-ով տրվող սահմանափակումները բարդ են այն իմաստով, որ առանց այդ սահմանափակումների խնդիրը հեշտ կլուծվեր:

Դիցուք՝ $\lambda$-ն կշիռների ոչ բացասական վեկտոր է, որոնք անվանվում են *Լագրանժյան բազմապատկիչներ*:

($P$) խնդրի *Լագրանժյան ռելաքսացիան* $A_1 x \le b_1$ սահմանափակումների նկատմամբ $\lambda$ Լագրանժյան բազմապատկիչներով, հետևյալն է.

$$\max_x\{c^T x + \lambda(b_1 - A_1 x) |\ \ A_2 x \le b_2,\ \ x \in X\} \qquad (LR_\lambda)$$

Չկիրառված $A_1 x \le b_1$ սահմանափակումները $\lambda$ կշիռներով ավելացվել են նպատակային ֆունկցիային: Այս դեպքում ասում են, որ $A_1 x \le b_1$ սահմանափակումները երկակիացվել են/dualized: Պարզ է, որ ($LR_\lambda$)-ը ($P$)-ի ռելաքսացիան է:

($P$)-ի օպտիմալ լուծման արժեքին ամենամոտ վերին եզր՝

$$\min_{\lambda \ge 0} v(LR_\lambda) \qquad (LR)$$

գտնելու խնդիրը կոչվում է $(P)$-ի *երկակի խնդիր* $A_1x \leq b_1$ սահմանափակումների նկատմամբ:

( $LR$ ) խնդրի օպտիմալ լուծման արժեքը՝ $v\,(LR)$ -ը, կանվանենք Լագրանժյան ռելաքսացիայի /կամ պարզապես Լագրանժյան/ եզր:

**Լագրանժյան թույլատրելի լուծում**

$x^*$-ով նշանակենք $(LR_\lambda)$ խնդրի օպտիմալ լուծումը որևէ $\lambda^* \geq 0$ համար: $x^*$-ը կոչվում է *Լագրանժյան լուծում*: Ընդհանուր առմամբ պարզ է, որ $(LR_\lambda)$ խնդրի լուծումը կարող է թույլատրելի լուծում չհանդիսանալ նախնական $P$ խնդրի համար:

Եթե նույնիսկ $x^*$-ը հանդիսանա $P$ խնդրի թույլատրելի լուծում, այսինքն բավարարի նաև երկակիացված անհավասարություններին, - այս դեպքում էլ կարող է չհանդիսանալ օպտիմալ լուծում $P$-ի համար:

Եթե $\lambda^*(b_1 - A_1x^*) = 0$ (այս դեպքում ասում են, որ փոխլրացնող ուղղորդում տեղի ունի /*complemenrary slackness hold*/), ապա պարզ է, որ $x^*$-ն օպտիմալ լուծում է նաև $P$-ի համար:

Նկատենք, որ եթե հավասարումներով սահմանափակումներն են երկակիացվել, և $x^*$-ը խնդրի թույլատրելի լուծում է, ապա $\lambda^*(b_1 - A_1x^*) = 0$ պայմանը ավտոմատ կերպով բավարարվում է:

Գոյություն ունեն տարբեր ճանապարհներ, թե ինչպես կարելի է խնդիրը բարեփոխել ըստ Լագրանժյան ռելաքսացիայի մեթոդի: Ներկայացնենք մի քանիսը.

(1) Սահմանափակումներից առանձնացնել այն մասը, որով տրվում է որևէ հայտնի խնդիր (հեշտ լուծվող), և երկակիացնել մնացած սահմանափակումները:

(2) Եթե կան երկու ենթախնդիր, որոնք ունեն ընդհանուր փոփոխականներ, ապա նախ տրոհել այդ փոփոխականները, այնուհետև երկակիացնել այն սահմանափակումը, որը տրոհում է փոփոխականները: Սա կոչվում է Լագրանժյան դեկոմպոզիցիա:

Օրինակ,

(P) $Max_x\{\, c^Tx \,|A_1x \leq b_1,\ \ A_2x \leq b_2,\ \ x \in X\}$ այս խնդիրը համարժեք է հետևյալին՝

$$(P')\ Max_x\{\, c^T x \mid A_1 x \le b_1, x \in X\ ,\ A_2 y \le b_2,\ y \in X\ ,\ x = y \,\}$$

պահել պահել ռելաքսացնել

Լագրանժյան բազմապատկիչների ընտրության հարցը շատ կարևոր է ստացվող ստորին սահմանների որակի համար: Այս խմբի լրացուցիչ մեթոդների թվում է սուբգրադիենտ օպտիմիզացիան:

### *1.2.3 Ասոցիատիվ կանոնների պեղում*

*Տվյալների պեղման* և *գիտելիքի հայտնաբերման* նպատակը մեծածավալ նախնական տվյալներից ընդհանրական մակարդակի ինֆորմացիայի (գիտելիքի) /կապերի, հարաբերությունների/ ստացումն է: *Ասոցիատիվ կանոնների պեղումը* տվյալների պեղման հիմնական մեթոդներից մեկն է ([109], [153], [12], [13], [181], [86], [53], [141], [27], [110]):

Տրված է տրանզակցիաների /գրառումների, գործառույթների/ բազմություն, որտեղ յուրաքանչյուր գրառումը *առարկաների* (*item*) բազմություն է: *Ասոցիատիվ կանոնը* $A \Rightarrow B$ տեսքի տրամաբանական-վիճակագրական հարաբերություն է, որտեղ $A$-ն և $B$-ն *առարկաների ենթաբազմություններ* (*itemset*) են: Կանոնն ասում է, որ որոշակի հավանականությամբ, որը կոչվում է *հուսալիություն* (*confidence*), եթե $A$-ն առկա է տրանզակցիաների բազմությունում, ապա առկա է նաև $B$-ն: Կանոնի երկրորդ կարևոր բնութագրիչը՝ $A\&B$-ի հանդես գալու հավանականությունն է տրանզակցիաների բազմությունում, որը կոչվում է կանոնի *ապահովում* (*support)*: Խնդիրը հետևյալն է՝ գտնել բոլոր ասոցիատիվ կանոնները, որոնք բավարարում են *մինիմալ հուսալիություն* (*minconf*) և *մինիմալ ապահովում* (*minsup*) ունենալու պահանջը:

Ասոցիատիվ կանոնների պեղումը հուսալիություն/ապահովում տերմիններով առաջին անգամ ներմուծվել է [12]-ում, և այնուհետև, [14]-ում: Այս աշխատանքներում դիտարկվել են *կատեգորիկ* ատրիբուտներ (կատեգորիկ են համարվում այն

ատրիբուտները, որոնք ընդունում են դիսկրետ, և որպես կանոն՝ չկարգավորված արժեքներ): Այսպիսով, $A \Rightarrow B$ կանոնի երկու կողմում էլ տրամաբանական արտահայտություններ են կատեգորիկ փոփոխականների վրա: Կատեգորիկ ատրիբուտների դեպքում հայտնի են ասոցիատիվ կանոնների պեղման մի շարք արդյունավետ ալգորիթմներ, ինչպես, օրինակ՝ [14], [144], [181]: Կատեգորիկ տվյալների հատուկ դեպք է *Բուլյան ատրիբուտների* դեպքը, երբ յուրաքանչյուր առարկային համապատասխան ատրիբուտը ունի 1 արժեք, եթե առարկան առկա է տրանզակցիայի մեջ; և ունի 0 արժեք, եթե այն առկա չէ: Բուլյան ատրիբուտների դեպքում գործ ունենք Բուլյան ասոցիատիվ կանոնների պեղման հետ, որի հայտնի կիրառությունը կապված է սպառողական զամբյուղի տվյալների վերլուծման հետ (market basket analysis):

Կարևոր է նշել, որ Բուլյան ասոցիատիվ կանոնների պեղման մոդելներում կարևոր դեր ունի մոնոտոնությունը: Եթե դիտարկենք $sup(X)$ ֆունկցիան, որը առարկաների տրված $X$ բազմությանը համապատասխանեցնում է այդ բազմության *ապահովումը*, ապա $sup(X)$ ֆունկցիան ունի մոնոտոնության հետևյալ հատկությունը.

$$(X \subseteq Y) \Rightarrow sup(X) \geq sup(Y):$$

Հայտնի է, որ ասոցիատիվ կանոնների պեղման խնդիրը բնական ձևով տրոհվում է 2 փուլի: Առաջին փուլում կառուցվում են այսպես կոչված, *հաճախ հանդիպող առարկաների բազմությունները (frequent itemsets),* որոնք տրանզակցիաների բազմության մեջ հանդիպում են ավելի մեծ հաճախությամբ, քան նախապես տրված մինիմալ ապահովումն է: Երկրորդ փուլը՝ հաճախ հանդիպող առարկաների բազմությունների հիման վրա կանոնների սինթեզման փուլն է (կանոններ, որոնց հուսալիությունը մեծ է նախապես տրված մինիմալ հուսալիությունից):

Ասոցիատիվ կանոնների պեղման ամենահայտնի ալգորիթմներից է *APRIORI* [13] ալգորիթմը: Այն կառուցում է հաճախ հանդիպող առարկաների բազմությունները, այսպես կոչված, *աճեցման մեթոդով*: Նախ դիտարկվում են 1-էլեմենտանոց բազմությունները; հաշվվում են նրանց հանդիպման հաճախությունները: Այնուհետև, դիտարկվում են բոլոր այն 2-էլեմենտանոց բազմությունները, որոնց 1-էլեմենտանոց ենթաբազմությունները հաճախ հանդիպող են; և ստուգվում է նրանց հաճախ հանդիպող լինելը: Այսպիսով, աճեցվում է հաճախ հանդիպող բազմություն այնքան ժամանակ, քանի դեռ նրա բոլոր

ենթաբազմությունները հաճախ հանդիպող են: Այս պրոցեսը կոչվում է հաճախ հանդիպող բազմությունների աճեցում: Սակայն այստեղ կարևոր է հաշվի առնել հաշվողական բարդությունը, առավել ևս, մեծ ծավալի տվյալների դեպքում:

Հայտնի են նաև ասոցիատիվ կանոնների պեղման այլ մոտեցումներ: Նշենք Բուլյան ասոցիատիվ կանոնների պեղման մի մոտեցում ([27]), որը հիմնված է n-չափանի միավոր խորանարդը Գ.Հանսելի շղթաների տրոհման և այդ հիման վրա հատուկ դասի մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների ճանաչման վրա: Հաշվի է առնվում այն հանգամանքը, որ չնայած ասոցիատիվ կանոնների պեղման խնդիրներում դիտարկվող առարկաների քանակը՝ $n$-ը, շատ մեծ է, այնուամենայնիվ, հաճախ հանդիպող ենթաբազմությունները կազմված են փոքր թվով առարկաներից: Այսպիսի ենթադրության համաձայն, գոյություն ունի որևէ $k < n$ արժեք, որից մեծ հզորության բազմությունները այլևս հաճախ հանդիպող չեն: Մաքսիմալ $k$ հզորության հաճախ հանդիպող բազմություններ գտնելու խնդիրը (առանց կառուցելու նրանց ենթաբազմությունները) հանգեցվում է այն մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների ճանաչմանը, որոնց վերին 0-ները գտնվում են $n$-չափանի խորանարդի $k$-րդ համարով շերտով սահմանափակված տիրույթում: Այս մեթոդը ձևավորվել է INTAS 00-626 “Data Mining Algorithm Incubator” նախագծի ընթացքում Լ. Ասլանյանի և Հ. Սահակյանի կողմից:

Իրականում, տվյալների պեղման կիրառական խնդիրներում տվյալների հենքերը հիմնականում պարունակում են *քանակական* տվյալներ ([116], [188], [158], [167]): Քանակական տվյալների դեպքում կիրառելի չէ ասոցիատիվ կանոնի այն սահմանումը, որը տրվում է կատեգորիկ տվյալների դեպքի համար: [177]-ում փորձ է արվել ընդլայնելու ասոցիատիվ կանոնի սահմանումը, որպեսզի այն ներառի նաև քանակական դեպքը: Օգտագործել են ատրիբուտների արժեքների որոշ տիպի խմբավորումներ և դիսկրետիզացիա; և այս ձևով յուրաքանչյուր ատրիբուտ բերվում է կամ կատեգորիկ կամ թվային արժեքների ինտերվալի: Այստեղ սակայն, խնդիրներ են առաջանում կապված ճիշտ խմբավորումների հետ, կամ էլ կազմվող կանոնների քանակի էքսպոնենցիալ աճի հետ: [177]-ում առաջարկվել է այլ մոտեցում քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղման խնդրի համար, ապահովելով արդյունավետ ալգորիթմներ ըստ մինիմալ հուսալիության և մինիմալ ապահովման տրված արժեքների: Սակայն դիտարկվող

կանոնները պարզունակ են՝ մեկ կատեգորիկ ատրիբուտ կանոնի աջ կողմում, իսկ կանոնի ձախ կողմում հետևյալ պատկերն է. $A \in [v_1, v_2]$, որտեղ A-ն ատրիբուտ է, և $v_1, v_2$-ը նրա երկու արժեքներ են: Քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղման խնդրի մեկ այլ մոտեցում է առաջարկվում [28]-ում: Գաղափարը հետևյալն է. հաշվարկել և կիրառել տվյալների հենքերի վիճակագրական արժեքները՝ մեծացնելու կանոնի հետաքրքիր լինելը, և այսպիսով, պայքարելու մեծ թվով կանոններ գեներացնելու դեմ: Կառուցվում են 2 տիպի կանոններ. առաջինը՝ կանոնի երկու կողմում էլ կատեգորիկ ատրիբուտներ անսահմանափակ քանակի; երկրորդը՝ կանոնի երկու կողմում էլ քանակական, սակայն մեկական ատրիբուտների դեպքում: [86] և [190] աշխատանքներում դիտարկվում են կանոններ, ձախ կողմում՝ 2 քանակական, և աջում՝ 1 Բուլյան ատրիբուտով:

Ինչպես տեսնում ենք, բոլոր դիտարկված աշխատանքներում կանոնները և մոդելները սահմանափակ տիպի են: Եվ բացի այդ, այս մոտեցումները կորցնում են Բուլյան ասոցիատիվ կանոնների պեղման հիմնական կորիզը՝ հաճախ հանդիպող առարկաների բազմության աճեցման արդյունավետ եղանակը:

Ներկա աշխատանքում մենք առաջարկում ենք քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղման մեկ այլ մոտեցում, որն արդյունավետ է, բայց որտեղ և կա պահանջ՝ ատրիբուտների մոնոտոնության մասին:

## 1.3 Հիմնական հասկացություններ և սահմանումներ

### *1.3.1 NP լրիվ/դժվար, օպտիմիզացիոն խնդիրներ*

*Հաշվարկային խնդիրը* մաթեմատիկական խնդիր է, որը բնորոշվում է մուտք-հաշվարկ-ելք քայլերի հաջորդականությամբ: Խնդիրը ձևավորվում է իր մուտքային ինֆորմացիայով, ելքում ուզում ենք ստանալ նրա լուծումը, որը պետք է բավարարի որոշ հատկանիշների /կամ պայմանների/: Խնդրի մուտքային պարամետրերին վերագրելով որոշակի ֆիքսված արժեքներ, ստանում ենք *խնդրի մեկ առանձին օրինակ* /կամ, ինչպես ասում են՝ *անհատ խնդիր/:* Հաշվարկային խնդիրների տիպերից են *որոշման կայացման*, *փնտրման*, *օպտիմիզացիայի* խնդիրները ([91], [151], [152], [186]):

**Որոշում կայացնելու խնդիրներ**

Որոշում կայացնելու խնդիրը՝ հարց է “այո” կամ “ոչ” պատասխանի համար, այսինքն ունի երկու հնարավոր լուծում՝ “այո” կամ “ոչ” խնդրի *դրական* և *բացասական օրինակներին համապատասխան*:

**P դասը**

Որոշում կայացնելու խնդիրը պատկանում է *P դասին*, եթե այն կարելի է լուծել դետերմինացված Թյուրինգի մեքենայի (DTM) միջոցով բազմանդամային ժամանակում:

**NP դասը**

Խնդիրները, որոնք կարելի է լուծել բազմանդամային ժամանակում ոչ դետերմինացված Թյուրինգի մեքենայի (NDTM) միջոցով, պատկանում են *NP դասին*:

NDTM-ը կարելի է սահմանել որպես գործունեություն երկու փուլով՝ կռահում և ստուգում: Կռահման փուլում մեքենան կռահում կամ ինչ որ ձևով/տեղից ստանում է լուծումը /լուծման սերտիֆիկատը/: Լուծման փուլում մեքենան ստուգում է այն, որ կռահվածը, իրոք, հանդիսանում է խնդրի լուծում:

**Բազմանդամային բերելիություն**

Դիցուք՝ $Q_1$ -ը և $Q_2$ -ը որոշում կայացնելու խնդիրներ են: Կասենք, որ $Q_1$ -ը *բազմանդամային* /կամ արագ/ *բերելի է* $Q_2$ -ին՝ $Q_1 \propto Q_2$ , եթե գոյություն ունի բազմանդամային ֆունկցիա, որը $Q_1$ -ի կամայական $I_{Q_1} \in Q_1$ անհատ խնդիրը ձևափոխում է $Q_2$-ի որևէ $I_{Q_2} \in Q_2$ անհատ խնդրի այնպես, որ $I_{Q_1}$ -ը $Q_1$-ի դրական օրինակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $I_{Q_2}$ -ը դրական օրինակ է $Q_2$-ի համար:

Դիցուք՝ $Q_1$-ը և $Q_2$-ը որոշում կայացնելու խնդիրներ են: Կասենք, որ $Q_1$-ը և $Q_2$-ը *համարժեք են* /բարդությամբ/, եթե $Q_1$-ը բազմանդամային բերելի է $Q_2$-ին, և $Q_2$-ը բազմանդամային բերելի է $Q_1$-ին:

**NP-լրիվ դասը**

Որոշման կայացման խնդիրը $NP$-*լրիվ* է, եթե այն $NP$ դասից է, և $NP$ դասին պատկանող կամայական խնդիր բազմանդամային բերելի է նրան:

***NPI դասը***

$NP$ դասին պատկանող այն խնդիրները, որոնք ոչ պատկանում են $P$ դասին, և ոչ էլ հանդիսանում են $NP$-լրիվ /ենթադրելով, որ $P \neq NP$ /, - կոչվում են $NP$ *միջանկյալ խնդիրներ*: $NPI$ -ով նշանակում են այս խնդիրների դասը:

**Լադների թեորեմ** [140]: Եթե $P \neq NP$, ապա $NPI$ դասը դատարկ չէ, այսինքն, $NP$-ն պարունակում է խնդիրներ, որոնք ոչ $P$ դասից են, ոչ էլ $NP$–լրիվ են:

Ենթադրելով, որ $P \neq NP$, Լադները կառուցում է $NPI$ դասի խնդիր, չնայած կառուցած խնդիրը արհեստական է: Գոյություն ունի արդյոք բնական խնդիր $NPI$ դասից, - սա բաց խնդիր է: $NPI$ դասին պատկանող խնդիրների թեկնածու են հանդիսանում *գրաֆի իզոմորֆիզմի խնդիրը*, *ամբողջ թվի ֆակտորիզացիայի /արտադրիչների տեսքով ներկայացնելու/ խնդիրը*, *հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության խնդիրը*, և ուրիշներ:

**Իրագործելիության խնդիր/Satisfiability Problem** - Տրված է կոնյունկտիվ նորմալ ձև; գոյություն ունի արդյոք փոփոխականների վրա արժեքների բաշխում այնպես, որ ատահայտությունը ստանա “ճիշտ” արժեք:

Առաջին խնդիրը, որի NP-լրիվությունն ապացուցվել է Կուկի կողմից Իրագործելիության խնդիրն է ([91]): Այնուհետև, որևէ նոր $Q$ խնդրի NP-լրիվությունը ցույց տալու համար բավական է ցույց տալ, որ այն NP դասից է, և որ որևէ հայտնի NP-լրիվ խնդիր բերվում է $Q$-ին:

**NP-բարդ/դժվար խնդիրների դասը**

Որոշման կայացման խնդիրը $NP$*-դժվար* է, եթե $NP$ դասին պատկանող կամայական խնդիր բազմանդամային բերելի է նրան (այսինքն, առնվազն նույնքան դժվար է, որքան $NP$ դասին պատկանող կամայական խնդիր):

**coNP դասը**

$Q$ խնդիրը պատկանում է $coNP$ *դասին*, եթե նրա լրացումը պատկանում է $NP$ դասին:

Դիցուք՝ $Q$-ն որոշում կայացնելու խնդիր է: $Q$ *խնդրի լրացումը* կստանանք, եթե $Q$-ի յուրաքանչյուր անհատ խնդրում տեղերով փոխենք “այո” և “ոչ” պատասխանները: Եթե որևէ խնդիր $NP$ դասից է, ապա նրա յուրաքանչյուր “այո” պատասխանով անհատ խնդրի լուծում կարելի է ստուգել բազմանդամային ժամանակում: Իսկ եթե խնդիրը $co-NP$ դասից է, ապա նրա յուրաքանչյուր “ոչ” պատասխանով անհատ խնդրի լուծումը կարելի է ստուգել բազմանդամային ժամանակում:

Օրինակ, թվի պարզ լինելու մասին խնդիրը $coNP$ դասից է, քանի որ նրա լրացումը՝ Բաղադրյալ թվի մասին խնդիրը, $NP$ դասից է:

Քանի որ $P \subseteq NP$ և $P \subseteq coNP$, ապա $P \subseteq NP \cap coNP$, սակայն հայտնի չէ, արդյո՞ք $NP = coNP$ կամ $P = NP \cap coNP$:

$(NP \cap coNP)$-ին պատկանող խնդիրների օրինակներ են. պարզ թվի մասին խնդիրը; գրաֆի երկկողմանի կամ պլանար լինելու մասին խնդիրները:

Այս օրինակներում բերված խնդիրները նաև $P$ դասից են: Գտնված չէ խնդիր, որը պատկանի $NP \cap coNP$, և լինի $NP$-լրիվ: Հետևաբար, խնդրի բարդությունը պարզելու համար կարևոր է նաև ստուգել նրա պատկանելությունը $coNP$ դասին:

**Կոմբինատոր օպտիմիզացիոն խնդիրներ**

$\Pi$ *օպտիմիզացիոն խնդիրը* բնութագրվում է հետևյալ երեք կոմպոնենտներով.

- $D$ - անհատ խնդիրների բազմություն,
- $S(I)$ - բոլոր թույլատրելի լուծումների բազմությունը $I$ անհատ խնդրի համար,
- $f: S(I) \to R$ - ֆունկցիա, որը յուրաքանչյուր լուծմանը արժեք է վերագրում:

Լուծել *մաքսիմիզացիայի խնդիրը* – նշանակում է տրված $I \in D$ -ի համար գտնել $\sigma_{opt}^{I} \in S(I)$, այնպես, որ կամայական $\sigma \in S(I)$ -ի համար $f(\sigma_{opt}^{I}) \geq f(\sigma)$ : Լուծել *մինիմիզացիայի խնդիրը*՝ տրված $I \in D$ -ի համար գտնել $\sigma_{opt}^{I} \in S(I)$, այնպես, որ կամայական $\sigma \in S(I)$-ի համար $f(\sigma_{opt}^{I}) \leq f(\sigma)$:

Յուրաքանչյուր օպտիմիզացիոն խնդրի համար կա նրան համապատասխան որոշում կայացնելու խնդիր, որը հարցնում է. գոյություն ունի արդյոք թույլատրելի լուծում, որի արժեքը մեծ է/փոքր է տրված արժեքից:

Եթե $NP$ -դժվար $\Pi_1$ որոշում կայացնելու խնդիրը բազմանդամային բերելի է (*ըստ Թյուրինգի*) $\Pi_2$ օպտիմիզացիոն խնդրին, ապա $\Pi_2$ խնդիրը $NP$ *դժվար է*:

Մեծամասամբ, $\Pi_1$ -ը հանդիսանում է $\Pi_2$ խնդրի որոշում կայացնելու տարբերակը: Այնուամենայնիվ, միշտ չէ, որ այդպես է:

**Օպտիմիզացիոն խնդիրների ապրոքսիմացիա**

Պրակտիկայում, NP-դժվար օպտիմիզացիոն խնդիրները լուծելու համար կիրառում են խնդրի պահանջների տարբեր հնարավոր թուլացումներ:

- Սուպեր-բազմանդամային ալգորիթմներ – երբ թուլացվում է բազմանդամային ժամանակում լուծելու պահանջը;
- Թուլացվում է այն պահանջը, որ խնդիրը լուծվի բոլոր օրինակների համար:
- Ապրոքսիմացիոն ալգորիթմներ – թուլացվում է ճշգրիտ օպտիմալ լուծում գտնելու պահանջը:

**Ապրոքսիմացիոն ալգորիթմներ** [186]

A-ն *ապրոքսիմացիոն ալգորիթմ* է $\Pi$ օպտիմիզացիոն խնդրի համար, եթե այն $\Pi$ խնդրի կամայական $I$ օրինակի համար ելքում վերադարձնում է որոշակի պահանջների բավարարող "լուծում": $A\ (I)$-ով կնշանակենք լուծման արժեքը՝ $f(\sigma)$-ն:

Բնական է, որ $A$ ալգորիթմից պահանջվի, որ այն ունենա բազմանդամային բարդություն: Ինչպե՞ս գնահատել ապրոքսիմացիոն ալգորիթմի որակը: "Լավ" լինելու չափանիշը պետք է գտած լուծման արժեքը ինչ-որ ձևով համեմատի օպտիմալ լուծման արժեքի հետ:

**Բացարձակ ապրոքսիմացիոն ալգորիթմներ**

$\Pi$ օպտիմիզացիոն խնդրի լուծման $A$ ապրոքսիմացիոն ալգորիթմը կոչվում է *բացարձակ ապրոքսիմացիոն ալգորիթմ*, եթե գոյություն ունի $k$ հաստատուն թիվ այնպես, կամայական $I$ անհատ խնդրի համար $|A(I) - OPT(I)| \leq k$, որտեղ $OPT(I)$-ն $I$ անհատ խնդրի օպտիմալ լուծման արժեքն է:

$NP$-դժվար խնդրի օրինակ, որի համար գոյություն ունի բացարձակ ապրոքսիմացիոն ալգորիթմ, - հանդիսանում է գրաֆի կողերի ներկման խնդիրը: Համաձայն գրաֆի ներկման մասին Վ.Վիզինգի թեորեմի ([187]), յուրաքանչյուր գրաֆի կողերը կարելի է ներկել օգտագործելով նվազագույնը $\Delta$ և առավելագույնը՝ $\Delta + 1$ գույներ: Վ.Վիզինգը կառուցում է նաև համապատասխան $A$ ալգորիթմը, որը ներկում է գրաֆի կողերը $\Delta + 1$ գույներով: Հետևաբար, գրաֆի կողային ներկման խնդրի համար գոյություն ունի բացարձակ ապրոքսիմացիոն ալգորիթմ այնպես, որ $|A(I) - OPT(I)| \leq 1$:

Ցավոք, բացարձակ ապրոքսիմացիոն ալգորիթմներ կան միայն հատուկ տիպի օպտիմիզացիոն խնդիրների համար: Մի շարք $NP$-դժվար օպտիմիզացիոն խնդիրների համար ապացուցված է, որ գոյություն չունի բացարձակ ապրոքսիմացիոն ալգորիթմ, եթե $P \neq NP$:

**Ալգորիթմի հարաբերական արդյունավետության գնահատման չափանիշ**

Ապրոքսիմացիոն ալգորիթմի որակը գնահատվում է նաև ալգորիթմով գտած լուծման արժեքի և օպտիմալ լուծման արժեքի հարաբերության տերմիններով: Հենց սա էլ անվանում են ալգորիթմի աշխատանքի *գնահատման հարաբերական չափանիշ*:

Դիցուք՝ $A$-ն $\Pi$ օպտիմիզացիոն խնդրի լուծման ապրոքսիմացիոն ալգորիթմ է: $A$-ի *հարաբերական արդյունավետությունը* $I$ անհատ խնդրի համար սահմանվում է որպես.

$R_A(I) = \frac{A(I)}{OPT(I)}$, եթե $\Pi$-ն մինիմիզացիայի խնդիր է, և

$R_A(I) = \frac{OPT(I)}{A(I)}$, եթե $\Pi$-ն մաքսիմիզացիայի խնդիր է:

$R_A = \inf\{r | R_A(I) < r, \forall I \in D\}$ -ն կոչվում է $\Pi$ օպտիմիզացիոն խնդրի լուծման $A$ ապրոքսիմացիոն ալգորիթմի հարաբերական գնահատման բացարձակ չափանիշ:

### *1.3.2 Մասնակի կարգավորված բազմություններ*

**Սահմանում 1.3.2-1 (**[72], [46], [163], [179]): *Մասնակի կարգավորված բազմությունը* $P = (S, \leq)$ զույգ է, որտեղ $S$ բազմությունը $P$-ի բազիսն է, իսկ $\leq$-ն $P$-ի մասնակի կարգի գործողությունն է, այսինքն այն.

(i) Ռեֆլեքսիվ է՝ կամայական $a \in S$ –ի համար $a \leq a$,

(ii) Անտիսիմետրիկ է՝ եթե $a \leq b$ և $b \leq a$, ապա $a = b$,

(iii) Տրանզիտիվ է՝ եթե $a \leq b$ և $b \leq c$, ապա $a \leq c$:

Կասենք, որ $a, b \in S$ էլեմենտները *համեմատելի* են, եթե $a \leq b$ կամ $b \leq a$: $a, b \in S$ էլեմենտները *անհամեմատելի* են, եթե $a \leq b$ և $b \leq a$ պայմաններից ոչ մեկը տեղի չունի: $a < b$ նշանակում է $a \leq b$, $a \neq b$:

Կասենք, որ $a \in S$ էլեմենտը *ծածկվում է* $b \in S$ էլեմենտով (կամ $b$ էլեմենտը ծածկում է $a$ էլեմենտը), եթե $a < b$, և գոյություն չունի $c$ էլեմենտ այնպես, որ $a < c < b$:

$a$-ն $P$-ի *մաքսիմալ* էլեմենտ է, եթե բոլոր $b \in P$-երի համար տեղի ունի հետևյալ երկու պայմաններից մեկը.

(i) $a \geq b$

(ii) $a$ –ն և $b$ –ն անհամեմատելի են:

$a$-ն *մինիմալ* էլեմենտ է, եթե բոլոր $b \in P$-երի համար հետևյալ երկու պայմաններից մեկը տեղի ունի.

(i) $b \geq a$ կամ

(ii) $a$ –ն և $b$ –ն անհամեմատելի են:

**Սահմանում 1.3.2-2** (179], [75]): Դիցուք՝ $P = (S, \leq)$ -ն մասնակի կարգավորված բազմություն է, և $a \in S, b \in S$: Հետևյալ բազմությունը.

$$[a, b] = \{x \in S \mid a \leq x \leq b\}$$

կոչվում է $a$-ից $b$ փակ ինտերվալ:

Դիցուք՝ $S'$-ը $S$-ի ոչ դատարկ ենթաբազմություն է: Կասենք, որ $S'$ -ը *ուռուցիկ է*, եթե կամայական $a \in S'$, $b \in S'$ -ի համար՝ $[a, b] \subseteq S'$:

$P = (S, \leq)$-ին համապատասխանում է ուղղորդված գրաֆ, որի համար $S$-ը գագաթների բազմությունն է: $a$ գագաթից $b$ գագաթ կող կա, եթե $a \leq b$: Պարզ է, որ այս գրաֆը ցիկլ չի պարունակում:

Սովորաբար, մասնակի կարգավորված բազմությունը երկրաչափորեն պատկերվում է ոչ թե վերը նշված գրաֆի ամբողջական տեսքով, այլ *Հասսեի դիագրամի* միջոցով, որտեղ պատկերվում են գրաֆի միայն կողերը, որոնք միացնում են մեկը մյուսին ծածկող գագաթները: Հասսեի դիագրամում $a \leq b$ գագաթները միացնող կողը գծվում է ներքևից վերև):

Դիցուք՝ $P = (S, \leq)$-ն մասնակի կարգավորված բազմություն է: $P$ –ում *շղթան՝* $S$ –ի տարբեր $\{a_1, \cdots, a_k\}$ էլեմենտների հաջորդականություն է, այնպես որ բոլոր $1 \leq i < j \leq k$ -երի համար $a_i < a_j$: Եթե շղթայի էլեմենտները անմիջական են հաջորդում մեկը մյուսին, ապա շղթան կոչվում է *պարզ;* հաճախ դիտարկվում են միայն պարզ շղթաները և այն նշելու համար օգտագործվում է շղթա տերմինը:

$\{a_1, \cdots, a_k\} \subseteq S$ էլեմենտների բազմությունը *հակաշղթա* է $P$-ում, եթե բոլոր $1 \leq i, j \leq k$-երի համար $a_i$-ն և $a_j$-ն անհամեմատելի են:

$P$-ի *տրոհումը շղթաների՝* դա $S$-ի տրոհումն է չհատվող շղթաների բազմության:

Սահմանվում է շղթաների/հակաշղթների "հնարավորին չափ մեծ լինելու" երկու հասկացություն.

- "ամենամեծ/փակուղային" շղթա/հակաշղթա – այսինքն շղթա/հակաշղթա, որն ընկած չէ ավելի մեծ շղթայի/հակաշղթայի մեջ:
- "ամենաերկար/մաքսիմալ" շղթա/հակաշղթա – հնարավոր ամենաշատ թվով էլեմենտներ պարունակող շղթա/հակաշղթա:

Ամենաերկար շղթայի երկարությունը (էլեմենտների քանակը) մասնակի կարգավորված բազմության *բարձրությունն* է՝ $h(P)$ : Ամենաերկար հակաշղթայի հզորությունը (էլեմենտների քանակը) մասնակի կարգավորված բազմության *լայնությունն* է՝ $w(P)$:

Ակնհայտ է, որ ամենաերկար/մաքսիմալ շղթան/հակաշղթան պետք է լինի ամենամեծ/փակուղային շղթա/հակաշղթա:

**Թեորեմ 1.3.2-1** ([72]): Եթե $A$ -ն մասնակի կարգավորված վերջավոր $(S,\leq)$ բազմությունում ամենամեծ հակաշղթան է, ապա գոյություն ունի $S$ –ի տրոհում $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_t$ շղթաների այնպես, որ $t = |A|$ : Ավելին, յուրաքանչյուր $C_i$ -ն պարունակում է ճիշտ մեկ էլեմենտ $A$-ից, և գոյություն չունի $S$–ի տրոհում $t$–ից ավելի փոքր թվով շղթաների:

Դիլվորթի թեորեմը կարելի է ձևակերպել նաև այսպես՝

Մասնակի կարգավորված վերջավոր բազմության լայնությունը հավասար է բազմությունը ծածկելու համար անհրաժեշտ շղթաների մինիմալ քանակին:

$P = (S,\leq)$ մասնակի կարգավորված բազմության $I$ ոչ դատարկ ենթաբազմությունը *իդեալ է*, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմանը.

$I$ –ին պատկանող կամայական $x$-ի համար $y \leq x$ –ից հետևում է, որ $y \in I$:

Երկակիորեն սահմանվում է ֆիլտրը: $P = (S,\leq)$ մասնակի կարգավորված բազմության $F$ ոչ դատարկ ենթաբազմությունը *ֆիլտր է*, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմանը.

$F$ –ին պատկանող կամայական $x$-ի համար $y \geq x$ –ից հետևում է, որ $y \in F$ :

Դիցուք՝ $P = (S, \leq)$ -ն մասնակի կարգավորված բազմություն է, և $S'$ -ը $S$ -ի ենթաբազմություն է: $u \in S$ էլեմենտը կոչվում է $S'$-ի համար *վերին եզր*, եթե $S'$-ին պատկանող կամայական $s$ էլեմենտի համար $s \leq u$: Բազմությունը կարող է ունենալ բազմաթիվ վերին եզրեր, կարող է և չունենալ ոչ մի հատ: Եթե $S'$-ի վերին եզրերի բազմությունը ունի ամենափոքր էլեմենտ, ապա այն կոչվում է *ամենափոքր վերին եզր (սուպրեմում/supremum)*: $u \in S$ էլեմենտը կոչվում է $S'$-ի համար *ստորին եզր*, եթե $S'$-ին պատկանող կամայական $s$ էլեմենտի համար $s \geq u$: Ստորին եզրերից ամենամեծը /եթե այն գոյություն ունի/, կոչվում է *ամենամեծ ստորին եզր (ինֆիմում/infimum)*:

$L = (S, \leq)$ մասնակի կարգավորված բազմությունը *կավար* է, եթե $S$-ի կամայական $x, y$ էլեմենտների համար $S$-ի $\{x, y\}$ ենթաբազմությունը ունի և՛ սուպրեմում և՛ ունի ինֆիմում:

Կավարի օրինակ է՝ բնական թվերը “բաժանելիության” մասնակի կարգով, – միակ սուպրեմումը ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է, և ինֆիմումը՝ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

$L = (S, \leq)$ կավարը *ռանգավորված է*, եթե գոյություն ունի *ռանգի ֆունկցիա*. $r: S \to Z$, (ռանգի ֆունկցիա է, եթե $\mathrm{x} < \mathrm{y}$-ից հետևում է, որ $r(x) < r\,(y)$ ) այնպես որ եթե $y$ -ը ծածկում է $x$-ը, ապա $r(y) = r(x) + 1$: Ռանգի ֆունկցիայի արժեքը որևէ էլեմենտի վրա կոչվում է տվյալ էլեմենտի *ռանգ*:

Կավարի մեկ այլ օրինակ է Բուլյան կավարը՝ $(2^{[n]}, \subseteq)$ – այստեղ հիմքը $[n] = \{1,2, \cdots, n\}$ բազմության բոլոր ենթաբազմությունների բազմությունն է՝ $2^{[n]}$ , և կարգը՝ կլանման ($\subseteq$) գործողությունն է: Այլ ներկայացմամբ՝ սա համապատասխանում է $n$-չափանի միավոր խորանարդին:

**Եզրակացություններ առաջին գլխի վերաբերյալ**

Աշխատանքի առաջին գլխում բնութագրվում են ուսումնասիրվող խնդիրները, որոնք առաջացել են տարբեր ոլորտներում և մոդելավորվել են տարբեր տերմիններով՝ *բազմությունների համակարգեր, դիսկրետ փոմոգրաֆիա, բազմաչափ միավոր խորանարդ*:

- ✓ Ըստ տիրույթների տրվել է հետազոտությունների արդի վիճակի և ստացված արդյունքների սեղմ նկարագիրը, նշվել են առկա բաց խնդիրները, և բերվել են ամփոփիչ դիտողություններ՝ աշխատանքում այդ տիրույթների առնչությամբ ստացված արդյունքների համառոտ ներկայացմամբ:
- ✓ Դիտարկվել են հարակից գործիքներ՝ ընդհանուր օգտագործման հաշվարկային մոդելներ, որոնցում կարելի է օգտագործել հետազոտվող խնդիրների շուրջ ստացված արդյունքները:
- ✓ Բերվել են աշխատանքում օգտագործվող այլ հասկացություններ ու սահմանումներ:

# ԳԼՈՒԽ 2. ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ - ՀԻՊԵՐԳՐԱՖԱՅԻՆ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒՄ

Այս գլխում դիտարկվում է $n$-չափանի միավոր $E^n$ խորանարդի գագաթների $m$-ենթաբազմությունների տրոհումներից ստացված ասոցացված վեկտորների $D^m(n)$ բազմության նկարագրման խնդիրը՝ որպես սահմանափակումների բավարարման մի խումբ համարժեք խնդիրների ներկայացուցիչ, որոնց թվում է հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության խնդիրը ([(7)], [(8)], [(13)], [(22)], [(24)], [(27)]): Բազմարժեք բազմաչափ $\Xi_m^n$ ցանցում, որը $D^m(n)$-ը պարունակող մինիմալ տիրույթն է, տրվում է $D^m(n)$-ի նկարագիրը եզրային էլեմենտների և նրանցով ծնվող ուռուցիկ ընդլայնումների տերմիններով: Ցույց է տրվում, որ եզրային էլեմենտներն էլ իրենց հերթին կառուցվում են մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների օգնությամբ: $D^m(n)$ տիրույթի ուսումնասիրումը բացահայտում է նրա մինիմալ և մաքսիմալ կշռով տարրերը: Ապացուցվում է, որ մինիմալ կշռով տարրերը համապատասխանում են $E^n$ -ի բառարանային սեղմված $m$-ենթաբազմությանը, և որ նրանք որպես այդպիսին՝ միակն են կոորդինատների տեղափոխությունների ճշտությամբ: Ցույց է տրվում, որ մաքսիմալ կշռով տարրերը համապատասխանում են $E^n$ -ի $\tilde{1}$ կենտրոնով գնդաձև $m$ -ենթաբազմություններին: Դուրս է բերվում տրված աստիճանային հաջորդականությամբ պարզ հիպերգրաֆի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման ռեգուլյար հիպերգրաֆների դասի համար:

## 2.1 Բազմաչափ միավոր խորանարդի ենթաբազմությունների տրոհումների ասոցացված վեկտորների բազմության ընդհանուր նկարագիր

Այս բաժինը նվիրված է $D^m(n)$ տիրույթի նկարագրմանը:

Դիցուք՝ $E^n$-ը $n$-չափանի միավոր խորանարդի գագաթների բազմությունն է.

$$E^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \epsilon \{0,1\}, i = 1, \cdots, n\}:$$

Կամայական $x_i$-ի համար դիտարկենք $E^n$-ի տրոհումը ըստ $x_i$ փոփոխականի.

$$E^{n-1}_{x_i=0} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E^n | x_i = 0\} \text{ և } E^{n-1}_{x_i=1} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E^n | x_i = 1\}:$$

Յուրաքանչյուր $\mathcal{E} \subseteq E^n$ բազմություն կտրոհվի համապատասխանաբար $\mathcal{E}_{x_i=1}$ և $\mathcal{E}_{x_i=0}$ ենթաբազմությունների (որոնք կարող են և դատարկ լինել).

$\mathcal{E}_{x_i=1} \subseteq E_{x_i=1}^{n-1}$, $\mathcal{E}_{x_i=0} \subseteq E_{x_i=0}^{n-1}$:

**Սահմանում 2.1-1:** $d = (d_1, \cdots, d_n)$ ամբողջարժեք վեկտորը կոչվում է $\mathcal{E} \subseteq E^n$ բազմության *տրոհումների ասոցացված վեկտոր*, եթե $d_i = |\mathcal{E}_{x_i=1}|$, $i = 1, \cdots, n$:

Ընդհանուր առմամբ, տարբեր բազմություններ կարող են ունենալ տրոհումների միևնույն ասոցացված վեկտորը: $|\mathcal{E}|$ հզորությամբ բազմությունների քանակը $C_{2^n}^{|\mathcal{E}|}$ է, ասոցացված վեկտորների քանակը դեռևս գնահատված չէ: [173], [174]-ում դիտարկվում են հիպերգրաֆների թվարկման հարցեր, սակայն դիտարկվող հիպերգրաֆներում թույլատրվում են կողերի կրկնություններ: [48]-ում ներկայացվում է տրված աստիճանային հաջորդականությունն ունեցող պարզ համասեռ հիպերգրաֆների թվարկման ասիմպտոտիկ բանաձև: [73]-ում ասիմտոտիկորեն հաշվարկվում է համասեռ ռեգուլյար հիպերգրաֆների քանակը:

Դիցուք՝ $[n] = \{1,2, \cdots, n\}$ : Դիտարկենք $[n]$ -ի բոլոր ենթաբազմությունների բազմությունը (նշանակում են $2^{[n]}$-ով կամ $\mathcal{P}([n])$ -ով) և սահմանենք մասնակի կարգ ըստ կլանման, այսինքն, կամայական $a, b \subseteq [n]$ ենթաբազմությունների համար $a$-ն նախորդում է $b$-ին, եթե $a \subseteq b$: $[n]$-ի ենթաբազմությունները կարող ենք ներկայացնել $n$ երկարության բինար հաջորդականությունների/վեկտորների միջոցով հետևյալ ձևով. վեկտորի $i$-րդ էլեմենտը հավասար է 1-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ $[n]$-ի $i$-րդ էլեմենտը պատկանում է ենթաբազմությանը: Այս ներկայացումը հաստատում է 1-1 համապատասխանություն $\mathcal{P}([n])$ և $E^n$ բազմությունների միջև: Յուրաքանչյուր $\mathcal{E} \subseteq E^n$ ենթաբազմության կհամապատասխանի $\mathcal{P}([n])$ -ի որևէ ենթաբազմություն, կամ այլ խոսքերով՝ $\mathcal{H}$ հիպերգրաֆ առանց կողերի կրկնությունների, որի գագաթների բազմությունը $[n]$-ն է, իսկ կողերը՝ $\mathcal{E}$ -ի էլեմենտներն են: $i$-րդ գագաթի աստիճանը հավասար է $|\mathcal{E}_{x_i=1}|$ -ի: $\mathcal{E}$ -ի տրոհումների վեկտորը կհամապատասխանի $\mathcal{H}$ -ի *աստիճանային հաջորդականությանը*:

Ինչպես նշել ենք 1-ին Գլխի 1.1.1 բաժնում, հիպերգրաֆի պարզության ավելի ընդհանուր սահմանում է՝ երբ կողերը չեն կրկնվում: Համասեռ հիպերգրաֆի դեպքում, երբ կողերը ունեն միևնույն հզորությունը, այս սահմանումները համընկնում են: Ներկա Գլխի 2.2.4 բաժնում ցույց կտանք, որ չկրկնվող կողերով հիպերգրաֆների համար աստիճանային հաջորդականության խնդիրը ավելի հեշտ չի, քան անհամեմատելի կողերով հիպերգրաֆների դեպքում, որը, ինչպես նշել ենք, այս տիրույթի հայտնի բաց խնդիրներից մեկն է [36]: Այսուհետև հետագա շարադրանքում *պարզ հիպերգրաֆ* ասելով կհասկանանք հիպերգրաֆ, որում կրկնվող կողեր չկան:

Դիտարկվող խնդիրները հետևյալն են.

*Գոյության խնդիր (E_S)* - տրված է $n$-չափանի ամբողջարժեք $d$ վեկտոր, պարզել արդյոք գոյություն ունի $E^n$-ի ենթաբազմություն, որի համար $d$-ն հանդիսանում է տրոհումների ասոցացված վեկտոր;

*Նկարագրման խնդիր (D_S)* – տալ $E^n$ խորանարդի տրված հզորության բոլոր ենթաբազմությունների տրոհումներից ստացվող ասոցացված վեկտորների բազմության պարզ նկարագիր:

Նշված խնդիրները մենք կդիտարկենք $E^n$-ի ֆիքսված $m$ հզորություն ունեցող ենթաբազմությունների համար: Պարզ է, որ բավարար է սահմանափակվել $0 \leq m \leq 2^n$ արժեքների դիտարկմամբ:

$H_m(n)$ -ով նշանակենք $E^n$ -ի $m$ հզորության բոլոր ենթաբազմությունների բազմությունը /կամ որ նույնն է, բոլոր պարզ հիպերգրաֆների բազմությունը, որոնց գագաթների բազմությունը $[n]$-ն է, և հիպերկողերի քանակը $m$ է/:

$D_m(n)$ -ով նշանակենք $H_m(n)$ -ի բազմությունների տրոհումների ասոցացված վեկտորների բազմությունը $/H_m(n)$-ին պատկանող հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների բազմությունը/: Հետագա շարադրանքի մեջ խորանարդի կամ հիպերգրաֆի տերմիններով ձևակերպումները կօգտագործենք առանց հատուկ տարբերակման:

$\Xi_{m+1}^n$-ով նշանակենք $n$ չափանի բազմարժեք $/\ m+1$ արժեքանի/ ցանցը, որի էլեմենտները սահամանվում են որպես՝ $(a_1, \cdots, a_n)|0 \leq a_i \leq m, i = 1, \cdots, n$:

Եթե դիտարկվող հիպերգրաֆներում թույլատրվեր հիպերկողերի կրկնություն, ապա համապատասխան աստիճանային հաջորդականությունների բազմությունը կկազմեր ամբողջ $\Xi_{m+1}^{n}$-ը:

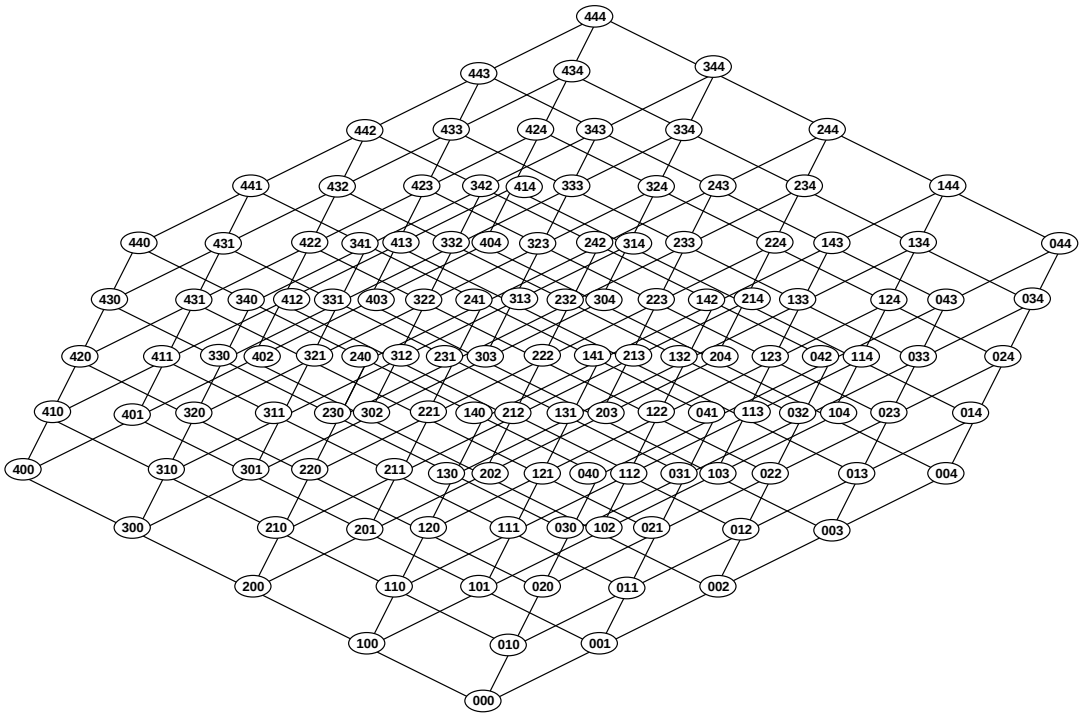
$\Xi_{m+1}^{n}$ -ում սահմանենք կոորդինատ-առ-կոորդինատ համեմատման *մասնակի կարգ*՝

$(a_1, \cdots, a_n) \leq (b_1, \cdots, b_n)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_i \leq b_i,\ i = 1, \cdots, n$ : $(a_1, \cdots, a_n) < (b_1, \cdots, b_n)$ նշանակում է $(a_1, \cdots, a_n) \leq (b_1, \cdots, b_n)$ , և $\exists j,\ 1 \leq j \leq n$ , որի համար $a_j < b_j$:

Սահմանենք նաև $\Xi_{m+1}^{n}$ -ի էլեմենտի *կշիռ/ռանգ* որպես նրա կոմպոնենտների գումար. $r(a_1, \cdots, a_n) = a_1 + \cdots + a_n$:

Այսպիսով, $\Xi_{m+1}^{n}$ –ը ռանգավորված կավար է, կոորդինատ-առ-կոորդինատ համեմատման մասնակի կարգով:

Կառուցենք $\Xi_{m+1}^{n}$ -ի Հասսեի դիագրամը. այն ունի $nm + 1$ մակարդակ՝ համարակալված $0$ -ից $nm$ : $k$ -րդ մակարդակում գտնվում են $\Xi_{m+1}^{n}$ -ի այն բոլոր էլեմենտները, որոնց ռանգը $k$ է: Մինիմալ էլեմենտը՝ $\tilde{0} = (0, \cdots, 0)$-ն, գտնվում է $0$-րդ մակարդակի վրա: Մաքսիմալ էլեմենտը՝ $\tilde{m} = (m, \cdots, m)$-ը գտնվում է $nm$-րդ մակարդակի վրա: $\Xi_{m+1}^{n}$ -ի միջին մակարդակը $nm/2$ -րդ մակարդակն է, երբ $nm$ -ը զույգ է, և $(nm \pm 1)/2$ համարներով մակարդակներն են, երբ $nm$ -ը կենտ է: Նկար 2.1-1-ում պատկերված է $\Xi_5^3$-ի Հասսեի դիագրամը:




**Նկար 2.1-1**: $\Xi_5^3$-ի Հասսեի դիագրամը:

Այսպիսով, $D_m(n)$-ը $\Xi_{m+1}^n$-ի ենթաբազմություն է, և առաջիկա նպատակն է՝ $D_m(n)$-ի կառուցվածքի /տեղի/ նկարագրումը $\Xi_{m+1}^n$-ում:

**Մասնավոր դեպքեր ըստ $m$-ի արժեքի**

$m = 0$ դեպքում $H_m(n) = \{\emptyset\}$ և միակ ասոցացված վեկտորի բոլոր կոմպոնենտները 0 են:

$m = 1$ դեպքում $\Xi_{m+1}^n$-ը համընկնում է $E^n$-ի հետ, կա $2^n$ հատ մեկ էլեմենտանոց բազմություն, հետևաբար, $D_m(n)$-ի վեկտորները $E^n$-ի էլեմենտներն են, կոմպոնենտները 0-ներ կամ 1-եր են, $|D_m(n)| = 2^n$:

$m = 2^n$ դեպքում $H_m(n) = \{E^n\}$, ասոցացված վեկտորի բոլոր կոմպոնենտները $2^{n-1}$ են:

### *2.1.1 Էլեմենտների դասեր $\Xi_{m+1}^n$-ում*

$\Xi_{m+1}^n$-ում առանձնացնենք հետևյալ էլեմենտները/էլեմենտների դասերը:

**Միջին էլեմենտ/էլեմենտներ**

**Սահմանում 2.1.1-1:** $\Xi_{m+1}^{n}$-ի $m_{mid+} = \left(\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil, \cdots, \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil\right)$ և $m_{mid-} = \left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor, \cdots, \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)$ էլեմենտները կանվանենք *միջին էլեմենտներ*:

Նկատենք, որ զույգ $m$-երի համար ունենք մեկ միջին էլեմենտ, և այն գտնվում է $\Xi_{m+1}^{n}$-ի միջին՝ $nm/2$ մակարդակի վրա: Կենտ $m$-երի դեպքում $m_{mid+}$, $m_{mid-}$-ը գտնվում են $\Xi_{m+1}^{n}$-ի միջին մակարդակից $n/2$ հեռավորության վրա, եթե $nm$-ը զույգ է, և՝ $(n-1)/2$ հեռավորության վրա, եթե $nm$-ը կենտ է:

**Վերին և ստորին էլեմենտներ**

**Սահմանում 2.1.1-2:**

$d \in \Xi_{m+1}^{n}$ -ն կանվանենք $\Xi_{m+1}^{n}$-ի *վերին էլեմենտ*, եթե $d \geq m_{mid+}$;

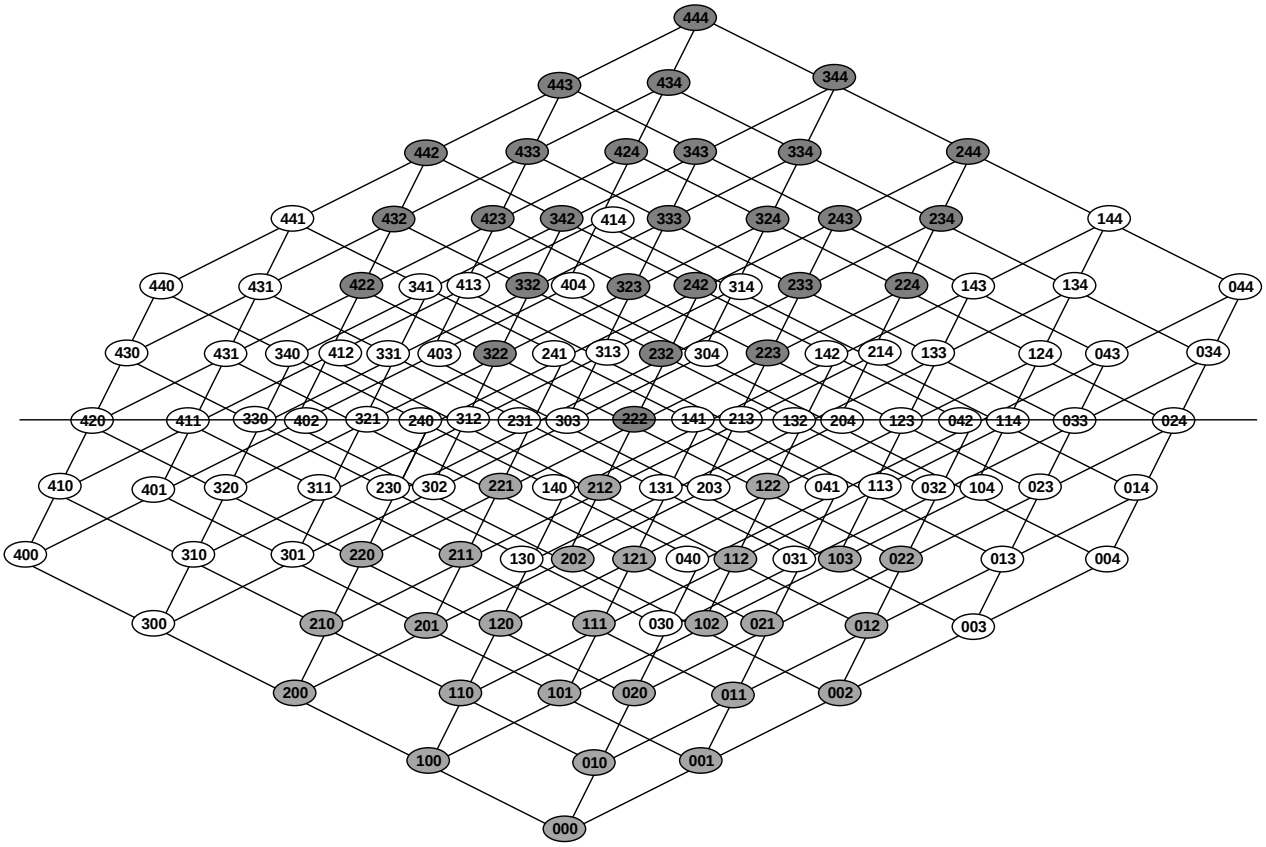
$d \in \Xi_{m+1}^{n}$ -ն կանվանենք $\Xi_{m+1}^{n}$-ի *ստորին էլեմենտ*, եթե $d \leq m_{mid-}$:

$\widehat{H}$–ով և $\breve{H}$–ով նշանակենք, համապատասխանաբար, վերին և ստորին էլեմենտների բազմությունը:

Այսպիսով, $\widehat{H}$–ի յուրաքանչյուր $\hat{d} = (\hat{d}_1, \cdots, \hat{d}_n)$ էլեմենտի համար $\hat{d}_i \geq m - \hat{d}_i, i = 1, \cdots, n$, և յուրաքանչյուր $\breve{d} = (\breve{d}_1, \cdots, \breve{d}_n)$ էլեմենտի համար $\breve{d}_i \leq m - \breve{d}_i, i = 1, \cdots, n$:

$|\widehat{H}| = |\breve{H}| = (\frac{m+1}{2})^n$ կենտ $m$-երի համար, և $|\widehat{H}| = |\breve{H}| = (\frac{m}{2} + 1)^n$ զույգ $m$-երի համար:

Երկրաչափական մեկնաբանումը բերվում է Նկար 2.1.1-1-ում $\Xi_5^3$-ի օրինակի վրա - առավել մուգ գույնով պատկերված են վերին էլեմենտները, բաց գույնով՝ ստորին էլեմենտները: Կա մեկ միջին էլեմենտ՝ (2,2,2)-ը:




**Նկար 2.1.1-1:** Միջին, վերին և ստորին էլեմենտները $\Xi_5^3$-ում:

**Հակադիր էլեմենտներ**

**Սահմանում 2.1.1-3:** $d, \bar{d} \in \Xi_{m+1}^n$ էլեմենտները /զույգը/ կանվանենք *հակադիր էլեմենտներ /հակադիր էլեմենտների զույգ/* $\Xi_{m+1}^n$-ում, եթե մեկը մյուսից ստացվում է $m$–ի նկատմամբ կոմպոնենտների արժեքների շրջումով, այսինքն, եթե $d = (d_1, \cdots, d_n)$, ապա $\bar{d} = (m - d_1, \cdots, m - d_n)$:

### *2.1.2 $D_m(n)$-ի կարևոր հատկություններ*

**Լեմմա 2.1.2-1:** $d = (d_1, \cdots, d_i, \cdots, d_n)$ -ն պատկանում է $D_m(n)$ -ին այն և միայն այն դեպքում, երբ $\bar{d}_i = (d_1, \cdots, m - d_i, \cdots, d_n)$-ն պատկանում է $D_m(n)$-ին, կամայական $i, 1 \leq i \leq n$ համար:

**Ապացույց:**

Դիցուք՝ $d = (d_1, \cdots, d_i, \cdots, d_n) \in D_m(n)$ – այստեղից հետևում է, որ գոյություն ունի $m$ հզորության $\mathcal{E}$ ենթաբազմություն $E^n$-ում, որի տրոհումների ասոցացված վեկտորը $d$-ն

է: $E^n$ -ը տրոհենք ըստ $i$ -րդ փոփոխականի, և $S_i$ “տեղաշարժ” գործողությամբ տեղափոխենք $\mathcal{E}_{x_i=1}$ բազմության էլեմենտները $E^{n-1}_{x_i=1}$-ից $E^{n-1}_{x_i=0}$ և հակառակը՝ $\mathcal{E}_{x_i=0}$-ի էլեմենտները տեղափոխենք $E^{n-1}_{x_i=0}$ -ից $E^{n-1}_{x_i=1}$ : Կստանանք $E^n$ -ի $m$ հզորության բազմություն, որի տրոհումների ասոցացված վեկտորը $(d_1, \cdots, m-d_i, \cdots, d_n)$ է: □

**Լեմմա 2.1.2-2:**

(1) Դիցուք՝ $d' = (d'_1, \cdots, d'_n) \in \widehat{H},\ d'' = (d''_1, \cdots, d''_n) \in \widehat{H}$, և $d' > d''$:
Եթե $d' \in D_m(n)$, ապա $d'' \in D_m(n)$:

(2) Դիցուք՝ $d' = (d'_1, \cdots, d'_n) \in \breve{H},\ d'' = (d''_1, \cdots, d''_n) \in \breve{H}$, և $d' < d''$:
Եթե $d' \in D_m(n)$, ապա $d'' \in D_m(n)$:

**Ապացույց:**

(1) Ենթադրենք, որ $d'$-ը և $d''$-ը բավարարում են լեմմայի պայմաններին: Դիցուք, $i_1, i_2, \cdots, i_k$-ն այն կոմպոնենտների համարներն են, որոնց համար $d'_{i_j} > d''_{i_j}$:
$d' \in D_m(n)$ - այստեղից հետևում է, որ գոյություն ունի $m$ հզորության $\mathcal{E}$ ենթաբազմություն $E^n$-ում, որի տրոհումների ասոցացված վեկտորը $d'$-ն է: $E^n$-ը տրոհենք ըստ $i_1$-րդ փոփոխականի, և քանի որ $d' \in \widehat{H}$, ապա $\left|\mathcal{E}_{x_{i_1}=1}\right| > \left|\mathcal{E}_{x_{i_1}=0}\right|$: Սա նշանակում է, որ $\left|\mathcal{E}_{x_{i_1}=1}\right| - \left|\mathcal{E}_{x_{i_1}=0}\right| = d'_{i_1} - (m - d'_{i_1})$ հատ գագաթ կարող ենք $S_i$ “տեղաշարժ” գործողությամբ տեղափոխել $E^{n-1}_{x_i=1}$-ից $E^{n-1}_{x_{i_1}=0}$: Տեղափոխենք $(d'_{i_1} - d''_{i_1})$ հատը (դա կարող ենք անել, քանի որ $d'_{i_1} - d''_{i_1} < d'_{i_1} - (m - d'_{i_1})$ ): Նույն գործողությունների արդյունքում ըստ յուրաքանչյուր $i_1, i_2, \cdots, i_k$ -ի, - կստանանք բազմություն $d''$ ասոցացված վեկտորով:

(2) Ապացուցվում է նմանատիպ դատողություններով: □

Լեմմա 2.1.2-2-ից կստանանք հետևյալ պարզ հետևանքը.

**Հետևանք 2.1.2-1:**

(1) Եթե $d' = (d'_1, \cdots, d'_n) \in \widehat{H},\ d'' = (d''_1, \cdots, d''_n) \in \widehat{H}$, և $d' > d''$,

ապա $d'' \notin D_m(n)$-ից հետևում է, որ $d' \notin D_m(n)$:

(2) Եթե $d' = (d'_1, \cdots, d'_n) \in \breve{H}$, $d'' = (d''_1, \cdots, d''_n) \in \breve{H}$, և $d' < d''$,

ապա $d'' \notin D_m(n)$-ից հետևում է, որ $d' \notin D_m(n)$:

Հարկ է նշել ևս մեկ հետևանք Լեմմա 2.1.2-2-ից:

**Հետևանք 2.1.2-2:**

Կամայական $m$-ի համար ( $0 \le m \le 2^n$ ) $\Xi^n_{m+1}$-ի $m_{mid+}, m_{mid-}$ էլեմենտները պատկանում են $D_m(n)$-ին:

### *2.1.3 $D_m(n)$-ի եզրային էլեմենտներ*

**Սահմանում 2.1.3-1:** $d = (d_1, \cdots, d_n) \in D_m(n)$ էլեմենտը կանվանենք $D_m(n)$-ի *վերին եզրային* էլեմենտ, եթե $\Xi^n_{m+1}$-ի կամայական էլեմենտ, որը մեծ է $d$-ից, չի պատկանում $D_m(n)$-ին: $d = (d_1, \cdots, d_n) \in D_m(n)$ էլեմենտը կանվանենք $D_m(n)$-ի *ստորին եզրային* էլեմենտ, եթե $\Xi^n_{m+1}$-ի կամայական էլեմենտ, որը փոքր է $d$ –ից, չի պատկանում $D_m(n)$-ին:

$\widehat{D}_{max}$-ով և $\breve{D}_{min}$-ով նշանակենք, համապատասխանաբար, $D_m(n)$-ի վերին և ստորին եզրային էլեմենտների բազմությունը;

Հեշտ է տեսնել, որ $\widehat{D}_{max}$-ին պատկանող յուրաքանչյուր $\hat{d}$ էլեմենտի համար $\Xi^n_{m+1}$-ում նրան հակադիր $\breve{d}$ էլեմենտը պատկանում է $\breve{D}_{min}$-ին, և հակառակը: Այսպիսով, $\widehat{D}_{max}$ և $\breve{D}_{min}$ բազմությունները պարունակում են հավասար քանակով էլեմենտներ, և նրանք $\Xi^n_{m+1}$-ի միջին շերտի/շերտերի նկատմամբ սիմետրիկ են՝ եթե որևէ $\hat{d} \in \widehat{D}_{max}$ էլեմենտ պատկանում է $\Xi^n_{m+1}$-ի $l$-րդ շերտին, ապա նրա լրացումը՝ $\breve{d}$-ն, պատկանում է $\Xi^n_{m+1}$-ի $(nm - l)$-րդ շերտին:

Ամփոփելով, նշենք եզրային էլեմենտների հետևյալ հատկությունները.

**Հատկություն 2.1.3-1:** $\widehat{D}_{max}$-ի և $\breve{D}_{min}$-ի էլեմենտները հանդես են գալիս զույգերով՝ յուրաքանչյուր $\hat{d} \in \widehat{D}_{max}$ էլեմենտի համար գոյություն ունի նրան հակադիր $\bar{\hat{d}} \in \breve{D}_{min}$ էլեմենտը, և հակառակը, այստեղից՝ $|\widehat{D}_{max}| = |\breve{D}_{min}|$:

**Հատկություն 2.1.3-2:** $\widehat{D}_{max} \subseteq \widehat{H}$ և $\breve{D}_{min} \subseteq \breve{H}$:

**Հատկություն 2.1.3-3:** $\widehat{D}_{max}$-ը և $\breve{D}_{min}$-ը անհամեմատելի էլեմենտների բազմություններ (հակաշղթաներ) են $\Xi_{m+1}^{n}$-ում:

### *2.1.4 Նկարագիր եզրային էլեմենտների միջոցով*

$\Xi_{m+1}^{n}$-ի գագաթների $(d', d'')$, $d' \leq d''$ զույգի համար $E(d', d'')$-ով նշանակենք հետևյալ բազմությունը. $E(d', d'') = \{a \in \Xi_{m+1}^{n} | d' \leq a \leq d''\}$, կամ՝ այլ խոսքերով, $(d', d'')$ զույգով անցնող *մինիմալ ենթացանցը* $\Xi_{m+1}^{n}$-ում:

Թեորեմ 2.1.4-1-ը ստորև պնդում է, որ եթե դիտարկենք այն մինիմալ ենթացանցերը, որոնք անցնում են վերին և ստորին եզրային էլեմենտներից բաղկացած հակադիր էլեմենտների զույգով, ապա այդ բոլոր ենթացանցերի միավորումը կազմում է $D_m(n)$-ը: Եվ այսպիսով, $\widehat{D}_{max}$ -ը / $\breve{D}_{min}$ -ը/ $D_m(n)$ -ի համար հանդիսանում է գեներացնող բազմություն:

Դիցուք՝ $|\widehat{D}_{max}| = r$, և $\widehat{D}_{max} = \{\widehat{D}_1, \cdots, \widehat{D}_r\}$, $\breve{D}_{min} = \{\breve{D}_1, \cdots, \breve{D}_r\}$:

**Թեորեմ 2.1.4-1:** $D_m(n) = \cup_{j=1}^{r} E(\breve{D}_j, \widehat{D}_j)$:

**Ապացույց:**

Նախ ապացուցենք, որ $D_m(n) \subseteq \cup_{j=1}^{r} E(\breve{D}_j, \widehat{D}_j)$: Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի $d \in D_m(n)$, այնպես որ $d \notin \cup_{j=1}^{r} E(\breve{D}_j, \widehat{D}_j)$: Կազմենք $u$ և $l$ էլեմենտները հետևյալ ձևով.

$$u_i = \begin{cases} d_i, & \text{եթե } d_i \geq m - d_i \\ m - d_i, & \text{եթե } d_i < m - d_i \end{cases} \text{ և } l_i = \begin{cases} d_i, & \text{եթե } d_i \leq m - d_i \\ m - d_i, & \text{եթե } d_i > m - d_i \end{cases}, \ i = 1, \cdots, n:$$

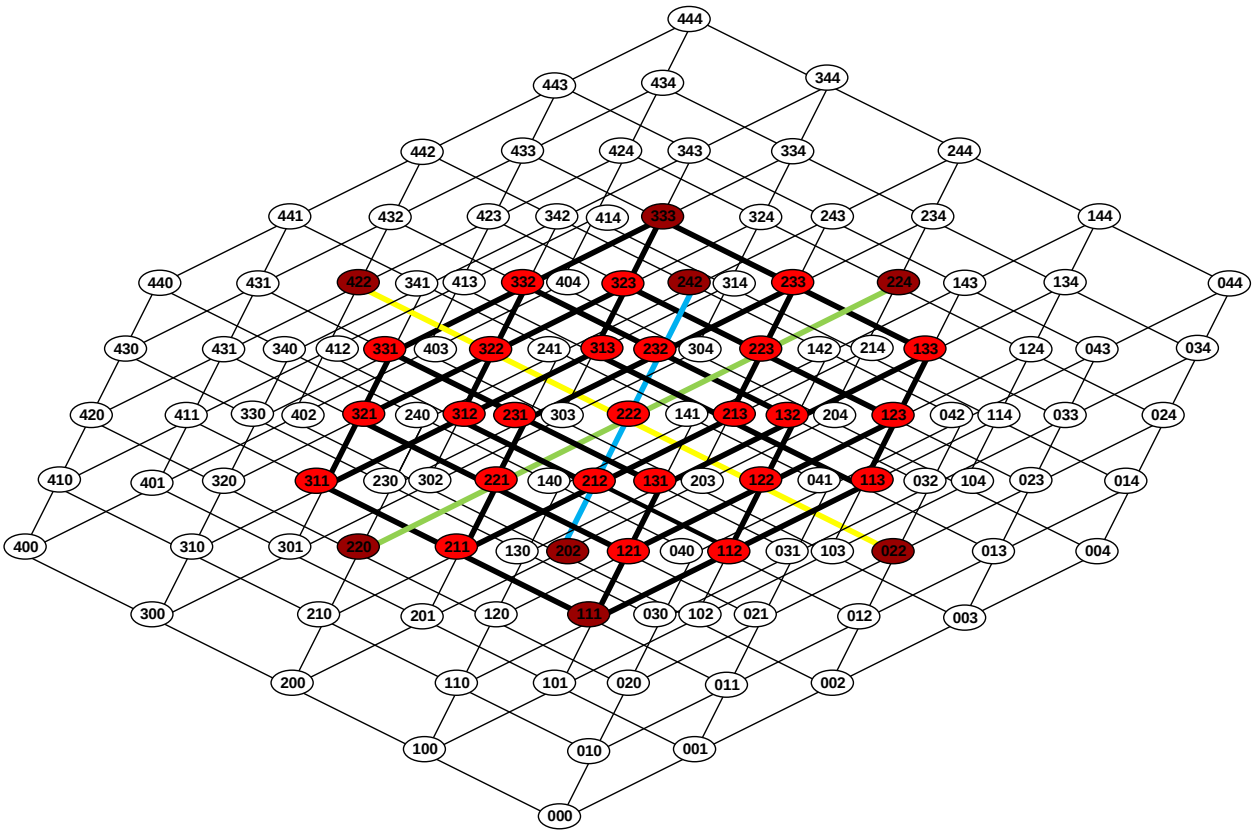
Լեմմա 2.1.2-1-ից հետևում է, որ $u$-ն և $l$-ը նույնպես չեն պատկանում $\cup_{j=1}^{r} E(\breve{D}_j, \widehat{D}_j)$: Այստեղից՝ $u \notin \widehat{D}_{max}$ և $l \notin \breve{D}_{min}$: Հետևաբար, $\widehat{D}_{max}$-ում գոյություն ունի էլեմենտ, դիցուք՝ $\widehat{D}_j$, այնպես որ $u < \widehat{D}_j$, և համապատասխան $\breve{D}_j$ էլեմենտի համար $\breve{D}_{min}$-ից՝ $\breve{D}_j < l$: Այսպիսով,

$$\breve{D}_j < l \leq u < \widehat{D}_j,$$

որից էլ հետևում է, որ $l$-ը և $u$-ն պատկանում են $E(\check{D}_j, \hat{D}_j)$-ին, և հետևաբար, նորից ըստ Լեմմա 2.1.2-1-ի $d \in E(\check{D}_j, \hat{D}_j)$: Ստացանք հակասություն:

Այժմ ապացուցենք, որ $\cup_{j=1}^{r} E(\check{D}_j, \hat{D}_j) \subseteq D_m(n)$: Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի $d$ էլեմենտ որևէ $E(\check{D}_j, \hat{D}_j)$-ում, այնպես որ $d \notin D_m(n)$: Կազմենք $u$ և $l$ էլեմենտները ինչպես նախորդ դեպքում: Ըստ լեմմա 2.1.2-1-ի $u, l \notin D_m(n)$: Մյուս կողմից, $d \in E(\check{D}_j, \hat{D}_j)$-ից հետևում է, որ $u$-ն և $l$-ը պատկանում են $E(\check{D}_j, \hat{D}_j)$-ին, և հետևաբար, $u \leq \hat{D}_j$, $l \geq \check{D}_j$: Ըստ Լեմմա 2.1.2-2-ի՝ $u$-ն և $l$-ը պատկանում են $D_m(n)$-ին: Ստացանք հակասություն: □

Նկար 2.1.4-1-ում բերված է ասվածի երկրաչափական մեկնաբանումը $\Xi_5^3$-ի օրինակի վրա: $D_4(3)$ բազմության էլեմենտները գունավորված են (պատկերված են կարմիր գույնով), և առավել մուգ գույնով՝ եզրային էլեմենտներն են: $D_4(3)$-ն իրենից ներկայացնում է $E((111),(333))$, $E((022),(422))$, $E((202),(242))$ և $E((220),(224))$ ենթացանցերի միավորում; ենթացանցերից յուրաքանչյուրում գագաթները միացված են տարբեր գույների կողերով:




**Նկար 2.1.4-1:** $D_4(3)$ բազմությունը $\Xi_5^3$-ում:

$E(\breve{D}_j, \widehat{D}_j)$ ենթացանցերը ըստ սահմանման ուռուցիկ բազմություններ են $\Xi_{m+1}^n$-ում (մասնակի կարգավորված բազմությունում):

Կապացուցենք, որ լինելով ուռուցիկ բազմությունների միավորում, $D_m(n)$-ը ուռուցիկ բազմություն չէ $\Xi_{m+1}^n$-ում:

**Թեորեմ 2.1.4-2:** $D_m(n)$-ը ուռուցիկ բազմություն չէ, երբ $1 < m < 2^n - 1$:

**Ապացույցը** կբերենք 2.2.3. բաժնում:

### *2.1.5 $D_m(n)$-ի ուռուցիկության հետ կապված հարցեր*

Այս բաժնում կնկարագրենք $\Xi_{m+1}^n$-ի այն ամենափոքր ուռուցիկ ենթաբազմությունը, որը պարունակում է $D_m(n)$-ը, - նշանակենք այն $C_{D_m(n)}$-ով:

Կապացուցենք, որ եթե դիտարկենք այն մինիմալ ենթացանցերը, որոնք անցնում են $\Xi_{m+1}^n$-ի վերին և ստորին եզրային էլեմենտներից բաղկացած բոլոր զույգերով, ապա այդ բոլոր ինտերվալների միավորումը կկազմի $C_{D_m(n)}$-ը:

**Թեորեմ 2.1.5-1:** $C_{D_m(n)} = \cup_{i=1}^r \cup_{j=1}^r E(\breve{D}_i, \widehat{D}_j)$:

**Ապացույց:**

Պարզ է, որ $D_m(n) \subseteq \cup_{i=1}^r \cup_{j=1}^r E(\breve{D}_i, \widehat{D}_j)$ : Պետք է ապացուցենք, որ $\cup_{i=1}^r \cup_{j=1}^r E(\breve{D}_i, \widehat{D}_j)$ -ը ուռուցիկ է $\Xi_{m+1}^n$ -ում, և $\Xi_{m+1}^n$ -ում չկա ավելի փոքր ուռուցիկ բազմություն, որը պարունակում է $D_m(n)$-ն:

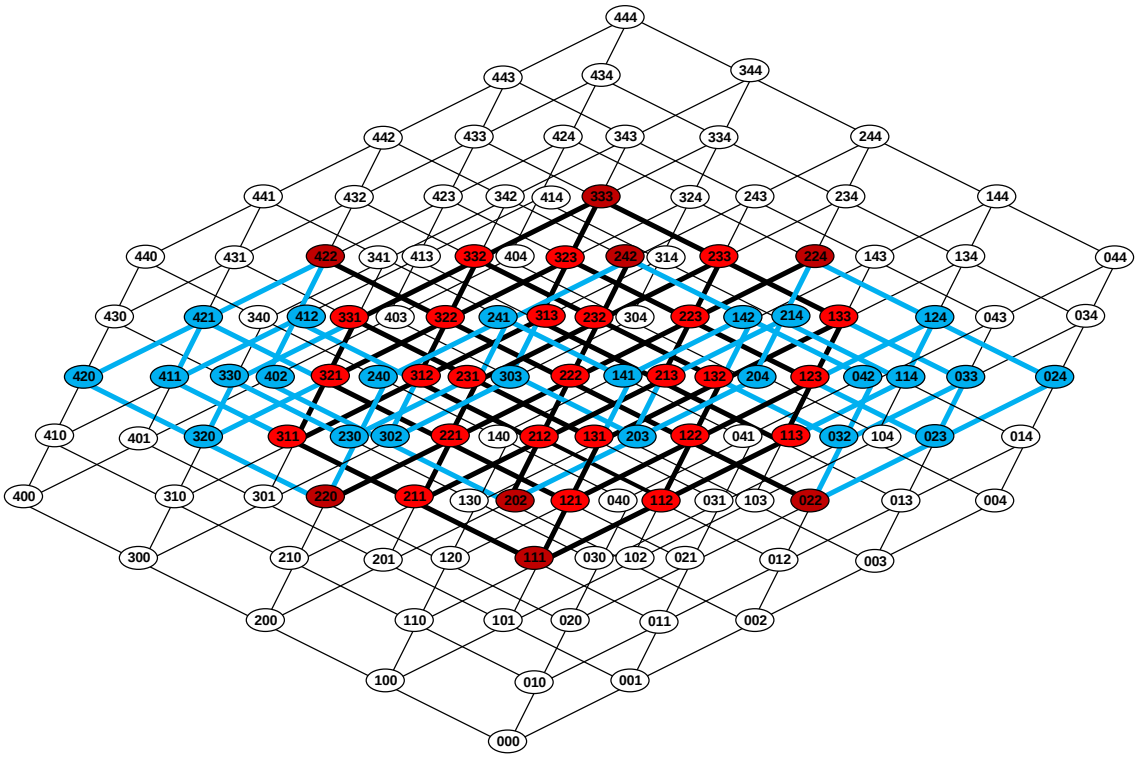
Նախ ապացուցենք $\cup_{i=1}^r \cup_{j=1}^r E(\breve{D}_i, \widehat{D}_j)$-ի ուռուցիկությունը $\Xi_{m+1}^n$-ում:

Վերցնենք կամայական $a, b \in \cup_{i=1}^r \cup_{j=1}^r E(\breve{D}_i, \widehat{D}_j)$, այնպես, որ $a < b$, և ապացուցենք, որ $a$ -ից $b$ փակ ինտերվալը՝ $[a, b] = \{c \in \Xi_{m+1}^n | a \leq c \leq b\}$ , - նույնպես պատկանում է $\cup_{i=1}^r \cup_{j=1}^r E(\breve{D}_i, \widehat{D}_j)$-ին: Եթե $a, b$ –ն եզրային էլեմենտներ են (վերին կամ ստորին), կամ պատկանում են որևէ $E(\breve{D}_i, \widehat{D}_i)$-ին, ապա պնդումն ակնհայտ է: Դիցուք՝ $a, b$ –ն եզրային չեն, և $a \in E(\breve{D}_i, \widehat{D}_i)$ , $b \in E(\breve{D}_j, \widehat{D}_j)$, $i \neq j$: Այդ դեպքում, կամայական $c \in [a, b]$ էլեմենտ

պատկանում է $E(\breve{D}_i, \widehat{D}_j)$-ին /հաշվի առնելով նաև, որ $\breve{D}_i \leq \widehat{D}_j$, կամայական $1 \leq i, j \leq r$ համար/:

Մյուս կողմից, $\cup_{i=1}^{r} \cup_{j=1}^{r} E(\breve{D}_i, \widehat{D}_j) \subseteq C_{D_m(n)}$, որից էլ հետևում է, որ չկա ավելի փոքր ուռուցիկ բազմություն, որ պարունակի $D_m(n)$-ն: □

Նկար 2.1.5-1-ում պատկերված է $C_{D_4(3)}$-ը $\Xi_5^3$-ում; գունավորված են $C_{D_4(3)}$-ի էլեմենտները (կարմիր և կապույտ գույներով); նրանց մեջ կարմիր գույնով նշվածները $D_4(3)$ -ի էլեմենտներն են:




**Նկար 2.1.5-1:** $C_{D_4(3)}$-ը $\Xi_5^3$-ում:

### *2.1.6 Եզրային բազմությունների գեներացումը մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների միջոցով*

Այժմ անդրադառնանք եզրային էլեմենտներին և ցույց տանք $\widehat{D}_{max}$ և $\breve{D}_{min}$ բազմությունների առնչությունը $E^n$-ում սահմանված մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների բազմության հետ:

$M_m^1$-ով նշանակենք $E^n$-ի $m$ հզորությամբ այն բազմությունների դասը, որոնք համապատասխանում են $m$ հատ մեկ արժեք ունեցող մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաներին /մեկ արժեքների գագաթների բազմությանը/, և $D_m^{M_m^1}(n)$ -ով նշանակենք $M_m^1$ -ի էլեմենտների/բազմությունների ասոցացված վեկտորների դասը:

$M_m^0$-ով նշանակենք $E^n$-ի $m$ հզորությամբ այն բազմությունների դասը, որոնք համապատասխանում են $m$ հատ զրո արժեք ունեցող մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաներին /զրո արժեքների գագաթների բազմությանը/, և $D_m^{M_m^0}(n)$ -ով նշանակենք $M_m^0$ -ի էլեմենտների/բազմությունների ասոցացված վեկտորների դասը:

Այստեղ նույնպես (ինչպես եզրային էլեմենտների դեպքում) $D_m^{M_m^1}(n)$ -ին պատկանող յուրաքանչյուր $\hat{d}$ էլեմենտի համար $\Xi_{m+1}^n$-ում նրան հակադիր $\check{d}$ էլեմենտը պատկանում է $D_m^{M_m^0}(n)$-ին, և հակառակը:

Ամփոփելով, նշենք մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների ասոցացված վեկտորների բազմության հետևյալ հատկությունները.

**Հատկություն 2.1.6-1:** $D_m^{M_m^1}(n)$-ը և $D_m^{M_m^0}(n)$-ն պարունակում են միևնույն քանակով էլեմենտներ և հանդիսանում են $\Xi_{m+1}^n$ -ի միջին շերտի/շերտերի նկատմամբ փոխադարձաբար սիմետրիկ տեղադրված բազմություններ:

**Հատկություն 2.1.6-2:** $D_m^{M_m^1}(n) \subseteq \widehat{H}$, և $D_m^{M_m^0}(n) \subseteq \breve{H}$:

**Թեորեմ 2.1.6-1:** $\widehat{D}_{max} \subseteq D_m^{M_m^1}$ և $\breve{D}_{min} \subseteq D_m^{M_m^0}$:

**Ապացույցը** պարզ է: Եթե գոյություն ունենար $\hat{d} \in \widehat{D}_{max}$ էլեմենտ, որը չի համապատասխանում որևէ մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի 1 արժեքների բազմության ասոցացված վեկտորի, ապա վերցնելով $\hat{d}$ -ին համապատասխանող $\mathcal{E} \in E^n$ բազմություն, - կստանանք, որ գոյություն ունեն $E^n$-ի $\alpha$ և $\beta$ կետեր այնպես, որ $\alpha < \beta$, $\alpha \in \mathcal{E}$ և $\beta \notin \mathcal{E}$, այնպես, որ փոխարինելով $\mathcal{E}$-ում $\alpha$ կետը $\beta$ կետով, կստանանք նոր բազմություն՝ ավելի մեծ ասոցացված վեկտորով, ինչը հակասություն է: □

Ստացվում է, որ վերին եզրային ասոցացված վեկտորները կարող են ունենալ ներկայացում/իրականացում միայն մոնոտոն ֆունկցիայի տեսքով /անհրաժեշտ պայման/:

**Հետևանք 2.1.6-1:**

$D_m(n) = \cup_{\hat{d} \in D_m^{M_m^1}, \check{d} \in D_m^{M_m^0}} E(\check{d}, \hat{d})$ , որտեղ $\hat{d} \in D_m^{M_m^1}$ և $\check{d} \in D_m^{M_m^0}$ էլեմենտները հակադարձ էլեմենտներ են:

Այսպիսով, $D_m(n)$ -ի նկարագրման մեթոդ կարող է հանդիսանալ հետևյալը՝ կառուցել բոլոր մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաները, որոնք ունեն $m$ հատ 1 արժեք /կառուցել բոլոր մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաները, որոնք ունեն $m$ հատ 0 արժեք/:

Սակայն, այս ճանապարհով կկառուցվեն նաև հավելյալ ֆունկցիաներ, քանի որ, ինչպես ցույց է տալիս Օրինակ 2.1.6-1-ը՝ $\widehat{D}_{max} \subset D_m^{M_m^1}$:

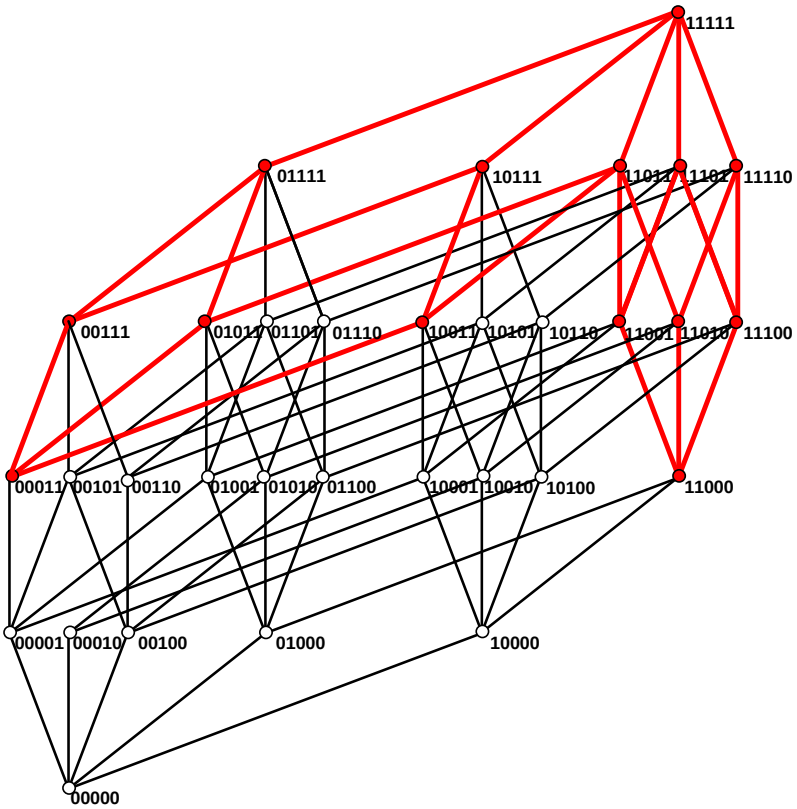
**Օրինակ 2.1.6-1:**

Դիտարկենք $E^5$-ում որոշված հետևյալ մոնոտոն ֆունկցիաները, որոնք տրված են իրենց 1 արժեքների բազմություններով ($m = 14$).

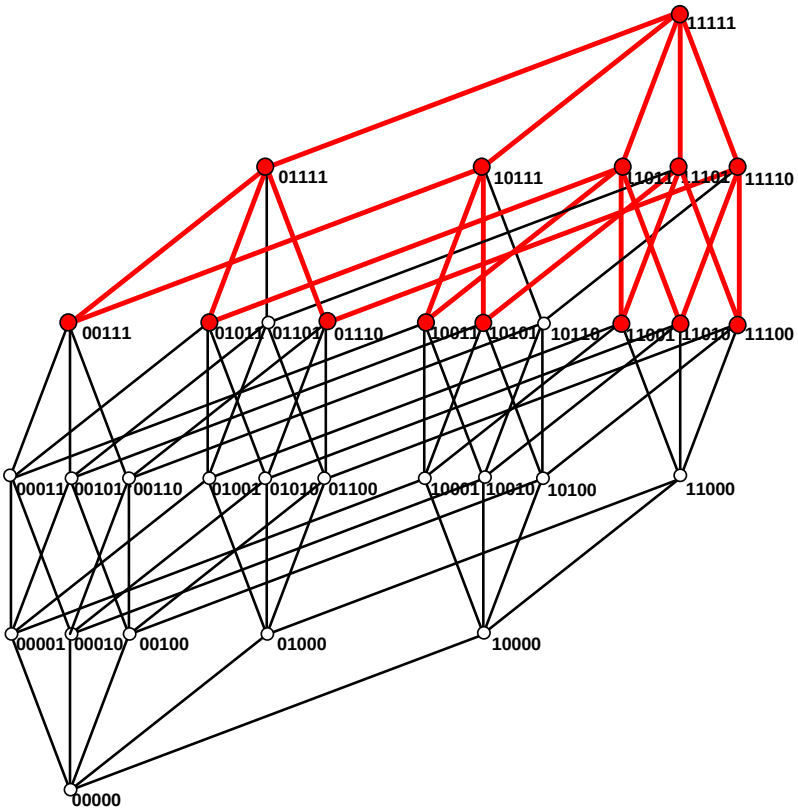
$V' = \{(1,1,1,1,1), (0,1,1,1,1), (1,0,1,1,1), (1,1,0,1,1), (1,1,1,0,1), (1,1,1,1,0),$
$(0,0,1,1,1), (0,1,0,1,1), (1,0,0,1,1), (1,1,0,0,1), (1,1,0,1,0), (1,1,1,0,0),$
$(0,0,0,1,1), (1,1,0,0,0)\}$

$V'' = \{(1,1,1,1,1), (0,1,1,1,1), (1,0,1,1,1), (1,1,0,1,1), (1,1,1,0,1), (1,1,1,1,0),$
$(0,0,1,1,1), (0,1,0,1,1), (1,0,0,1,1), (1,1,0,0,1), (1,1,0,1,0), (1,1,1,0,0),$
$(0,1,1,1,0), (1,0,1,0,1)\}$

Նկար 2.1.6-1-ում և Նկար 2.1.6-2-ում պատկերված են համապատասխան բազմությունները $E^5$-ում:




**Նկար 2.1.6-1:** $V'$ բազմությունը $E^5$-ում:




**Նկար 2.1.6-2:** $V''$ բազմությունը $E^5$-ում:

Համապատասխան ասոցացված վեկտորներն են.

$$d' = (10,10,7,10,10) \in D_{14}(5)$$

$$d'' = (10,10,9,10,10) \in D_{14}(5)$$

$d', d'' \in D_{14}(5)$ և $d' < d''$, ինչից էլ հետևում է, որ $d' \notin \widehat{D}_{max}$:

Այստեղից, մասնավորապես, հետևում է հետևյալ հատկությունը.

**Հատկություն 2.1.6-3:** $D_m^{M_m^1}(n)$-ը և $D_m^{M_m^0}(n)$-ը հակաշղթաներ չեն (ի տարբերություն $\widehat{D}_{max}$-ի և $\widehat{D}_{min}$-ի):

Հետևյալ պնդումը ցույց է տալիս, որ մոնոտոն ֆունկցիաներին համապատասխանող ասոցացված վեկտորները չունեն մոնոտոնությունից բխող պարտադրող հատկություն:

**Լեմմա 2.1.6-1:** $E^n$-ում միևնույն հզորությամբ երկու բազմություն, որոնցից մեկը հանդիսանում է մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի 1 արժեքների բազմություն, իսկ մյուսը՝ ոչ, - կարող են ունենալ տրոհումների միևնույն վեկտորը:

**Ապացույց:**

Դիցուք՝ $d' = (d'_1, d'_2, \cdots, d'_n)$-ը և $d'' = (d''_1, d''_2, \cdots, d''_n)$-ը պատկանում են $D_m^{M_m^1}(n)$ բազմությանը, և $d' < d''$ (Օրինակ 2.1.6-1-ից գիտենք, որ կան այդպիսի մոնոտոն ֆունկցիաներ): $M(d')$, $M(d'')$-ով նշանակենք համապատասխան մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների 1 արժեքների բազմությունները: Հատկություն 2.1.3-2-ից ունենք, որ $d'_i \geq m - d'_i$, և $d''_i \geq m - d''_i$, $1 \leq i \leq n$:

Դիցուք՝ $d'_j < d''_j$: Տրոհենք $E^n$-ը ըստ $x_j$ փոփոխականի արժեքի, և ցույց տանք, որ $M(d'')$-ին պատկանող $(d''_j - d'_j)$ հատ գագաթ $S_j$ "տեղաշարժ" գործողությամբ կարելի է $E^{n-1}_{x_j=1}$-ից տեղափոխել $E^{n-1}_{x_j=0}$: Դա հնարավոր է, քանի որ

$$d''_j - (m - d''_j) > d''_j - (m - d'_j) > d''_j - d'_j:$$

Այս գործողությունից հետո ստացված բազմությունը չի կարող հանդիսանալ մոնոտոն ֆունկցիայի 1 արժեքների բազմություն: Նմանատիպ գործողություններ կատարենք

բոլոր այն ուղղություններով, որտեղ $d''$-ը մեծ է $d'$-ից, կստանաք բազմություն, որն ունի տրոհումների $d'$ վեկտորը:□

Պարզ է, որ նույնը չի կարելի ասել այն մոնոտոն ֆունկցիաների մասին, որոնց համապատասխան տրոհումների վեկտորը վերին եզրային է:

Այսպիսով, չնայած մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների միջոցով ամբողջովին նկարագրվում է ասոցացված վեկտորների /հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների/ բազմությունը, սակայն մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաները իրենք բարդ օբյեկտ են այն իմաստով, որ նրանք շատ են, նրանց քանակի համար հայտնի են միայն ասիմպտոտիկ գնահատականներ, և չկա նրանց բազմության պարզ նկարագիր: Մյուս կողմից, տարբեր մոնոտոն ֆունկցիաներ կարող են ունենալ միևնույն ասոցացված վեկտորը, և նման ասոցացված վեկտորների քանակը կարող է շատ ավելի փոքր լինել մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների քանակից:

Հետագայում, առանց ընդհանրությունը խախտելու կսահմանափակվենք միայն $\widehat{D}_{max}$ և $D_m^{M_m^1}(n)$ բազմությունների դիտարկումով:

## 2.2 Բազմաչափ միավոր խորանարդի ենթաբազմությունների տրոհումների ասոցացված վեկտորների տիրույթի բնութագրում

Այս բաժնի նպատակն է գտնել էլեմենտների բնութագրական դասեր $\widehat{D}_{max}$- ում: Պարզ է, որ նրանք պետք է համապատասխանեն մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաներին:

### *2.2.1 $\widehat{D}_{max}$- ի մինիմալ ռանգի էլեմենտներ*

Այս բաժնում կառուցելու ենք $\widehat{D}_{max}$ - ի մինիմալ ռանգի էլեմենտները: Նախ, կկառուցենք $E^n$ -ում գագաթների ենթաբազմությունների մի հատուկ դաս և կապացուցենք, որ այս դասի ենթաբազմություններին համապատասխանող ասոցացված վեկտորները ունեն մինիմալ ռանգ: Այնուհետև, կապացուցենք, որ այդ դասը միակն է իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

**Լեքսիկոգրաֆիկ/բառարանային կարգ $E^n$-ում**

$E^n$-ի էլեմենտները համարակալենք ըստ նրանց երկուական համակարգում ունեցած արժեքի՝ 0-ից դեպի $2^n - 1$, /կամ ըստ հակառակ կարգի՝ $2^n - 1$-ից դեպի 0 /: Հեշտ է տեսնել, որ այս համարակալումը համընկնում է $n$ երկարության բինար բառերի լեքսիկոգրաֆիկ կարգի հետ /կամ հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգի հետ/ երբ 0 տառը նախորդում է 1 տառին / երբ 1 տառը նախորդում է 0 տառին /: Մեկնաբանումը բերված է Նկար 2.2.1-1-ում:

| val/var | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^n - 1$ | 1 | 1 | $\cdots$ | 1 | 1 |
| $2^n - 2$ | 1 | 1 | $\cdots$ | 1 | 0 |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| 1 | 0 | 0 | $\cdots$ | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | $\cdots$ | 0 | 0 |

Lex order ↑ ; Reverse lex ↓

**Նկար 2.2.1-1:** $n$ երկարության բինար բառերի լեքսիկոգրաֆիկ /հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ/ կարգը:

Դիտարկելու ենք հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգը՝ $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \prec (\beta_1, \cdots, \beta_n)$, եթե $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$-ի թվային արժեքը մեծ է $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$-ի թվային արժեքից: Այսպիսով, ըստ հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգի՝ $E^n$-ի բոլոր այն գագաթները, որոնց համար $x_1 = 1$, նախորդում են այն գագաթներին, որոնց համար $x_1 = 0$: Երկու մասում էլ՝ $E^{n-1}_{x_1=1}$-ում և $E^{n-1}_{x_1=0}$-ում, նրանց պատկանող էլեմենտների միջև կարգը հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ է: Շարունակելով այս դատողությունները՝ ստանում ենք որ կամայական $t$-ի համար հաջորդականության առաջին $2^t$ էլեմենտները, և, հաջորդաբար, յուրաքանչյուր հաջորդող $2^t$ էլեմենտների խմբերը կազմում են ենթախորանարդներ: $x_1, \cdots, x_{n-t}$-ի արժեքները համապատասխան ձևով ֆիքսված են նրանցից յուրաքանչյուրում: Օրինակ, առաջին $2^t$ էլեմենտները համընկնում են $E^t_{x_1=1,\cdots,x_{n-t}=1}$ ենթախորանարդի հետ:

**Սահմանում 2.2.1-1** ([108])**:** $E^n$-ի էլեմենտների հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգի առաջին $k$ էլեմենտները (որևէ $k$-ի համար) կանվանենք $k$-սկզբնահատված:

Ստորև նշենք երկու հատկություն, որոնք հեշտ է ստուգել:

Դիցուք՝ $2^t < m \leq 2^{t+1}$:

**Հատկություն 2.2.1-1:** $E^n$ -ի հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգի $m$ -սկզբնահատվածը համապատասխանում է $E^{t+1}_{x_1=1,\cdots,x_{n-t-1}=1}$-ի $m$-սկզբնահատվածին: Այն իր մեջ ներառում է $E^t_{x_1=1,\cdots,x_{n-t}=1}$-ը, իսկ մնացած $m-2^t$ էլեմենտները կազմում են $E^t_{x_1=1,\cdots,x_{n-t-1}=1,x_{n-t}=0}$-ի $(m-2^t)$-սկզբնահատվածը:

**Հատկություն 2.2.1-2:** Եթե $M$ բազմությունը կազմված է $E^t_{x_1=1,\cdots,x_{n-t}=1}$-ից և ևս $m-2^t$ հավելյալ էլեմենտներից, որոնք հանդիսանում են $E^t_{x_1=1,\cdots,x_{n-t-1}=1,x_{n-t}=0}$ -ի $(m-2^t)$ -սկզբնահատվածը, ապա $M$ -ը $E^{t+1}_{x_1=1,\cdots,x_{n-t-1}=1}$ -ի $m$ -սկզբնահատվածն է: Այն հանդիսանում է $m$ - սկզբնահատված նաև ավելի մեծ չափի խորանարդում, մասնավորապես, $E^n$-ում:

$M$ -ով նշանակենք $E^n$ -ի հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգի $m$ -սկզբնահատվածին համապատասխանող, գագաթների բազմությունը:

Նշված հատկություններից հետևում է, որ $M$-ը համապատասխանում է $E^n$-ում որոշված մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի (1 արժեքների բազմությանը):

Այդ հատկություններով կարելի է որոշել նաև $M$-ի կառուցվածքը:

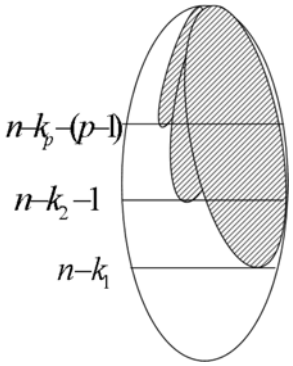
Դիտարկենք $m$ թվի երկուական ներկայացումը, և դիցուք, $k_1, k_2, \cdots, k_p$ -ն այդ ներկայացման մեջ 1 արժեքով կոմպոնենտների համարներն են՝

$$m = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_p},\ k_1 > k_2 > \cdots > k_p \geq 0:$$

Կամայական $i$-ի համար, $1 \leq i \leq p-1$, $2^{k_i} > \sum_{j=i+1}^{p} 2^{k_j}$: Ըստ կառուցման, $M$-ը իրենից ներկայացնում է $k_1, k_2, \cdots, k_p$ չափանի ինտերվալների միավորում: Ամենամեծ՝ $k_1$-չափանի ինտերվալը կազմված է ըստ $x_{n-k_1+1}, \cdots, x_n$ փոփոխականների (մնացած՝ $x_1, \cdots, x_{n-k_1}$ փոփոխականների արժեքները ֆիքսված են և հավասար են 1-ի); ինտերվալի մաքսիմալ և մինիմալ էլեմենտները գտնվում են համապատասխանաբար, $n$ -րդ և $(n-k_1)$ -րդ շերտերում: Հաջորդ, $k_2$ -չափանի ինտերվալը ընկած է $k_1$ -չափանի

ինտերվալի ստվերում ըստ $x_{n-k_1}$ փոփոխականի, և հետևաբար, $k_2$-չափանի ինտերվալի բոլոր կետերում $x_{n-k_1}$ փոփոխականի արժեքը ֆիքսված է 0-ով: Ինտերվալի մաքսիմալ և մինիմալ էլեմենտները գտնվում են $(n-1)$ -րդ և $(n-k_2-1)$ -րդ շերտերում, համապատասխանաբար: Ընդհանուր դեպքում, կամայական $i$-ի համար $(i=1,2,\cdots,p)$, $k_i$ չափանի ինտերվալի բոլոր կետերում $i-1$ հատ փոփոխականների արժեքները ֆիքսված են 0-ով, և ինտերվալի մաքսիմալ և մինիմալ էլեմենտները գտնվում են $n-(i-1)$-րդ և $n-k_i-(i-1)$-դ շերտերում, համապատասխանաբար:

Դիտարկած կառուցվածքի սխեմատիկ պատկերը բերված է Նկար 2.2.1-2-ում:




**Նկար 2.2.1-2:** $M$ բազմության կառուցվածքը:

Եթե լեքսիկոգրաֆիկ կարգը կիրառենք ըստ $(x_1,\cdots,x_n)$ փոփոխականների բոլոր $(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})$ տեղափոխությունների, ապա ըստ բոլորի $m$ -սկզբնահատվածների կառաջանա իզոմորֆ մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների դաս: Այս ֆունկցիաների մեկ արժեքների բազմությունը $E^n$-ում ունի “սեղմված” բազմության տեսք: Հետագայում, հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգի սկզբնահատվածները կանվանենք *սեղմված բազմություններ*:

Սեղմված բազմության կառուցվածքից հետևում է մեկ հատկություն ևս.

**Հատկություն 2.2.1-3:** Դիցուք՝ $(d_1,\cdots,d_n)$ -ը սեղմված $m$ -բազմության տրոհումների ասոցացված վեկտոր է: Այդ դեպքում, $d_1$-ը կամայական $m$-բազմության տրոհումների հզորությունների համար հնարավոր ամենամեծ արժեքն է: Ֆիքսված $d_1$-ի համար $d_2$-ը մյուս հնարավոր ամենամեծ արժեքն է, և այլն:

$H_{rmin}$-ով նշանակենք $E^n$-ի $m$ հզորության սեղմված բազմությունների բազմությունը: Այսպիսով, $H_{rmin}$-ը իրենից ներկայացնում է իզոմորֆ հիպերգրաֆների դաս, որոնց աստիճանային հաջորդականությունները նույն ռանգն ունեն (նշանակենք այն $r_{min}$-ով), և մեկը մյուսից ստացվում են կոմպոնենտների տեղափոխությունների միջոցով:

$d(H_{rmin})$ -ով նշանակենք $H_{rmin}$ բազմության հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների բազմությունը: Մեր նպատակն է ցույց տալ, որ $d(H_{rmin})$-ը բաղկացած է $\widehat{D}_{max}$- ի մինիմալ ռանգի վեկտորներից:

Նախ ապացուցենք լեմմա, որի միջոցով կարող ենք սահմանափակվել $m \leq 2^{n-1}$ դեպքով:

**Լեմմա 2.2.1-2:** Դիցուք՝ $H_1$-ը հիպերգրաֆ է կողերի $\mathcal{E}_1 \in M_m^1$ բազմությամբ, և $D(H_1) = (d_1, \cdots, d_n)$-ը նրա աստիճանայաին հաջորդականությունն է: Այդ դեպքում, գոյություն ունի նաև $H_2$ հիպերգրաֆ կողերի $\mathcal{E}_2 \in M_{2^n-m}^1$ բազմությամբ, որի աստիճանային հաջորդականությունն է՝ $D(H_2) = (2^{n-1} - m + d_1, \cdots, 2^{n-1} - m + d_n)$-ը:

**Ապացույց:**

Բավական է դիտարկել $\mathcal{E}_1$-ի լրացումը $E^n$-ում՝ $E^n \backslash \mathcal{E}_1$-ը, և շրջել, այսինքն, $E^n \backslash \mathcal{E}_1$-ին պատկանող յուրաքանչյուր գագաթի փոխարեն վերցնել նրա լրացումը /շրջումը/:□

Այսուհետև մենք կդիտարկենք $1 < m \leq 2^{n-1}$ դեպքերը ($m = 1$ դեպքը բաց կթողնենք որպես ակնհայտ):

Հետագա թեորեմներում կենթադրենք, որ $2^k < m \leq 2^{k+1}$ որևէ $0 < k \leq n - 2$-ի համար:

Թեորեմ 2.2.1-1-ը պնդում է, որ $H_{rmin}$-ին պատկանող հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունները $D_m(n)$-ի վերին եզրային էլեմենտներ են:

**Թեորեմ 2.2.1-1:** $d(H_{rmin}) \subseteq \widehat{D}_{max}$:

**Ապացույց:**

Դիցուք՝ $H \in H_{rmin}$, և $d(H) = (d_1, \cdots, d_n)$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $H$-ի հիպերկողերի $\mathcal{E}$ բազմությունը հանդիսանում է սեղմված $m$-բազմություն ըստ $(x_1, \cdots, x_n)$-ի:

Ապացույցը տանենք ինդուկցիայով ըստ $n$-ի: Պնդումը ճիշտ է փոքր $n$-երի համար: Ենթադրենք այն ճիշտ է $\leq n-1$- համար, ապացուցենք $n$-ի համար: Անենք հակասող ենթադրություն՝ $d(H) \notin \widehat{D}_{max}$, այսինքն գոյություն ունի $s=(s_1,\cdots,s_n) \in \widehat{D}_{max}$, այնպես որ $s > d(H)$: Դիցուք՝ $A$-ն այն բազմությունն է $E^n$-ում, որի համար $s$-ը հանդիսանում է տրոհումների ասոցացված վեկտոր: Հատկություն 2.2.1-1-ի համաձայն $\mathcal{E}$-ն հանդիսանում է սեղմված ($\leq 2^{k+1}$)-բազմություն նաև $E^{k+1}_{x_1=1,\cdots,x_{n-k-1}=1}$-ում: Այստեղից հետևում է, որ $d_1,\cdots,d_{n-k-1}=m$: Այս դեպքում, $s_1,\cdots,s_{n-k-1}=m$ նույնպես, որտեղից էլ հետևում է, որ $A$-ն նույնպես ընկած է $E^{k+1}_{x_1=1,\cdots,x_{n-k-1}=1}$-ի մեջ: Այսպիսով, $\mathcal{E}$-ն կարելի է դիտարկել $(k+1)$-չափանի միավոր խորանարդում՝ $E^{k+1}$ -ում: Համապատասխան ասոցացված վեկտորները կլինեն $(d_{n-k},\cdots,d_n)$-ը և $(s_{n-k},\cdots,s_n)$-ը, և $(s_{n-k},\cdots,s_n) > (d_{n-k},\cdots,d_n)$: Սա հակասում է ինդուկցիայի ենթադրությանը: □

Թեորեմ 2.2.1-2-ը պնդում է, որ $H_{rmin}$-ին պատկանող հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունները $\widehat{D}_{max}$-ի մինիմալ ռանգ ունեցող հաջորդականություններից են:

**Թեորեմ 2.2.1-2:** $r_{min} = \min\limits_{d \in \widehat{D}_{max}} r(d)$:

**Ապացույց:**

Ապացույցը տանենք ինդուկցիայով ըստ $n$-ի: Պնդումը ճիշտ է փոքր $n$-երի համար: Ենթադրենք այն ճիշտ է $\leq n-1$- համար, ապացուցենք $n$-ի համար: Անենք հակասող ենթադրություն՝ ենթադրենք, որ գոյություն ունի $H$ հիպերգրաֆ կողերի $\mathcal{E}$ բազմությամբ, այնպես, որ $d(H)=(d_1,\cdots,d_n)$ պատկանում է $\widehat{D}_{max}$-ին, և $d(H)$-ի ռանգը փոքր է $d(H_{rmin})$ -ի էլեմենտների ռանգից: Ապացույցի տեխնիկան հետևյալն է. $H$ հիպերգրաֆը քայլ առ քայլ ձևափոխել $H_{rmin}$ -ին պատկանող որևէ հիպերգրաֆի, յուրաքանչյուր քայլում ապացուցելով, որ ձևափոխության արդյունքում ռանգը չի մեծանում: Ձևափոխությունները կկատարենք, և համապատասխան ռանգերը կհաշվենք $E^n$ -ի բազմությունների /հիպերկողերի/ միջոցով: Կօգտագործենք հետևյալ նշանակումները. $r_k(A)$ -ով կնշանակենք $A \in E^k$ բազմությանը համապատասխան աստիճանային հաջորդականության ռանգը: Կատարելու ենք $E^n$-ի տրոհումներ ըստ 1

կամ 2 փոփոխականների, նշանակումները կկատարենք համանման ձևով, օրինակ, $\mathcal{E}_{x_i=1,x_j=1}$ -ով կնշանակենք $\mathcal{E}$ -ի մասը $E^{n-2}_{x_i=1,x_j=1}$ -ում: $i$ -րդ ձևափոխությունից հետո ընթացիկ բազմությունները կստանան վերին ինդեքս՝ $/i/$:

**Ձևափոխություն /1/**

(1) $E^n$-ը տրոհում ենք ըստ $x_1$ փոփոխականի արժեքի: Այդ դեպքում՝ $|\mathcal{E}_{x_1=1}| = d_1$, $|\mathcal{E}_{x_1=0}| = m - d_1$: $d_1 \geq m - d_1$ համաձայն $\widehat{D}_{max}$-ի Հատկություն 2.1.3-2-ի:

(2) $\mathcal{E}_{x_1=1}$-ը և $\mathcal{E}_{x_1=0}$-ն փոխարինենք համապատասխան սեղմված բազմություններով (ըստ $(x_2, \cdots, x_n)$-ի), և այդ բազմությունները նշանակենք $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1}$-ով և $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0}$-ով:

(3) $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1}$-ը և $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0}$-ը միավորենք $E^n$-ում, և նրանց միավորումը նշանակենք $\mathcal{E}^{/1/}$-ով:

Նկատենք, որ $\mathcal{E}^{/1/}$-ը համապատասխանում է որևէ մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի:

Այժմ հաշվենք $r_n(\mathcal{E}^{/1/})$-ը և $r_n(\mathcal{E})$-ն:

$$r_n(\mathcal{E}^{/1/}) = d_1 + r_{n-1}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1}) + r_{n-1}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0})$$

$$r_n(\mathcal{E}) = d_1 + r_{n-1}(\mathcal{E}_{x_1=1}) + r_{n-1}(\mathcal{E}_{x_1=0})$$

Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության՝ $r_n(\mathcal{E}^{/1/}) \leq r_n(\mathcal{E})$:

Հաջորդ ձևափոխությունների ժամանակ կօգտագործենք $E^n$ -ի տրոհումը ըստ 2 փոփոխականների: Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը՝ կախված $d_1$-ի արժեքից:

(1) $2^k < d_1 \leq 2^{k+1}$:

Այստեղից հետևում է, որ $m - d_1 < 2^k$:

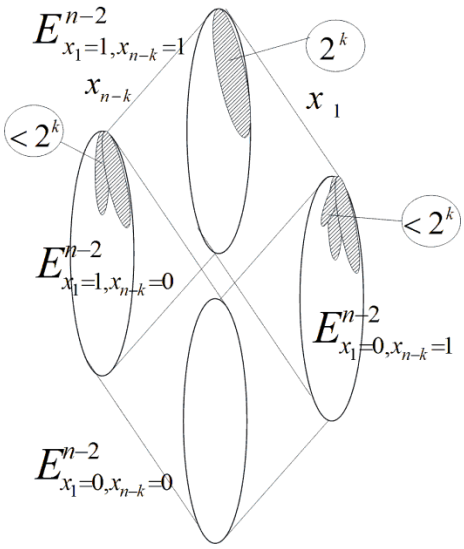
Համաձայն լեքսիկոգրաֆիկ կարգի/սեղմված բազմության/ Հատկություն 2.2.1-1-ի.

$$E^k_{x_1=1,\cdots,x_{n-k}=1} \subset \mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1} \subseteq E^{k+1}_{x_1=1,\cdots,x_{n-k-1}=1}$$

$$\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0} \subset E^k_{x_1=0,x_2=1\cdots,x_{n-k}=1}:$$

Այժմ, $E^n$-ը տրոհենք ևս համաձայն մեկ այլ փոփոխականի արժեքի՝ տրոհենք համաձայն $x_{n-k}$-ի: Դիտարկենք $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1}$-ի և $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0}$-ի կառուցվածքները:

$\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1}$-ի $2^k$ հատ գագաթ կընկնի $E^{n-2}_{x_1=1,x_{n-k}=1}$-ում և մնացած $d_1 - 2^k$ հատ գագաթները կընկնեն $E^{n-2}_{x_1=1,x_{n-k}=0}$-ում: $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0}$-ի բոլոր $m - d_1$ գագաթները կընկնեն $E^{n-2}_{x_1=0,x_{n-k}=1}$-ում: Երկրաչափական մեկնաբանությունը բերված է Նկար 2.2.1-3-ում:




**Նկար 2.2.1-3:** $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1}$-ի և $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0}$-ի կառուցվածքը ըստ (1) դեպքի:

**Ձևափոխություն /2(1)/**

(1) Դիտարկենք $E^{n-1}_{x_1=0}$-ն: Փոխարինենք $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0,x_{n-k}=1}$ բազմությունը իր ստվերով՝ ըստ $n-k$ ուղղության: Այս ձևափոխությունից հետո բազմությունները և նրանց հզորությունները կստանան /2/ ինդեքսը:

(2) Միավորենք ստացված բազմությունները $E^n$-ում, և նրանց միավորումը նշանակենք $\mathcal{E}^{/2/}$-ով:

Ակնհայտ է, որ $r_n(\mathcal{E}^{/2/}) \le r_n(\mathcal{E}^{/1/})$:

Այժմ,

$|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0}| = |\mathcal{E}^{/2/}_{x_1=1,x_{n-k}=0}| + |\mathcal{E}^{/2/}_{x_1=0,x_{n-k}=0}| \le 2^k$ (քանի որ $m \le 2^{k+1}$):

**Ձևափոխություն /3(1)/**

Դիտարկենք $E^{n-1}_{x_{n-k}=0}$ -ն: Փոխարինենք $\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0}$ -ն սեղմված բազմությամբ ըստ՝ $(x_1,\cdots,x_{n-k-1},x_{n-k+1},\cdots,x_n)$-ի: Այս ձևափոխությունից հետո բազմությունները և նրանց հզորությունները կստանան /3/ ինդեքսը:

$\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=0}$ -ի բոլոր գագաթները կընկնեն $E^{n-2}_{x_1=1,x_{n-k}=0}$ -ում, այնտեղ կազմելով սեղմված բազմություն ըստ՝ $(x_2,\cdots,x_{n-k-1},x_{n-k+1},\cdots,x_n)$-ի: Այսպիսով, ունենք, որ $\mathcal{E}^{/3/}_{x_{1=1},x_{n-k}=0}$-ն սեղմված $2^k$ -սկզբնահատված է $E^{n-2}_{x_1=1,x_{n-k}=0}$ -ում: Այժմ դիտարկենք $E^{n-1}_{x_1=1}$ -ն: $\mathcal{E}^{/3/}_{x_1=1}$ -ը կազմում է սեղմված $m$ -բազմություն $E^{n-1}_{x_1=1}$ -ում, և հետևաբար, $\mathcal{E}^{/3/}$ -ը սեղմված բազմություն է $E^n$-ում (սեղմված բազմությունների Հատկություն 2.2.1-2): Չնայած /2/ և /3/ ձևափոխությունները միասին տեղափոխում են գագաթները $E^{n-2}_{x_1=0,x_{n-k}=1}$-ից $E^{n-2}_{x_1=1,x_{n-k}=0}$, - մենք դա կատարում ենք երկու քայլով, որպեսզի հեշտ լինի համեմատել ռանգերը:

Այժմ հաշվենք $r_n(\mathcal{E}^{/3/})$-ը և $r_n(\mathcal{E}^{/2/})$-ը:

$$r_n(\mathcal{E}^{/3/}) = \left|\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=1}\right| + r_{n-1}(\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=1}) + r_{n-1}(\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=0}) =$$
$$\left|\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=1,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=1,x_1=1}) + \qquad (2.2.1\text{-}1)$$
$$\left|\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=0,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=0,x_1=1})$$

$$r_n(\mathcal{E}^{/2/}) = \left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1}\right| + r_{n-1}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1}) + r_{n-1}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0}) =$$
$$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1,x_1=1}) +$$
$$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=0})$$

Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության,

$$r_{n-1}(\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=0}) \le r_{n-1}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0}),$$

այստեղից՝

$$\left|\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=0,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=0,x_1=1}) \le$$
$$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=0}):$$

Տեղադրենք (2.2.1-1)-ում.

$$r_n(\mathcal{E}^{/3/}) \le \left|\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=1,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=1,x_1=1}) +$$

$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=0})$:

Ունենք նաև.

$$\left|\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=1}\right| = \left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1}\right|$$

$$\left|\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=1,x_1=1}\right| = \left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1,x_1=1}\right| \qquad (2.2.1\text{-}2)$$

$$r_{n-2}(\mathcal{E}^{/3/}_{x_{n-k}=1,x_1=1}) = r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1,x_1=1})$$

Կստանանք.

$$r_n(\mathcal{E}^{/3/}) \leq \left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1,x_1=1}) +$$

$$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0,x_1=0}) =$$

$$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1}\right| + r_{n-1}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=1}) + r_{n-1}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k}=0}) = r_n(\mathcal{E}^{/2/}):$$

Այսպիսով.

$$r_n(\mathcal{E}^{/3/}) \leq r_n(\mathcal{E}^{/2/}):$$

Առաջին դեպքի ապացույցն ավարտված է:

Այժմ դիտարկենք մյուս դեպքը՝

(2) $2^{k-1} < d_1 \leq 2^k$:

Դեպքերը ճյուղավորենք ըստ $m - d_1$-ի արժեքի.

(a) $2^{k-1} < m - d_1 \leq 2^k$ և (b) $m - d_1 \leq 2^{k-1}$:

Նախ դիտարկենք (a) դեպքը:

(2)(a)

Համաձայն սեղմված բազմությունների Հատկություն 2.2.1-2-ի, ունենք.

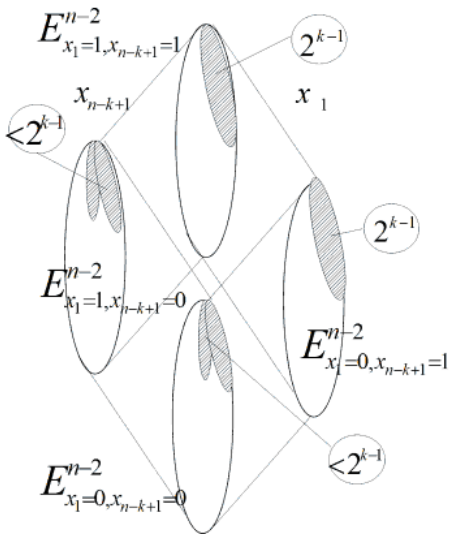
$$E^{k-1}_{x_1=1,\cdots,x_{n-k+1}=1} \subset \mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1} \subseteq E^{k}_{x_1=1,\cdots,x_{n-k}=1}$$

$$E^{k-1}_{x_1=0,x_2=1\cdots,x_{n-k+1}=1} \subset \mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0} \subseteq E^{k}_{x_1=0,x_2=1\cdots,x_{n-k}=1}:$$

$E^n$-ը տրոհենք համաձայն $x_1$-ի և մեկ այլ փոփոխականի՝ $x_{n-k+1}$-ի արժեքի:

$E^{n-2}_{x_1=1,x_{n-k+1}=1}$ -ը կպարունակի $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1}$ -ի $2^{k-1}$ հատ գագաթները, և $E^{n-2}_{x_1=1,x_{n-k+1}=0}$ -ը կպարունակի մնացած $d_1 - 2^{k-1}$ հատ գագաթները: $E^{n-2}_{x_1=0,x_{n-k+1}=1}$-ը կպարունակի $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0}$-

ի $2^{k-1}$ հատ գագաթները, և $E^{n-2}_{x_1=0,x_{n-k+1}=0}$ -ն կպարունակի մնացած $m-d_1-2^{k-1}$ գագաթները: Երկրաչափական մեկնաբանությունը բերված է Նկար 2.2.1-4-ում:




**Նկար 2.2.1-4:** $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1}$-ի և $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0}$-ի կառուցվածքը ըստ (2)(a) դեպքի:

**Ձևափոխություն /2(2)/**

(1) Դիտարկենք $E^{n-1}_{x_{n-k+1}=1}$ -ն: Բոլոր $|\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1,x_{n-k+1}=1}|+|\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0,x_{n-k+1}=1}|=2^k$ հատ գագաթները փոխարինենք սեղմված $2^k$ -բազմությամբ ըստ՝ $(x_1,\cdots,x_{n-k},x_{n-k+2},\cdots,x_n)$ -ի: Այս բազմությունը սեղմված բազմություն է նաև $E^{n-2}_{x_1=1,x_{n-k+1}=1}$ -ում ըստ՝ $(x_2,\cdots,x_{n-k},x_{n-k+2},\cdots,x_n)$ -ի (սեղմված բազմությունների Հատկություն 2.2.1-1):

(2) Դիտարկենք $E^{n-1}_{x_{n-k+1}=0}$ -ն: $|\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1,x_{n-k+1}=0}|+|\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0,x_{n-k+1}=0}|$ հատ (քանակը $<2^k$ ) գագաթները փոխարինենք սեղմված $<2^k$ -բազմությամբ ըստ՝ $(x_1,\cdots,x_{n-k},x_{n-k+2},\cdots,x_n)$-ի: Բոլոր գագաթները կընկնեն $E^{n-2}_{x_1=1,x_{n-k+1}=0}$-ում:

Բոլոր բազմությունները և հզորությունները կստանան /2/ ինդեքսը:

Այժմ հաշվենք $r_n(\mathcal{E}^{/1/})$-ը և $r_n(\mathcal{E}^{/2/})$-ը և համեմատենք:

$$r_n(\mathcal{E}^{/1/})=|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1}|+r_{n-1}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1})+r_{n-1}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0})=$$

$$|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1}|+|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}|+r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1})+r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=0})+$$

$$\left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=0})$$

$$r_n(\mathcal{E}^{/2/}) = \left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1}\right| + r_{n-1}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1}) + r_{n-1}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=0}) =$$

$$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}) + \qquad (2.2.1\text{-}3)$$

$$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1})$$

Ունենք նաև.

$$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1}\right| = \left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1}\right|$$

$$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}\right| = \left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=0}\right| \qquad (2.2.1\text{-}4)$$

$$r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}) = \left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=0}\right|$$

Տեղադրենք (2.2.1-3)-ում.

$$r_n(\mathcal{E}^{/2/}) = \left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=0}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}) +$$

$$\left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=0}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}) + \qquad (2.2.1\text{-}5)$$

Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության ունենք, որ

$r_{n-1}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1}) \le r_{n-1}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1})$ և $r_{n-1}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=0}) \le r_{n-1}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0})$:

Այստեղից՝

$$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}) \le$$

$$\left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=0})$$

և

$$\left|\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}) \le$$

$$\left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=0}):$$

Հաշվի առնելով (2.2.1-4)-ը կստանանք.

$$\left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=0}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}) \le$$

$r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=0})$

և

$\left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=0}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}) \leq$

$r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=0})$:

Տեղադրենք (2.2.1-5)-ում՝

$r_n(\mathcal{E}^{/2/}) \leq \left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}\right| +$

$r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=1,x_1=0}) +$

$\left|\mathcal{E}^{/1/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}\right| + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=1}) + r_{n-2}(\mathcal{E}^{/2/}_{x_{n-k+1}=0,x_1=0}) = r_n(\mathcal{E}^{/1/})$

Այսպիսով,

$r_n(\mathcal{E}^{/2/}) \leq r_n(\mathcal{E}^{/1/})$:

Հիշենք, որ /2/ ձևափոխությունից հետո՝ $\mathcal{E}^{/2/} \subseteq E^{n-1}_{x_1=1}$:

**Ձևափոխություն /3(2)/**

$\mathcal{E}^{/2/}$-ը փոխարինենք սեղմված բազմությամբ ըստ՝ $(x_2, \cdots, x_n)$-ի (լեքսիկոգրաֆիկ կարգի սկզբնահատվածի՝ ըստ $(x_2, \cdots, x_n)$ -ի): Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության՝ $r_n(\mathcal{E}^{/3/}) \leq r_n(\mathcal{E}^{/2/})$, որն էլ ավարտում է այս դեպքի ապացույցը:

Այժմ դիտարկենք մյուս դեպքը՝

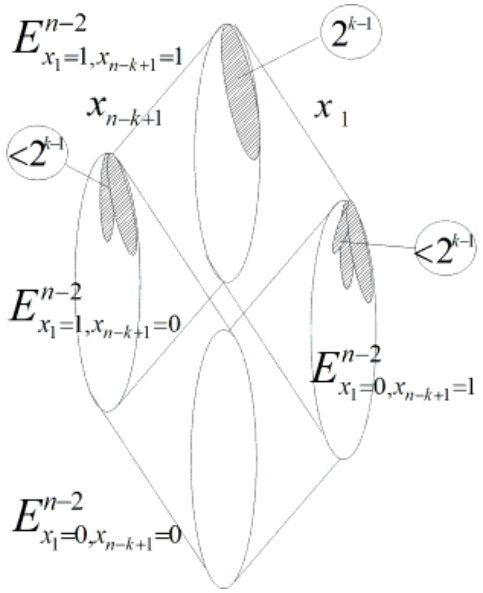
(2)(b)

Ունենք, որ

$$E^{k-1}_{x_1=1,\cdots,x_{n-k+1}=1} \subset \mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1} \subseteq E^{k}_{x_1=1,\cdots,x_{n-k}=1}$$

$$\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0} \subseteq E^{k-1}_{x_1=0,x_2=1\cdots,x_{n-k}=1}:$$

$E^n$-ը տրոհենք համաձայն $x_1$-ի և $x_{n-k+1}$-ի արժեքների: $E^{n-2}_{x_1=1,x_{n-k+1}=1}$-ը կպարունակի $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1}$-ի $2^{k-1}$ հատ գագաթները, և $E^{n-2}_{x_1=1,x_{n-k+1}=0}$-ը կպարունակի մնացած՝ $d_1 - 2^{k-1}$ հատ գագաթները: $E^{n-2}_{x_1=0,x_{n-k+1}=1}$ -ը կպարունակի $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0}$ -ի բոլոր $m - d_1$ գագաթները: Երկրաչափական մեկնաբանությունը բերված է Նկար 2.2.1-5-ում:




**Նկար 2.2.1-5:** $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=1}$-ի և $\mathcal{E}^{/1/}_{x_1=0}$-ի կառուցվածքը ըստ (2)(b) դեպքի:

Ձևափոխությունները և ապացույցը կատարվում են համանման դատողություններով: □

### *2.2.2 $\widehat{D}_{max}$- ի մինիմալ ռանգի էլեմենտների միակության մասին*

Այս բաժնում կապացուցենք, որ հիպերգրաֆների $H_{rmin}$ դասը միակն է /իզոմորֆիզմի ճշտությամբ/:

**Թեորեմ 2.2.2-1:** Բոլոր այն հիպերգրաֆները, որոնց աստիճանային հաջորդականությունները $\widehat{D}_{max}$-ից են և ունեն մինիմալ ռանգ, - պատկանում են $H_{rmin}$-ին:

Թեորեմ 2.2.2-1-ը Թեորեմ 2.2.1-1-ի և Թեորեմ 2.2.1-2-ի հետ միասին տալիս է մինիմալ ռանգով վերին եզրային աստիճանային հաջորդականության համար անհրաժեշտ և բավարար պայման, այդ պայմանը՝ $H_{rmin}$-ին պատկանելությունն է:

Մենք կապացուցենք ավելին, այն է՝ մոնոտոն ֆունկցիաներին համապատասխանող հիպերգրաֆները, որոնք ունեն մինիմալ ռանգ (ըստ բոլոր մոնոտոն ֆունկցիաների) պատկանում են $H_{rmin}$-ին:

**Թեորեմ 2.2.2-1-ի ապացույցը:**

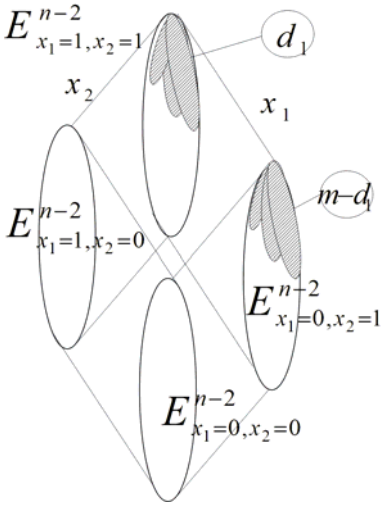
Ապացույցը տանենք ինդուկցիայով ըստ $n$-ի: Դիցուք՝ $H$-ը հիպերգրաֆ է $|\mathcal{E}| = m$ կողերի բազմությամբ, որոնք համապատասխանում են $E^n$-ում որոշված որևէ մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի մեկ արժեքի գագաթներին, և որի աստիճանային հաջորդականությունը՝ $d(H) = (d_1, \cdots, d_n)$ -ն, ունի մինիմալ ռանգ: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $d_1 \geq \cdots \geq d_n$: Անենք հակասող ենթադրություն՝ ենթադրենք, որ գոյություն ունի թեորեմի պայմաններին բավարարող $H$ հիպերգրաֆ, որը $H_{rmin}$-ից չէ, այսինքն, $\mathcal{E}$-ը սեղմված բազմություն չի:

Նախ ապացուցենք, որ $d_1 = m$: Ենթադրենք հակառակը՝ $d_1 < m$: Տրոհենք $E^n$-ը ըստ $x_1$-ի: Կստանանք, $|\mathcal{E}_{x_1=1}| = d_1$ և $|\mathcal{E}_{x_1=0}| = m - d_1$: Յուրաքանչյուրը համապատասխանում է մոնոտոն ֆունկցիայի, և յուրաքանչյուրի աստիճանային հաջորդականությունը ունի մինիմալ ռանգ: Այստեղից, ըստ ինդուկցիայի ենթադրության հետևում է, որ յուրաքանչյուրը սեղմված բազմություն է ըստ $(x_2, \cdots, x_n)$-ի:

Դիտարկենք $\mathcal{E}_{x_1=1}$-ի և $\mathcal{E}_{x_1=0}$-ի կառուցվածքները կախված $d_1$-ի արժեքից:

(1) $d_1 \leq 2^{n-2}$:

Այստեղից՝ $m - d_1 \leq 2^{n-2}$: Այսպիսով, $\mathcal{E}_{x_1=1}$-ը և $\mathcal{E}_{x_1=0}$-ը սեղմված բազմություններ են $E^{n-2}_{x_1=1,x_2=1}$ -ում և $E^{n-2}_{x_1=0,x_2=1}$ -ում, համապատասխանաբար: Երկրաչափական մեկնաբանումը՝ Նկար 2.2.2-1-ում: Հետևաբար, $\mathcal{E} \subseteq E^{n-1}_{x_2=1}$, և այստեղից էլ՝ $d_2 = m$, որտեղից էլ հետևում է, որ $d_1 = m$:



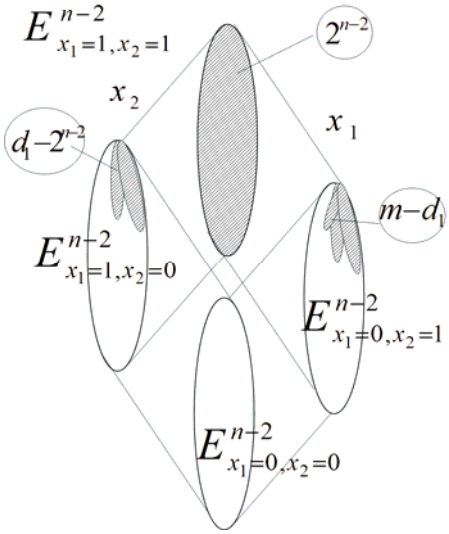

**Նկար 2.2.2-1:** $\mathcal{E}_{x_1=1}$-ի և $\mathcal{E}_{x_1=0}$-ի կառուցվածքները $d_1 \leq 2^{n-2}$ դեպքում:

(2) $2^{n-2} < d_1 < 2^{n-1}$:

Այստեղից՝ $m - d_1 < 2^{n-2}$(քանի որ $m \leq 2^{n-1}$): Այսպիսով,

$E^{n-2}_{x_1=1,x_2=1} \subset \mathcal{E}_{x_1=1} \subset E^{n-1}_{x_1=1}$ և $\mathcal{E}_{x_1=0} \subset E^{n-2}_{x_1=0,x_2=1}$:

Այստեղից՝ $\mathcal{E}_{x_1=1}$-ի $2^{n-2}$ գագաթները կազմում են $E^{n-2}_{x_1=1,x_2=1}$-ը, մնացածը ընկած են $E^{n-2}_{x_1=1,x_2=0}$ -ում: $\mathcal{E}_{x_1=0}$ -ի բոլոր $m - d_1$ գագաթները ընկած են $E^{n-2}_{x_1=0,x_2=1}$ -ում: Երկրաչափական մեկնաբանումը՝ Նկար 2.2.2-2-ում:




**Նկար 2.2.2-2:** $\mathcal{E}_{x_1=1}$-ի և $\mathcal{E}_{x_1=0}$-ի կառուցվածքները $2^{n-2} < d_1 < 2^{n-1}$ դեպքում:

Նկատենք, որ $E^{n-2}_{x_1=1,x_2=0}$ -ի և $E^{n-2}_{x_1=0,x_2=1}$ -ի գագաթների գումարային քանակը չի գորազանցում $2^{n-2}$ -ից: Այժմ նույն դատողություններով, ինչ որ Թեորեմ 2.2.1-2-ի ապացույցի (1) կետում, հաշվի առնելով նաև, որ $m - d_1 > 0$, կկատարենք /2/ և /3/ ձևափոխությունները: Արդյունքում կստանանք մոնոտոն բուլյան ֆունկցիա, որի աստիճանային հաջորդականության ռանգը փոքր է $d(H)$-ից: Ստացանք հակասություն, հետևաբար, $d(H) = (m, d_2, \cdots, d_n)$: Այժմ, եթե տրոհենք $E^n$-ը ըստ $x_1$-ի, ապա $\mathcal{E}$-ը կընկնի $E^{n-1}_{x_1=1}$-ում: Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության, $\mathcal{E}$-ը սեղմված բազմություն է $E^{n-1}_{x_1=1}$-ում, և ըստ Հատկություն 2.2.1-2-ի՝ նաև $E^n$-ում: □

### 2.2.3 $\widehat{D}_{max}$- ի մինիմալ ռանգի քանակական նկարագիր

$H_{rmin}$-ի բազմությունների կառուցվածքը օգնում է հաշվել մինիմալ $r_{min}$ ռանգը: Դիցուք՝ $H \in H_{rmin}$, և $d(H) = d_{min} = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$:

Դիցուք՝ $k_1, k_2, \cdots, k_p$ -ն $m$ թվի երկուական ներկայացման մեջ մեկ արժեքով կոմպոնենտների համարներն են: Հեշտ է ստուգել, որ

$$r_{min} = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{p}((n - k_i - (i-1)) \cdot 2^{k_i} + k_i \cdot 2^{k_i - 1})$$

Հաշվենք $d_{min}$ -ի կոմպոնենտները: Ինդեքսների պարզեցման համար նպատակահարմար է ենթադրել, որ $H$-ին համապատասխան բազմությունը սեղմված է ըստ $(x_n, \cdots, x_1)$-ի (լեքսիկոգրաֆիկ կարգը կիրառված է ըստ $(x_n, \cdots, x_1)$-ի):

(1) $d_i = \left(\sum_{l=1}^{j-1} 2^{k_l - 1}\right) + 2^{k_j}$, երբ $i = k_j + 1, j = 1, \cdots, p$

(2) $d_i = \left(\sum_{l=1}^{j} 2^{k_l - 1}\right) + \sum_{l=j+1}^{p} 2^{k_l}$, երբ $k_{j+1} + 2 \le i \le k_j, j = 1, \cdots, p-1$

(3) $d_i = \left(\sum_{l=1}^{p} 2^{k_l - 1}\right) = m/2$, երբ $1 \le i \le k_p$

(4) $d_i = \left(\sum_{l=1}^{p} 2^{k_l}\right) = m$, երբ $k_1 + 2 \le i \le n$:

Այսպիսով, $d_{min}$-ում կան.

- $m$ արժեքով կոմպոնենտ, եթե $m \le 2^{n-1}$;

  Հնարավոր դեպքերն են՝

  - (1)-ում, երբ $j = 1$ և $k_1 \le n - 1$, և հետևաբար՝ $m \le 2^{n-1}$;
  - (4)-ում, - այստեղ $k_1 \le n - 2$, և հետևաբար՝ $m \le 2^{n-2}$:

- $m/2$ արժեքով կոմպոնենտ, եթե $m$-ը զույգ թիվ է;

  Հնարավոր դեպքն է՝

  - (3)-ում, երբ $k_p > 0$:

- $(m+1)/2$ արժեքով կոմպոնենտ, եթե $m$-ը կենտ թիվ է;

  Հնարավոր դեպքն է՝

  - (1)-ում, երբ $j = p$:

Այժմ կարող ենք ապացուցել 2.1.4. բաժնի Թեորեմ 2.1.4-2-ը:

**Թեորեմ 2.1.4-2:** $D_m(n)$-ը ուռուցիկ բազմություն չէ, երբ $1 < m < 2^n - 1$:

**Ապացույց:**

$m = 1$ դեպքում գոյություն ունի միակ մոնոտոն բուլյան ֆունկցիա, որի 1 արժեքով միակ կետը՝ $E^n$-ի $(1,1,\cdots,1)$ գագաթն է: Հետևաբար, $\widehat{D}_{max}$-ը բաղկացած է միակ $\widetilde{m} = (m, m, \cdots, m)$ էլեմենտից, և սա միակ հնարավոր դեպքն է, որ $\widehat{D}_{max}$-ը պարունակի $\widetilde{m}$ էլեմենտը: Այստեղից՝ $\breve{D}_{min}$-ը պարունակում է միակ՝ $\tilde{0} = (0,0,\cdots,0)$ էլեմենտը: $D_m(n) = E(\widetilde{0}, \widetilde{m})$, որը ամբողջ $\Xi^n_{m+1}$-ն է:

$m = 2^n$ դեպքում գոյություն ունի միակ մոնոտոն բուլյան ֆունկցիա, որի 1 արժեքների բազմությունը $E^n$-ի բոլոր գագաթների բազմությունն է:

$m = 2^n - 1$ դեպքում գոյություն ունի միակ մոնոտոն բուլյան ֆունկցիա, որի 1 արժեքների բազմությունը $E^n$-ի բոլոր գագաթներն են, բացի՝ $(0,0,\cdots,0)$ գագաթից: Հետևաբար, երկու դեպքում էլ $\widehat{D}_{max}$-ը բաղկացած է միակ էլեմենտից, որի բոլոր կոմպոնենտները $2^{n-1}$ արժեքն ունեն, և սա միակ հնարավոր դեպքն է, որ $\widehat{D}_{max}$-ը պարունակի այսպիսի էլեմենտ:

$m = 2^n$ դեպքում $D_m(n) = E((2^{n-1}, \cdots, 2^{n-1}), (2^{n-1}, \cdots, 2^{n-1}))$:

$m = 2^n - 1$ դեպքում $D_m(n) = E((2^{n-1} - 1, \cdots, 2^{n-1} - 1), (2^{n-1}, \cdots, 2^{n-1}))$:

Այսպիսով, այս բոլոր դեպքերում $D_m(n)$-ը ուռուցիկ է:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ՝ $1 < m < 2^n - 1$:

Դիցուք՝ $D_m(n) = \cup_{j=1}^{r} E(\breve{D}_j, \widehat{D}_j)$ (ըստ 2.1.4. բաժնի Թեորեմ 2.1.4-1-ի):

Ցույց տանք, որ գոյություն ունեն $\breve{D}_i \in \breve{D}_{min}$ և $\widehat{D}_j \in \widehat{D}_{max}$, $i \neq j$ զույգեր, որոնց համար $E(\breve{D}_i, \widehat{D}_j)$-ն ընկած չէ $D_m(n)$-ի մեջ: Նախ նկատենք, որ $\breve{D}_i \leq \widehat{D}_j$ կամայական $i, j$ համար, քանի որ $\widehat{D}_j$-ի կոմպոնենտների արժեքները մեծ են կամ հավասար միջին արժեքից, և $\breve{D}_i$-կոմպոնենտների արժեքները փոքր են կամ հավասար միջին արժեքից: Ապացույցը տանենք ըստ հետևյալ դեպքերի.

ա) $m \leq 2^{n-1}$:

Դիցուք՝ $\widehat{D}_j$-ն $\widehat{D}_{max}$-ի մինիմալ ռանգի էլեմենտն է, որոշակիության համար ենթադրենք, որ կոմպոնենտները դասավորված են ըստ նվազման կարգի՝ $\widehat{D}_j = (m, \hat{d}^j_2, \cdots, \hat{d}^j_n)$ : Դիտարկենք մեկ այլ $\widehat{D}_i = (\hat{d}^i_1, \hat{d}^i_2, \cdots, \hat{d}^i_n)$ էլեմենտ $\widehat{D}_{max}$ -ից, այնպես, որ $\hat{d}^i_1 < m$ :

Նկատենք, որ այսպիսի էլեմենտ կա - այն կարող է պարզապես լինել այն վեկտորը, որը ստացվում է $\widehat{D}_j$ -ից՝ կոմպոնենտների տեղափոխության միջոցով: $\widehat{D}_j$ -ի բոլոր կոմպոնենտները $m$ լինել չեն կարող:

Վերցնենք $\widehat{D}_i$-ի հակադարձ էլեմենտը՝ $\breve{D}_i = (m - \hat{d}_1^i, m - \hat{d}_2^i, \cdots, m - \hat{d}_n^i)$, և $\breve{D}_i$-ում շրջենք առաջին կոմպոնենտը; ստացված $(m, m - \hat{d}_2^i, \cdots, m - \hat{d}_n^i)$ էլեմենտը պատկանում է $E(\breve{D}_i, \widehat{D}_j)$-ին: Սակայն այն չի պատկանում $D_m(n)$-ին, քանի որ հակառակ դեպքում, համաձայն Լեմմա 2.1.2-1-ի՝ $(m, \hat{d}_2^i, \cdots, \hat{d}_n^i) \in D_m(n)$, սակայն դա հակասում է այն բանին, որ $\widehat{D}_i$-ն $\widehat{D}_{max}$-ի էլեմենտ է:

բ) $m > 2^{n-1}$:

Ապացույցը նմանատիպ է, հաշվի առնելով, որ $\widehat{D}_{max}$ -ի էլեմենտների բոլոր կոմպոնենտները միաժամանակ $2^{n-1}$ լինել չեն կարող, բացի $m = 2^n - 1$ դեպքից: □

### *2.2.4 $\widehat{D}_{max}$- ի մաքսիմալ ռանգի էլեմենտներ*

Այս բաժնում գտնում ենք $\widehat{D}_{max}$ -ի էլեմենտների մաքսիմալ $r_{max}$ ռանգը և նկարագրում ենք հիպերգրաֆների $H_{rmax}$ դասը, որոնց աստիճանային հաջորդականությունները $r_{max}$ ռանգի են:

Ստանում ենք նաև մի կարևոր հետևանք, այն է՝ $D_m(n)$-ի նկարագրման խնդիրը ավելի հեշտ չէ, քան պարզ համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների նկարագրման խնդիրը:

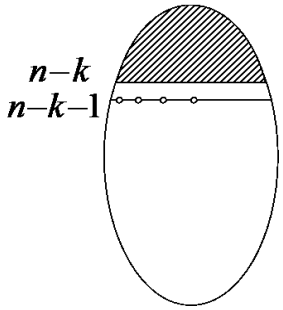
Նախ կառուցենք հիպերգրաֆների /մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների/ դաս հետևյալ ձևով:

Դիտարկենք $m$ թվի կանոնական ներկայացումը.

$$m = C_n^n + C_n^{n-1} + \cdots + C_n^{n-k} + \delta,\ \delta < C_n^{n-k-1} \qquad (2.2.4\text{-}1)$$

Որպես մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի մեկ արժեքների բազմություն վերցնենք $E^n$-ի $n$-րդ, $(n-1)$-րդ, և այլն, $(n-k)$-րդ շերտերի բոլոր գագաթները և $\delta$ հատ գագաթ $(n-k-1)$-րդ շերտից: Երկրաչափական մեկնաբանությունը բերված է Նկար 2.2.4-1-ում: $\delta$ հատ գագաթների ընտրությունը կամայական է, և կառուցված դասի հիպերգրաֆները

իրարից տարբերվում են $\delta$ գագաթների ընտրությամբ: Պարզ է, որ այս ձևով կառուցված բազմությունների, և միայն նրանց, տրոհումների ասոցացված վեկտորը ունի հնարավոր առավելագույն $r_{max}$ ռանգ: Կառուցված դասը նշանակենք $H_{rmax}$-ով, և
$r_{max} = \sum_{i=0}^{k}(n-i)\cdot C_n^{n-i} + (n-k-1)\cdot\delta$:




**Նկար 2.2.4-1:** $E^n$-ում բազմության կառուցվածքը, որի տրոհումների վեկտորը ունի առավելագույն $r_{max}$ ռանգ:

$H_{rmax}$ դասի հիպերգրաֆների աստիճանային $d_{max}$ հաջորդականության յուրաքանչյուր $d_i$ կոմպոնենտի արժեքը կարելի է հաշվել երկու գումարելիների միջոցով: Առաջին գումարելին հաստատուն է բոլոր կոմպոնենտների համար, և ստացվում է $E^n$-ի $n$-րդ, $(n-1)$-րդ, և այլն, $(n-k)$-րդ շերտերի գագաթներից: Այն հավասար է.

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{(n-j)\cdot C_n^{n-j}}{n} = \sum_{j=0}^{k}\frac{(n-j)\cdot n!}{n\cdot(n-i)!\cdot i!} = \sum_{j=0}^{k}\frac{(n-1)!}{n\cdot(n-j-1)!\cdot i!} = \sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1}:$$

Երկրորդ գումարելին ստացվում է $\delta$ հատ գագաթներից: Նշանակենք այն $s_i$-ով՝ $i$-րդ կոմպոնենտի արժեքի համար: Այսպիսով, $(s_1,\cdots,s_n)$-ը հանդիսանում է $E^n$-ի $(n-k-1)$-րդ շերտում գտնվող $\delta$ հզորությամբ բազմության տրոհումների ասոցացված վեկտոր, կամ որ նույնն է՝ $\delta$ հատ հիպերկող ունեցող $(n-k-1)$ -համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականություն:

Այսպիսով, կարելի է ձևակերպել հետևյալ թեորեմը.

**Թեորեմ 2.2.4-1:** $H_{rmax}$ դասի հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների նկարագրման խնդիրը համարժեք է պարզ համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների նկարագրման խնդրին:

Մյուս կողմից, քանի որ գիտենք որ $H_{rmax}$ դասի աստիճանային հաջորդականությունների ռանգը $r_{max} = \sum_{i=0}^{k}(n-i)\cdot C_n^{n-i} + (n-k-1)\cdot\delta$ է, ապա $H_{rmax}$-ի աստիճանային հաջորդականությունների դասը կարելի է դիտարկել որպես $D_m(n)$ -ի ենթադաս, որի աստիճանային հաջորդականությունները ունեն միևնույն ֆիքսված $\sum_{i=0}^{k}(n-i)\cdot C_n^{n-i} + (n-k-1)\cdot\delta$ ռանգը: Եվ հետևաբար, տեղի ունի.

**Թեորեմ 2.2.4-2:** $(E_S)$ խնդիրը առնվազը նույնքան բարդ է, որքան պարզ համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության խնդիրը:

## 2.3 Ռեգուլյար հիպերգրաֆներ – գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման

Այս բաժնում դիտարկում ենք հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության խնդրի մեկ մասնավոր դեպք՝ խնդիրը պարզ ռեգուլյար հիպերգրաֆների համար: Դուրս ենք բերում հիպերգրաֆի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման:

Հայտնի է հետևյալ պնդումը, որը [8]-ում բերվում է միավոր խորանարդի տերմիններով է, սակայն մենք կձևակերպենք այն հիպերգրաֆների տերմիններով:

**Լեմմա 2.3-1** ([8])**:** Տրված են $m$, $n$, $r$ ամբողջ թվերը, այնպես որ $m \le C_n^r$: Գոյություն ունի $n$ գագաթներով և $m$ հիպերկողերով պարզ $r$ -համասեռ հիպերգրաֆ, որի աստիճանային հաջորդականության կոմպոնենտների արժեքները իրարից տարբերվում են ամենաշատը 1-ով:

Այժմ դիտարկենք հիպերգրաֆների $H_{rmax}$ դասը: Դասի հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների յուրաքանչյուր $d_i$ կոմպոնենտ իրենից ներկայացնում է $\sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1} + s_i$, որտեղ $s_i$-ն ստացվում է $\delta$ գագաթներից ($k$-ն և $\delta$-ն (2.2.4-1) ներկայացումից են): Համաձայն Լեմմա 2.3-1 –ի, $(s_1,\cdots,s_n)$ -երի մեջ կա այնպիսին, որի կոմպոնենտները հավասար են $\left\lfloor\frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n}\right\rfloor$-ի կամ $\left\lfloor\frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n}\right\rfloor + 1$-ի:

Այստեղից հետևում է.

**Թեորեմ 2.3-1:** $H_{rmax}$ դասում գոյություն ունի հիպերգրաֆ, որի աստիճանային հաջորդականության կոմպոնենտները $\sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1} + \left\lfloor \frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n} \right\rfloor$ են կամ $\sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1} + \left\lfloor \frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n} \right\rfloor + 1$ են:

**Հետևանք 2.3-1:** Առավելագույն աստիճանը, որ կարող է ունենալ $n$ գագաթ և $m$ կող ունեցող պարզ ռեգուլյար հիպերգրաֆը, հավասար է $\sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1} + \left\lfloor \frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n} \right\rfloor$:

**Թեորեմ 2.3-2:** Դիցուք՝ $S = (s, \cdots, s)$-ը $n$ չափանի ամբողջարժեք վեկտոր է, և $m \leq 2^n$-ը ամբողջ թիվ է ներկայացված կանոնական տեսքով. $m = C_n^n + C_n^{n-1} + \cdots + C_n^{n-k} + \delta$, $\delta < C_n^{n-k-1}$ : Գոյություն ունի $n$ գագաթներով և $m$ հիպերկողերով պարզ $s$-ռեգուլյար հիպերգրաֆ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$m - \left(\sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1} + \left\lfloor \frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n} \right\rfloor\right) \leq s \leq \left(\sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1} + \left\lfloor \frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n} \right\rfloor\right):$$

**Ապացույց:**

Համաձայն հետևանք 2.3-1-ի, կամայական ռեգուլյար հիպերգրաֆի աստիճանը չի կարող գերազանցել $\left(\sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1} + \left\lfloor \frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n} \right\rfloor\right)$ թիվը: Մյուս կողմից, համաձայն Լեմմա 2.2.1-2-ի, գոյություն ունի ռեգուլյար հիպերգրաֆ՝ $\left(m - \left(\sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1} + \left\lfloor \frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n} \right\rfloor\right)\right)$ աստիճանով, և սա աստիճանի նվազագույն արժեքն է: □

Հետևյալ թեորեմը տալիս է պարզ համասեռ ռեգուլյար հիպերգրաֆի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման:

**Թեորեմ 2.3-3:** Դիցուք՝ $R = (r, \cdots, r)$ -ը և $S = (s, \cdots, s)$ -ը ամբողջարժեք կոմպոնենտներով վեկտորներ են՝ $m$ և $n$ չափանի, համապատասխանաբար, այնպես որ $r \leq n$ և $s \cdot n = r \cdot m$: Գոյություն ունի $r$-համասեռ $s$-ռեգուլյար հիպերգրաֆ այն և միայն այն դեպքում, երբ $m \leq C_n^r$:

Այլ տերմիններով՝ գոյություն ունի $m$ հզորությամբ ենթաբազմություն $E^n$-ի $r$-րդ շերտում, որի տրոհումների ասոցացված վեկտորը $S$-ն է, այն և միայն այն դեպքում, երբ $m \leq C_n^r$:

**Ապացույց:**

Կարելի էր օգտվել Լեմմա 2.3-1-ից, սակայն ստորև թեորեմի ապացույցն իր մեջ ներառում է նաև հիպերգրաֆի պարզ կառուցումը:

Քանի որ $E^n$-ի $r$-րդ շերտը պարունակում է $C_n^r$ էլեմենտ, ապա $m \leq C_n^r$-ը անհրաժեշտ և բավարար պայման է $m$ հզորությամբ ենթաբազմության գոյության համար, ընդհանրապես: Այժմ ապացուցենք, որ այն անհրաժեշտ և բավարար պայման է նաև $s = \frac{r \cdot m}{n}$ կոմպոնենտներով տրոհումների ասոցացված վեկտոր ունենալու համար:

Դիցուք՝ $M$-ը կամայական $m$-ենթաբազմություն է $E^n$-ի $r$-րդ շերտից, և դիցուք՝ $(s_1, \cdots, s_n)$-ը նրա տրոհումների ասոցացված վեկտորն է: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ կոմպոնենտները ըստ արժեքի նվազման (չաճման) կարգի են: Արժեքները կարող են մեծ լինել $s$-ից, փոքր լինել $s$–ից, կամ հավասար լինել $s$ –ի: Դիցուք՝ արժեքները բաշխված են ըստ հետևյալի.

$s_1 > s,\ \ s_2 > s,\ \ \cdots,\ \ s_t > s;$

$s_{t+1} = s,\ \ s_{t+2} = s,\ \ \cdots, s_{k-1} = s;$

$s_k < s,\ \ s_{k+1} < s,\ \ \cdots\ \ , s_n < s:$

Կազմենք $(r_1, \cdots, r_n)$ վեկտորը հետևյալ ձևով.

$r_i = s_i - s, \quad i = 1, \cdots, n:$

Այսպիսով, $\sum_{i=1}^{t} r_i = -\sum_{i=k}^{n} r_i$, և $r_{t+1} = \cdots = r_{k-1} = 0$:

Դիտարկենք հետևալ ալգորիթմը, որը մուտքում ունի $(r_1, \cdots, r_t, 0, \cdots, 0, r_k, \cdots, r_n)$ վեկտորը; ելքում՝ $(r_1, \cdots, r_n)$-ի բոլոր կոմպոնենտները վերածվում են 0-ների:

**Ալգորիթմ $REGULAR_HYPERGRAPH$ ($RH$):**

```
begin
while ( (t ≥ 1)&(k ≤ n) )
        { i ≔ t; j ≔ k;
         while ( (r_i > 0)&(r_j < 0))
                { r_i ≔ r_i − 1; r_j ≔ r_j + 1;
                  if (r_i = 0) then t ≔ t − 1;
                  else if (r_j = 0) then k ≔ k + 1;
                }
        }
end
```

Այժմ դիտարկենք ալգորիթմի իրականացման $r_i \coloneqq r_i - 1$; $r_j \coloneqq r_j + 1$ քայլերը, որի հիման վրա նախնական $M$ բազմությունը ձևափոխվում է այնպես, որ նրա տրոհումների ասոցացված վեկտորի $i$-րդ կոմպոնենտը մեկով մեծանա, և $j$-րդ կոմպոնենտը մեկով փոքրանա:

$r_i \coloneqq r_i - 1$ և $r_j \coloneqq r_j + 1$-ից հետևում է, որ $s_i - s_j \geq 2$:

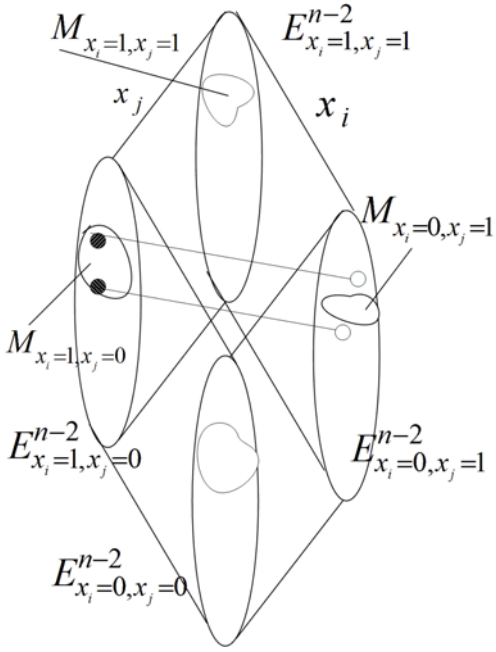
$E^n$-ը տրոհենք ըստ $x_i$ և $x_j$ փոփոխականների արժեքների միաժամանակ:

Դիցուք՝ $M^{n-2}_{x_i=1,x_j=1}$ , $M^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}$, $M^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}$, $M^{n-2}_{x_i=0,x_j=0}$-ը $M$-ի տրոհումներն են $E^{n-2}_{x_i=1,x_j=1}$ , $E^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}$, $E^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}$, $E^{n-2}_{x_i=0,x_j=0}$-ում, համապատասխանաբար: Այդ դեպքում՝ $\left|M^{n-2}_{x_i=1,x_j=1}\right| + \left|M^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}\right| = s_i$ և $\left|M^{n-2}_{x_i=1,x_j=1}\right| + \left|M^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}\right| = s_j$:

Այստեղից հետևում է, որ

$\left|M^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}\right| - \left|M^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}\right| \geq 2$:

Հետևաբար, կարող ենք տեղափոխել /$S_{i,j}$ տեղաշարժ գործողությամբ/ մեկ գագաթ $M^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}$-ից $M^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}$-ի մեջ: Ստացված բազմությունը $E^n$-ում կունենա տրոհումների $(s_1, \cdots, s_{i-1}, s_i - 1, \cdots, s_{j-1}, s_j + 1, \cdots, s_n)$ ասոցացված վեկտորը: Ասվածի երկրաչափական մեկնաբանումը բերված է Նկար 2.3-1 -ում:




**Նկար 2.3-1:** $E^n$-ի տրոհումը ըստ $x_i$ և $x_j$ փոփոխականների:

□

**Եզրակացություններ երկրորդ գլխի վերաբերյալ**

Հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների խնդիրը դիտարկվել է ընդհանուր դեպքում, երբ հիպերգրաֆի կողերի հզորությունները կամայական են, և երբ այն պարզ է՝ կողերը չեն կրկնվում: Տրվել է խնդրի բոլոր լուծումներով կազմված տիրույթի կառուցվածքային պարզ և ամբողջական նկարագիրը; դուրս են բերվել տիրույթի կարևոր առանձնահատկություններ: Աստիճանային հաջորդականությունների խնդիրը դիտարկվել է նաև ռեգուլյար հիպերգրաֆների դասի համար:

- ✓ Տրվել է $n$ գագաթով և $m$ կողով պարզ հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների բազմության ամփոփ նկարագիր բազմարժեք բազմաչափ $\Xi_{m+1}^{n}$ ցանցի ենթաբազմության տեսքով՝ եզրային էլեմենտների և նրանցով ծնվող մոնոտոն տիրույթների տերմիններով, որտեղ եզրային էլեմենտները գեներացվում են մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների միջոցով:
- ✓ Գտնվել են մինիմալ $r_{min}$ կշռով եզրային էլեմենտները. դրանք համապատասխանում են $E^n$ -ի բառարանային սեղմված $m$ -ենթաբազմությանը, և միակն են կոորդինատների տեղափոխությունների ճշտությամբ:
- ✓ Նկարագրվել են մաքսիմալ $r_{max}$ կշռով եզրային էլեմենտները, և ցույց է տրվել համարժեքությունը հիպերգրաֆային հաջորդականությունների խնդրին՝ համասեռ հիպերգրաֆների դեպքում:
- ✓ Դուրս է բերվել տրված աստիճանային հաջորդականությամբ պարզ հիպերգրաֆի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման ռեգուլյար հիպերգրաֆների դասի համար:

# ԳԼՈՒԽ 3. ՀԱՐԱԿԻՑ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐ

Ի լրումն տրոհումների ասոցացված վեկտորների /հիպերգրաֆային հաջորդականությունների/ բազմության կառուցվածքային նկարագրի, այս գլխում ներկայացվում են նկարագրին առնչվող հարակից արդյունքներ ([(9)], [(11)], [(14)], [(21)], [(25)], [(26)]):

## 3.1 Հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության կառուցվածքը $\Xi_{m+1}^{n}$-ի վերին /ստորին/ տիրույթում

Աշխատանքի այս բաժնում դիտարկվում է հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմությունը $\Xi_{m+1}^{n}$-ի վերին և ստորին տիրույթներում՝ $\widehat{H}$–ում և $\breve{H}$ -ում, և տրվում է բազմության կառուցվածքային նկարագիրը: Այն համապատասխանում է է $\widehat{H}$ –ում / $\breve{H}$-ում/ որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի, և հետևաբար, ուռուցիկ բազմություն է:

**Սահմանում 3.1-1:** $d \in D_m(n)$ հիպերգրաֆային հաջորդականությունը կանվանենք *վերին հիպերգրաֆային հաջորդականություն,* եթե $d \in \widehat{H}$, և՝ *ստորին հիպերգրաֆային հաջորդականություն*, եթե $d \in \breve{H}$:

$\widehat{D}_m(n)$ -ով նշանակենք $D_m(n)$ -ում վերին հիպերգրաֆային հաջորդականությունների դասը՝ $\widehat{D}_m(n) = D_m(n) \cap \widehat{H}$;

$\breve{D}_m(n)$-ով նշանակենք $D_m(n)$-ում ստորին հիպերգրաֆային հաջորդականությունների դասը՝ $\breve{D}_m(n) = D_m(n) \cap \breve{H}$:

Քանի որ, $\widehat{D}_{max}$-ը ($D_m(n)$-ի վերին եզրային էլեմենտների բազմությունը) ընկած է $\widehat{H}$-ի մեջ, և $\breve{D}_{min}$-ը ($D_m(n)$-ի ստորին եզրային էլեմենտների բազմությունը) ընկած է $\breve{H}$-ի մեջ, ապա՝ $\widehat{D}_{max} \subseteq \widehat{D}_m(n)$; $\breve{D}_{min} \subseteq \breve{D}_m(n)$:

Հետևյալ պնդումով տրվում է համապատասխան կառուցվածքը.

**Լեմմա 3.1-1:**

ա) $\widehat{D}_m(n) = \cup_{\widehat{D} \in \widehat{D}_{max}} E(m_{mid+}, \widehat{D})$

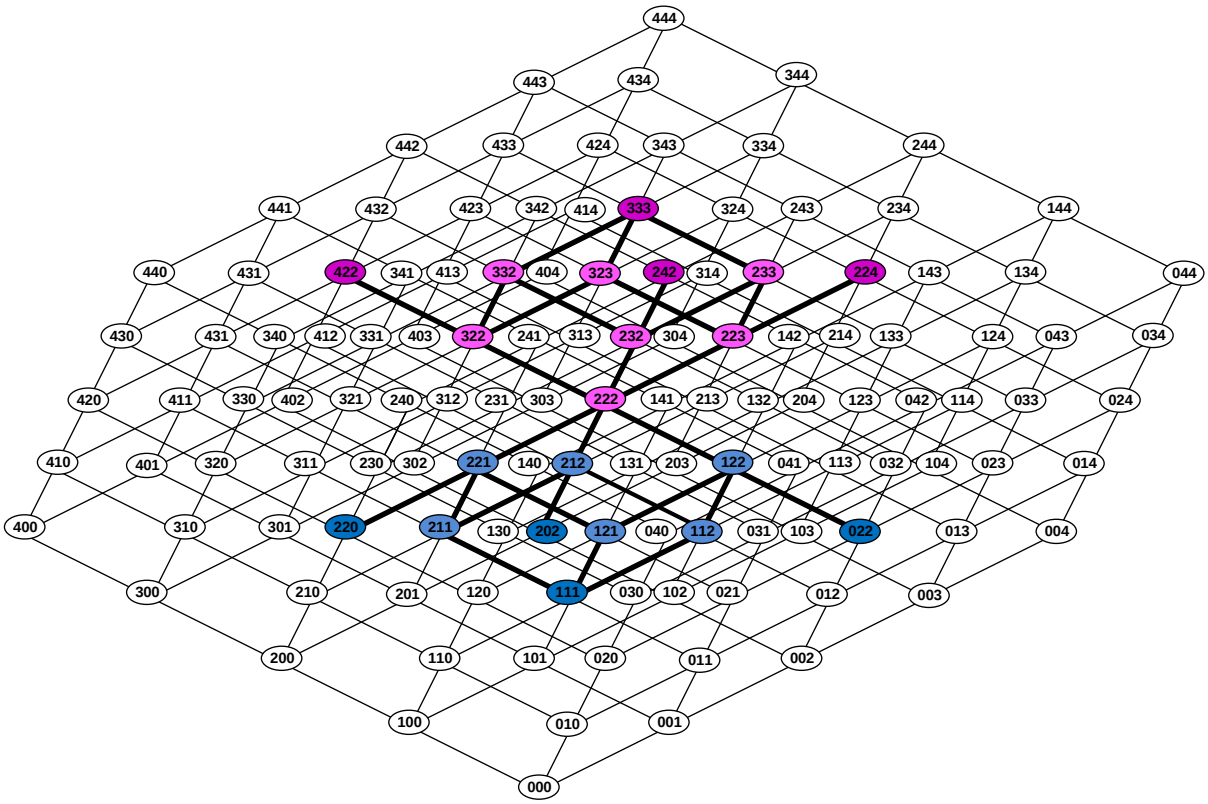
բ) $\breve{D}_m(n) = \cup_{\breve{D} \in \breve{D}_{min}} E(\breve{D}, m_{mid-})$:

**Ապացույց:**

ա) $\widehat{D}_m(n) \supseteq \cup_{\widehat{D}\in\widehat{D}_{max}} E(m_{mid+}, \widehat{D})$ համաձայն Գլուխ 2-ում բերված Լեմմա 2.1.2-2-ի և Հետևանք 2.1.2-2-ի:

Ապացուցենք, որ $\widehat{D}_m(n) \subseteq \cup_{\widehat{D}\in\widehat{D}_{max}} E(m_{mid+}, \widehat{D})$: Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի $d \in \widehat{D}_m(n)$, որը չի պատկանում $\cup_{\widehat{D}\in\widehat{D}_{max}} E(m_{mid+}, \widehat{D})$-ին: Այստեղից՝ $d$-ն վերին եզրային կետ չի, հետևաբար, գոյություն ունի $\widehat{D} \in \widehat{D}_{max}$, այնպես, որ $d < \widehat{D}$: Եվ քանի որ $d \geq m_{mid+}$, ուրեմն $d$ -ն պետք է պատկաներ $E(m_{mid+}, \widehat{D})$-ին, - ստացանք հակասություն:

բ) կետը ապացուցվում է նմանատիպ դատողություններով: □




**Նկար 3.1-1:** $\widehat{D}_4(3)$ և $\breve{D}_4(3)$ -ը $\Xi_5^3$-ում:

Երկրաչափական մեկնաբանումը դիտարկենք օրինակի վրա: Նկար 3.1-1-ում պատկերված են $\widehat{D}_4(3)$ և $\breve{D}_4(3)$ բազմությունները $\Xi_5^3$ -ում: $\widehat{D}_4(3)$ -ի էլեմենտները պատկերված են մանուշակագույնով (առավել մուգ գույնով վերին եզրային էլեմենտներն են), և $\breve{D}_4(3)$-ի էլեմենտները պատկերված են կապույտ գույնով (առավել մուգ գույնով ստորին եզրային են էլեմենտներն են): Ըստ սահմանման, (2,2,2) էլեմենտը պատկանում է և՛ $\widehat{D}_4(3)$-ին, և՛ $\breve{D}_4(3)$-ին:

Դիտարկվող բազմությունները հետևյալն են.

$\widehat{D}_{max} = \{(3,3,3), (4,2,2), (2,4,2), (2,2,4)\}$ և $\widehat{D}_{min} = \{(1,1,1), (0,2,2), (2,0,2), (2,2,0)\}$:

$\widehat{D}_4(3) = E((2,2,2), (3,3,3)) \cup E((2,2,2), (4,2,2)) \cup E((2,2,2), (2,4,2)) \cup E((2,2,2), (2,2,4))$

$E\big((2,2,2), (3,3,3)\big) = \{(2,2,2), (3,2,2), (2,3,2), (2,2,3), (3,3,3)\}$

$E\big((2,2,2), (4,2,2)\big) = \{(2,2,2), (3,2,2), (4,2,2)\}$

$E\big((2,2,2), (2,4,2)\big) = \{(2,2,2), (2,3,2), (2,4,2)\}$

$E\big((2,2,2), (2,2,4)\big) = \{(2,2,2), (2,2,3), (2,2,4)\}$

**Սահմանում 3.1-2** ([16]): $f: \Xi_{m+1}^n \to \{0,1\}$ բինար ֆունկցիան կոչվում է *մոնոտոն*, եթե կամայական $S' \in \Xi_{m+1}^n$, $S'' \in \Xi_{m+1}^n$ համար, $S' < S''$-ից հետևում է, որ $f\,(S') \leq f\,(S'')$:

$S^1 \in \Xi_{m+1}^n$-ը կոչվում է $f$ մոնոտոն բինար ֆունկցիայի *ստորին 1*, եթե $f(S^1) = 1$, և $S^1$-ից փոքր կամայական $S \in \Xi_{m+1}^n$-ի համար $f(S) = 0$: $S^0 \in \Xi_{m+1}^n$-ն կոչվում է $f$ մոնոտոն բինար ֆունկցիայի *վերին 0*, եթե $f(S^0) = 0$, և $S^0$-ից մեծ կամայական $S \in \Xi_{m+1}^n$-ի համար՝ $f(S) = 1$:

Լեմմա 3.1-1-ի հիման վրա կարող ենք ձևակերպել հետևյալ Թեորեմ 3.1-1ը:

**Թեորեմ 3.1-1:** $\widehat{D}_m(n)$-ը համապատասխանում է $\widehat{H}$-ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի 0 արժեքների բազմությանը, որի վերին 0-ների բազմությունը $\widehat{D}_{max}$-ն է: $\breve{D}_m(n)$-ը համապատասխանում է $\breve{H}$-ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի 1 արժեքների բազմությանը, որի ստորին 1-երի բազմությունը $\breve{D}_{min}$-ն է:

Այսպիսով, $\widehat{D}_m(n)$-ը և $\breve{D}_m(n)$-ը ուռուցիկ բազմություններ են $\widehat{H}$ –ում և $\breve{H}$-ում, համապատասխանաբար, հետևաբար, ուռուցիկ բազմություններ են $\Xi_{m+1}^n$-ում՝ ի տարբերություն ամբողջ $D_m(n)$-ի, որն ուռուցիկ բազմություն չէ (Գլուխ 2, Թեորեմ 2.1.4-2):

### 3.2 $\Xi_{m+1}^{n}$-ի խորանարդատիպ տրոհումը

Այս բաժնում ներմուծվում է $\Xi_{m+1}^{n}$-ի խորանարդատիպ տրոհումը, որի արդյունքում էլ ցույց է տրվում, որ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների նկարագիրը $\Xi_{m+1}^{n}$-ում ստանալու համար բավական է ունենալ նկարագիրը $\widehat{H}$ /կամ $\breve{H}$/ տիրույթում:

**Սահմանում 3.2-1:** $\Xi_{m+1}^{n}$ -ի $(a_1, \cdots, a_n)$ և $(b_1, \cdots, b_n)$ գագաթները կանվանենք *ուղղահայաց համարժեք*, եթե $a_i \in \{b_i, m - b_i\}$ բոլոր $i$-երի համար, $1 \leq i \leq n$:

$V(a)$ -ով նշանակենք $a$ գագաթի *ուղղահայաց համարժեքության (կամ $V$ -համարժեքության) դասը*՝ այսինքն այն բոլոր գագաթների դասը, որոնք ուղղահայաց համարժեք են $a$ գագաթին:

Ակնհայտ է, որ $V(a)$ -ին պատկանող կամայական $e$ էլեմենտի ուղղահայաց համարժեքության դասը նորից $V(a)$-ն է:

$V(a)$ -ում առանձնացնում ենք 2 գագաթ՝ $\hat{a}$ և $\breve{a}$ , որոնց կոմպոնենտները սահմանվում են հետևյալ ձևով.

$$\hat{a}_i = \begin{cases} a_i, & \text{եթե } a_i \geq m_{mid+} \\ m - a_i, & \text{եթե } a_i < m_{mid-} \end{cases}$$

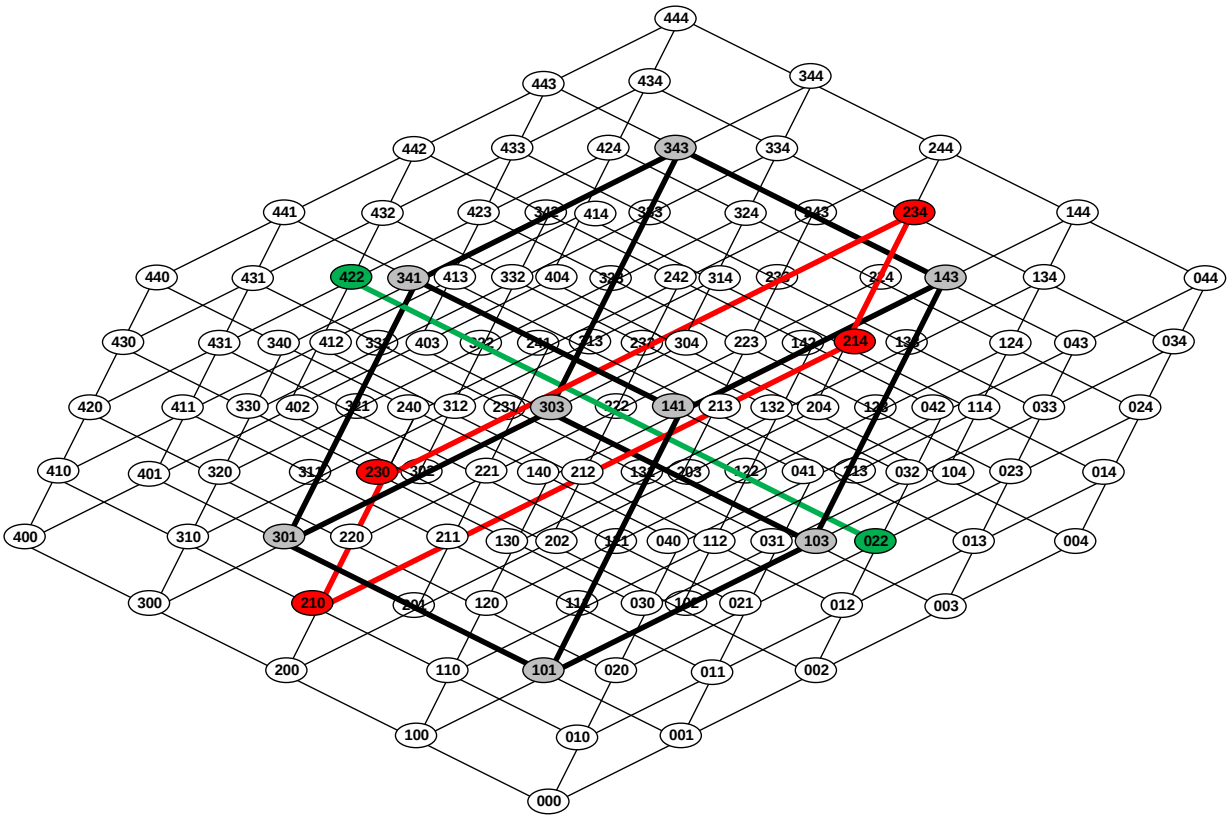
$$\breve{a}_i = \begin{cases} m - a_i, & \text{եթե } a_i > m_{mid+} \\ a_i, & \text{եթե } a_i \leq m_{mid-} \end{cases}$$

Այս գագաթները պատկանում են $\widehat{H}$-ին և $\breve{H}$-ին, համապատասխանաբար: Պարզ է, որ $\widehat{H}$-ին (համապատասխանաբար, $\breve{H}$ -ին) պատկանող տարբեր գագաթների $V$ -համարժեքության դասերը չեն հատվում:

Այսպիսով, $V$ -համարժեքության դասերի միջոցով ապահովվում է $\Xi_{m+1}^{n}$ -ի տրոհումը $|\widehat{H}|$ քանակով համարժեքության դասերի, որոնք էլ միարժեքորեն որոշվում են $\widehat{H}$-ի էլեմենտներով:

Տրված $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \Xi_{m+1}^{n}$ էլեմենտի համար հաշվենք նրա $V$ -համարժեքության դասի հզորությունը: Դիցուք՝ $k$-ն $a$-ի այն կոմպոնենտների քանակն է, որոնց արժեքը տարբեր է $m/2$-ից. $k = |\{a_i | a_i \neq (m - a_i)\}|$: Այսպիսով, $|V(a)| = 2^k$: Նկատենք, որ կենտ $m$-երի դեպքում $k = n$:

$V(a)$ դասի յուրաքանչյուր $b$ գագաթին համապատասխանեցնենք $n$ երկարության $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ բինար հաջորդականություն հետևյալ ձևով. $\beta_i = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $b_i = \hat{a}_i$: Այս ձևով, $V(a)$-ն իզոմորֆ է $k$-չափանի միավոր խորանորդին՝ $E^k$-ին, որտեղ $E^k$-ի 0-րդ շերտում գտնվում է $V(a)$-ի ստորին՝ $\breve{a}$ էլեմենտը; $i$-րդ շերտում գտնվում են $V(a)$-ի այն գագաթները, որոնք ստացվում են $\breve{a}$-ից $i$ հատ կոմպոնենտի շրջումով: Նկար 3.2-1-ում պատկերված են $\Xi_5^3$-ում $(3,4,3), (2,3,4), (4,2,2)$ գագաթների համարժեքության դասերը: $V(3,4,3)$-ը 3-չափանի է, $V(2,3,4)$-ը՝ 2-չափանի է և $V(4,2,2)$-ը 1-չափանի է:




**Նկար 3.2-1:** $\Xi_5^3$-ում $(3,4,3), (2,3,4), (4,2,2)$ գագաթների համարժեքության դասերը:

Այսպիսով, $\Xi_{m+1}^n$-ը տրոհվում է $|\widehat{H}|$ հատ՝ կառուցվածքով բինար խորանարդին նույնանման կառուցվածքների: $\Xi_{m+1}^n$ -ի այսպիսի տրոհումը անվանենք *տրոհում խորանարդների /կամ խորանարդատիպ տրոհում/*:

Համաձայն Գլուխ 2-ի Լեմմա 2.1.2-1-ի, յուրաքանչյուր $d \in D_m(n)$ էլեմենտի համար $V(d) \subseteq D_m(n)$, և հակառակը՝ եթե $d$-ն հիպերգրաֆային չէ, ապա $V(d) \cap D_m(n) = \emptyset$:

Կամայական $d \in D_m(n)$ էլեմենտի $V$-համարժեքության դասում կա միակ էլեմենտ $\widehat{D}_m(n)$-ից, և միակ էլեմենտ՝ $\breve{D}_m(n)$-ից:

**Թեորեմ 3.2-1:** $D_m(n) = \cup_{d \in \widehat{D}_m(n)} V(d) = \cup_{d \in \breve{D}_m(n)} V(d)$:

**Ապացույց:**

Նախ ապացուցենք, որ $D_m(n) \subseteq \cup_{d \in \widehat{D}_m(n)} V(d)$: Դիցուք՝ $e \in D_m(n)$: Այդ դեպքում $V(e) \subseteq D_m(n)$: Եվ քանի որ $V(e)$-ի վերին հիպերգրաֆային $\hat{e}$ էլեմենտի համար ևս $V(\hat{e})$=$V(e)$, ապա, $e \in \cup_{d \in \widehat{D}_m(n)} V(d)$:

Մյուս կողմը՝ $\cup_{d \in \widehat{D}_m(n)} V(d) \subseteq D_m(n)$, հետևում է Գլուխ 2-ի Լեմմա 2.1.2-1-ից; և սա ապացուցում է պնդման առաջին մասը:

Նման դատողություններով ապացուցվում է նաև պնդման $D_m(n) = \cup_{d \in \breve{D}_m(n)} V(d)$ մասը: □

Այսպիսով,

$D_m(n)$-ը ստանալու համար բավական է գտնել $\widehat{D}_m(n)$-ը /կամ $\breve{D}_m(n)$-ը/, և այնուհետև յուրաքանչյուր $d \in \widehat{D}_m(n)$ /կամ $d \in \breve{D}_m(n)$/ էլեմենտի համար կազմել նրա $V(d)$ դասը:

Հաշվի առնելով նաև Լեմմա 3.1-1-ը, կստանանք.

$D_m(n) = \cup_{\widehat{D} \in \widehat{D}_{max}} \left( \cup_{d \in E(m_{mid+}, \widehat{D})} V(d) \right) = \cup_{\breve{D} \in \breve{D}_{min}} \left( \cup_{d \in E(\breve{D}, m_{mid-})} V(d) \right)$:

Նշենք, որ այս օգտակար հատկությունը, որը վերաբերվում է հաջորդականությունների ողջ դասին, չի տեղափոխվում դեպի մասնավոր դասեր, ինչպես օրինակ համասեռ հիպերգրաֆների դասն է: Օրինակ, $n/2$ -համասեռ հիպերգրաֆների դեպքում /կենտ $n$ -ի դեպքում՝ $(n+1)/2$ -համասեռ/ կա միակ աստիճանային հաջորդականություն $\widehat{H}$-ից; մյուս բոլոր հաջորդականությունները դուրս են այդ տիրույթից, և այդ պատճառով, հնարավոր չէ դասի նկարագիրը $\widehat{H}$ /կամ $\breve{H}$/ տիրույթից արտապատկերել դեպի $\Xi_{m+1}^n$:

### 3.3 Հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության գեներացում

Այս բաժնում կապացուցենք, որ հիպերգրաֆային տիրույթի նկարագրման համար գեներացնող բազմություն է հանդիսանում նաև $\widehat{D}_{max}$ /կամ $\widehat{D}_{min}$/ բազմության մի մասը, այն է՝ նրա "ամենաանհարթ" էլեմենտների ենթաբազմությունը:

Ներմուծենք հարթ/անհարթ աստիճանային հաջորդականության գաղափարը ([44]):

**Սահմանում 3.3-1** ([44]): Դիցուք՝ $d = (d_1, \cdots, d_n)$-ն և $d' = (d'_1, \cdots, d'_n)$-ը ոչ բացասական ամբողջ թվերի հաջորդականություններ են: Կասենք, որ $d'$ -ը $d$ -ի *էլեմենտար հարթեցումն* է, եթե $d$-ում կան $d_i$ և $d_j$ կոմպոնենտներ այնպես, որ $d_i \geq d_j + 2$, և $d'$-ում համապատասխան կոմպոնենտներն են՝ $d_i' \coloneqq d_i - 1$ ; $d_j' \coloneqq d_j + 1$ , մնացած կոմպոնենտները $d$-ում և $d'$-ում համընկնում են:

**Սահմանում 3.3-2** ([44]): Դիցուք՝ $d = (d_1, \cdots, d_n)$-ն և $d' = (d'_1, \cdots, d'_n)$-ը ոչ բացասական ամբողջ թվերի հաջորդականություններ են: Կասենք, որ $d'$-ը $d$-ից *հարթ է*, և $d$-ն $d'$-ից *անհարթ է,* եթե $d'$ -ը կարելի է ստանալ $d$ -ից էլեմենտար հարթեցումների հաջորդականության միջոցով:

**Սահմանում 3.3-3:** $D_m(n)$-ի $d = (d_1, \cdots, d_n)$ էլեմենտը հանդիսանում է *ամենաանհարթ* հաջորդականություն այն և միայն այն դեպքում, երբ $d$ -ից անհարթ կամայական հաջորդականություն չի պատկանում $D_m(n)$-ին:

Այժմ ապացուցենք հետևյալ պնդումը, որի համարժեքը համասեռ հիպերգրաֆների համար բերված է [44]-ում:

**Թեորեմ 3.3-1:** Եթե $d = (d_1, \cdots, d_n)$-ն պատկանում է $D_m(n)$-ին, և $d' = (d'_1, \cdots, d'_n)$ -ը $d$-ից հարթ է, ապա $d'$-ը նույնպես պատկանում է $D_m(n)$-ին:

**Ապացույց:**

Դիցուք՝ $d = (d_1, \cdots, d_n) \in D_m(n)$ -ն հանդիսանում է $E^n$ -ի $m$ -էլեմենտանոց $\mathcal{E}$ բազմության տրոհումների ասոցացված վեկտորը: $d' = (d'_1, \cdots, d'_n)$ -ը $d$ -ից հարթ է, հետևաբար, այն կարելի է ստանալ $d$ -ից էլեմենտար հարթեցումների հաջորդականության միջոցով: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $d'$ -ը $d$ -ի էլեմենտար հարթեցում է: Դիցուք՝ $d_i \geq d_j + 2$ , և $d' =$

$(d_1, \cdots, d_{i-1}, d_i - 1, \cdots, d_{j-1}, d_j + 1, \cdots, d_n)$ : Դիտարկենք $E^n$ -ի տրոհումը ըստ $x_i$ և $x_j$ փոփոխականների արժեքի, և դիցուք՝ $\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=1,x_j=1}$, $\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}$, $\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}$, $\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=0,x_j=0}$-ն $\mathcal{E}$-ի տրոհումներն են ՝ $E^{n-2}_{x_i=1,x_j=1}$ , $E^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}$ , $E^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}$ , $E^{n-2}_{x_i=0,x_j=0}$ խորանարդներում, համապատասխանաբար: Կստանանք,

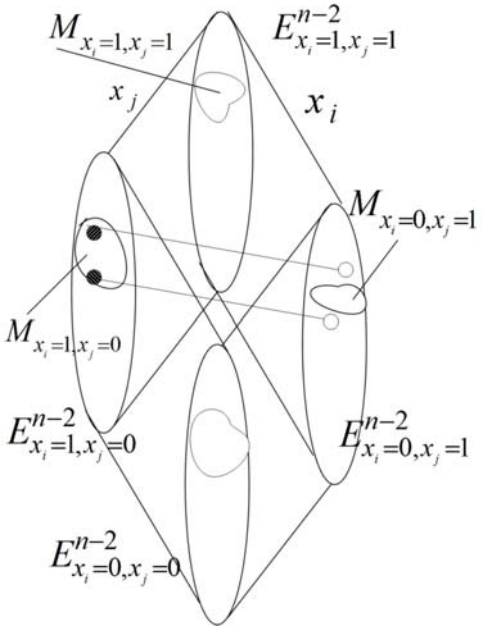
$$\left|\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=1,x_j=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}\right| = d_i$$

$$\left|\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=1,x_j=1}\right| + \left|\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}\right| = d_j:$$

Այստեղից՝ $\left|\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}\right| - \left|\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}\right| \geq 2$:

Այսպիսով, կարող ենք $\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}$ -ից մեկ գագաթ $S_{i,j}$ տեղաշարժով տեղափոխել $\mathcal{E}^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}$:

Երկրաչափական մեկնաբանումը բերված է Նկար 3.3.1-ում:




**Նկար 3.3.1:** Հարթեցման երկրաչափական մեկնաբանումը:

Նշված գործողության օգնությամբ կստանանք $\mathcal{E}$ բազմության ձևափոխում՝ էլեմենտների քանակի պահպանմամբ, որի ընթացքում տրոհումների հզորությունների վեկտորը ձևափոխվում է ըստ $d_i - 1$ և $d_j + 1$ արժեքների: Այստեղից՝ $d' \epsilon D_m(n)$: □

Թեորեմ 3.3-1-ից հետևում է, որ եթե $\Xi^n_{m+1}$-ի յուրաքանչյուր շերտում դիտարկենք $D_m(n)$ -ին պատկանող ամենաանհարթ հաջորդականությունները, ապա նրանցով

կորոշվի տվյալ շերտի $D_m(n)$-ին պատկանող բոլոր էլեմենտները, և այսպիսով, նաև ամբողջ $D_m(n)$-ը:

Այսպիսով, $D_m(n)$ -ի էլեմենտների նկարագրման պրոցեսը ամենաանհարթ հաջորդականությունների միջոցով, - անցնում է շերտ առ շերտ $\Xi_{m+1}^n$-ում: Մինչդեռ $D_m(n)$ -ի էլեմենտների նկարագրման պրոցեսը եզրային էլեմենտների միջոցով, - կատարվում է $\Xi_{m+1}^n$ -ի ենթացանցերի միջոցով: Հայտնի, որ ամենաանհարթ հաջորդականությունների քանակը էքսպոնենցիալ է նույնիսկ 3-համասեռ հիպերգրաֆների համար ([Bill, 1986]): Եզրային հաջորդականությունների քանակը հայտնի չէ, սակայն եթե այդ հաջորդականությունները ստանանք մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների միջոցով, ապա պետք է դիտարկել $m$ հատ 1 արժեք ունեցող բոլոր մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաները:

Ստորև կապացուցենք, որ $D_m(n)$-ը կարող է գեներացվել իր հետևյալ երկու ենթաբազմությունների հատման միջոցով՝ վերին եզրային էլեմենտների բազմության և ամենաանհարթ էլեմենտների բազմության:

Նախ նկատենք, որ $D_m(n)$ -ի ամենաանհարթ հաջորդականությունների բազմությունը կարող է պարունակել ինչպես վերին եզրային, այնպես էլ ոչ եզրային հաջորդականություններ: Նմանապես, $\widehat{D}_{max}$ -ը կարող է ունենալ ինչպես ամենաանհարթ, այնպես էլ ոչ ամենաանհարթ հաջորդականություններ:

Դիտարկենք այդ երկու բազմությունների հատումը՝ դիցուք $\widehat{D}^s{}_{max}$ -ը $\widehat{D}_{max}$ -ի ամենաանհարթ էլեմենտների բազմությունն է:

Սահմանված բազմությունները դիտարկենք օրինակի վրա, դիցուք՝ $n = 5$ և $m = 14$ : Կառուցենք $D_{14}(5)$ բազմությունը: Այն կառուցելու ճանապարհներից մեկը՝ կառուցենք բոլոր մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաները $E^5$-ում, որոնք ունեն 14 հատ 1 արժեքի կետ: Այնուհետև, հաշվենք համապատասխան ասոցացված վեկտորները՝ կազմելով $D_{14}^{M_{14}^1}(5)$-ը, և հետո՝ հեռացնենք նրանից բոլոր այն վեկտորները, որոնք վերին եզրային չեն: Այնուհետև, բոլոր այն վեկտորներից, որոնք ստացվում են մեկը մյուսից կոմպոնենտների տեղափոխության միջոցով, - կդիտարկենք միայն մեկը՝ որի կոմպոնենտները դասավորված են արժեքի նվազման կարգով:

$D_{14}^{M_{14}^1}(5) = \{ \ (14,8,8,8,7), \ (13,9,9,8,8), \ (12,10,10,8,7), (12,10,9,9,8), (12,10,9,8,8),$
$(12,9,9,9,9), (11,11,10,8,8), (11,11,9,9,8), (11,10,10,9,9)$
$(11,10,10,9,8), (11,10,9,9,9), (10,10,10,10,9), (10,10,10,10,7) \}$

$\widehat{D}_{max} = \{ \quad (14,8,8,8,7), (13,9,9,8,8), (12,10,10,8,7), (12,10,9,9,8), \ (12,9,9,9,9),$
$(11,11,10,8,8), (11,11,9,9,8), (11,10,10,9,9), (10,10,10,10,9) \}$

$\widehat{D}^s{}_{max} =$
$\{(14,8,8,8,7), (13,9,9,8,8), (12,10,10,8,7), (12,10,9,9,8), (11,11,10,8,8), (11,10,10,9,9)\}$

**Թեորեմ 3.3-2:** Եթե $d = (d_1, \cdots, d_n)$ -ն պատկանում է $\widehat{D}_{max}$ -ին, ապա $D_m(n)$ -ին պատկանող բոլոր $d'$ հաջորդականությունները, որոնք $d$ -ից անհարթ են, նույնպես պատկանում են $\widehat{D}_{max}$-ին:

**Ապացույց:**

Դիցուք՝ $d = (d_1, \cdots, d_n) \in \widehat{D}_{max}$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $d$-ի կոմպոնենտները դասավորված են ըստ նվազման կարգի: Դիցուք՝ $d' = (d'_1, \cdots, d'_n) \in D_m(n)$ և այն $d$-ից անհարթ է: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $d$-ն $d'$-ի էլեմենտար հարթեցումն է՝ գոյություն ունի $i, j, \ i > j$ այնպես, որ $d'_i = d_i + 1$, և $d'_j = d_j - 1$; մնացած կոմպոնենտները նույնն են: $i, j$-ն կարող ենք ընտրել այնպես, որ նվազման կարգը չխախտվի: Այժմ ապացուցենք, որ $d' \in \widehat{D}_{max}$: Անենք հակասող ենթադրություն: Դիցուք՝ գոյություն ունի $k, 1 \le k \le n$, այնպես, որ $(d'_1, \cdots, d'_k + 1, \cdots, d'_n) \in D_m(n)$:

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1. $k \neq j$

$(d'_1, \cdots, d'_k + 1, \cdots, d'_n)$ հաջորդականությունը հարթեցնենք ըստ $(d_i + 1), (d_j - 1)$ -ի: Կսատանանք $(d_1, \cdots, d_k + 1, \cdots, d_n)$, որը պատկանում է $D_m(n)$-ին ըստ Թեորեմ 3.3-1-ի: Սակայն սա $d$ -ից մեծ է, որը հակասում է այն բանին, որ $d$ -ն վերին եզրային հաջորդականություն է:

2. $k = j$

Կստանանք $(d_1, \cdots, d_i + 1, \cdots, d_j, \cdots, d_n)$ , որը պատկանում է $D_m(n)$ : Ստացանք հակասություն: □

Թեորեմից 3.3-2 հետևում է, որ եթե $\Xi_{m+1}^{n}$-ի որևէ շերտում կա $\widehat{D}_{max}$-ի մեկից ավելի էլեմենտ, ապա բավական է վերցնել նրանցից ամենաանհարթները: Նմանապես, եթե $D_m(n)$-ի ամենաանհարթ հաջորդականությունների մեջ կան և վերին եզրային և ոչ եզրային հաջորդականություններ, ապա բավական է վերցնել միայն եզրայինները:

Այս բաժնի վերջում նշենք ամենաանհարթ հաջորդականությունների ևս մեկ հատկություն, որը օգտագործվելու է մի շարք պնդումների ապացույցներում:

**Հատկություն 3.3-1** (43): Դիցուք՝ $(d_1, \cdots, d_n) \in D_m(n)$ և $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ : $(d_1, \cdots, d_n)$ -ը ամենաանհարթ հաջորդականություն է $D_m(n)$-ից այն և միայն այն դեպքում, երբ $d_1$-ը ամենամեծ հնարավոր արժեքն է $D_m(n)$-ի էլեմենտների կոմպոնենտների համար; $d_1$-ի ֆիքսված արժեքի դեպքում, $d_2$-ը ամենամեծ հնարավոր արժեքն է, և այլն:

### *3.3.1 Ամենաանհարթ աստիճանային հաջորդականությունների դասեր*

Այս բաժնում կդիտարկենք վերին եզրային ամենաանհարթ հաջորդականությունների դասեր գտնելու հարցը:

Դիտարկենք պարզ հիպերգրաֆների $H_{rmin}$ դասը (Գլուխ 2, բաժին 2.2): Նրանց աստիճանային հաջորդականությունների $d(H_{rmin})$ դասը կազմված է վերին եզրային հաջորդականություններից (Գլուխ 2, բաժին 2.2): Մյուս կողմից, կարող ենք պնդել նաև, որ $d(H_{rmin})$-ի հաջորդականությունները ամենաանհարթ հաջորդականություններ են՝ համաձայն Հատկություն 3.3-1-ի և Գլուխ 2, 2.2.1 բաժնում բերված Հատկություն 2.2.1-3-ի: Այսպիսով, $d(H_{rmin})$ -ը հանդիսանում է *վերին եզրային ամենաանհարթ* հաջորդականությունների դաս:

Այժմ, օգտագործելով $d(H_{rmin})$-ը, կառուցենք նոր դասեր:

Դիտարկենք $m$ դրական ամբողջ թվի որևէ ամբողջարժեք տրոհում՝ $m = m_1 + m_2$, այնպես, որ այն բավարարի հետևյալ պայմանին.

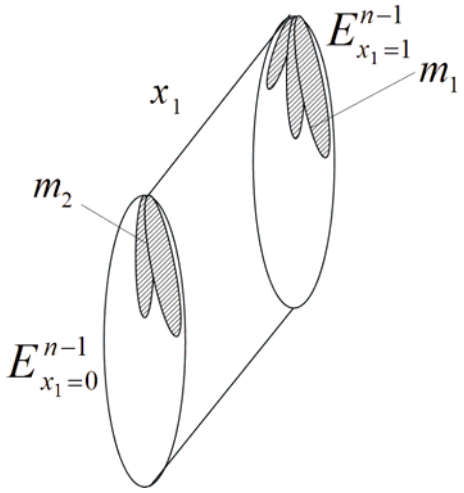
$$2^{n-1} \geq m_1 \geq m_2:$$

Տրոհենք $E^n$-ը ըստ որևէ փոփոխականի արժեքի՝ դիցուք դա $x_1$-ն է: Դիտարկենք հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգի $m_1$ -սկզբնահատված $E^{n-1}_{x_1=1}$ -ում և $m_2$ -- սկզբնահատված և $E^{n-1}_{x_1=0}$-ում; նշանակենք, համապատասխանաբար, $R_{m_1}(n-1)$-ով և $R_{m_2}(n-1)$ –ով: Հետևյալ թեորեմը պնդում է, որ եթե դիտարկենք այդ բազմությունների միավորումը $E^n$ -ում, ապա նրա տրոհումների ասոցացված վեկտորը կլինի վերին եզրային:

**Թեորեմ 3.3.1-1:** Դիցուք՝ $(d'_2,\cdots,d'_n)$ -ը և $(d''_2,\cdots,d''_n)$ -ը, համապատասխանաբար, հանդիսանում են $R_{m_1}(n-1)$ և $R_{m_2}(n-1)$ բազմությունների ասոցացված վեկտորները, և դիցուք՝ $\mathcal{E}$ -ը այդ բազմությունների միավորումն է $E^n$ -ում: Այդ դեպքում $\mathcal{E}$ -ի տրոհումների ասոցացված $(d_1,\cdots,d_n)$ վեկտորը հանդիսանում է վերին եզրային հաջորդականություն:

**Ապացույց:**

Հեշտ է ստուգել, որ $\mathcal{E}$-ը հանդիսանում է որևէ մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի մեկ արժեքների բազմություն, և $(d_1,\cdots,d_n)=(m_1,d'_2+d''_2,\cdots,d'_n+d''_n)$ : Երկրաչափական մեկնաբանությունը բերված է Նկար 3.3.1-1-ում:




**Նկար 3.3.1-1:** $R_{m_1}(n-1)$ և $R_{m_2}(n-1)$ բազմությունները $\mathcal{E}$-ում:

Համաձայն Հատկություն 3.3-1-ի և Գլուխ 2, 2.2.1 բաժնում բերված Հատկություն 2.2.1-3-ի, $(d'_2,\cdots,d'_n)$ -ը և $(d''_2,\cdots,d''_n)$ -ը ամենաանհարթ հաջորդականություններ են: Մյուս կողմից, Գլուխ 2-ի Թեորեմ 2.2.1-1-ի համաձայն նրանք վերին եզրային

հաջորդականություններ են ($m_1, n-1$ և $m_2, n-1$ պարամետրերին համապատասխան): Ապացուցենք, որ $(d_1, \cdots, d_n)$-ը նույնպես վերին եզրային է՝ $m, n$ պարամետրերի համար: Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի $(\tilde{d}_1, \cdots, \tilde{d}_n) \in D_m(n)$, այնպես, որ $(\tilde{d}_1, \cdots, \tilde{d}_n) > (d_1, \cdots, d_n)$: Դիցուք՝ $\tilde{\mathcal{E}}$-ը այն $m$-բազմությունն է $E^n$-ում, որը ունի $(\tilde{d}_1, \cdots, \tilde{d}_n)$ ասոցացված վեկտոր: Այժմ $E^n$-ը տրոհենք համաձայն $x_1$ փոփոխականի արժեքի: $\tilde{\mathcal{E}}$-ը կտրոհվի $\tilde{d}_1$ և $m - \tilde{d}_1$ հզորությամբ բազմությունների, $E^{n-1}_{x_1=1}$-ում և $E^{n-1}_{x_1=0}$-ում, համապատասխանաբար: Դիցուք՝ $(\tilde{d}'_2, \cdots, \tilde{d}'_n)$ -ը և $(\tilde{d}''_2, \cdots, \tilde{d}''_n)$ -ը այդ բազմությունների տրոհումների ասոցացված վեկտորներն են: Ապացույցը շարունակենք հետևյալ դեպքերի դիտարկմամբ.

1. $\tilde{d}_1 = d_1$

   Դիցուք՝ $\tilde{d}_2 = d_2, \cdots, \tilde{d}_{i-1} = d_{i-1}$ և $i$-ն առաջին ինդեքն է, որի համար $\tilde{d}_i > d_i$: Պնդում ենք, որ բոլոր $j < i$-երի համար տեղի ունի՝ $\tilde{d}'_j = d'_j$ և $\tilde{d}''_j = d''_j$: Հակառակ դեպքում, եթե $\tilde{d}'_j > d'_j$, ապա $(\tilde{d}'_2, \cdots, \tilde{d}'_n)$-ն չէր պատկանի $D_{m_1}(n-1)$, քանի որ համաձայն Հատկություն 3.3-1-ի $(d'_2, \cdots, d'_n)$-ը ամենաանհարթ հաջորդականություն է: Նման ձևով, եթե $\tilde{d}''_j > d''_j$, ապա $(\tilde{d}''_2, \cdots, \tilde{d}''_n)$-ը չէր պատկանի $D_{m_2}(n-1)$-ին:

   $\tilde{d}_i > d_i$ պայմանից էլ հետևում է, որ կամ $\tilde{d}'_i > d'_i$, կամ $\tilde{d}''_i > d''_i$, որն էլ հակասություն է:

2. $\tilde{d}_1 > d_1$

   $\tilde{\mathcal{E}}$-ի $\tilde{d}_1 - d_1$ հատ գագաթ $S_1$ տեղաշարժ գործողությամբ տեղափոխենք $E^{n-1}_{x_1=1}$-ից $E^{n-1}_{x_1=0}$: Սա հնարավոր է, քանի որ $E^{n-1}_{x_1=1}$-ը պարունակում է $\tilde{d}_1 - (m - \tilde{d}_1)$ հատ ավելի գագաթ $\tilde{\mathcal{E}}$-ից, քան $E^{n-1}_{x_1=0}$-ը: Մնացած ուղղություններով տրոհումների հզորությունները չեն փոխվում: Այժմ նույն դատողություններով, ինչ որ նախորդ դեպքում, կստանանք, որ $(\tilde{d}'_2, \cdots, \tilde{d}'_n) = (d'_2, \cdots, d'_n)$ և $(\tilde{d}''_2, \cdots, \tilde{d}''_n) = (d''_2, \cdots, d''_n)$: Համաձայն Գլուխ 2-ի Թեորեմ 2.2.2-1-ի, $(\tilde{d}'_2, \cdots, \tilde{d}'_n)$-ը և $(\tilde{d}''_2, \cdots, \tilde{d}''_n)$-ը հանդիսանում են սեղմված բազմության տրոհումների ասոցացված վեկտոր, որը հակասություն է: □

Հաջորդ թեորեմով կապացուցենք, որ, տրոհումների ասոցացված վեկտորը նաև ամենաանհարթ է:

**Թեորեմ 3.3.1-2:** Դիցուք՝ $(d'_2, \cdots, d'_n)$-ը և $(d''_2, \cdots, d''_n)$-ը հանդիսանում են $R_{m_1}(n-1)$-ի և $R_{m_2}(n-1)$ –ի ասոցացված վեկտորները, և դիցուք՝ $\mathcal{E}$ -ը այդ բազմությունների միավորումն է $E^n$ -ում: Այդ դեպքում $\mathcal{E}$ -ի տրոհումների ասոցացված վեկտորը՝ $(d_1, \cdots, d_n) = (m_1, d'_2 + d''_2, \cdots, d'_n + d''_n)$ -ը, հանդիսանում է ամենաանհարթ հաջորդականություն:

**Ապացույց:**

Նախ նկատենք, որ համաձայն Հատկություն 3.3-1-ի $(d'_2, \cdots, d'_n)$-ը և $(d''_2, \cdots, d''_n)$-ը ամենաանհարթ հաջորդականություններ են, և հետևաբար, հնարավոր չի

$(m_1 = d_1, d_2, \cdots, d_n)$ -ը անհարթեցնել $d_2, \cdots, d_n$ -ի ներսում: Այժմ ապացուցենք, որ հնարավոր չի անհաթեցնել նաև $(d_1, d_i)$ զույգերի միջոցով: Տրոհենք $E^n$-ը համաձայն $x_1$ և $x_i$ փոփոխականների արժեքների միաժամանկ: $\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=1}$ , $\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=0}$ , $\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=1}$ , $\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=0}$ -ով նշանակենք $\mathcal{E}$ -ի մասերը $E^{n-2}_{x_i=1,x_j=1}$ , $E^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}$ , $E^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}$ , $E^{n-2}_{x_i=0,x_j=0}$ -ում, համապատասխանաբար: Այդ դեպքում,

$\left|\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=1}\right| + \left|\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=0}\right| = d_1$ և $\left|\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=1}\right| + \left|\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=1}\right| = d_i$:

Նախ, նկատենք հետևյալը.

եթե $m_1 \leq 2^{n-2}$, ապա $\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=0}$-ն դատարկ է,

եթե $m_1 > 2^{n-2}$ , ապա $\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=1}$ -ը համընկնում է $E^{n-2}_{x_i=1,x_j=1}$ -ի հետ, և $\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=0}$ -ը հանդիսանում է $m_1 - 2^{n-2}$ հզորությամբ սեղմված բազմություն $E^{n-2}_{x_i=1,x_j=0}$-ում (Գլուխ 2, Հատկություն 2.2.1-1):

Նման ձևով,

եթե $m_2 \leq 2^{n-2}$, ապա $\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=0}$-ն դատարկ է,

եթե $m_2 > 2^{n-2}$ , ապա $\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=1}$ -ը համընկնում է $E^{n-2}_{x_i=0,x_j=1}$ -ի հետ, և $\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=0}$ -ը հանդիսանում է լեքսիկոգրաֆիկ կարգի $m_2 - 2^{n-2}$ հզորությամբ սկզբնահատված $E^{n-2}_{x_i=0,x_j=0}$-ում (Հատկություն 2.2.1-1):

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1. $d_1 < d_i$:

Այստեղից՝ $|\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=0}| < |\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=1}|$ : Եթե ուզում ենք հաջորդականությունը “անհարթեցնել” $(d_1, d_i)$ զույգի միջոցով, ապա պետք է մեծացնենք $d_i$ -ն և փոքրացնենք $d_1$-ը: Դա կարելի է անել $S_{1,i}$ տեղաշարժ գործողությամբ տեղափոխելով գագաթ $\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=0}$ -ից՝ $\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=1}$ : Բայց սա հնարավոր չէ, քանի որ կամ $\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=0}$ -ն դատարկ է, կամ և՛ $\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=0}$ -ն, և՛ $\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=1}$ -ը հանդիսանում են սեղմված բազմություններ, և $|\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=0}| < |\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=1}|$:

2. $d_1 > d_i$:

Այստեղից՝ $|\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=0}| > |\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=1}|$ : Եթե ուզում ենք հաջորդականությունը “անհարթեցնել”, ապա պետք է մեծացնենք $d_1$-ը և փոքրացնենք $d_i$-ն: Դա կարելի է անել $S_{1,i}$ տեղաշարժ գործողությամբ տեղափոխելով գագաթ $\mathcal{E}_{x_1=0,x_i=1}$ -ից՝ $\mathcal{E}_{x_1=1,x_i=0}$ : Սա հնարավոր չէ, ինչպես նախորդ դեպքում: □

Կիրառենք նախորդ թեորեմները բոլոր թույլատրելի ( $m_1, m_2$ ) զույգերի համար, կստանանք հետևյալ պնդումը.

**Թեորեմ 3.3.1-3:** Կամայական $\tilde{m}$-ի համար, որը $\left]\frac{m}{2}\right[ \leq \tilde{m} \leq m$ - գոյություն ունի վերին եզրային ամենաանհարթ հաջորդականություն, որն ունի $\tilde{m}$ արժեքով կոմպոնենտ:

Այսպիսով, ստացանք վերին ամենաանհարթ հաջորդականությունների նոր դաս: Դիտարկենք օրինակ, որը կօգնի գնահատելու ստացված արդյունքը:

$n = 5, m = 14$: Դիտարկենք $E^4_{x_1=1}$-ում և $E^4_{x_1=0}$-ում բոլոր թույլատրելի բազմությունների զույգերը, և կիրառենք թեորեմներում բերված կառուցումները:

Դիտարկենք $m$ թվի բոլոր ամբողջարժեք տրոհումները.

(1) $m_1 = 13, m_2 = 1$

$d' = (8,8,7,7)$, $d'' = (1,1,1,1)$, $d = (13,9,9,8,8)$,

(2) $m_1 = 12, m_2 = 2$

$d' = (8,8,6,6)$, $d'' = (2,2,2,1)$, $d = (12,10,10,8,7)$,

(3) $m_1 = 11, m_2 = 3$

$d' = (8,7,6,6),\ d'' = (3,3,2,2),\ d = (11,11,10,8,8),$

(4) $m_1 = 10, m_2 = 4$

$d' = (8,6,6,5),\ d'' = (4,4,2,2),\ d = (10,12,10,8,7),$

(5) $m_1 = 9, m_2 = 5$

$d' = (8,5,5,5),\ d'' = (5,4,3,3),\ d = (9,13,9,8,8),$

(6) $m_1 = 8, m_2 = 6$

$d' = (8,4,4,4),\ d'' = (6,4,4,3),\ d = (8,14,8,8,7),$

(7) $m_1 = 7, m_2 = 7$

$d' = (7,4,4,4),\ d'' = (7,4,4,4),\ d = (7,14,8,8,8)$:

Այսպիսով, ստացանք վերին ամենաանհարթ հաջորդականությունների հետևյալ դասը (կոմպոնենտների տեղափոխության ճշտությամբ):

$\{(14,8,8,8,7), (13,9,9,8,8), (12,10,10,8,7), (11,11,10,8,8)\}$:

Մինչդեռ $n = 5, m = 14$ -ի համար բոլոր վերին եզրային ամենաանհարթ հաջորդականությունների բազմությունը հետևյալն է (կոմպոնենտների տեղափոխության ճշտությամբ).

$\{(14,8,8,8,7), (13,9,9,8,8), (12,10,10,8,7), (12,10,9,9,8), (11,11,10,8,8), (11,10,10,9,9)\}$:

## 3.4 $D_m(n)$-ի լրացումը $\Xi_{m+1}^n$-ում

Այս բաժնում դիտարկելու ենք $D_m(n)$-ի լրացումը $\Xi_{m+1}^n$-ում՝ $\Xi_{m+1}^n \backslash D_m(n)$: Լրացման դիտարկման նպատակներից մեկը այն է, որ - հնարավոր է, որ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության լրացումը ալգորիթմորեն ավելի հեշտ նկարագրվի, քան հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմությունը: Չնայած բերվող արդյունքները այս տեսանկյունից բավարար չեն, սակայն լրացման դիտարկումը թույլ տվեց գտնել հիպերգրաֆային հաջորդականությունների լրացուցիչ օգտակար բնութագրեր՝ մինիմալ շեմ, և ստացվում է, որ $\widehat{H}$-ի բոլոր այն էլեմենտները, որոնց ռանգը փոքր է մինիմալից, - հիպերգրաֆային են:

$\Xi_{m+1}^{n}\backslash D_m(n)$ լրացման տիրույթում ևս սահմանենք վերին/ստորին հաջորդականություններ:

**Սահմանում 3.4-1:** $d \in \Xi_{m+1}^{n}\backslash D_m(n)$ էլեմենտը կանվանենք $\Xi_{m+1}^{n}$ -ում *վերին ոչ հիպերգրաֆային հաջորդականություն,* եթե $d \in \widehat{H}$ ; և կանվանենք *ստորին ոչ հիպերգրաֆային հաջորդականություն*, եթե $d \in \breve{H}$:

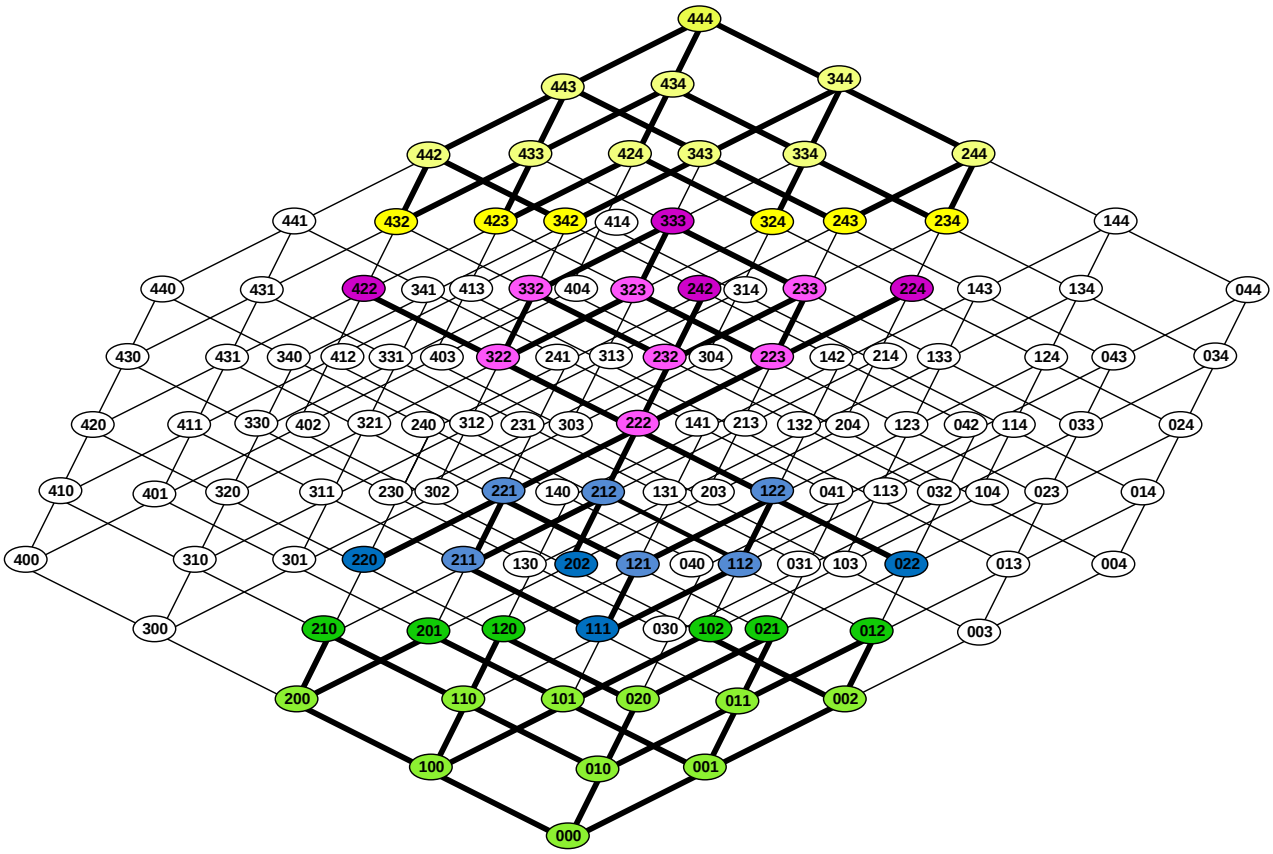
$\widehat{F}_m(n)$ -ով նշանակենք *վերին ոչ հիպերգրաֆային* հաջորդականությունների բազմությունը՝ $\widehat{F}_m(n) = \widehat{H}\backslash\widehat{D}_m(n)$, և $\breve{F}_m(n)$-ով նշանակենք *ստորին ոչ հիպերգրաֆային* հաջորդականությունների բազմությունը՝ $\breve{F}_m(n) = \breve{H}\backslash\breve{D}_m(n)$: Թեորեմ 3.1-1-ից հետևում է, որ $\widehat{F}_m(n)$ -ը համապատասխանում է $\widehat{H}$ –ում որոշված որոշակի մոնոտոն բինար ֆունկցիայի մեկ արժեքների բազմությանը, և $\breve{F}_m(n)$-ը համապատասխանում է $\breve{H}$ –ում որոշված այդ մոնոտոն բինար ֆունկցիայի զրո արժեքների բազմությանը:

Սահմանենք եզրային էլեմենտների գաղափարը $\widehat{F}_m(n)$ և $\breve{F}_m(n)$ բազմությունների համար:

**Սահմանում 3.4-2:** $\hat{d} \in \widehat{F}_m(n)$ էլեմենտը կանվանենք $\widehat{F}_m(n)$-ի *ստորին եզրային էլեմենտ*, եթե $\hat{d}$ -ից փոքր բոլոր $a \in \widehat{H}$ էլեմենտները պատկանում են $D_m(n)$ -ին: $\check{d} \in \breve{F}_m(n)$ էլեմենտը կանվանենք $\breve{F}_m(n)$ -ի *վերին եզրային էլեմենտ*, եթե $\check{d}$ -ից մեծ բոլոր $a \in \breve{H}$ էլեմենտները պատկանում են $D_m(n)$-ին:

$\widehat{\widehat{D}}_{max}$-ով նշանակենք $\widehat{F}_m(n)$-ի ստորին եզրային էլեմենտների բազմությունը և $\breve{\breve{D}}_{min}$-ով՝ $\breve{F}_m(n)$-ի և վերին եզրային էլեմենտների բազմությունը:

Նկար 3.4-1-ում դեղին գույնով պատկերված են $\widehat{F}_4(3)$ բազմության էլեմենտները (առավել մուգ դեղինով նշված են բազմության ստորին եզրային էլեմենտները); և կանաչ գույնով պատկերված են $\breve{F}_4(3)$ բազմության էլեմենտները (առավել մուգ կանաչով նշված են բազմության վերին եզրային էլեմենտները:




**Նկար 3.4-1:** $\hat{F}_4(3)$-ը և $\breve{F}_4(3)$-ը $\Xi^n_{m+1}$-ում:

Քանի որ $\hat{F}_m(n)$-ը $\hat{D}_m(n)$-ի լրացումն է $\hat{H}$-ում, և $\breve{F}_m(n)$-ը $\breve{D}_m(n)$-ի լրացումն է $\breve{H}$-ում, ապա $\hat{\hat{D}}_{max}$ -ը և $\breve{\breve{D}}_{min}$ -ը (ինչպես որ $\hat{D}_{max}$ -ը և $\breve{D}_{min}$ -ը) պարունակում են միևնույն թվով էլեմենտներ, և սիմետրիկ են $\Xi^n_{m+1}$-ում միջին շերտի/շերտերի նկատմամբ:

Այսպիսով, Լեմմա 3.1-1-ի նմանությամբ՝ տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Լեմմա 3.4-1:**

$$\hat{F}_m(n) = \cup_{\hat{D}\in \hat{\hat{D}}_{max}} E(\hat{D}, \tilde{m})\,;\ \breve{F}_m(n) = \cup_{\breve{D}\in \breve{\breve{D}}_{min}} E(\tilde{0}, \breve{D}):$$

Պարզ է, որ Թեորեմ 3.2-1-ի նմանությամբ, $\Xi^n_{m+1}\backslash D_m(n)$-ը կարելի է գտնել՝ ունենալով $\hat{F}_m(n)$-ը /կամ $\breve{F}_m(n)$-ը/: Հետևյալ թեորեմով ներկայացվում է այդ պնդումը:

**Թեորեմ 3.4-1:**

$$\Xi^n_{m+1}\backslash D_m(n) = \cup_{d\in \hat{H}\backslash \hat{D}_m(n)} V(d) = \cup_{d\in \breve{H}\backslash \breve{D}_m(n)} V(d)\text{, և ավելի կոնկրետ,}$$

$$\Xi^n_{m+1}\backslash D_m(n) = \cup_{\hat{D}\in \hat{\hat{D}}_{max}} \cup_{d\in E(\hat{D},\tilde{m})} V(d) = \cup_{\breve{D}\in \breve{\breve{D}}_{min}} \cup_{d\in E(\tilde{0},\breve{D})} V(d):$$

Այսուհետև, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կդիտարկենք միայն $\hat{F}_m(n)$-ը:

### 3.4.1 $\hat{\hat{D}}_{max}$- ի մինիմալ ռանգի էլեմենտներ

Այս բաժնում կդիտարկենք $\hat{F}_m(n)$-ի մինիմալ էլեմենտների /մոնոտոն ֆունկցիայի ստորին մեկերի/ գտնելու խնդիրը: Մասնավորապես, կդիտարկենք եզրային դեպքերը՝ մինիմալ և մաքսիմալ ռանգ ունեցող էլեմենտները:

$\bar{r}_{min}$ –ով կնշանակենք $\hat{\hat{D}}_{max}$-ի մինիմալ ռանգ ունեցող էլեմենտների ռանգը, $\bar{r}_{max}$-ով՝ մաքսիմալ ռանգ ունեցող էլեմենտների ռանգը:

Քանի որ օգտագործելու ենք $\hat{D}_{max}$-ի մինիմալ ռանգով $d_{min}$ էլեմենտը, հիշենք, որ $d_{min}$-ի կոմպոնենտները՝ դասավորված արժեքների աճման կարգով, հաշվվում են հետևյալ բանաձևերով.

(1) $d_i = \left(\sum_{l=1}^{j-1} 2^{k_l-1}\right) + 2^{k_j}$, երբ $i = k_j + 1, j = 1, \cdots, p$

(2) $d_i = \left(\sum_{l=1}^{j} 2^{k_l-1}\right) + \sum_{l=j+1}^{p} 2^{k_l}$, երբ $k_{j+1} + 2 \le i \le k_j, j = 1, \cdots, p-1$

(3) $d_i = \left(\sum_{l=1}^{p} 2^{k_l-1}\right) = m/2$, երբ $1 \le i \le k_p$

(4) $d_i = \left(\sum_{l=1}^{p} 2^{k_l}\right) = m$, երբ $k_1 + 2 \le i \le n$,

որտեղ $m$-ը ներկայացված է՝

$$m = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_p};\ \ k_1 > k_2 > \cdots > k_p \ge 0\ ; \qquad (3.4.1\text{-}1)$$

և $2^{k_i} > \sum_{j=i+1}^{p} 2^{k_j}$ , $i = 1,2, \cdots, p-1$:

Կատարենք հետևյալ նշանակումը. $m_{mid} = \begin{cases} \frac{m}{2}, \text{ երբ } m - \text{ը զույգ է.} \\ \frac{m+1}{2}, \text{ երբ } m - \text{ը կենտ է} \end{cases}$

Ըստ կոմպոնենտների արժեքների, $d_{min}$-ը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ *ընդհանուր տեսքով* (կոմպոնենտները նվազման կարգով են դասավորված).

$$d_{min} = \left(\overbrace{m, \cdots, m}^{n_1}, \overbrace{d_{n_1+1}, \cdots, d_{n_1+n_2}}^{n_2}, \overbrace{m_{mid}, \cdots, m_{mid}}^{n_3}\right) \qquad (3.4.1\text{-}2)$$

որտեղ $m > d_{n_1+1} \ge \cdots \ge d_{n_1+n_2} > m_{mid}$; $n_1, n_2, n_3 \ge 0$; $n_1 + n_2 + n_3 = n$:

Նկատենք, որ $d_{n_1+1} = 2^{k_1}$:

Նշենք $d_{min}$-ի հետ կապված երկու հատկություն, որոնք հեշտ է ստուգել, և որոնք օգտագործելու ենք հետագա թեորեմների ապացուցման մեջ: Առաջինը՝ Գլուխ2-ի

Հատկություն 2.2.1-3-ն է, սակայն այս բաժնում նպատակահարմար է բերել այլ տերմիններով:

**Հատկություն 3.4.1-1:** Դիցուք՝ $d_{min} = (d_1, \cdots, d_n)$ : $D_m(n)$ -ի վեկտորների մեջ $d_i$ -ն հնարավոր ամենամեծ արժեքն է ֆիքսված $d_1, \cdots, d_{i-1}$-ի դեպքում, $1 \leq i \leq n$:

**Հատկություն 3.4.1-2:** Դիցուք՝ $d_{min}$-ը տրված է (3.4.1-2) ներկայացմամբ:

ա) եթե $2^{t-1} < m \leq 2^t$ որևէ $t \leq n$-ի համար, ապա $n_1 = n - t$:

բ) $n_2 = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $m = 2^t$ որևէ $t$-ի համար:

գ) $n_3 = k_p$:

**Թեորեմ 3.4.1-1:** Դիցուք՝ $m = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_p}$, $k_1 > k_2 > \cdots > k_p \geq 0$; և $n_1$-ը $d_{min}$-ի $m$ արժեքով կոմպոնենտների քանակն է (3.4.1-2)-ում: Այդ դեպքում,

(1) Եթե $m \neq 2^t$ որևէ $t$-ի համար, ապա

(ա) $\bar{d}_{min} = \left(\overbrace{m, \cdots, m}^{n_1},\ 2^{k_1} + 1, \overbrace{m_{mid}, \cdots, m_{mid}}^{n-n_1-1}\right)$-ը հանդիսանում է $\hat{F}_m(n)$-ի մինիմալ էլեմենտ:

(բ) $r(\bar{d}_{min}) = \bar{r}_{min}$:

(2) Եթե $m = 2^t$ որևէ $t$-ի համար, ապա

(ա) $\bar{d}_{min} = \left(\overbrace{m, \cdots, m}^{n_1}, m_{mid} + 1, \overbrace{m_{mid}, \cdots, m_{mid}}^{n-n_1-1}\right)$-ը հանդիսանում է $\hat{F}_m(n)$-ի մինիմալ էլեմենտ:

(բ) $r(\bar{d}_{min}) = \bar{r}_{min}$:

**Ապացույց:**

Նախ դիտարկենք (1) դեպքը.

(1) $m \neq 2^t$, հետևաբար, $n_2 > 0$ ըստ Հատկություն 3.4.1-2-ի:

(ա) Բավական է ցույց տալ, որ $\bar{d}_{min}$ -ը $\hat{H}$ -ի ոչ հիպերգրաֆային հաջորդականություն է, և $\hat{H}$-ի բոլոր էլեմենտները, որոնք ծածկվում են $\bar{d}_{min}$-ով (փոքր են $\bar{d}_{min}$ -ից ճիշտ մեկ կոմպոնենտի արժեքով, և արժեքների տարբերությունը մեկ է), հանդիսանում են հիպերգրաֆային

հաջորդականություններ: $\bar{d}_{min}$-ը չի պատկանում $\widehat{D}_m(n)$-ին ըստ Հատկություն 3.4.1-1-ի: $\widehat{H}$-ի բոլոր էլեմենտները, որոնք ծածկվում են $\bar{d}_{min}$-ով, ունեն հետևյալ տեսքի ներկայացումներից որևէ մեկը.

$$\left(\overbrace{m,\cdots,m}^{n_1},2^{k_1},\overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n-n_1-1}\right) \qquad (3.4.1\text{-}3)$$

$$\left(\overbrace{m,\cdots,m-1}^{n_1},2^{k_1}+1,\overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n-n_1-1}\right) \qquad (3.4.1\text{-}4)$$

(3.4.1-3)-ով ներկայացված հաջորդականությունը փոքր է $d_{min}$-ից, և հետևաբար, պատկանում է $\widehat{D}_m(n)$-ին: Եթե $m = 2^{k_1}+1$, ապա (3.4.1-4)-ով ներկայացված հաջորդականությունը (3.4.1-3)-ի տեղափոխություն է: Եթե $m \geq 2^{k_1}+2$, ապա (3.4.1-4)-ով ներկայացված հաջորդականությունը (3.4.1-3)-ից հարթ է, և հետևաբար, համաձայն Թեորեմ 3.3-1-ի, հիպերգրաֆային է:

(բ) Պետք է ապացուցենք, որ $\widehat{H}$-ին պատկանող բոլոր $a$ էլեմենտները, որոնց համար $r(a) < r(\bar{d}_{min})$, պատկանում են $\widehat{D}_m(n)$-ին: Բավական է ցույց տալ, որ $\widehat{H}$-ին պատկանող բոլոր $a$ էլեմենտները, որոնց համար $r(a) = r(\bar{d}_{min}) - 1$, պատկանում են $\widehat{D}_m(n)$-ին: Դիտարկենք $r(\bar{d}_{min}) - 1$ ռանգի հետևյալ էլեմենտը.

$d' = \left(\overbrace{m,\cdots,m-1}^{n_1},2^{k_1},\overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n-n_1-1}\right)$: Հեշտ է ստուգել, որ $\widehat{H}$-ի $r(\bar{d}_{min}) - 1$ ռանգի բոլոր էլեմենտները կարող են ստացվել $d'$-ից հետևյալ միավոր գործողությունների կոմբինացիայով.

- $(m, 2^{k_1})$-ը փոխարինել $(m-1, 2^{k_1}+1)$-ով,
- $(m, m_{mid})$-ը փոխարինել $(m-1, m_{mid}+1)$-ով,
- $(2^{k_1}, m_{mid})$-ը փոխարինել $(2^{k_1}-1, m_{mid}+1)$-ով:

Բոլոր երեք դեպքերում էլ ստացված հաջորդականությունը կամ կլինի ավելի հարթ, քան $d'$-ը, կամ կհանդիսանա $d'$-ի տեղափոխություն, - հետևաբար կպատկանի $\widehat{D}_m(n)$-ին:

(2) $m = 2^t$, հետևաբար, $n_2 = 0$ ըստ Հատկություն 3.4.1-2-ի:

(ա) Բավական է ցույց տալ, որ $\bar{d}_{min}$-ը չի պատկանում $\widehat{D}_m(n)$-ին և $\widehat{H}$-ի բոլոր էլեմենտները, որոնք ծածկվում են $\bar{d}_{min}$-ով, հանդիսանում են հիպերգրաֆային

հաջորդականություններ: $\bar{d}_{min}$-ը չի պատկանում $\widehat{D}_m(n)$-ին, քանի որ $\bar{d}_{min} > d_{min}$, իսկ $d_{min}$ -ը $\widehat{D}_m(n)$ -ի մաքսիմալ էլեմենտ է: $\widehat{H}$ -ի բոլոր էլեմենտները, որոնք ծածկվում են $\bar{d}_{min}$-ով, ունեն հետևյալ տեսքի ներկայացումներից որևէ մեկը.

$\left(\overbrace{m,\cdots,m}^{n_1},\overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n_3}\right)$ կամ $\left(\overbrace{m,\cdots,m-1}^{n_1},m_{mid}+1,\overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n_3-1}\right)$:

Առաջինը հենց $d_{min}$ -ն է, իսկ երկրորդը՝ $d_{min}$ -ից հարթ է, - հետևաբար, պատկանում է $\widehat{D}_m(n)$-ին:

(բ) Պետք է ապացուցենք, որ $\widehat{H}$-ին պատկանող բոլոր $a$ էլեմենտները, որոնց համար $r(a) = r(\bar{d}_{min}) - 1$, պատկանում են $\widehat{D}_m(n)$-ին: Դրանք բոլորը ավելի հարթ են, քան $d_{min} = \left(\overbrace{m,\cdots,m}^{n_1},\overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n_3}\right)$-ը, հետևաբար, ըստ Թեորեմ 3.3-1-ի, պատկանում են $\widehat{D}_m(n)$-ին: □

Նկատենք, որ եթե հիպերգրաֆային հաջորդականությունների դեպքում $\widehat{D}_m(n)$-ում $r_{min}$ ռանգի մաքսիմալ էլեմենտը միակն էր (կոորդինատների տեղափոխման ճշտությամբ), ապա ոչ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների դեպքում այդպես չէ: Հետևյալ թեորեմը կառուցում է $\widehat{F}_m(n)$-ի մի շարք մինիմալ էլեմենտներ (ընդ որում, ավելի հարթ):

**Թեորեմ 3.4.1-2:**

Դիցուք՝ $m = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_p}$, $k_1 > k_2 > \cdots > k_p \geq 0$; և $n_1$-ը $d_{min}$-ի $m$ արժեքով կոմպոնենտների քանակն է (3.4.1-2)-ում: Այդ դեպքում,

(1) Եթե $m \neq 2^t$ որևէ $t$-ի համար, ապա

$\left(\overbrace{m,\cdots,m,m-l}^{n_1},\ 2^{k_1}+l+1,\overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n-n_1-1}\right)$-ը, որտեղ $l = 1,\cdots,(m-2^{k_1}-1)/2$; - հանդիսանում են $\widehat{F}_m(n)$-ի $\bar{r}_{min}$ ռանգի մինիմալ էլեմենտներ:

(2) Եթե $m = 2^t$, ապա

$\left(\overbrace{m,\cdots,m,m-l}^{n_1},m_{mid}+l+1,\overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n-n_1-1}\right)$ -ը ( $l = 1,\cdots,(m-m_{mid}-1)/2$ ) - հանդիսանում են $\widehat{F}_m(n)$-ի $\bar{r}_{min}$ ռանգի մինիմալ էլեմենտներ:

**Ապացույց:** Ապացուցվում է նույն դատողություններով, ինչ որ Թեորեմ 3.4.1-1-ը: □

### *3.4.2 $\widehat{\widehat{D}}_{max}$- ի մաքսիմալ ռանգի էլեմենտներ*

Դիցուք՝ $m$ թիվը տրված է կանոնական ներկայացմամբ.

$m = C_n^n + C_n^{n-1} + \cdots + C_n^{n-k} + m_1,\ m_1 \le C_n^{n-k-1}$ (3.4.2-1)

Հիշենք, որ $\widehat{D}_m(n)$-ի մաքսիմալ էլեմենտների մաքսիմալ $r_{max}$ ռանգը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$r_{max} = \sum_{i=0}^{k}(n-i)\cdot C_n^{n-i} + (n-k-1)\cdot m_1$:

Եվ մաքսիմալ ռանգ ունեցող մաքսիմալ էլեմենտների յուրաքանչյուր $d_i$ կոմպոնենտ ներկայացվում է

$d_i = \sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1} + s_i$ տեսքով,

որտեղ $\sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1}$ գումարելին հաստատուն է բոլոր կոմպոնենտների համար և այն ստացվում է $C_n^n + C_n^{n-1} + \cdots + C_n^{n-k}$ հատ հիպերկողերից /$E^n$-ի գագաթներից/, իսկ $s_i$ գումարելին ստացվում է $m_1$ հատ գագաթներից: Այսպիսով, $(s_1, \cdots, s_n)$-ով տրվում է $m_1$ հիպերկող ունեցող $(n-k-1)$ -համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների բազմությունը:

Հետևյալ թեորեմը գտնում է $\widehat{F}_m(n)$-ի մինիմալ էլեմենտների մաքսիմալ $\bar{r}_{max}$ ռանգը:

**Թեորեմ 3.4.2-1:** Դիցուք՝ $m$-ը տրված է (3.4.2-1) կանոնական տեսքով: Այդ դեպքում.

$\bar{r}_{max} = r_{max} + 1$, երբ $m_1 \ge 1 + \frac{k}{n-k-1}$:

**Ապացույց:**

(1) Հեշտ է ստուգել, որ գոյություն ունի $\widehat{D}_m(n)$-ի մաքսիմալ $d' = (d_1, \cdots, d_n)$ էլեմենտ այնպես, որ $d_1 \ge \cdots \ge d_{n-1} > d_n$ (միշտ կարող ենք ընտրել $m_1$ հիպերկողեր այնպես, որ $s_1 \ge \cdots \ge s_{n-1} > s_n$ ): Դիտարկենք $\bar{d}' = (d_1, \cdots, d_{n-1}, d_n + 1)$ հաջորդականությունը, որը պատկանում է $\widehat{F}_m(n)$ -ին: $\bar{d}'$ -ով ծածկվող բոլոր էլեմենտները կամ ավելի հարթ են, քան $d'$-ը, կամ $d'$-ի տեղափոխություններ են, - հետևաբար, պատկանում են $\widehat{D}_m(n)$-ին: Հետևաբար, $\bar{d}'$-ը $\widehat{F}_m(n)$-ի $r_{max} + 1$ ռանգի մինիմալ էլեմենտ է: Քանի որ $\widehat{H}$ -ի $r_{max} + 1$ ռանգի բոլոր էլեմենտները

պատկանում են $\hat{F}_m(n)$-ին, ապա գոյություն չունի $\hat{F}_m(n)$-ի մինիմալ էլեմենտ ավելի մեծ ռանգի, քան $r_{max}+1$-ն է: Հետևաբար, $\bar{r}_{max}=r_{max}+1$:

(2) Ակնհայտ է: □

Ստացանք հետևյալ պնդումը՝

**Թեորեմ 3.4.2-2:** $\hat{H}$-ի բոլոր հաջորդականությունները, որոնց ռանգը $\bar{r}_{min}$-ից փոքր է, հիպերգրաֆային են; և բոլոր հաջորդականությունները, որոնց ռանգը $r_{max}$-ից մեծ է, հիպերգրաֆային չեն:

Այսպիսով, որ $\hat{D}_m(n)$ -ի բոլոր մաքսիմալ էլեմենտները և $\hat{F}_m(n)$ -ի բոլոր մինիմալ էլեմենտները գտնվում են $\hat{H}$-ի $\bar{r}_{min}$ և $r_{max}+1$ շերտերի միջև:

Պարզ է, որ $\Xi_{m+1}^n$-ում նույնպես $r_{max}$-ից մեծ ռանգ ունեցող հաջորդականությունները հիպերգրաֆային չեն: Ինչպես նաև հիպերգրաֆային չեն $(nm-r_{max})$-ից փոքր ռանգ ունեցողները:

Սակայն, ի տարբերություն $\hat{H}$ -ի / $\breve{H}$ -ի/, $m>2$ դեպքում $\Xi_{m+1}^n$ -ի կամայական շերտում/մակարդակում կա էլեմենտ, որը հիպերգրաֆային հաջորդականություն չի:

**Թեորեմ 3.4.2-3:** $m>2$ դեպքում $\Xi_{m+1}^n$-ի կամայական $l$ համարով շերտում կա էլեմենտ, որը չի պատկանում $D_m(n)$-ին:

**Ապացույց:**

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

ա) $l>m$**;**

Դիցուք՝ $l=pm+q$: Շերտի հետևյալ էլեմենտը.

$$d=(\overbrace{m,m,\cdots,m}^{p},q,\overbrace{0,0,\cdots,0}^{\boldsymbol{n-p-1}})$$

հիպերգրաֆային չէ, քանի որ հակառակ դեպքում ըստ Լեմմա 2.1.2-1-ի հիպերգրաֆային պետք է լիներ նաև $(\overbrace{m,\cdots,m}^{n-1},q)$ հաջորդականությունը, իսկ դա հնարավոր կլինի միայն այն դեպքում, երբ $m=2$ և $q=1$:

բ) $l\le m$;

Շերտի հետևյալ էլեմենտը.

$d = (\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n-1}, l)$

հիպերգրաֆային չէ, քանի որ հակառակ դեպքում ըստ Լեմմա 2.1.2-1-ի (Գլուխ 2) հիպերգրաֆային պետք է լիներ նաև $(\overbrace{m,\cdots,m}^{n-1}, l)$ հաջորդականությունը, իսկ դա հնարավոր կլինի միայն այն դեպքում, երբ $m = 2$ և $l = 1$: □

### *3.4.3 Հեռավորությունների դիտարկում $\widehat{H}$-ում*

Այս բաժնում կդիտարկենք $\widehat{H}$ -ի մինիմալ, մաքսիմալ և միջին շերտերի հեռավորությունը $\bar{r}_{min}$ և $r_{max}$ համարն ունեցող շերտերից՝ կախված $n$ -ի և $m$ -ի արժեքներից:

$\widehat{H}$ -ի մինիմալ շերտը կազմված է միակ $(m_{mid},\cdots,m_{mid})$ էլեմենտից; մաքսիմալ շերտը կազմված է միակ $(m,\cdots,m)$ էլեմենտից, և միջին շերտը կազմված է բոլոր այն էլեմենտներից, որոնց ռանգը $n \cdot (m + m_{mid})/2$ է, և մասնավորապես, միջին շերտում է գտնվում $((m + m_{mid})/2,\cdots,(m + m_{mid})/2)$ էլեմենտը:

Կախված $m$ -ի արժեքից առանձնացնենք $m = 2^t$ և $2^{t-1} < m < 2^t$ դեպքերը; և դիտարկենք $\widehat{H}$-ի մինիմալ, մաքսիմալ և միջին շերտերի հեռավորությունը $\bar{r}_{min}$ -ից և $r_{max}$ -ից:

1) $2^{t-1} < m < 2^t$:

Այս դեպքում,

$$\bar{d}_{min} = \left(\overbrace{m,\cdots,m}^{n-t}, 2^{t-1} + 1, \overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{t-1}\right),$$

$$\bar{r}_{min} = (n - t) \cdot m + 2^{t-1} + (t - 1) \cdot m_{mid} + 1:$$

Մինիմալ շերտից $\bar{r}_{min}$-ի հեռավորությունը կլինի.

$$\bar{r}_{min} - r(m_{mid},\cdots,m_{mid}) \approx (n - t) \cdot \frac{m}{2} + \left(2^{t-1} - \frac{m}{2} + 1\right) =$$

$$\frac{m}{2} \cdot (n - t - 1) + 2^{t-1} + 1:$$

Միջին շերտից $\bar{r}_{min}$-ի հեռավորությունը կլինի.

$\bar{r}_{min} - r((m+m_{mid})/2, \cdots, (m+m_{mid})/2) \approx (n-t) \cdot \frac{m}{4} + \left(2^{t-1} + 1 - \frac{3m}{2}\right) =$

$\frac{m}{4} \cdot (n - 2t - 2) + 2^{t-1} + 1$:

2) $m = 2^t$ որևէ $t$-ի համար:

Այս դեպքում,

$$\bar{d}_{min} = \left(\overbrace{m, \cdots, m}^{n-t}, m_{mid} + 1, \overbrace{m_{mid}, \cdots, m_{mid}}^{t-1}\right),$$

$\bar{r}_{min} = (n-t) \cdot m + t \cdot m_{mid} + 1$:

Մինիմալ շերտից $\bar{r}_{min}$-ի հեռավորությունը կլինի.

$\bar{r}_{min} - r(m_{mid}, \cdots, m_{mid}) \approx \frac{m}{2} \cdot (n-t) + 1$:

Միջին շերտից $\bar{r}_{min}$-ի հեռավորությունը կլինի.

$\bar{r}_{min} - r((m+m_{mid})/2, \cdots, (m+m_{mid})/2) \approx (n-t) \cdot \frac{m}{4} - t \cdot m/4 + 1 =$

$\frac{m}{4} \cdot (n - 2t) + 1$:

Ինչպես տեսանք, երկու դեպքում էլ $m$-ի աճի հետ աճում է նաև $\bar{r}_{min}$-ի հեռավորությունը մինիմալ շերտից:

Այժմ դիտարկենք $r_{max}$-ի դեպքը:

1) $m_1 = 0$:

$m = \sum_{i=0}^{k} C_n^{n-i} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} C_{n-1}^{n-i-1} + C_{n-1}^{n-k-1}$, և հետևաբար,

$m_{mid} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{n-1}^{n-i-1} + C_{n-1}^{n-k-1}/2$:

Մյուս կողմից, $d_{max}$-ի բոլոր կոմպոնենտները հավասար են $\sum_{i=0}^{k} C_{n-1}^{n-i-1}$-ի:

$r_{max}$-ի հեռավորությունը մինիմալ շերտից կլինի.

$r_{max} - r(m_{mid}, \cdots, m_{mid}) = C_{n-1}^{n-k-1} \cdot n/2$:

$r_{max}$-ի հեռավորությունը մաքսիմալ շերտից կլինի.

$r(m, \cdots, m) - r_{max} = n \cdot \left(2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} C_{n-1}^{n-i-1} + C_{n-1}^{n-k-1}\right) - n \cdot \sum_{i=0}^{k-1} C_{n-1}^{n-i-1} =$

$n \cdot \sum_{i=0}^{k-1} C_{n-1}^{n-i-1}$:

2) $m_1 > 0$:

$m = \sum_{i=0}^{k} C_n^{n-i} + m_1 = 2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} C_{n-1}^{n-i-1} + C_{n-1}^{n-k-1} + m_1$, և հետևաբար,

$m_{mid} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{n-1}^{n-i-1} + (C_{n-1}^{n-k-1} + m_1)/2$:

$r_{max}$-ի հեռավորությունը մինիմալ շերտից կլինի.

$r_{max} - r(m_{mid}, \cdots, m_{mid}) = C_{n-1}^{n-k-1} \cdot \frac{n}{2} + m_1 \cdot (n-k-1) - n \cdot \frac{m_1}{2} =$

$C_{n-1}^{n-k-1} \cdot \frac{n}{2} + m_1 \cdot (n/2 - k - 1)$:

$r_{max}$-ի հեռավորությունը մաքսիմալ շերտից կլինի.

$n \cdot \sum_{i=0}^{k-1} C_{n-1}^{n-i-1} - m_1 \cdot (n-k-1)$:

Այսպիսով, նկարագրեցինք $\bar{r}_{min}$-ի և $r_{max}$-ի դիրքը $\widehat{H}$-ում՝ կախված $m$-ի արժեքից: Գտնված բանաձևերը ցույց են տալիս, թե երբ են $\bar{r}_{min}$-ը և $r_{max}$-ը իրար մոտ, երբ է $\bar{r}_{min}$-ը միջին արժեքից մեծ, և այլն:

### 3.5 Մասնակի արդյունքներ համասեռ հիպերգրաֆների համար

$D_m^k(n)$-ով նշանակենք $n$ գագաթ և $m$ հիպերկող ունեցող պարզ $k$-համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների բազմությունը:

Դիտարկենք $D_m^{n-3}(n)$ /կամ որ նույնն է $D_m^3(n)$/ բազմությունը: Հիշենք, որ այս դեպքում՝ $m \le C_n^3$: $D_m^{n-3}(n)$-ի էլեմենտները գտնվում են $\Xi_{m+1}^n$-ի $m \cdot (n-3)$-րդ շերտում՝ շերտի այն հատվածներում, որոնք ընկած են $\cup_{\widehat{D} \in \widehat{D}_{max}} E(\breve{D}, \widehat{D})$ ինտերվալների մեջ:

**Թեորեմ 3.5-1:** Յուրաքանչյուր $d \in D_m^{n-3}(n)$ հաջորդականության համար գոյություն ունի մոնոտոն բուլյան ֆունկցիա $M_m^1$-ից, որի ստորին 1-երը գտնվում են $E^n$-ի $(n-3)$-րդ կամ ավելի վերին շերտերում, և որի տրոհումների ասոցացված վեկտորը մեծ է $d$-ից:

**Ապացույց:**

Դիցուք՝ $d \in D_m^{n-3}(n)$, և $M$-ը այն $m$ էլեմենտանոց բազմությունն է $E^n$-ի $(n-3)$-րդ շերտում, որի տրոհումների ասոցացված վեկտորը $d$-ն է: Ձևափոխենք $M$-ը մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի 1 արժեքների բազմության՝ ըստ հետևյալ ալգորիթմի, որը մուտքում ունի $M$-ը; ելքում վերադարձնում է $M'$ բազմություն:

**Ալգորիթմ $TRANSFORM_MONOTONE$ ($TM$):**

$M' \coloneqq \emptyset$ ;

Քանի դեռ ( $M \neq \emptyset$)

{ դիտարկել հերթական $v \in M$ գագաթը;

$M \coloneqq M \backslash \{v\}$;

Եթե $v$-ն չունի վերին հարևան $E^n$-ում, որը $M$-ին չի պատկանում, ապա

$\{M' \coloneqq M' \cup \{v\};\}$

Հակառակ դեպքում՝

{Քանի դեռ $v$-ն ունի վերին հարևան $E^n$-ում, որը $M$-ին չի պատկանում

{դիտարկել հերթական $v'$ հարևանը; $v \coloneqq v'$ ; }

}

$M' \coloneqq M' \cup \{v\}$;

}

$M'$-ը կհամապատասխանի մոնոտոն ֆունկցիայի, և նրա ասոցացված վեկտորը մեծ է $d$-ից: □

Այսպիսով.

Եթե խոսենք $D_m^{n-3}(n)$-ի նկարագրի մասին մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների միջոցով, ապա անհրաժեշտ են միայն այն մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաները, որոնց ստորին 1-երը գտնվում են $E^n$-ի $(n-3)$-րդ կամ ավելի վերին շերտերում:

**Եզրակացություններ երրորդ գլխի վերաբերյալ**

Հետազոտվել է հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության կառուցվածքն ու հատկությունները, ներգրավելով հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության լրացման տիրույթի նկարագրումը. այն ունի կառուցվածքային պարզ նկարագիր, որը հնարավորություն է տալիս գտնելու մինիմալ և մաքսիմալ շեմեր, որոնց միջոցով որոշվում են հիպերգրաֆային և ոչ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների դասեր:

- ✓ Ներմուծվել է $\Xi_{m+1}^{n}$-ի խորանարդատիպ տրոհումը, որի արդյունքում էլ ցույց է տրվել, որ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների նկարագիրը $\Xi_{m+1}^{n}$ -ում ստանալու համար բավական է ունենալ նկարագիրը $\Xi_{m+1}^{n}$ -ի վերին $\widehat{H}$ /կամ ստորին $\breve{H}$ / տիրույթում: Լուծումների որոնման տիրույթի նեղացումը իրականացվել է նաև “ամենաանհարթ” հաջորդականությունների միջոցով:
- ✓ Տրվել է հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության կառուցվածքը $\widehat{H}$-ում /$\breve{H}$-ում/. այն համապատասխանում է $\widehat{H}$-ում /$\breve{H}$-ում/ որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի:
- ✓ Դիտարկվել է հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության լրացումը $\Xi_{m+1}^{n}$-ում, գտնվել են մինիմալ $\bar{r}_{min}$ կշռով եզրային էլեմենտների դասեր: Ստացվել է, որ $\widehat{H}$-ի բոլոր այն էլեմենտները, որոնց ռանգը փոքր է $\bar{r}_{min}$-ից՝ հիպերգրաֆային են, և բոլոր այն էլեմենտները, որոնց ռանգը $r_{max}$-ից մեծ է, հիպերգրաֆային չեն:
- ✓ Գտնվել են բանաձևեր՝ հաշվելու $\widehat{H}$ -ի մինիմալ, մաքսիմալ և միջին շերտերի հեռավորությունը $\bar{r}_{min}$ և $r_{max}$ համարն ունեցող շերտերից՝ կախված $n$-ի և $m$-ի արժեքներից:

# ԳԼՈՒԽ 4. ԴԻՍԿՐԵՏ ՏՈՄՈԳՐԱՖԻԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՆՈՐ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ԵՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒՄՆԵՐՈՎ, ՆՐԱՆՑ ՄՈՏԱՎՈՐ ԼՈՒԾՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐ

Այս գլխում դիտարկվում են խնդիրներ դիսկրետ տոմոգրաֆիայի տերմիններով, ներմուծվում են նոր պայմաններ/սահմանափակումներ ի լրումն դասական տարբերակների, որոնք քննարկվել են աշխատանքի Գլուխ 1-ում ([(1)], [(2)], [(3)], [(4)], [(6)], [(10)], [(12)], [(14)], [(16)], [(17)], [(18)], [(19)], [(23)], [(29)], [(30)]): Հետազոտվում են խնդիրների բարդությունները; մշակվում են նրանց մոտավոր լուծման ալգորիթմներ: Կարևոր է առանձնացնել տրված սահմանափակումներով բինար մատրիցի սյուն-առ-սյուն կառուցման ագահ ալգորիթմը՝ իր աշխատանքի արդյունքի երաշխիքի գնահատմամբ: Այն կիրառվում է բազմադեղորայքային դիմադրողականության դեմ պայքարի խնդրում, ինչպես նաև “գումարային բալանսով” մինիմալ բարձրության բինար ծառի կառուցման համար: Այսպիսին է ծառի մոդելը, որը ստեղծվում է ըստ գրաֆիկական բնութագրերի պատկերների դասակարգման խնդրի համար, և որը կիրառվում է մշակված հայերեն տպատառ տեքստերի ավտոմատ ճանաչման համակարգում:

Մոտավոր լուծումներ գտնելու համար կիրառվում է նաև Լագրանժյան ռելաքսացիայի մեթոդը, փոփոխականի տրոհման տեխնիկան, և կառուցվում են տրոհված խնդիրների լուծման ալգորիթմները:

## 4.1 Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրների ներկայացումը ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման մոդելում

Այս բաժնում հետազոտվում է դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրների դաս, որտեղ որպես սահմանափակում ներմուծվում է *շերտային պրոյեկցիայի գաղափարը*. բինար մատրիցում *ուղղահայաց շերտը*՝ սյուների խումբ է; *հորիզոնական շերտը*՝ տողերի խումբ:

Մասնավորապես, դիտարկում ենք 2 լայնությամբ շերտերը, և առանձնացնում ենք հետևյալ տեսակները, համապատասխան նշանակումներով.

- ուղղահայաց շերտեր սյուների բոլոր զույգերի համար՝ $A_VP$;
- ուղղահայաց շերտեր հարևան սյուների զույգերի համար՝ $N_VP$;
- ուղղահայաց շերտեր սյուների $(1, j)$ զույգերի համար՝ $1_VP$ (1-ին սյան փոխարեն կարող է հանդես գալ կամայական այլ սյուն):

**Սահմանում 4.1-1:** (1) $S' = (s'_1, s'_2, \cdots, s'_{C_n^2})$ վեկտորը կոչվում է $m \times n$ չափանի $X = \{x_{i,j}\}$ բինար մատրիցի $A_VP$ *պրոյեկցիա*, եթե $s'_t$-ն հավասար է $X$ մատրիցի սյուների $t$-րդ զույգի ընդհանուր մեկերի քանակին, $t = 1, \cdots, C_n^2$ (ենթադրվում է, որ $X$ -ի սյուների զույգերը նախապես համարակալված են):

(2) $S' = (s'_1, s'_2, \cdots, s'_{n-1})$ վեկտորը կոչվում է $m \times n$ չափանի $X = \{x_{i,j}\}$ բինար մատրիցի $N_VP$ *պրոյեկցիա*, եթե $s'_j$ -ն հավասար է $X$ մատրիցի $j$ -րդ և $(j+1)$ -րդ սյուների ընդհանուր մեկերի քանակին, որտեղ $j = 1, \cdots, n-1$:

(3) $S' = (s'_2, \cdots, s'_n)$ վեկտորը կոչվում է $m \times n$ չափանի $X = \{x_{i,j}\}$ բինար մատրիցի $1_VP$ *պրոյեկցիա*, եթե $s'_j$-ն հավասար է $X$ մատրիցի 1-ին և $j$-րդ սյուների ընդհանուր մեկերի քանակին, որտեղ $j = 2, \cdots, n$:

Եթե հիպերգրաֆային մոդելի անցման դեպքում բինար մատրիցի ուղղահայաց պրոյեկցիան համապատասխանում է հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությանը, ապա շերտային պրոյեկցիաները համապատասխանում են *ընդհանրացված աստիճանային հաջորդականությունների:* Դիցուք՝ $\mathcal{H}$-ը հիպերգրաֆ է գագաթների $[n]$ բազմությամբ: Գագաթների $(i, j)$ զույգի *ընդհանրացված աստիճանը*՝ դա $\mathcal{H}$ -ի այն կողերի քանակն է, որոնք պարունակում են $i$ և $j$ գագաթները միաժամանակ: Այսպիսով, $A_VP$ -ն համապատասխանում է ընդհանրացված աստիճանային հաջորդականության ըստ հիպերգրաֆի գագաթների բոլոր զույգերի, $N_VP$-ն՝ ըստ գագաթների $(j, j+1)$ զույգերի; և $1_VP$-ն՝ ըստ գագաթների $(1, j)$ զույգերի:

Համանման ձևով կարելի է սահմանել նաև $A_HP$, $N_HP$, $1_HP$ պրոյեկցիաները:

Օրինակ, Նկար 4.1-1-ում պատկերված մատրիցի $N_HP$ պրոյեկցիան է՝ (4,3,2,3,3,4,4)-ը, $N_VP$ պրոյեկցիան է՝ (4,2,2,7,2,1)-ը:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | **4** |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | **3** |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | **2** |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | **3** |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | **3** |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | **4** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **4** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| **4** | **2** | **2** | **7** | **2** | **1** | | |

**Նկար 4.1-1:** $N_HP$ և $N_VP$ պրոյեկցիաները:

Ստորև ներկայացնենք հետևյալ գոյության խնդիրները.

$\boldsymbol{HV_AVP}$ : Տրված են $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$ , $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ և $S' = (s'_1, s'_2, \cdots, s'_{C_n^2})$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի՞ արդյոք $m \times n$ չափանի բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից, այնպես որ $R$ –ը, $S$-ը և $S'$-ը հանդիսանան $X$-ի հորիզոնական, ուղղահայաց և $A_VP$ պրոյեկցիաները:

$\boldsymbol{HV_NVP}$ : Տրված են $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$ , $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ և $S' = (s'_1, s'_2, \cdots, s'_{n-1})$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի՞ արդյոք $m \times n$ չափանի բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից, այնպես որ $R$-ը, $S$-ը և $S'$-ը հանդիսանան $X$–ի հորիզոնական, ուղղահայաց և $N_VP$ պրոյեկցիաները:

$\boldsymbol{HV_\Sigma NVP}$: Տրված են $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$, $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները և $k$ բնական թիվը: Գոյություն ունի՞ արդյոք $m \times n$ չափանի բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից, այնպես որ $R$, $S$-ը հանդիսանան $X$–ի հորիզոնական, ուղղահայաց պրոյեկցիաները, և $N_VP$ պրոյեկցիայի կոմպոնենտների արժեքների գումարը հավասար լինի $k$-ի:

$\boldsymbol{HV_1VP}$: Տրված են $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$, $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ և $S' = (s'_2, \cdots, s'_n)$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի՞ արդյոք $m \times n$ չափանի բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից, այնպես որ $R$ –ը, $S$-ը և $S'$-ը հանդիսանան $X$-ի հորիզոնական, ուղղահայաց և $1_VP$ պրոյեկցիաները:

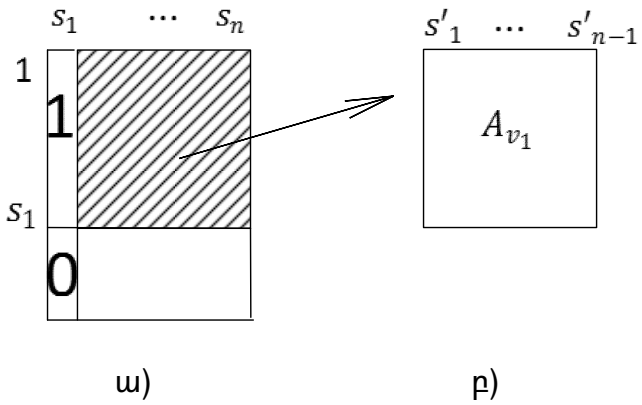
**Թեորեմ 4.1-1:** $HV_AVP$ խնդիրը NP-լրիվ է:

**Ապացույց:**

Նախ նկատենք, որ Գլուխ 1-ի 1.1.1 ենթաբաժնում բերված *Ընդգրկվող հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների խնդիրը NP-լրիվ է նաև կամայական հիպերգրաֆի համար* (քանի որ $k$-համասեռ հիպերգրաֆի կողմից ընդգրկվող հիպերգրաֆները կարող են լինել միայն $(k-1)$-համասեռ, և հետևաբար, համասեռ հիպերգրաֆի դեպքը կհանդիսանա մասնավոր դեպք):

Ցույց տանք, որ $HV_AVP$-ն համարժեք է Ընդգրկվող հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների խնդրին:

Դիցուք՝ $A$-ն $H=(V(H),E(H))$ $n$ գագաթ ունեցող հիպերգրաֆի մատրիցային ներկայացումն է, և $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$-ը նրա սյուների գումար վեկտորն է: $v_j \in V(H)$ գագաթի համար դիտարկենք ընդգրկվող $H_{v_j}$ հիպերգրաֆի մատրիցային ներկայացումը՝ $A_{v_j}$-ն: $A_{v_j}$ մատրիցի սյուների բազմությունը՝ $A$ մատրիցի սյուներն են առանց $j$-րդ սյան: Դիցուք $A$ մատրիցի $j$-րդ սյան 1-երը գտնվում են $i_1,\cdots,i_t$ տողերում, ապա $A_{v_j}$-ի տողերի բազմությունը $A$-ի $i_1,\cdots,i_t$ տողերի բազմությունն է (առանց $j$-րդ էլեմենտի): Այժմ, եթե դիտարկենք $A_{v_j}$ մատրիցի սյուների 1-երը, ապա նրանք համապատասխանում են $A$-ի $j$-րդ սյան՝ մնացած բոլոր սյուների հետ զույգ առ զույգ հատումներին:




**Նկար 4.1-2:** $A$ և $A_{v_1}$ մատրիցները:

Դիտարկենք օրինակ: Նկար 4.1-2-ի ա) մասում պատկերված է $A$ մատրիցը, որտեղ առաջին սյան 1-երը դասավորված են առաջին $s_1$ տեղերում: Եթե դիտարկենք

հիպերգրաֆի ընդգրկումը ըստ առաջին սյան, ապա $H_{v_1}$-ին համապատասխանում է շտրիխված մասը, որը առանձին պատկերված է նկարի բ) մասում: $A_{v_1}$-ի ուղղահայաց պրոյեկցիան համապատասխանում է $A$ -ի սյուների զույգ առ զույգ հատումներին առաջին սյան հետ՝ $s'_1, s'_2, \cdots, s'_{n-1}$:

Այսինքն, ընդգրկող հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունը համընկնում է համապատասխան սյուների զույգերի հատումների հետ: Այսպիսով, նշված խնդիրները համարժեք են, և հետևաբար, $HV_AVP$-ն NP-լրիվ է: □

Խնդիրները կարելի է ներկայացնել ամբողջարժեք սահմանափակումների համակարգի միջոցով: Մասնավորապես, $HV_AVP$ խնդիրը կունենա հետևյալ ներկայացումը՝

Համատեղելի է արդյոք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x_{i,j} = s_j,\ \ j = 1, \cdots, n} \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{x_{i,j} = r_i,\ \ i = 1, \cdots, m} \\ &\textstyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{min(x_{i,j'}, x_{i,j''}) = s'_{j',j''},\ \ 1 \le j' < j'' \le n} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{x_{i,j} \in \{0, 1\}} \end{aligned} \tag{4.1-1}$$

**Թեորեմ 4.1-2:** $HV_\Sigma NVP$ խնդիրը NP-լրիվ է:

**Ապացույց:**

Դիտարկենք խնդրի ներկայացումը ամբողջարժեք սահմանափակումների համակարգի միջոցով՝

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x_{i,j} = s_j,\ \ j = 1, \cdots, n} \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{x_{i,j} = r_i,\ \ i = 1, \cdots, m} \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{min(x_{i,j}, x_{i,j+1}) = k} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{x_{i,j} \in \{0, 1\}} \end{aligned} \tag{4.1-2}$$

(4.1-2)-ում փոխենք գումարելիների տեղերը, կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = s_j, \;\; j = 1, \cdots, n$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = r_i, \;\; i = 1, \cdots, m \qquad (4.1\text{-}3)$$
$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} min(x_{i,j}, x_{i,j+1}) = k$$
$$x_{i,j} \in \{0, 1\}$$

Եվ դիտարկենք (4.1-3)-ի այն մասնավոր դեպքը, երբ $k = \sum_{i=1}^{m}(r_i - 1)$.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = s_j, \;\; j = 1, \cdots, n$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = r_i, \;\; i = 1, \cdots, m \qquad (4.1\text{-}4)$$
$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} min(x_{i,j}, x_{i,j+1}) = \sum_{i=1}^{m}(r_i - 1)$$
$$x_{i,j} \in \{0, 1\}$$

Հեշտ է տեսնել, որ (4.1-4) համակարգի համատեղելիության խնդիրը համարժեք է տրված $R$ և $S$ պրոյեկցիաներով հորիզոնական ուռուցիկ մատրիցի գոյության խնդրին: Իրոք, $\sum_{j=1}^{n-1} min(x_{i,j}, x_{i,j+1})$ գումարը ցույց է տալիս $i$-րդ տողում հարևան զույգ 1-երի քանակը, որի առավելագույն $(r_i - 1)$-ը արժեքը հասանելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ $i$-րդ տողում 1-երը դասավորված են հաջորդաբար: Հետևաբար, $\sum_{i=1}^{m}(r_i - 1)$ գումարը հասանելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ մատրիցը հորիզոնական ուռուցիկ է: Այսպիսով, (4.1-4)-ով տրվող խնդիրը NP-լրիվ է, հետևաբար, NP-լրիվ է նաև (4.1-3) -ով տրվող խնդիրը: □

Հարկ է նշել, որ $HV_NVP$ խնդրի NP-լրիվությունը ապացուցված չէ, սակայն եթե այն ևս ներկայացնենք սահմանափակումների համակարգով՝

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = s_j, \;\; j = 1, \cdots, n$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = r_i, \;\; i = 1, \cdots, m \qquad (4.1\text{-}5)$$
$$\sum_{i=1}^{m} min(x_{i,j}, x_{i,j+1}) = s'_j, j = 1, \cdots, n-1$$
$$x_{i,j} \in \{0, 1\}$$

ապա (4.1-3)-ի և (4.1-5)-ի համեմատումը թույլ է տալիս ենթադրել $HV_NVP$-ի հնարավոր NP-լրիվ լինելը:

**Թեորեմ 4.1-3:** $HV_1VP$ խնդիրը ունի բազմանդամային բարդություն:

**Ապացույց:**

Նկատենք, որ $HV_1VP$ խնդիրը համարժեք է հետևյալ երկու խնդիրներին, որոնցից յուրաքանչյուրը ունի բազմանդամային բարդություն ըստ Թեորեմ 1.1.2-1-ի:

$\boldsymbol{HV_1}$: Տրված են $R' = (r_1, r_2, \cdots, r_{s_1})$ և $S' = (s'_2, \cdots, s'_n)$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի՞ արդյոք $s_1 \times (n-1)$ չափանի բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից այնպես, որ $(r_1 - 1, r_2 - 1, \cdots, r_{s_1} - 1)$ -ը հանդիսանա $X$ -ի հորիզոնական պրոյեկցիան, և $(s'_2, \cdots, s'_n)$ -ը՝ ուղղահայաց պրոյեկցիան:

$\boldsymbol{HV_2}$ : Տրված են $R'' = (r_{s_{1+1}}, r_{s_1+2}, \cdots, r_m)$ , $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ և $S' = (s'_2, \cdots, s'_n)$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի արդյոք $(m - s_1) \times (n-1)$ չափանի բինար $Y = \{y_{i,j}\}$ մատրից այնպես, որ $(r_{s_{1+1}}, r_{s_1+2}, \cdots, r_m)$ -ը հանդիսանա $Y$-ի հորիզոնական պրոյեկցիան և $(s_2 - s'_2, \cdots, (s_n - s'_n)$ -ը՝ ուղղահայաց պրոյեկցիան: □

Թվարկված խնդիրների բարդության հետազոտությունների արդյունքը ներկայացնենք հետևյալ աղյուսակով.

**Աղյուսակ 4.1-1:** Դիտարկված խնդիրներ և նրանց բարդությունը

| $HV_AVP$ | $HV_1VP$ | $HV_NVP$ | $HV_\Sigma NVP$ |
|---|---|---|---|
| NP-լրիվ | P | ? | NP-լրիվ |

Դիտարկված խնդիրներում $A_VP$, $N_VP$, $1_VP$ պրոյեկցիաների փոխարեն կարող են տրված լինել $A_HP$, $N_HP$, $1_HP$ պրոյեկցիաները, - դրանից խնդիրը/բարդությունը չի փոխվում; համապատասխան նշանակումները կլինեն՝ $HV_AVP$, $HV_NVP$, $HV_\Sigma NVP$, $HV_1VP$:

### *4.1.1 Խնդիրներ՝ տարբեր տողերի սահմանափակումով*

Այս բաժնում դիտարկվող խնդիրներում առկա է լրացուցիչ սահմանափակում՝ մատրիցի *տողերի տարբեր լինելը*: Այն ի հայտ է գալիս նաև կիրառություններում, ինչպես օրինակ, փորձերի նախագծման (design of experiments) խնդիրները:

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրները.

$\boldsymbol{HV_AVP_d}$: Տրված են $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$, $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ և $S' = (s'_1, s'_2, \cdots, s'_{C_n^2})$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի՞ արդյոք $m \times n$ չափանի տարբեր տողերով բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից, այնպես որ $R$ –ը, $S$-ը և $S'$-ը հանդիսանան $X$-ի հորիզոնական, ուղղահայաց և $A_VP$ պրոյեկցիաները:

$\boldsymbol{HV_NVP_d}$: Տրված են $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$, $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ և $S' = (s'_1, s'_2, \cdots, s'_{n-1})$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի՞ արդյոք $m \times n$ չափանի տարբեր տողերով բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից, այնպես որ $R$-ը, $S$-ը և $S'$-ը հանդիսանան $X$–ի հորիզոնական, ուղղահայաց և $N_VP$ պրոյեկցիաները:

$\boldsymbol{HV_1VP_d}$ : Տրված են $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$ , $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ և $S' = (s'_2, \cdots, s'_n)$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի՞ արդյոք $m \times n$ չափանի տարբեր տողերով բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից, այնպես որ $R$ –ը, $S$-ը և $S'$-ը հանդիսանան $X$-ի հորիզոնական, ուղղահայաց և $1_VP$ պրոյեկցիաները:

$\boldsymbol{HV_d}$ - Տրված են $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$ և $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի՞ արդյոք $m \times n$ չափանի տարբեր տողերով բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից, այնպես որ $R$ –ը և $S$-ը հանդիսանան $X$-ի հորիզոնական և ուղղահայաց պրոյեկցիաները:

$\boldsymbol{V_d}$ - Տրված է $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորը և $m$ բնական թիվը: Գոյություն ունի՞ արդյոք $m \times n$ չափանի տարբեր տողերով բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից, այնպես որ և $S$ -ը հանդիսանա $X$ -ի ուղղահայաց պրոյեկցիան:

**Թեորեմ 4.1-4:** $HV_AVP_d$ խնդիրը NP-լրիվ է:

**Ապացույց:**

Թեորեմ 4.1-1-ի ապացույցի նմանությամբ, ցույց է տրվում, որ $HV_AVP_d$-ն համարժեք է Ընդգրկվող հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների խնդրին (պարզ հիպերգրաֆի դեպքում), որը NP-լրիվ խնդիր է: □

**Թեորեմ 4.1-5:** $HV_1VP_d$ և $HV_d$ խնդիրները բարդությամբ համարժեք են:

**Ապացույց:**

$HV_1VP_d$ խնդիրը համարժեք է հետևյալ երկու խնդիրներին:

$\boldsymbol{HV_1_d}$: Տրված են $R' = (r_1, r_2, \cdots, r_{s_1})$ և $S' = (s'_2, \cdots, s'_n)$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի՞ արդյոք $s_1 \times (n-1)$ չափանի տարբեր տողերով բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից այնպես, որ $(r_1 - 1, r_2 - 1, \cdots, r_{s_1} - 1)$ -ը հանդիսանա $X$-ի հորիզոնական պրոյեկցիան, և $(s'_2, \cdots, s'_n)$-ը՝ ուղղահայաց պրոյեկցիան:

$\boldsymbol{HV_2_d}$ : Տրված են $R'' = (r_{s_{1+1}}, r_{s_1+2}, \cdots, r_m)$ , $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ և $S' = (s'_2, \cdots, s'_n)$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի արդյոք $(m - s_1) \times (n-1)$ չափանի տարբեր տողերով բինար $Y = \{y_{i,j}\}$ մատրից այնպես, որ $(r_{s_{1+1}}, r_{s_1+2}, \cdots, r_m)$ -ը հանդիսանա $Y$ -ի հորիզոնական պրոյեկցիան և $(s_2 - s'_2, \cdots, (s_n - s'_n)$ -ը՝ ուղղահայաց պրոյեկցիան: □

$\boldsymbol{V_d}$ խնդիրը տրոհումների ասոցացված վեկտորների խնդրի մատրիցային ներկայացումն է; և պարզ համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության խնդիրը $\boldsymbol{HV_d}$ խնդրի մասնավոր դեպքն է:

Այսպիսով, $\boldsymbol{V_d}$-ն և $\boldsymbol{HV_d}$ -ն բաց խնդիրներ են:

Բարդության հետազոտությունների արդյունքը ներկայացվում է հետևյալ աղյուսակով.

**Աղյուսակ 4.1-2:** Տարբեր տողերի սահմանափակումով խնդիրները և նրանց բարդությունը:

| $HV_AVP_d$ | $HV_1VP_d$ | $HV_NVP_d$ | $HV_d$ | $V_d$ |
|---|---|---|---|---|
| NP-լրիվ | Բաց խնդիր (Հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության խնդիր) | ? | $HV_1VP_d$ | Բաց խնդիր (Տրոհումների ասոցացված վեկտորների խնդիր) |

### *4.1.2 Լագրանժյան ռելաքսացիայի մոդելը և փոփոխականների տրոհման մոտեցման կիրառումը*

Ինչպես տեսանք, դիտարկված խնդիրները հիմնականում NP-լրիվ կամ բարդության գնահատման տեսանկյունից բաց խնդիրներ են; և նպատակը՝ նրանց մոտավոր լուծման ալգորիթմների մշակումն է: Այս կետում խնդիրները ներկայացնում ենք ամբողջարժեք գծային սահմանափակումների համակարգի միջոցով, այնուհետև կիրառում ենք Լագրանժյան ռելաքսացիայի և փոփոխականի տրոհման մեթոդը; և կառուցում ենք տրոհված խնդիրների լուծման պարզ ալգորիթմներ:

Կդիտարկենք $HV_d$ և $HV_AHP$ խնդիրների լուծումը (մյուս խնդիրների լուծումը կարելի է ներկայացնել համանման ձևով):

Դիցուք՝ $X = \{x_{i,j}\}$-ը $m \times n$ չափանի բինար մատրից է: Մատրիցի տողերի տարբեր լինելու պայմանը արտահայտենք հանրահաշվորեն, օգտագործելով տողերի զույգերի հատումները: Դիցուք՝ $i'$ և $i''$ համարով տողերը ունեն միևնույն $r$ գումարը: Եթե այս տողերը իրարից տարբեր են, ապա նրանք կարող են 1-երով հատվել ամենաշատը $(r-1)$ տեղերում: Համարակալենք $X$ մատրիցի տողերի զույգերը, և դիցուք՝ $p(i', i'')$-ն տողերի $(i', i'')$ զույգի համարն է, $1 \le i' < i'' \le m$: Հատումների քանակը արտահայտելու համար մտցնենք $nC_m^2$ հատ լրացուցիչ փոփոխականներ՝ տողերի յուրաքանչյուր $p(i', i'')$ զույգի համար $n$ հատ $y_{p(i',i''),j}$, $j = 1, \cdots, n$, փոփոխական այնպես, որ նրանք բավարարեն

$$(y_{p(i',i''),j} = 1) \Leftrightarrow (x_{i',j} = 1) \& (x_{i'',j} = 1) \qquad (4.1.2\text{-}1)$$

պայմանին:

(4.1.2-1)-ը կարելի է ապահովել հետևյալ համակարգով.

$$\begin{cases} y_{p(i',i''),j} \le x_{i',j} \\ y_{p(i',i''),j} \le x_{i'',j} \\ y_{p(i',i''),j} \ge x_{i',j} + x_{i'',j} - 1 \end{cases}$$

Այս տերմիններով, տողերի $(i', i'')$ զույգի հատումների քանակը արտահայտվում է $\sum_{j=1}^{n} y_{p(i',i''),j}$ գումարով, և այդ տողերի իրարից տարբեր լինելու պայման է հանդիսանում՝ $\sum_{j=1}^{n} y_{p(i',i''),j} < r$ պայմանը: Իրականում, անհրաժեշտ է տարբերել միայն հավասար գումար ունեցող տողերը: Սակայն մենք համակարգը կկազմենք՝ նշված

սահմանափակումները կիրառելով տողերի բոլոր զույգերի համար: Սա կօգնի մեզ չհետևել տողերի մեկերի քանակի հավասար լինելու կամ չլինելու պայմանին:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $X$ մատրիցի տողերը դասավորված են ըստ տողի գումարի չնվազման կարգի՝ $r_1 \leq \cdots \leq r_m$: Այդ դեպքում տողերի տարբեր լինելու պայմանը հանգում է հետևյալին՝ տողերի $(i', i'')$, $1 \leq i' < i'' \leq m$ զույգի հատումը փոքր է $r_{i''}$-ից: Պարզ է, որ եթե $r_{i'} < r_{i''}$, ապա հատումը կարող է լինել ամենաշատը $r_{i'}$, սակայն մենք պահանջում ենք, որ այն փոքր լինի $r_{i''}$-ից, որպեսզի ներառի և $r_{i'} < r_{i''}$, և $r_{i'} = r_{i''}$ դեպքերը:

Այժմ $HV_d$ -ն կարելի է ներկայացնել գծային սահմանափակումների հետևյալ համակարգով.

$$
(\boldsymbol{HV_d})\quad
\begin{cases}
(\mathbf{1})\ \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x_{i,j}} = \boldsymbol{s_j},\ \ \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{n} \\
(2)\ \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = r_i,\ \ i = 1, \cdots, m \\
(3)\ \begin{cases} y_{p(i',i''),j} \leq x_{i',j} \\ y_{p(i',i''),j} \leq x_{i',j} \\ y_{p(i',i''),j} \geq x_{i',j} + x_{i'',j} - 1 \end{cases} \qquad 1 \leq i' < i'' \leq m, j = 1, \cdots, n \\
(4)\ \sum_{j=1}^{n} y_{p(i',i''),j} < r_{i''},\ \ 1 \leq i' < i'' \leq m \\
(5)\ x_{i,j} \in \{0,1\},\ \ y_{i,j} \in \{0,1\}
\end{cases}
$$

որտեղ $(r_1, \cdots, r_m)$-ը և $(s_1, \cdots, s_n)$-ը ամբողջարժեք վեկտորներ են, $r_1 \leq \cdots \leq r_m$, և $X = \{x_{i,j}\}_{m \times n}$-ը և $Y = \{y_{(i',i''),j}\}_{C_m^2 \times n}$-ը անհայտ փոփոխականներ են:

Գծային սահմանափակումների համակարգով ներկայացնենք նաև $HV_AHP$-ն:

$\boldsymbol{HV_AHP}$ : Տրված են $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$ , $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ և $R' = (r'_1, r'_2, \cdots, r'_{C_m^2})$ ամբողջարժեք ոչ բացասական կոմպոնենտներով վեկտորները: Գոյություն ունի՞ արդյոք $m \times n$ չափանի բինար $X = \{x_{i,j}\}$ մատրից, այնպես որ $R$ –ը, $S$-ը հանդիսանան $X$-ի հորիզոնական, ուղղահայաց պրոյեկցիաները, և տողերի զույգերի հատումները (ընդհանուր մեկերը) համապատասխանաբար, հավասար լինեն տրված $r'_1, r'_2, \cdots, r'_{C_m^2}$ թվերին:

$$(\boldsymbol{HV_AHP})\quad \begin{cases} (\mathbf{1})\ \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x_{i,j}} = \boldsymbol{s_j},\ \ \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{n} \\ (2)\ \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = r_i,\ \ i = 1, \cdots, m \\ (3)\ \begin{cases} y_{p(i',i''),j} \le x_{i',j} \\ y_{p(i',i''),j} \le x_{i',j} \\ y_{p(i',i''),j} \ge x_{i',j} + x_{i'',j} - 1 \end{cases} \qquad 1 \le i' < i'' \le m, j = 1, \cdots, n \\ (4)\ \sum_{j=1}^{n} y_{p(i',i''),j} = r'_{p(i',i''),}\ \ 1 \le i' < i'' \le m \\ (5)\ x_{i,j} \in \{0,1\},\ \ y_{i,j} \in \{0,1\} \end{cases}$$

որտեղ $(r_1, \cdots, r_m)$-ը, $(s_1, \cdots, s_n)$-ը և $R' = \left(r'_1, \cdots, r'_{C_m^2}\right)$ ամբողջարժեք վեկտորներ են, իսկ $X = \{x_{i,j}\}_{m \times n}$-ը և $Y = \{y_{i,j}\}_{C_m^2 \times n}$-ը՝ անհայտ փոփոխականներ:

Ինչպես տեսնում ենք $HV_d$ և $HV_AHP$ խնդիրները իրարից տարբերվում են միայն (4) պայմանով:

Ընդհանրապես, $r_{i'}$ և $r_{i''}$ մեկ ունեցող տողերի հատման հզորությունը կարող է գտնվել $[0, r_{i'}]$ ինտերվալում: $HV_AHP$-ում, որը NP-լրիվ է, պահանջվում է, որ այդ հատումը հավասար լինի կոնկրետ $r'_{p(i',i'')}$ թվի; պարզ է, որ այդ թիվը պետք է լինի $0 \le r'_{p(i',i'')} \le r_{i'}$ ինտերվալից: Մինչդեռ $HV_d$ խնդրում ընդամենը պահանջվում է, որ հատումը հավասար չլինի իր առավելագույն արժեքին (ընդ որում պահանջն իմաստ ունի միայն հավասար գումարով տողերի համար՝ $r_{i'} = r_{i''}$).

$$\sum_{j=1}^{n} y_{p(i',i''),j} < r_{i''},\ \ 1 \le i' < i'' \le m :$$

Նշված համեմատությունը թույլ է տալիս ենթադրել, որ Խնդիր $HV_d$ -ն և $HV_AHP$-ն հնարավոր է, որ նույն բարդությունը չունենան:

$HV_AHP$ և $HV_d$ խնդիրների համար օգտագործելու ենք փոփոխականի տրոհման տեխնիկան՝ տրոհելու համար խնդիրը ենթախնդիրների: Նախ կտրոհենք հորիզոնական և ուղղահայաց (տողերի և սյուների համար) ենթախնդիրների, այնուհետև հորիզոնական ենթախնդիրը ևս կտրոհենք ենթախնդիրների՝ տողերի յուրաքանչյուր զույգի համար:

Տրոհենք յուրաքանչյուր $x_{i,j}$ փոփոխականը՝$x_{i,j}^h$ և $x_{i,j}^v$: Այնուհետև $x_{i,j}^h$-ը կօգտագործենք տողերին վերաբերվող սահմանափակումներում, և $x_{i,j}^v$ -ն՝ սյուներին:

Նախ դիտարկենք $HV_d$ –ն; տրոհված փոփոխականներով այն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\boldsymbol{x_{i,j}^h = x_{i,j}^v}$$

$$(\mathbf{1})\ \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x_{i,j}^v = s_j},\ \ \boldsymbol{j = 1, \cdots, n}$$

$$(2)\ \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}^h = r_i,\ \ i = 1, \cdots, m$$

$$(3)\begin{cases} y_{p(i',i''),j} \le x_{i',j}^h \\ y_{p(i',i''),j} \le x_{i'',j}^h \\ y_{p(i',i''),j} \ge x_{i',j}^h + x_{i'',j}^h - 1 \end{cases} \qquad 1 \le i' < i'' \le m, j = 1, \cdots, n$$

$$(4)\ \sum_{j=1}^{n} y_{p(i',i''),j} < r_{i''},\ \ 1 \le i' < i'' \le m$$

$$(5)\ x_{i,j}^h, x_{i,j}^v \in \{0,1\},\ \ y_{i,j} \in \{0,1\}$$

Երկակիացնենք $x_{i,j}^h = x_{i,j}^v$ սահմանափակումը, օգտագործելով $\lambda_{i,j}$ լագրանժյան բազմապատկիչներ հետևյալ կերպ՝

$$\boldsymbol{max}\left\{\sum \boldsymbol{\lambda_{i,j}}(\boldsymbol{x_{i,j}^h - x_{i,j}^v})\right\}$$

$$(\mathbf{1})\ \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x_{i,j}^v = s_j},\ \ \boldsymbol{j = 1, \cdots, n}$$

$$(2)\ \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}^h = r_i,\ \ i = 1, \cdots, m$$

$$(\boldsymbol{HV_d_LR})\quad (3)\begin{cases} y_{p(i',i''),j} \le x_{i',j}^h \\ y_{p(i',i''),j} \le x_{i'',j}^h \\ y_{p(i',i''),j} \ge x_{i',j}^h + x_{i'',j}^h - 1 \end{cases} \qquad 1 \le i' < i'' \le m, j = 1, \cdots, n$$

$$(4)\ \sum_{j=1}^{n} y_{p(i',i''),j} < r_{i''},\ \ 1 \le i' < i'' \le m$$

$$(5)\ x_{i,j}^h, x_{i,j}^v \in \{0,1\},\ \ y_{i,j} \in \{0,1\}$$

Այժմ կարող ենք տրոհել խնդիրը երկու ենթախնդիրների, ուղղահայաց՝

$$\boldsymbol{max}\left\{\sum \boldsymbol{\beta_{i,j} x_{i,j}^v}\right\}$$

$$(\boldsymbol{HV_d_LR_v})\quad (\mathbf{1})\ \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x_{i,j}^v = s_j},\ \ \boldsymbol{j = 1, \cdots, n}$$

$$(2)\ x_{i,j}^v \in \{0,1\}$$

և հորիզոնական՝

$$
(\boldsymbol{HV_d_LR_h})\quad
\begin{array}{ll}
 & \boldsymbol{max}\{\sum \boldsymbol{\alpha_{i,j} x_{i,j}^{h}}\} \\
 & (1)\ \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}^{h} = r_i,\ \ i = 1,\cdots,m \\
 & (2)\begin{cases} y_{p(i',i''),j} \le x_{i',j}^{h} \\ y_{p(i',i''),j} \le x_{i'',j}^{h} \\ y_{p(i',i''),j} \ge x_{i',j}^{h} + x_{i'',j}^{h} - 1 \end{cases} \qquad 1 \le i' < i'' \le m, j = 1,\cdots,n \\
 & (3)\ \sum_{j=1}^{n} y_{p(i',i''),j} < r_{i''},\ \ 1 \le i' < i'' \le m \\
 & (4)\ x_{i,j}^{h},\ \ y_{i,j} \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Այնուհետև, $HV_d_LR_h$-ը կարող ենք տողերի յուրաքանչյուր զույգի համար կրկին տրոհել ենթախնդիրների.

$$
(\boldsymbol{HV_d_LR_h_1})\quad
\begin{array}{ll}
 & \boldsymbol{max}\{\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_j' x_j' + \alpha_j'' x_j''}\} \\
 & (1)\ \sum_{i=1}^{n} x_j' = r',\ \sum_{i=1}^{n} x_j'' = r'' \\
 & (2)\begin{cases} y_j \le x_j' \\ y_j \le x_j'' \\ y_j \ge x_j' + x_j'' - 1 \end{cases} \qquad j = 1,\cdots,n \\
 & (3)\ \sum_{j=1}^{n} y_j < r'' \\
 & (4)\ x_j', x_j'' \in \{0,1\}, y_j \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Ընդհանրապես, $\lambda_{i,j}$ գործակիցները գտնելու համար կիրառվում է իտերատիվ պրոցեդուրա: Տվյալ դեպքում յուրաքանչյուր իտերացիայի ընթացքում դիտարկվելու են $C_m^2 + 1$ առանձին ենթախնդիրներ ($C_m^2$ հորիզոնական և մեկ ուղղահայաց):
Այստեղ կարևոր է ցույց տալ, որ ստացված ենթախնդիրները լինեն պարզ և հեշտությամբ լուծվեն:

Այժմ Լագրանժյան ռելաքսացիայի և փոփոխականի տրոհման մեթոդը կիրառենք $HV_AHP$ խնդրի լուծման համար:

$$(\boldsymbol{HV_AHP_LR})\quad \begin{array}{ll} \boldsymbol{max}\{\sum \boldsymbol{\lambda_{i,j}}(\boldsymbol{x^h_{i,j}} - \boldsymbol{x^v_{i,j}})\} & \\ (\mathbf{1})\ \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x^v_{i,j}} = \boldsymbol{s_j},\ \ \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{n} & \\ (2)\ \sum_{j=1}^{n} x^h_{i,j} = r_i,\ \ i = 1, \cdots, m & \\ (3) \begin{cases} y_{p(i',i'')j} \le x^h_{i',j} \\ y_{p(i',i'')j} \le x^h_{i'',j} \\ y_{p(i',i'')j} \ge x^h_{i',j} + x^h_{i'',j} - 1 \end{cases} & 1 \le i' < i'' \le m, j = 1, \cdots, n \\ (4)\ \sum_{j=1}^{n} y_{p(i',i'')j} = r'_{p(i',i'')} & 1 \le i' < i'' \le m \\ (5)\ x^h_{i,j}, x^v_{i,j} \in \{0,1\}, \qquad y_{i,j} \in \{0,1\} & \end{array}$$

Տրոհենք խնդիրը երկու ենթախնդիրների՝ ուղղահայաց

$$(\boldsymbol{HV_AHP_LR_v})\quad \begin{array}{l} \boldsymbol{max}\{\sum \boldsymbol{\beta_{i,j}} \boldsymbol{x^v_{i,j}}\} \\ (1)\ \sum_{i=1}^{m} x^v_{i,j} = s_j,\ \ j = 1, \cdots, n \\ (2) x^v_{i,j} \in \{0,1\} \end{array}$$

և հորիզոնական

$$(\boldsymbol{HV_AHP_LR_h})\quad \begin{array}{ll} \boldsymbol{max}\{\sum \boldsymbol{\alpha_{i,j}} \boldsymbol{x^h_{i,j}}\} & \\ (1)\ \sum_{i=1}^{n} x^h_{i,j} = r_i, i = 1, \cdots, m & \\ (2) \begin{cases} y_{p(i',i'')j} \le x^h_{i',j} \\ y_{p(i',i'')j} \le x^h_{i'',j} \\ y_{p(i',i'')j} \ge x^h_{i',j} + x^h_{i'',j} - 1 \end{cases} & 1 \le i' < i'' \le m, j = 1, \cdots, n \\ (3)\ \sum_{j=1}^{n} y_{p(i',i'')j} = r'_{p(i',i'')} & 1 \le i' < i'' \le m \\ (4)\ x^h_{i,j} \in \{0,1\}, \qquad y_{i,j} \in \{0,1\} & \end{array}$$

Այնուհետև, նման ձևով $HV_AHP_LR_h$ ը տրոհվում է ենթախնդիրների՝ տողերի յուրաքանչյուր զույգի համար:

$$(\boldsymbol{HV_AHP_LR_h1})\quad \begin{array}{ll} \boldsymbol{max}\{\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\alpha'_j} \boldsymbol{x'_j} + \boldsymbol{\alpha''_j} \boldsymbol{x''_j}\} & \\ (1)\ \sum_{i=1}^{n} x'_j = r'\ , \sum_{i=1}^{n} x''_j = r'' & \\ (2) \begin{cases} y_j \le x'_j \\ y_j \le x''_j \\ y_j \ge x'_j + x''_j - 1 \end{cases} & j = 1, \cdots, n \\ (3)\ \sum_{j=1}^{n} y_j = r^* & 1 \le i' < i'' \le m \end{array}$$

(4) $x'_j, x''_j \in \{0,1\}, y_j \in \{0,1\}$

### *4.1.3 Տրոհված խնդիրների լուծման ալգորիթմներ*

Այս բաժնում ներկայացնենք $(HV_d_LR_h1)$ և $(HV_AHP_LR_h1)$ ենթախնդիրների լուծումը:

$(HV_d_LR_h1)$: $X' = \{x'_1, \cdots, x'_n\}$ և $X'' = \{x''_1, \cdots, x''_n\}$ բազմությունների յուրաքանչյուր $x'_i$ և $x''_i$ էլեմենտների համար տրված են նրանց $\alpha'_i$ և $\alpha''_i$ կշիռները: Պահանջվում է գտնել այնպիսի $\mathcal{X}' \subseteq \mathrm{X}'$ և $\mathcal{X}'' \subseteq \mathrm{X}''$ ենթաբազմություններ, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները.

1. $|\mathcal{X}'| = r'$, $|\mathcal{X}''| = r''$
2. $\sum_{x'_i \in \mathcal{X}'} \alpha'_i + \sum_{x''_i \in \mathcal{X}''} \alpha''_i \to max$
3. $|\{(x'_i, x''_i) | x'_i \in \mathcal{X}', x''_i \in \mathcal{X}''\}| < r''$ (ենթադրել էինք, որ $\min(r', r'') = r'$):

Ակնհայտ է, որ հետևյալ ալգորիթմը լուծում է $HV_d_LR_h1$ խնդիրը.

**Ալգորիթմ $HV_d_LR_h1$:**

1. Դասավորենք $X' = \{x'_1, \cdots, x'_n\}$ և $X'' = \{x''_1, \cdots, x''_n\}$ բազմությունների էլեմենտները ըստ նրանց կշիռների նվազման կարգի, դիցուք՝ $X' = \{x'_{i_1}, \cdots, x'_{i_n}\}$, $\alpha'_{i_1} \geq \cdots \geq \alpha'_{i_n}$, և $X'' = \{x''_{j_1}, \cdots, x''_{j_n}\}$, $\alpha''_{j_1} \geq \cdots \geq \alpha''_{j_n}$
2. Դիտարկենք հետևյալ բազմությունները.

   $\mathcal{X}' = \{x'_{i_1}, \cdots, x'_{i_{r'}}\}$, $\mathcal{X}'' = \{x''_{j_1}, \cdots, x''_{j_{r''}}\}$ և $Y = \{(x'_t, x''_t) | x'_t \in \mathcal{X}', x''_t \in \mathcal{X}''\}$, որտեղ $Y$ բազմությունը կազմված է $\mathcal{X}'$-ի և $\mathcal{X}''$-ի էլեմենտների այն զույգերից, որոնց ինդեքսները նույնն են $X'$-ում և $X''$-ում:
3. Եթե $|Y| < r''$, ապա $\mathcal{X}'$-ը և $\mathcal{X}''$-ը պահանջված բազմություններն են:

   Հակառակ դեպքում, ունենում ենք, որ $|Y| = r' = r''$, և $\mathcal{X}'$-ը և $\mathcal{X}''$-ը կազմված են նույն ինդեքսներն ունեցող էլեմենտներից: $Y$ -ում $(x'_{i_{r'}}, x''_{i_{r'}})$ զույգը կփոխարինենք $(x'_{i_{r'+1}}, x''_{i_{r'}})$, $(x'_{i_{r'}}, x''_{i_{r'+1}})$ զույգերից նրանով, որի էլեմենտների կշիռների գումարը ավելի մեծ է:

$(HV_AHP_LR_h1)$ : Տրված են $X' = \{x_1', \cdots, x_n'\}$ և $X'' = \{x_1'', \cdots, x_n''\}$ բազմությունները՝ էլեմենտների $\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$, , և $\alpha_1'', \cdots, \alpha_n''$ ոչ բացասական կշիռներով: Տրված են նաև $r', r'', r^*$ ոչ բացասական ամբողջ թվերը այնպես, որ $r' \leq r''$, $r^* \leq r''$: Պահանջվում է գտնել այնպիսի $\mathcal{X}' \subseteq X'$ , $\mathcal{X}'' \subseteq X''$ , $|\mathcal{X}'| = r'$ , $|\mathcal{X}''| = r''$ ենթաբազմություններ, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները

1. $\sum_{x_i' \in \mathcal{X}'} \alpha_i' + \sum_{x_i'' \in \mathcal{X}''} \alpha_i'' \to max$
2. $|Y = \{x_i', x_i'')|x_i' \in \mathcal{X}', x_i'' \in \mathcal{X}''\}| = r^*$:

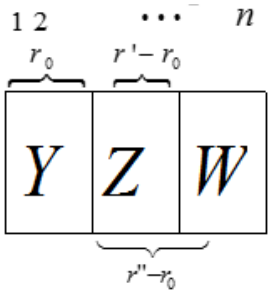
Հեշտ է տեսնել, որ հետևյալ ալգորիթմը լուծում է խնդիրը և ունի բազմանդամային բարդություն:

**Ալգորիթմ $_AHP_LR_h1$ :**

1. $X'$-ի և $X''$-ի էլեմենտները դասավորենք ըստ կշիռների չաճման կարգի՝
   $x_{i_1}' \geq \cdots \geq x_{i_n}'$, $x_{i_1}'' \geq \cdots \geq x_{i_n}''$ և վերցնենք՝
   $X_{r'}' = \{x_{i_1}', \cdots, x_{i_{r'}}'\}$, $X_{r''}'' = \{x_{i_1}'', \cdots, x_{i_{r''}}'\}$: Կազմենք $Y$ բազմությունը՝
   $Y = \{(x_t', x_t'')|x_t' \in X_{r'}', x_t'' \in X_{r''}''\}$:
2. Եթե $|Y| = r^*$, ապա $X_{r'}'$-ը և $X_{r''}''$-ը պահանջվող բազմություններն են: Հակառակ դեպքում կդիտարկենք հնարավոր դեպքերը.
   ա) $|Y| = r_0 < r^*$ բ) $|Y| = r_0 > r^*$

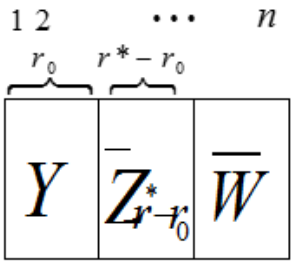
Նախ դիտարկենք ա) դեպքը:

$Y$-ի էլեմենտները տեղաշարժենք դեպի ձախ, կունենանք Նկար 4.1.3-1-ում բերված պատկերը.




**Նկար 4.1.3-1:** Կառուցման առաջին քայլը:

Դասավորենք $\{Z\}\cup\{W\}$-ի էլեմենտները (զույգերը) էլեմենտների կշիռների գումարի նվազման կարգով, և նշանակենք $\bar{Z}_{r^*-r_0}$-ով առաջին $r^*-r_0$ էլեմենտների բազմությունը, $\bar{W}$-ով՝ մնացած էլեմենտների բազմությունը (Նկար 4.1.3-2).




**Նկար 4.1.3-2:** Կառուցման երկրորդ քայլը:

Այժմ $\{Y\}\cup\{\bar{Z}_{r^*-r_0}\}$ բազմության էլեմենտներով կազմենք $\mathcal{X}'$ և $\mathcal{X}''$ բազմությունները (յուրաքանչյուր զույգի առաջին էլեմենտը գնում է $\mathcal{X}'$ բազմության մեջ, երկրորդը՝ $\mathcal{X}''$): $\mathcal{X}'$ -ի մնացած $r'-r^*$և $\mathcal{X}''$-ի մնացած $r''-r^*$ էլեմենտները կազմվում են հետևյալ ձևով: Դիցուք՝ $\bar{W}'$-ը և $\bar{W}''$-ը կազմված են $\bar{W}$-ի զույգերի առաջին ($X'$-ին պատկանող) և երկրորդ ( $X''$ -ին պատկանող) էլեմենտներից, համապատասխանաբար: Յուրաքանչյուրում դիտարկենք առաջին $r'-r^*$ էլեմենտների բազմությունը, նշանակելով $\bar{W}'_{r'-r^*}$-ով և $\bar{W}''_{r'-r^*}$-ով, համապատասխանաբար: Մնացած էլեմենտների բազմությունը նշանակենք համապատասխանաբար, $\bar{W}'_{rem}$-ով և $\bar{W}''_{rem}$-ով:

1) Եթե $\bar{W}'_{r'-r^*}$-ում և $\bar{W}''_{r'-r^*}$-ում միևնույն ինդեքսով էլեմենտներ չկան, ապա նրանք մտնում են $\mathcal{X}'$-ի և $\mathcal{X}''$ -ի մեջ, համապատասխանաբար:
2) Հակառակ դեպքում, $\bar{W}'_{r'-r^*}$-ի վերջին էլեմենտը փոխարինում ենք $\bar{W}'_{rem}$-ի առաջին էլեմենտով, կամ $\bar{W}''_{r'-r^*}$ -ի վերջին էլեմենտը փոխարինում ենք $\bar{W}''_{rem}$ -ի առաջին էլեմենտով՝ կախված համապատասխան կշիռների գումարներից:

$\mathcal{X}''$ -ի մնացած $r''-r^*$ հատ էլեմենտները վերցնում ենք $\bar{W}''$-ից:

Այժմ դիտարկենք բ) դեպքը՝ $|Y|=r_0>r^*$

$Y$ -ի էլեմենտները դասավորենք էլեմենտը կազմող զույգերի կշիռների գումարի նվազման կարգով: Վերցնենք առաջին $r^*$ հատը և տեղափոխենք ձախ (այդ մասը

նշանակենք $\bar{Y}_{r^*}$-ով): Մնացած բոլոր զույգերից կազմված բազմությունը նշանակենք $\bar{W}$ –ով:

$\bar{W}'$-ի և $\bar{W}''$-ի էլեմենտները դասավորենք ըստ նվազման կարգի, և նորից ենթադրենք, որ դրանք հենց $\bar{W}'$-ի և $\bar{W}''$ բազմություններն են:

$\bar{Y}_{r^*}$ բազմության էլեմենտները գցենք համապատասխանաբար, $\mathcal{X}'$ և $\mathcal{X}''$ բազմությունների մեջ: Մնացած $r' - r^*$ և $r'' - r^*$ էլեմենտները վերցնենք $\bar{W}'$-ից և $\bar{W}''$-ից, ինչպես նախորդ դեպքում:

### *4.1.4 Ներկայացում ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման խնդրի կանոնական տեսքով*

Դիտարկված խնդիրները ներկայացնենք ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման խնդրի կանոնական $Az \leq b$ տեսքով, մասնավորապես՝ ($\boldsymbol{HV_d}$) խնդրի օրինակով: Սա հնարավորություն կտա կիրառել գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծման ստանդարտ մեթոդները:

Անհայտ փոփոխականների $z$ վեկտորը ունի հետևյալ տեսքը $z = \binom{x}{y}$, որտեղ

$$x = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{m,1} \\ \vdots \\ x_{m,n} \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{1,n} \\ \vdots \\ y_{C_m^2,1} \\ \vdots \\ y_{C_m^2,n} \end{pmatrix},$$ կոմպոնենտների քանակն է՝ $m \cdot n + C_m^2 \cdot n$:

$b$ -ն սյուն-վեկտոր է, կազմված մի շարք մասերից՝ $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$, որտեղ ՝ $b_1 = S^T$, $b_2 = R^T$, $b_3$-ը 0-ներից կազմված $2n \cdot C_m^2$ երկարության սյուն-վեկտոր է, $b_4$-ը 1-երից կազմված $n \cdot C_m^2$ երկարության սյուն-վեկտոր է: $b_5$ -ը ունի $C_m^2$ հատ կոմպոնենտ՝ ըստ $p(i', i'')$ զույգերի, որոնք հավասար են $(r_{i'}, r_{i''})$ զույգի մաքսիմալ արժեքին: Այսպիսով, $b$ վեկտորը ունի $n + m + (3n + 1) \cdot C_m^2$ կոմպոնենտ:

Այժմ կազմենք $A$ մատրիցը: Այն պետք է ունենա $n + m + (3n + 1) \cdot C_m^2$ հատ տող և $m \cdot n + C_m^2 \cdot n$ հատ սյուն: $A$ մատրիցը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$\begin{pmatrix} A_1\ B_1 \\ A_2\ B_2 \\ A_3\ B_3 \\ A_4\ B_4 \\ A_5\ B_5 \end{pmatrix}$$

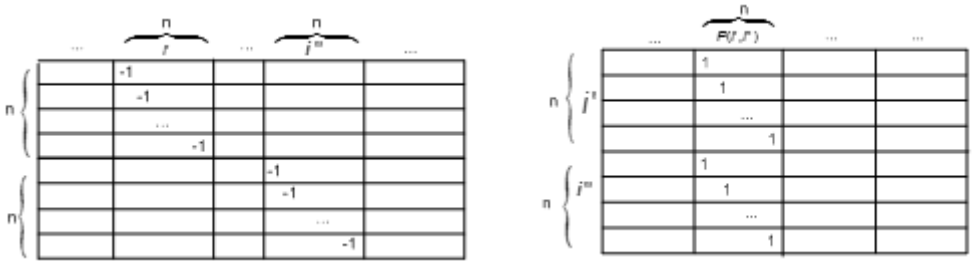
$(A_1)_{n\times(m\cdot n)}$ և $(A_2)_{m\times(m\cdot n)}$ մատրիցների կառուցվածքը բերվում է Նկար 4.1.4-1-ի (ա) և (բ) մասերում, համապատասխանաբար:

(ա) (բ)

**Նկար 4.1.4-1:** $(A_1)_{n\times(m\cdot n)}$ և $(A_2)_{m\times(m\cdot n)}$ մատրիցների կառուցվածքը

$(B_1)_{n\times(C_m^2\cdot n)}$-ն և $(B_2)_{m\times(C_n^2\cdot n)}$-ն կազմված են 0-ներից:

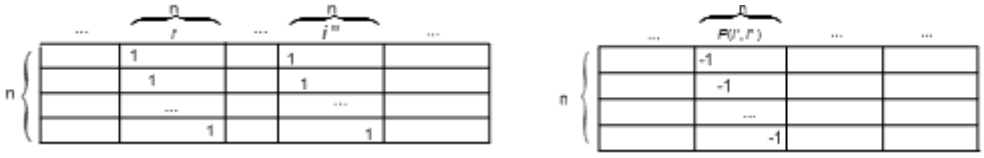
$(A_3)_{2n\cdot C_m^2\times(m\cdot n)}$-ն և $(B_3)_{2n\cdot C_m^2\times(C_m^2\cdot n)}$-ն կազմված են Նկար 4.1.4-2-ի (ա) և (բ) մասերում պատկերված կառուցվածքներ ունեցող (ուղղահայաց) $C_m^2$ ենթամատրիցներից՝ մեկ ենթամատրից յուրաքանչյուր $(i', i'')$ զույգի համար:



(ա) (բ)

**Նկար 4.1.4-2:** $(A_3)_{2n\cdot C_m^2\times(m\cdot n)}$ և $(B_3)_{2n\cdot C_m^2\times(C_m^2\cdot n)}$ մատրիցների կառուցվածքը

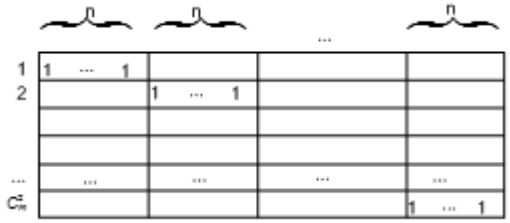
Նույն ձևով, $(A_4)_{n\cdot C_m^2\times(m\cdot n)}$-ն և $(B_4)_{n\cdot C_m^2\times(C_m^2\cdot n)}$-ն Նկար 4.1.4-3-ի (ա) և (բ) մասերում բերված կառուցվածքների ուղղահայաց կոնկատենացիաներն են՝ կառուցված տողերի յուրաքանչյուր $(i', i'')$ զույգի համար:



(ա) (բ)

**Նկար 4.1.4-3:** $(A_4)_{n\cdot C_m^2\times(m\cdot n)}$ և $(B_4)_{n\cdot C_m^2\times(C_m^2\cdot n)}$ մատրիցների կառուցվածքը

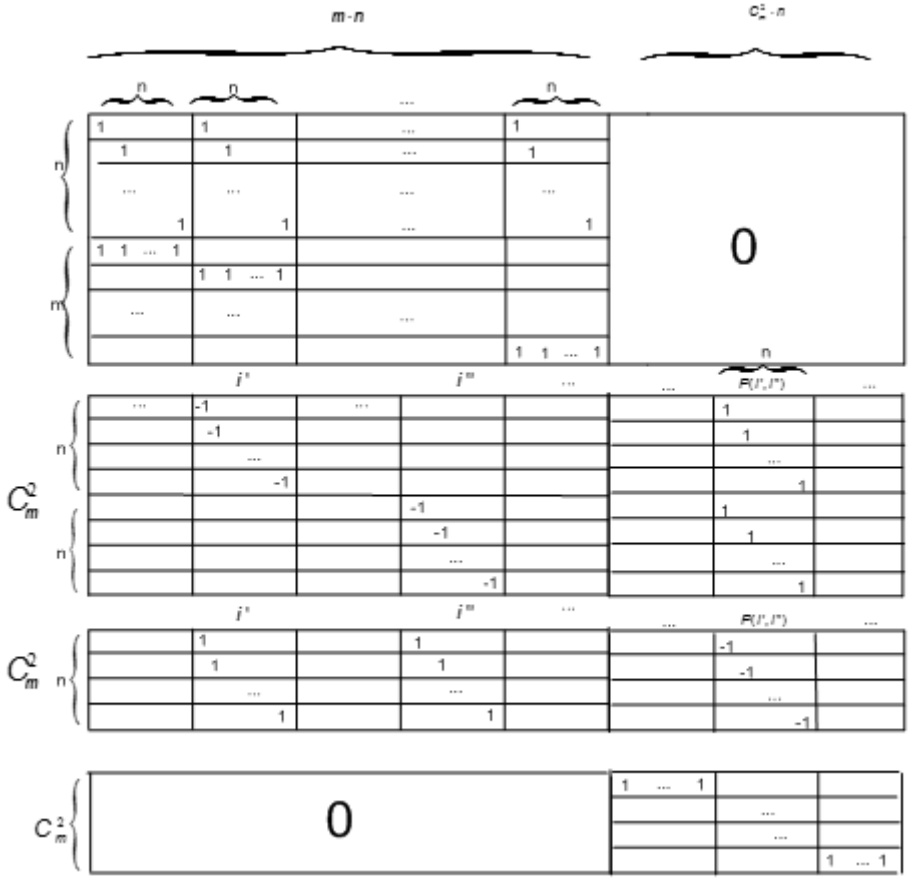
$(A_5)_{C_m^2\times(m\cdot n)}$-ն կազմված է միայն 0-ներից, և $(B_5)_{C_m^2\times(C_m^2\cdot n)}$-ն ունի Նկար 4.1.4-4-ում բերված տեսքը:



**Նկար 4.1.4-4:** $(B_4)_{n\cdot C_m^2\times(C_m^2\cdot n)}$ մատրիցի կառուցվածքը

$A_1$-ը և $A_2$-ը $b_1$-ի և $b_2$-ի հետ ապահովում են, համապատասխանաբար, սյուների և տողերի գումարները, $A_3, B_3$-ը և $A_4, B_4$-ը $b_3$-ի և $b_4$-ի հետ արտահայտելու են տողերի զույգերի հատումները, $B_5$-ը և $b_5$-ը ապահովելու են տողերի տարբեր լինելը:

Նկար 4.1.4-5-ում պատկերված է ամբողջական մատրիցը:



**Նկար 4.1.4-5**: $A$ մատրիցը

Այս ոչ խիտ մատրիցի միջոցով ($HV_d$) խնդիրը ներկայացվում է ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման խնդրի կանոնական տեսքով: Ամբողջարժեք ծրագրավորման խնդրի

որոշ դասեր հայտնի են որպես բազմանադամային բարդության խնդիրներ, - ինչպես օրինակ այն խնդիրները, որտեղ մատրիցը ամբողջական յունիմոդուլյար է (total unimodular), և ուրիշներ ([169], [59], [60]): Մեր ստացած $A$ մատրիցը այսքան պարզ չէ, օրինակ, չի բավարարում յունիմոդուլյար լինելու հայտնի բավարար պայմաններին: Այնուամենայնիվ, այն օգնում է կիրառել գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծման մեթոդները, մասնավորապես, կարող է կիրառվել գծային ծրագրավորման ռելաքսացիա՝ ամբողջարժեքության ռելաքսացիան:

### *4.1.5 Խնդիրը հավանականային կոմբինատորիկայի տեսանկյունից*

Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրը օգտակար է դիտարկել նաև հավանականային կոմբինատորիկայի տեսանկյունից:

Մուտքային $s_1, s_2, \dots, s_n$ հաջորդականությանը համապատասխան կառուցվում է հավանականային բաշխում $E^n$ -ի վրա: Ապացուցվում է, որ պատահական $m$ -բազմությունների համակարգում տարրերի կշիռները մոտ են $s_1, s_2, \dots, s_n$ -ին, և որ հավասարության դեպքի հավանականությունը 0 չէ: Ապացուցվում է նաև, որ հավանականությունը այն բանի, որ համակարգում բազմությունները չեն կրկնվում, ունի ոչ 0-ական հավանականություն: Արդյունքում, առանձնացվում է դեպք՝ փոքր $m$-երի դեպքը, երբ տարրերի $s_1, s_2, \dots, s_n$ կշիռներ և տարբեր տողեր ունենալու միաժամանակյա պահանջը ունի 0-ից խիստ մեծ հավանականություն, այսինքն, նման կառուցվածքներ գոյություն ունեն:

Դիտարկենք $m \times n$ չափանի պատահական $M$ բինար մատրից, որտեղ սյուների $x_j, j = 1, \cdots, n$ փոփոխականները անկախ և նմանատիպ (independently and identically, i.i.d.) ընդունում են 1 և 0 արժեքներ $p_j$ և $q_j = 1 - p_j$ ոչ 0-ական հավանականությամբ: Գեներացվող մատրիցների քանակը $2^{mn}$ է, և սյուների տրված $s_1, s_2, \dots, s_n$ գումարներով մատրիցի հանդես գալու հավանականությունը $\prod_{j=1}^{n} p_j^{s_i} q_j^{m-s_j}$ է: Մոդելը ներկայացվում է որպես պրոցես, որտեղ $m$ հատ գագաթ (մատրիցի տողերը) i.i.d. գցվում են $E^n$ խորանարդի մեջ: Այն դեպքում, երբ մատրիցի տողերը տարբեր են, կստանանք $E^n$-ի $m$-

ենթաբազմություն: Այսպիսի տարբեր տողերով մատրիցի գոյության ցուցանիշ կարող է հանդիսանալ տրված մոդելի ոչ 0-ական հավանականությունը: Դիցուք՝ $p_j = s_j/m$, ապացուցելու ենք, որ $n, m \to \infty$ դեպքում.

1. հավանականությունն այն բանի, որ սյուների գումարները մոտ են $s_1, s_2, \dots, s_n$ -ին, ձգտում է 1-ի, և

2. հավանականությունն այն բանի, որ բոլոր տողերը տարբեր են, ձգտում է 1-ի:

1) Դիտարկենք մատրիցի որևէ $j$ սյուն: Դիցուք $M_j$-ն և $D_j$-ն $j$-րդ սյան պատահական գումարի մաթսպասումն ու դիսպերսիան են: Հավանականությունն այն բանի, որ պատահական մատրիցում $j$ սյունը կունենա $t$ գումար, հավասար է $C_m^t p_j^{s_i} q_j^{m-s_j}$ : Այսպիսով, $M_j = \sum_{t=0}^{m} t C_m^t p_j^t\, q_j^{m-t} = m p_j$: Օրինակ, երբ $p_j = q_j = 1/2$, կստանանք $E^n$-ում պատահական Բուլյան ֆունկցիաների համասեռ մոդելը: Այժմ, միջին կշիռները ըստ սյուների, համապատասխանաբար հավասար կլինի $mp_1, mp_2, \dots, mp_n$-ի. Եվ քանի որ $p_j = \frac{s_j}{m}, j = 1, \cdots, n$, ապա կստանանք, որ սյուների գումարի միջին վեկտորը $s_1, s_2, \dots, s_n$ է:

Նմանատիպ ձևով, տարբերվող տողերի զույգերի միջին քանակը 1 սյուն պարունակող մոդելում հետևյալն է.

$$\sum_{t=0}^{m} t(m-t) C_m^t p_j^t\, q_j^{m-t} = \sum_{t=1}^{m-1} t(m-t) C_m^t p_j^t\, q_j^{m-t} =$$
$$= m(m-1) p_j q_j \sum_{t=0}^{m-2} C_{m-2}^t p_j^{t-1}\, q_j^{m-2-t} = m(m-1) p_j q_j$$

Դիսպերսիայի օգտագործումը այս մոդելում կարող է բերել լրացուցիչ արդյունքի [(31)]:

Նշված ինտերվալներով տիրույթը՝ ուղղանկյուն տիրույթ է $\Xi_m^n$-ում, և ըստ ստացված արդյունքի, գոյություն ունի սյուների գումարի պատահական վեկտոր, որը պատկանում է այդ տիրույթին: Վերցնելով կամայական $s_1, s_2, \dots, s_n$-եր, կստանանք տարբեր չափսի տիրույթներ (տարբեր հավանականությամբ), գուցե և դատարկ: Ստացվածը դեռևս օգտակար չի, քանի դեռ չգիտենք ստացված մատրիցի տողերը տարբեր են, թե ոչ:

2) Դիտարկենք տողերի պատահական զույգ: Հավանականությունն այն բանի, որ այդ զույգում $j$ -րդ կոորդինատը նույն արժեքն ունի, - հավասար է $2p_j(1-p_j)$ . Հավանականությունն այն բանի, որ ամբողջական տողերն են համընկնում, հավասար է $\prod_{j=1}^{n} 2p_j(1-p_j)$; և համապատասխան հավանականությունը, որ տողերը տարբեր են,

- հավասար է՝ $1-\prod_{j=1}^{n} 2p_j(1-p_j)$: Օրինակ, երբ $p_j = q_j = 1/2$ , ապա կստանանք. $1-\frac{1}{2^n}$: Այժմ, դիցուք՝ $m$ գագաթ է գցվում $E^n$-ում: Հավանականությունն այն բանի, որ գագաթներն իրարից տարբեր կլինեն, չի գերազանցում $\beta = (1-\prod_{j=1}^{n} 2p_j(1-p_j))^{m^2}$ , և $\gamma = (1-\frac{1}{2^n})^{m^2}$ –ն համապատասխան արժեքն է $p_j = 1/2$ մասնակի դեպքի համար: $m^2$-ն վերցնենք որպես տարբեր տողերի զույգերի $C_m^2$ քանակի կոպիտ գնահատական: Մեծ $n$-երի, և համեմատաբար փոքր $m$-երի համար $\gamma \sim e^{-\frac{m^2}{2^n}}$: Ենթադրելով, որ $\gamma$-ն 0 չի, կստանանք, որ գոյություն կունենա մատրից, որի տողերը տարբեր են իրարից: Ընդհանուր դեպքում, շեղում կա $p_j = 1/2$ –ից, որի դեպքում կմտցնենք շեղման $\delta$ գործակից, այնպես որ $\beta = \gamma \cdot \delta$: Այնուհետև, անհրաժեշտ է որոշել $m$-ի այն արժեքը, որի համար $\beta$ հավանականությունը 0 չի, որից կհետևի, որ մատրիցի տողերը տարբեր են: Այժմ, միավորելով 1)-ը և 2)-ը տրված $s_1, s_2, \dots, s_n$ –երի համար, կստանանք պայմաններ և $\Xi_m^n$ –ում $s_1, s_2, \dots, s_n$ –երի շուրջ ուղղանկյուն տիրույթ, որը պարունակում է տարբեր տողերով պատահական մատրից:

## 4.2 Ագահ ալգորիթմական տեխնիկայի կիրառումը դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրների մոտավոր լուծման համար

Այս բաժնում դիտարկվում է մեկ այլ մոտեցում՝ ագահ ալգորիթմական տեխնիկան /greedy technique/ ([34], [67], [15], [77], [7]) դիսկրետ տոմոգրաֆիայի՝ տարբեր տողերի սահմանափակումն ունեցող խնդիրների մոտավոր լուծման համար: Ագահ ալգորիթմները օպտիմիզացիոն խնդիրների լուծման համար առավել հաճախ օգտագործվող մեթոդն են, և որոշ դեպքերում այն ապահովում է խնդրի օպտիմալ լուծումը: Մշակվում է մատրիցի սյուն առ սյուն կառուցման ալգորիթմ, որը կիրառվում է, մասնավորապես, $V_d$ խնդրի լուծման համար: Ապացուցվում է ալգորիթմի լոկալ քայլի օպտիմալությունը; և տրվում է աշխատանքի արդյունքի երաշխիքի գնահատական՝ օգտագործելով բազմության ագահ ծածկույթ մեթոդը: Գնահատվում է ալգորիթմի արդյունքը այն դեպքի համար, երբ գոյություն ունի տրված սահմանափակումներին բավարարող մատրից; բերվում են փորձարարական արդյունքներ: Բերվում է հնարավոր

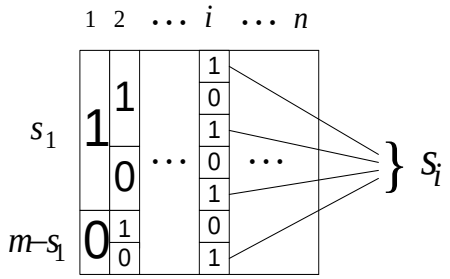
կիրառման օրինակ՝ հակաբիոտիկների խառնուրդների օգտագործման միջոցով բազմադեղորայքային դիմադրողականության դեմ պայքարի խնդիրը ըստ սահմանափակումների:

Սահմանենք բինար մատրիցների $U(S)$ դասը՝ $m \times n$ չափանի բոլոր բինար մատրիցների դասը, որոնք ունեն սյուների գումարի տրված $S = (s_1, \cdots, s_n)$ վեկտորը: $\bar{U}(S)$-ով կնշանակենք $U(S)$-ի այն ենթադասը, որում մատրիցի տողերն իրարից տարբեր են: Դիտարկելու ենք $U(S)$ դասում գոյության/կառուցման և օպտիմիզացիոն խնդիրներ:

Սահմանենք *փոխարինման* գործողություն $U(S)$ դասի մատրիցների համար: Դիցուք՝ $A \in U(S)$: *Փոխարինման* գործողությունը $A$-ում տողերի զույգով և մեկ սյան միջոցով ստացվող 2x1 չափանի $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ենթամատրիցը փոխարինում է $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$-ով, կամ հակառակը:

Նկատենք, որ փոխարինման ոչ բոլոր գործողություններն են կիրառելի $\bar{U}(S)$ դասի առանձին վերցված մատրիցի համար՝ այն պահպանում է սյան գումարը, սակայն կարող է առաջացնել կրկնվող տողերի զույգ, և այսպիսով, $\bar{U}(S)$ դասի մատրիցը ձևափոխել $\bar{U}(S)$-ին չպատկանող մատրիցի: Տողերի որևէ զույգի համար փոխարինման բոլոր գործողությունների կատարումը, որը *տողերի տեղափոխություն է,* պահպանում է մատրիցը $\bar{U}(S)$ դասում:

Դիցուք՝ $S = (s_1, \cdots, s_n)$ և $A \in \bar{U}(S)$: Տողերի տեղափոխությունների միջոցով կարող ենք $A$ -ն ձևափոխել $\bar{U}(S)$ դասի մեկ այլ մատրիցի, որում առաջին սյան $s_1$ հատ մեկերը դասավորված են $1, \cdots, s_1$ տողերում՝ կազմելով ինտերվալ: Այնուհետև, ստացված մատրիցը կարող ենք շարունակել ձևափոխել այնպես, որ երկրորդ սյան $s_2$ հատ մեկերը կազմեն երկու ինտերվալ (դիցուք՝ $s_{2,1}, s_{2,2}$ երկարություններով)՝ տեղադրված $1, \cdots, s_{2,1}$, և $s_1 + 1, \cdots, s_1 + s_{2,2}$ տողերում, համապատասխանաբար, և այսպես շարունակ: Արդյունքում, յուրաքանչյուր սյունում կստանանք 1-երից և 0-ներից կազմված իրար հաջորդող ինտերվալներ (նրանց մեջ կարող են լինել նաև 0 երկարության ինտերվալներ): Այսպիսի կառուցվածք ունեցող մատրիցները կանվանենք *տրոհված* տեսքի մատրից, որի երկրաչափական սխեմատիկ պատկերը բերված է ստորև՝ Նկար 4.2-1-ում:




**Նկար 4.2-1:** Տրոհված տեսքի մատրիցը:

Արդյունքում, կամայական երկու տող /նրանց կառուցված հատվածները/ կտարբերվեն, եթե նրանք վերցված են տարբեր ինտերվալների տիրույթներից, և կհամընկնեն, եթե պատկանում են միևնույն ինտերվալին:

**Դիտողություն 4.2-1:** *Տրոհված* տեսքի մատրիցի տողերը տարբեր են այն և միայն այն դեպքում, երբ մատրիցի վերջին սյունը կազմված է մեկ երկարության ինտերվալներից:

Ըստ հերթական $s_i$-ի տարբեր տրոհումների, կարող են ստացվել *տրոհված* տեսքի տարբեր մատրիցներ:

**Դիտողություն 4.2-2:** Տրոհված տեսքի երկու տարբեր մատրիցներ $\overline{U}(S)$ դասից, կարող են մեկը մյուսին բերվել վերջավոր թվով փոխարինումների միջոցով, և հետևաբար, $\overline{U}(S)$ դասի կամայական $A, B$ մատրիցների համար գոյություն ունեն վերջավոր թվով փոխարինումներ, որոնցով $A$-ն ձևափոխվում է $B$-ին, և հակառակը:

Այսպիսով, եթե $\overline{U}(S)$ դասը դատարկ չի, ապա այն պարունակում է առնվազը մեկ տրոհված տեսքի մատրից:

$\boldsymbol{V_d}$ խնդիրը կձևակերպվի հետևյալ ձևով՝ տրված $S$ վեկտորի համար գոյություն ունի՞ արդյոք մատրից $\overline{U}(S)$ դասում:

Սահմանենք $DP: U(S) \to [0, C_m^2]$ ֆունկցիան (նպատակային ֆունկցիան), որը $U(S)$ դասի յուրաքանչյուր $A$ մատրիցին համապատասխանության մեջ է դնում նրա տարբեր տողերի զույգերի քանակը՝ $DP(A)$ : Դիտարկենք $\boldsymbol{V_d}$ խնդրի օպտիմիզացիոն տարբերակը ըստ $DP$ նպատակային ֆունկցիայի՝

($\boldsymbol{V_d}^{\boldsymbol{opt}}$): Գտնել $A_{opt} \in U(S)$ այնպես, որ $DP(A_{opt}) = max_{A \in U(S)} DP(A)$:

Քանի որ $DP(A) = C_m^2$ այն և միայն այն դեպքում երբ $A \in \overline{U}(S)$, ապա $\overline{U}(S)$ դասի դատարկ չլինելու դեպքում ($V_d^{opt}$) –ի լուծումը լուծում է հանդիսանում նաև $V_d$ խնդրի համար:

($V_d^{opt}$) խնդրի լուծումը փնտրելու ենք տրոհված տեսքի մատրիցների դասում: Դա կարելի է իրականացնել մատրիցը սյուն առ սյուն կառուցելով, յուրաքանչյուր սյունում տեղադրելով համապատասխան քանակի 1-եր: Եթե արդյունքում $n$ -րդ սյունում ստացվեն բոլորը մեկ երկարությամբ ինտերվալներ, ապա մատրիցը չի ունենա կրկնվող տողեր: Հերթական $i$-րդ սյան կառուցումը կարելի է իրականացնել կամայական ձևով՝ ապահովելով միայն գումարային $s_i$ քանակով 1-եր:

### *4.2.1 ($V_d^{opt}$) խնդրի լուծման G ալգորիթմ*

Այս բաժնում կկառուցենք $V_d^{opt}$ խնդրի լուծման սյուն-առ-սյուն կառուցման $GREEDY$ $(G)$ ալգորիթմը:

$G$ ալգորիթմը մուտքում ստանում է սյուների գումարի $S = (s_1, \cdots, s_n)$ վեկտորը և սյուն առ սյուն կառուցում է տրոհված տեսքի մատրից $U(S)$ դասից:
Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $s_i \geq m - s_i, i = 1, \cdots, n$:

***Քայլ 1.*** Առաջին սյունը կառուցել տեղադրելով 1-երը առաջին $s_1$ տողերում, և 0-ները՝ մնացած $m - s_1$ տեղերում: Սյան վրա կստանանք երկու ինտերվալ՝ $d_{1,1}^G = s_1$ և $d_{1,2}^G = m - s_1$ երկարություններով; տարբեր տողերի զույգերի քանակը (նպատակային ֆունկցիայի արժեքը) ըստ առաջին սյան կլինի՝ $d_{1,1}^G \cdot d_{1,2}^G$:

$A_{G,t}$ -ով նշանակենք ալգորիթմի $t$ -րդ քայլի արդյունքում կառուցված ենթամատրիցը, և $\Delta DP_t(G)$-ով՝ $t$-րդ քայլի արդյունքում նպատակային ֆունկցիայի աճը, այսինքն նոր առաջացած տարբեր տողերի զույգերի քանակը՝

$$\Delta DP_t(G) = DP\left(A_{G,t}\right) - DP(A_{G,t-1}):$$

$d_{t,j}^G$-ով նշանակենք $t$-րդ սյան հերթական՝ $j$-րդ ինտերվալի երկարությունը:

Դիցուք՝ արդեն կառուցել ենք առաջին $(k-1)$ սյուները: Ընդհանուր առմամբ, $(k-1)$-րդ սյունը բաղկացած է $2^{k-1}$ ինտերվալներից: Նրանց մեջ կարող են լինել նաև զրո երկարության ինտերվալներ: Ենթադրենք $(k-1)$-րդ սյունը բաղկացած է $p$ հատ ոչ

զրոյական երկարության ինտերվալներից՝ $d_{k-1,1}^G, d_{k-1,2}^G, \cdots, d_{k-1,p}^G$ : Եթե որևէ սյուն բաղկացած է միայն մեկ երկարության ինտերվալներից, ապա մատրիցի բոլոր տողերն արդեն տարբեր են իրարից, և հետևաբար, տարբեր տողերի զույգերի մաքսիմալ քանակն ապահովված է; սյուների հետագա կառուցումը կարող է լինել կամայական ձևով:

***Քայլ k.*** Կառուցել $k$-րդ սյունը՝ հերթական $d_{k-1,i}^G$ երկարության ինտերվալը տրոհելով $d_{k-1,i,0}^G$ և $d_{k-1,i,1}^G$ մասերի, կազմված 0-ներից և 1-երից այնպես, որ

$\sum_{i=1}^p d_{k-1,i,0}^G = m - s_k$ և $\sum_{i=1}^p d_{k-1,i,1}^G = s_k$:

Նպատակային ֆունկցիայի աճը $k$-րդ քայլում կլինի՝ $\Delta D_k(G) = \sum_{i=1}^p d_{k-1,i,1}^G \cdot d_{k-1,i,0}^G$:

Ինտերվալների տրոհումն իրականացնելու ենք նպատակ ունենալով մինիմիզացնել ինտերվալների երկարությունների տարբերությունները: Գաղափարը հետևյալն է. եթե $s_k = m - s_k, k = 1, \cdots, n$, ապա յուրաքանչյուր քայլում կամայական ինտերվալ կտրոհեինք երկու հավասար ($\pm 1$) մասերի, որը լոգարիթմական թվով քայլերից հետո կբերեր մեկ երկարության ինտերվալների ([128], [129]): Ավելին, $d_{k-1,i}^G$ -ի բոլոր ամբողջարժեք տրոհումներից՝ $d_{k-1,i}^G = d_{k-1,i,0}^G + d_{k-1,i,1}^G$, առավելագույն $d_{k-1,i,0}^G \cdot d_{k-1,i,1}^G$ արտադրյալը ստացվում է, երբ $d_{k-1,i,0}^G = d_{k-1,i,1}^G$: Սակայն, ընթացիկ $k$-րդ սյան համար մենք ունենք $s_k - (m - s_k)$ “հավելյալ 1-եր”: Փորձելով մոտ լինել հավասար երկարության ինտերվալներ ստանալու գաղափարին՝

1) $s_k - (m - s_k)$ հավելյալ 1-երը բաշխում ենք ինտերվալների վրա այնպես, որ ստանանք 1-երի “համասեռ” բաշխում
2) Ստացված/մնացած ինտերվալները տրոհում ենք երկու հավասար մասերի՝ տեղադրելով հավասար քանակով 1-եր և 0-ներ:

Այժմ $k$-րդ քայլը նկարագրենք առավել մանրամասնորեն: $r_k$-ով նշանակենք հավելյալ 1-երի քանակը՝ $r_k = s_k - (m - s_k)$ , և դիցուք՝ $(k-1)$ -րդ սյունում կա $l$ հատ կենտ երկարության ինտերվալ: Նկատենք, որ $r_k$-ն և $l$-ը ունեն միևնույն զույգությունը, և հետևաբար, $(r_k - l)$-ը զույգ թիվ է:

***1) Առաջին փուլ -*** *$r_k$ հավելյալ 1-երի տեղադրում*

***ա)*** $r_k \leq l$

$(k-1)$-րդ սյան $l$ հատ կենտ երկարության ինտերվալներից կամայական ձևով ընտրում ենք $r_k$ հատը, և յուրաքանչյուրի վրա տեղադրում մեկական 1:

***բ)*** $r_k > l$

Կենտ երկարության բոլոր $l$ ինտերվալների վրա տեղադրվում է մեկական 1: Այնուհետև, 1-երը բաշխվում են երկուական: Սկսում ենք զույգ երկարության ինտերվալներից, ապա շարունակում կենտերի վրա, և այսպես հաջորդաբար, մինչև $r_k$ հատ 1-երը սպառվեն: Եթե ընթացքում որոշ կարճ ինտերվալներ լրիվ լցվում են 1-երով, ապա նրանք այլևս չեն մասնակցում կառուցմանը: Նկատենք, որ $l$ հատ 1-երի տեղադրումից հետո ստանում ենք միայն զույգ երկարություններ, և $(r_k - l)$-ն էլ զույգ է, այնպես որ բաշխումը հնարավոր է իրականացնել:

***2) երկրորդ փուլ*** *– մնացած 1-երի և 0-ների տեղադրում*

***ա)*** $r_k \leq l$

Մնացած $l - r_k$ հատ կենտ երկարության ինտերվալների մի կեսի վրա տեղադրում ենք մեկական 0, մյուս կեսի վրա՝ մեկական 1: Որից հետո բոլոր ինտերվալները տրոհվում են երկու հավասար մասերի, որոնց վրա էլ տեղադրվում են հավասար թվով 1-եր և 0-ներ:

***բ)*** $r_k > l$

Բոլոր ինտերվալները տրոհվում են երկու հավասար մասերի, որոնց վրա էլ տեղադրվում են հավասար թվով 1-եր և 0-ներ:

Այժմ հաշվենք $k$-րդ քայլի արդյունքում $i$-րդ ինտերվալի վրա 1-երի և 0-ների տարբերությունը՝ $c_i = d^G_{k-1,i,1} - d^G_{k-1,i,0}, i = 1, \cdots, p$:

***ա)*** $r_k \leq l$

Այս դեպքը պարզ է՝

$$c_i = \begin{cases} 0, & \textit{բոլոր զույգ երկարության ինտերվալների վրա} \\ 1, & \frac{l + r_k}{2} \textit{ հատ կենտ երկարության ինտերվալների վրա} \\ -1, & \frac{l - r_k}{2} \textit{ հատ կենտ երկարության ինտերվալների վրա} \end{cases}$$

***բ)*** $r_k > l$

Դիցուք՝ առաջին փուլում կատարվել են 1-երի երկուական տեղադրման $t$ լրիվ ցիկլեր: Այդ ընթացքում որոշ ինտերվալներ կարող էին ամբողջությամբ լցված լինել 1-երով, և դիցուք՝ $D$-ն այդպիսի ինտերվալներից առավելագույնի երկարությունն է: Այսպիսով,

$(\geq D)$-երկարության բոլոր զույգ ինտերվալները ստացել են առնվազն $D$ հատ հավելյալ 1: Կենտ երկարության ինտերալների համար՝ $(\geq D+1)$-երկարություն ունեցողները ստացել են առնվազն $D+1$ հատ հավելյալ 1: Ավելի մեծ երկարություն ունեցող ինտերվալները կարող էին ստանալ հավելյալ 1-երի լրացուցիչ քանակ, և դիցուք՝ $d$-ն այն քանակն է, որ ստացել է այդպիսի ինտերվալներից յուրաքանչյուրը: Նկատենք, որ ինչպես $D$-ն, այնպես էլ $d$-ն, զույգ թվեր են: Այսպիսով, $t$ լրիվ ցիկլերից հետո $(>D)$-երկարության բոլոր զույգ ինտերվալները ստացել են $D+d$, և $(>D)$ երկարության բոլոր կենտ ինտերվալները ստացել են $D+d+1$ քանակով հավելյալ 1-եր: Մնացած հավելյալ 1-երը (նշանակենք այդ քանակը $r'$-ով) բավական չեն ամբողջ ցիկլով բաշխելու համար: Բաշխումը շարունակենք սկսելով զույգ ինտերվալներից (դիցուք՝ նրանց քանակը $p_1$-է): Դիտարկենք հնարավոր դեպքերը.

*(1)* $0 < r' < 2p_1$

$p_1$ ինտերվալներից ընտրվում է կամայական $r'/2$ հատը և յուրաքանչյուրի վրա տեղադրվում է երկուական 1:

*(2)* $r' = 2p_1$

$p_1$ ինտերվալներից յուրաքանչյուրի վրա տեղադրվում է երկուական 1:

*(3)* $r' > 2p_1$

$p_1$ ինտերվալներից յուրաքանչյուրի վրա տեղադրվում է երկուական 1, կենտ ինտերվալներից ընտրվում է կամայական $(r'-2p_1)/2$ հատը և նրանցից յուրաքանչյուրի վրա տեղադրվում է երկուական 1:

Հաշվենք $c_i$-երը:

*(1)* $0 < r' < 2p_1$

$$c_i = \begin{cases} D+d+1 & \textit{կենտ երկարության ինտերվալների վրա} \\ D+d \textit{ կամ } D+d+2 & \textit{զույգ երկարության ինտերվալների վրա} \end{cases}$$

*(2)* $r' = 2p_1$

$$c_i = \begin{cases} D+d+1 & \textit{կենտ երկարության ինտերվալների վրա} \\ D+d+2 & \textit{զույգ երկարության ինտերվալների վրա} \end{cases}$$

*(3)* $r' > 2p_1$

$$c_i = \begin{cases} D+d+1 \textit{ կամ } D+d+3 & \textit{կենտ երկարության ինտերվալների վրա} \\ D+d+2 & \textit{զույգ երկարության ինտերվալների վրա} \end{cases}$$

Այսպիսով, $max_{i,j}|c_i - c_j| \leq 2$ բոլոր այն ինտերվալների համար, որոնց երկարությունը առնվազը $D$ է զույգ երկաության դեպքում, և առնվազը $D+1$ է՝ կենտի դեպքում:

$k$-րդ քայլի նկարագիրն ամբողջությամբ ավարտվեց:

$k$-րդ սյունում ստացանք 1-երից և 0-ներից բաղկացած հետևյալ ինտերվալները (հնարավոր է զրո երկարության).

$$d^G_{k-1,i,1} = \frac{d^G_{k-1,i} + c_i}{2}, d^G_{k-1,i,0} = \frac{d^G_{k-1,i} - c_i}{2}, \qquad i = 1, \cdots, p$$

*Դիտողություն. (1)* և *(3)* դեպքերում ինտերվալների ընտրությունը կարող է բերել ալգորիթմի ճյուղավորմանը:

Բերենք մի պնդում, ըստ որի կամայական ճյուղավորման դեպքում $G$ ալգորիթմը լոկալ քայլում օպտիմալ է, և որ մատրիցի լոկալ սյան օպտիմալ կառուցումը միակն է՝ այն ըստ $G$ ալգորիթմի է:

**Թեորեմ 4.2.1-1:** *(1)* $G$ ալգորիթմի յուրաքանչյուր քայլը ապահովում է $DP$ նպատակային ֆունկցիայի մաքսիմալ աճ;

*(2)* Եթե որևէ սյան կառուցման արդյունքում $DP$ նպատակային ֆունկցիան ստանում է մաքսիմալ աճ, ապա այն կառուցված է ըստ $G$ ալգորիթմի:

**Ապացույց: (1)** Թեորեմն ապացուցենք ալգորիթմի $k$-րդ քայլի համար, $k = 2, \cdots, n$: Դիցուք՝ $(k-1)$-րդ սյունում կա $p$ հատ ոչ զրոյական ինտերվալ՝ $d_{k-1,1}, d_{k-1,2}, \cdots, d_{k-1,p}$, և $G$ ալգորիթմի $k$-րդ քայլի արդյունքում $i$-րդ ինտերվալը տրոհվել է $d^G_{k-1,i} = d^G_{k-1,i,0} + d^G_{k-1,i,1}$ երկարությամբ ինտերվալների: Դիցուք՝ $d_{k-1,i,0}, d_{k-1,i,1}$-ը որևէ օպտիմալ ալգորիթմով տրոհման արդյունքում ստացված $A$ մատրիցում համապատասխան ինտերվալների երկարություններն են, այնպես որ $\sum_{i=1}^{p} d_{k-1,i,0} = m - s_k$ և $\sum_{i=1}^{p} d_{k-1,i,1} = s_k$: Այսպիսով,

$\Delta D_k(G) = \sum_{i=1}^{p} d^G_{k-1,i,1} \cdot d^G_{k-1,i,0}$ , $\Delta D_k(A) = \sum_{i=1}^{p} d_{k-1,i,1} \cdot d_{k-1,i,0}$ -ը նպատակային ֆունկցիայի համապատասխան աճերն են: Ապացուցենք, որ $\Delta D_k(G) \geq \Delta D_k(A)$:

$\Delta D_k(G) - \Delta D_k(A) = \sum_{i=1}^{p} d^G_{k-1,i,1} d^G_{k-1,i,0} - \sum_{i=1}^{p} d_{k-1,i,1}\, d_{k-1,i,0} =$

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{d_{k-1,i}^{G}+c_i}{2}\cdot\frac{d_{k-1,i}^{G}-c_i}{2}\right)-\sum_{i=1}^{p}(d_{k-1,i,1}d_{k-1,i,0})=$$

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{p}\left((d_{k-1,i}^{G})^2-(c_i)^2-4d_{k-1,i,1}d_{k-1,i,0}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{p}\left((d_{k-1,i,1}+d_{k-1,i,0})^2-(c_i)^2-4d_{k-1,i,1}d_{k-1,i,0}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{p}\left((d_{k-1,i,1}-d_{k-1,i,0})^2-(c_i)^2\right):$$

Նշանակենք $\alpha_i=d_{k-1,i,1}-d_{k-1,i,1}^{G}, i=1,\cdots,p$ : Պարզ է, որ $d_{k-1,i,0}-d_{k-1,i,0}^{G}=-\alpha_i$ : Այստեղից, $d_{k-1,i,1}=\alpha_i+d_{k-1,i,1}^{G}$և $d_{k-1,i,0}=-\alpha_i+d_{k-1,i,0}^{G}$ , որից էլ հետևում է, որ

$d_{k-1,i,1}-d_{k-1,i,0}=2\alpha_i+(d_{k-1,i,1}^{G}-d_{k-1,i,0}^{G})=2\alpha_i+c_i$:

Նկատենք, որ $\sum_{i=1}^{p}\alpha_{i=0}$, քանի որ $\sum_{i=1}^{p}d_{k-1,i,1}=\sum_{i=1}^{p}d_{k-1,i,1}^{G}=s_k$:

Այսպիսով,

$\Delta D_k(G)-\Delta D_k(A)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{p}((c_i+2\alpha_i)^2-(c_i)^2)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{p}(4\alpha_i c_i+4(\alpha_i)^2)=\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i c_i+(\alpha_i)^2)$:

$$\Delta D_k(G)-\Delta D_k(A)=\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i c_i+(\alpha_i)^2) \qquad (4.2.1\text{-}1)$$

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1. $max_{1\le i,j\le p}|c_i-c_j|\le 2$

Դիցուք՝ $\alpha_{j_1}\ge 0,\cdots,\alpha_{j_t}\ge 0,\alpha_{j_t+1}<0,\cdots,\alpha_{j_p}<0$: Նշանակումների պարզեցման համար կարող ենք ենթադրել, որ $\alpha_1\ge 0,\cdots,\alpha_t\ge 0,\alpha_{t+1}<0,\cdots,\alpha_p<0$: Քանի որ $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=0$, ապա $\sum_{i=1}^{t}\alpha_i=-\sum_{i=t+1}^{p}\alpha_i$:

Այսպիսով,

$$\Delta D_k(G)-\Delta D_k(A)\ge c_{i_0}\sum_{i=1}^{t}\alpha_i+c_{j_0}\sum_{i=t+1}^{p}\alpha_i+\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2),$$

որտեղ $c_{i_0}=min_{1\le i\le t}c_i$ և $c_{j_0}=max_{t+1\le i\le p}c_i$:

Ստացանք, որ

$$\Delta D_k(G)-\Delta D_k(A)\ge c_{i_0}\sum_{i=1}^{t}\alpha_i-c_{j_0}\sum_{i=1}^{t}\alpha_i+\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2=$$

$$=\left(c_{i_0}-c_{j_0}\right)\sum_{i=1}^{t}\alpha_i+\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2\ge$$

$$\ge -2\sum_{i=1}^{t}\alpha_i+\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2=$$

$$=-\sum_{i=1}^{t}\alpha_i+\sum_{i=t+1}^{p}\alpha_i+\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2 :$$

Ստացված մեծությունը բացասական չէ, քանի որ $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ -ն ամբողջ թվեր են:

Այս դեպքի ապացույցն ավարտված է:

2. $max_{1\le i,j\le p}|c_i - c_j| \le 2$ պայմանը կարող է խախտվել, երբ հավելյալ մեկերի բաշխման ընթացքում առաջանան 1-երով լցված ինտերվալներ: Դիցուք՝ $d^G_{k-1,i_1},\cdots,d^G_{k-1,i_h}$-ը այդ ինտերվալներն են, որոնց երկարությունը փոքր է $D$-ից զույգ երկարության դեպքում, և փոքր է $D+1$-ից՝ կենտ երկարության դեպքում: Այսպիսով,

$$c_{i_1} = d^G_{k-1,i_1},\cdots,c_{i_h} = d^G_{k-1,i_h},$$

մնացած ինտերվալների համար $max_{i,j\ne i_1,\cdots,i_h}|c_i - c_j| \le 2$, և հետևաբար,

$c_i \ge c_{i_j}$, $i \ne i_j$:

Ենթադրենք, որ $\alpha_1 \ge 0,\cdots,\alpha_t \ge 0, \alpha_{t+1} < 0,\cdots,\alpha_p < 0$: Նկատենք, որ $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_h}$ չեն կարող դրական թվեր լինել ($\alpha_i = d_{k-1,i,1} - d^G_{k-1,i,1}$):

(4.2.1-1)-ից հետևում է, որ

$$\Delta D_k(G) - \Delta D_k(A) \ge min_{1\le i\le t} c_i \cdot \sum_{i=1}^{t}\alpha_i + \sum_{i=t+1}^{p}\alpha_i c_i + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2 \ge$$

$$\ge min_{1\le i\le t} c_i \cdot \sum_{i=1}^{t}\alpha_i + \sum_{j=1}^{h}\alpha_{i_j}c_{i_j} + \max_{\substack{t+1\le i\le p\\ i\ne i_1,\cdots,i_h}} c_i \cdot \sum_{\substack{i=t+1\\ i\ne i_1,\cdots,i_h}}^{p}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_2)^2 \ge$$

$$\ge \sum_{j=1}^{h}\alpha_{i_j}c_{i_j} + c_{i_0}\cdot \sum_{i=1}^{t}\alpha_i + c_{j_0}\cdot \sum_{i=t+1}^{p}\alpha_i - c_{j_0}\cdot \sum_{j=1}^{h}\alpha_{i_j} + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{h}\alpha_{i_j}\cdot\left(c_{i_j} - c_{j_0}\right) + (c_{i_0} - c_{j_0})\cdot \sum_{i=1}^{t}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2$$

որտեղ $c_{i_0} = min_{1\le i\le t} c_i$ և $c_{j_0} = \max_{\substack{t+1\le i\le p\\ i\ne i_1,\cdots,i_h}} c_i$

Այսպիսով,

$$\Delta D_k(G) - \Delta D_k(A) \ge \sum_{j=1}^{h}\alpha_{i_j}\cdot(c_{i_j} - c_{j_0}) + (c_{i_0} - c_{j_0})\cdot \sum_{i=1}^{t}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2 \qquad (4.2.1\text{-}2)$$

(4.2.1-2)-ում ունենք, որ $(c_{i_0} - c_{j_0})\cdot \sum_{i=1}^{t}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2 \ge 0$, քանի որ $\alpha_i$-երը ամբողջ թվեր են, և $|c_{i_0} - c_{j_0}| \le 2$: Միևնույն ժամանակ, $\sum_{j=1}^{h}\alpha_{i_j}\cdot\left(c_{i_j} - c_{j_0}\right) \ge 0$, քանի որ $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_h} \le 0$, իսկ $c_{i_1},\cdots,c_{i_h} \le c_{j_0}$: Այսպիսով, $\Delta D_k(G) \ge \Delta D_k(A)$:

Թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է՝ $G$ ալգորիթմի բոլոր ճյուղերը լոկալ քայլում օպտիմալ են՝ ապահովում են մաքսիմալ թվով տարբեր տողերի զույգեր:

**(2)** Այժմ ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր լոկալ քայլում ինտերվալների բոլոր օպտիմալ տրոհումները համապատասխանում են $G$ ալգորիթմին:

Դիցուք՝ $(k-1)$-րդ սյունում ունենք $p$ հատ ինտերվալ՝ $d_{k-1,1}^{G},\cdots,d_{k-1,p}^{G}$: Ենթադրենք $G$ ալգորիթմի $k$ -րդ քայլի արդյունքում $i$ -րդ ինտերվալը տրոհվել է $d_{k-1,i,1}^{G},d_{k-1,i,0}^{G}$ երկարության ինտերվալների, և որևէ օպտիմալ $A$ ալգորիթմի $k$-րդ քայլի արդյունքում այն տրոհվել է $d_{k-1,i,1},d_{k-1,i,0}$ երկարության ինտերվալների: $\Delta D_k(G)$ -ով և $\Delta D_k(A)$-ով նշանակենք նպատակային ֆունկցիայի համապատասխան աճերը: Թեորեմի առաջին մասից հետևում է, որ $\Delta D_k(G)=\Delta D_k(A)$ : Պետք է ապացուցենք, որ $d_{k-1,i,1}^{G},d_{k-1,i,0}^{G}$ երկարության տրոհումները նույնպես ըստ $G$ ալգորիթմի են (ըստ ալգորիթմի որևէ ճյուղի):

(4.2.1-1)-ից ունենք, որ $\Delta D_k(G)-\Delta D_k(A)=\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i c_i+(\alpha_i)^2)$,

որտեղ $\alpha_i=d_{k-1,i,1}-d_{k-1,i,1}^{G}, i=1,\cdots,p$: Այստեղից,

$$\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i c_i+(\alpha_i)^2)=0 \qquad (4.2.1\text{-}3)$$

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1. $max_{1\le i,j\le p}|c_i-c_j|\le 2$

Դիցուք՝

$$c_{j_1}=\cdots=c_{j_{t_1}}=c,$$

$$c_{j_{t_1}+1}=\cdots=c_{j_{t_2}}=c+1,$$

$$c_{j_{t_2}+1}=\cdots=c_{j_p}=c+2$$

Ինդեքսների պարզության համար ենթադրենք, որ

$$c_1=\cdots=c_{t_1}=c,$$

$$c_{t_{1+1}}=\cdots=c_{t_2}=c+1,$$

$$c_{t_2+1}=\cdots=c_p=c+2:$$

Տեղադրենք (4.2.1-3)–ում.

$$c\cdot\sum_{i=1}^{t_1}\alpha_i+(c+1)\cdot\sum_{i=t_1+1}^{t_2}\alpha_i+(c+2)\cdot\sum_{i=t_2+1}^{p}\alpha_i+\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2=$$

$$c\cdot\left(\sum_{i=1}^{t_1}\alpha_i+\sum_{i=t_1+1}^{t_2}\alpha_i+\sum_{i=t_2+1}^{p}\alpha_i\right)+\sum_{i=t_1+1}^{t_2}\alpha_i+2\cdot\sum_{i=t_2+1}^{p}\alpha_i+\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2=$$

$$\sum_{i=t_1+1}^{t_2}\alpha_i+2\cdot\sum_{i=t_2+1}^{p}\alpha_i+\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2=0$$

$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=0$ -ից հետևում է, որ $\sum_{i=t_2+1}^{p}\alpha_i=-(\sum_{i=1}^{t_1}\alpha_i+\sum_{i=t_1+1}^{t_2}\alpha_i)$:

Այստեղից,

$$\sum_{i=t_1+1}^{t_2}\alpha_i + \sum_{i=t_2+1}^{p}\alpha_i - \sum_{i=1}^{t_1}\alpha_i - \sum_{i=t_1+1}^{t_2}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2 =$$

$$-\sum_{i=1}^{t_1}\alpha_i + \sum_{i=t_2+1}^{p}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2 = 0:$$

Այստեղից հետևում է, որ $|\alpha_i| \le 1$, $i = 1, \cdots, p$ և $\alpha_i = 0$, երբ $t_1 + 1 \le i \le t_2$ (քանի որ $\alpha_i$-երը ամբողջ թվեր են): Այսպիսով,

$\alpha_i \in \{0,1\}$, երբ $1 \le i \le t_1$ և $\alpha_i \in \{-1,0\}$, երբ $t_2 + 1 \le i \le p$ , և դրական ու բացասական մեկերի քանակը նույնն է: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ զրոյական $\alpha_i$ չկա: Այսինքն, $d_{k-1,i,1} - d^G_{k-1,i,1} = 1$, և հետևաբար, $d_{k-1,i,0} - d^G_{k-1,i,0} = -1$, երբ $1 \le i \le t_1$; և $d_{k-1,i,1} - d^G_{k-1,i,1} = -1$ և հետևաբար, $d_{k-1,i,0} - d^G_{k-1,i,0} = 1$, երբ $t_2 + 1 \le i \le p$ : Այստեղից հետևում է, որ $1 \le i \le t_1$ դեպքում $d^G_{k-1,i,1}$ երկարության ինտերվալը չի կարող ամբողջությամբ լցված լինել 1-երով: Նկատենք նաև, որ $t_1 + 1 \le i \le t_2$ դեպքում երկու տրոհումների դեպքում էլ ունենք միևնույն ինտերվալները: Միևնույն ժամանակ,

$$d^G_{k-1,i,1} - d^G_{k-1,i,0} = c,\ 1 \le i \le t_1,$$

$$d^G_{k-1,i,1} - d^G_{k-1,i,0} = c + 2,\ \ t_2 + 1 \le i \le p:$$

Քանի որ $c$-ն և $c + 2$-ը ունեն միևնույն զույգությունը, հետևաբար, երկու դեպքում էլ բոլոր ինտերվալները ստացվել են միաժամանակ կամ զույգ կամ կենտ ինտերվալների տրոհումներից: Եվ քանի որ $1 \le i \le t_1$ դեպքում $d^G_{k-1,i,1}$ -ն ամբողջությամբ լցված չէ 1-երով, ապա ինտերվալները կառուցվել են ըստ $G$ ալգորիթմի աշխատանքի առաջին փուլի *(1)* կամ *(3)* դեպքերի: $c + 2$ հատ 1 ստացած ինտերվալները նրանք են, որոնք վերջին երկու 1-ը ստացել են ալգորիթմի աշխատանքի առաջին փուլի վերջին անցման ժամանակ, այսինքն այդ երկու 1-երը կարող էին բաշխված լինել արդեն $c$ հատ 1 ստացած կամայական ինտերվալի վրա:

Այժմ ցույց տանք, որ $G$ ալգորիթմով այսպիսի կառուցումը համընկնում է օպտիմալի հետ: Իրոք,

$d_{k-1,i,1} - d_{k-1,i,0} = d^G_{k-1,i,1} + 1 - d^G_{k-1,i,0} + 1 = c + 2$, երբ $1 \le i \le t_1$, և

$d_{k-1,i,1} - d_{k-1,i,0} = d^G_{k-1,i,1} - 1 - d^G_{k-1,i,0} + 1 = c$, երբ $t_2 + 1 \le i \le p$:

Ստացանք ինտերվալներ 1-երի և 0-ների նույն տարբերությամբ:

2. Այժմ դիցուք՝ $max_{1\le i,j\le p}|c_i - c_j| \le 2$ պայմանը խախտվում է: Դա կարող է լինել այն դեպքում, երբ որոշ ինտերվալներ լցվում են մեկերով $G$ ալգորիթմի աշխատանքի առաջին փուլի լրիվ ցիկլերի ընթացքում: Դիցուք այդ ինտերվալներն են՝ $d^G_{k-1,i_1},\cdots,d^G_{k-1,i_h}$ : Ունենք նաև $c_{i_1} = d^G_{k-1,i_1},\cdots,c_{i_h} = d^G_{k-1,i_h}$ : Այսպիսով, այդ ինտերվալների համար՝ $d^G_{k-1,i_j} \le D$ զույգ երկարության դեպքում, և $d^G_{k-1,i_j} \le D+1$ կենտ երկարության դեպքում: Մնացած ինտերվալների համար $max_{1\le i,j\le p}|c_i - c_j| \le 2$: $c_i \ge c_{i_j}$, երբ $i \ne i_j$ և $1 \le j \le h$:

Նախ ցույց տանք, որ $d^G_{k-1,i_1},\cdots,d^G_{k-1,i_h}$ ինտերվալների համար $\alpha_{i_j} = 0$: Ենթադրենք հակառակը:

Դիտարկենք (4.2.1-2) անհավասարությունը

$$\Delta D_k(G) - \Delta D_k(A) \ge \sum_{j=1}^{h} \alpha_{i_j}\cdot(c_{i_j} - c_{j_0}) + (c_{i_0} - c_{j_0})\cdot \sum_{i=1}^{t}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2$$

Ենթադրենք, որ $c_{j_0}$-ն $c_{i_1},\cdots,c_{i_h}$-երից մեկն է; Այդ դեպքում, $c_{i_0} \ge c_{j_0}$ (քանի որ $c_i \ge c_{i_j}$) երբ $i \ne i_j$ և $1 \le j \le h$ : Երկրորդ գումարելին՝ $(c_{i_0} - c_{j_0})\cdot \sum_{i=1}^{t}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2$ դրական է, եթե կա ոչ զրոյական $\alpha_i$ : Քանի որ $\sum_{j=1}^{h}\alpha_{i_j}\cdot\left(c_{i_j} - c_{j_0}\right) \ge 0$ , ստացանք, որ $\Delta D_k(G) > \Delta D_k(A)$, որը հակասություն է ըստ Թեորեմի առաջին մասի: Ուստի՝ $c_{i_j} - c_{j_0} < 0$, երբ $i \ne i_j$ և $1 \le j \le h$: Այժմ, եթե որևէ $j$-ի համար $\alpha_{i_j} < 0$ (դրական լինել չի կարող), ապա (4.2.1-2)-ում $\sum_{j=1}^{h}\alpha_{i_j}\cdot(c_{i_j} - c_{j_0})$ գումարելին դրական է: Կրկին ստացանք, որ $\Delta D_k(G) > \Delta D_k(A)$, քանի որ $(c_{i_0} - c_{j_0})\cdot \sum_{i=1}^{t}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i)^2 \ge 0$: Այսպիսով, $\alpha_{i_j} = 0$, $1 \le j \le h$:

Ինդեքսների պարզեցման համար վերցնենք $\alpha_j = 0$, $1 \le j \le h$:

Ենթադրենք, որ

$c_{h+1} = \cdots = c_{t_1} = c$,

$c_{t_{1+1}} = \cdots = c_{t_2} = c+1$,

$c_{t_2+1} = \cdots = c_p = c+2$:

Տեղադրենք (4.1.2-3)-ում.

$$c \cdot \sum_{i=h+1}^{t_1} \alpha_i + (c+1) \cdot \sum_{i=t_1+1}^{t_2} \alpha_i + (c+2) \cdot \sum_{i=t_2+1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i)^2 = 0$$

$$c \cdot \left(\sum_{i=h+1}^{t_1} \alpha_i + \sum_{i=t_1+1}^{t_2} \alpha_i + \sum_{i=t_2+1}^{p} \alpha_i\right) + \sum_{i=h+1}^{t_1} \alpha_i + 2\sum_{i=t_2+1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i)^2 = 0$$

Ունենք, որ $\sum_{i=h+1}^{p} \alpha_i$ և $\sum_{i=t_2+1}^{p} \alpha_i = -\left(\sum_{i=h+1}^{t_1} \alpha_i + \sum_{i=t_1+1}^{t_2} \alpha_i\right)$

Հետևաբար,

$$\sum_{i=t_1+1}^{t_2} \alpha_i + \sum_{i=t_2+1}^{p} \alpha_i - \left(\sum_{i=h+1}^{t_1} \alpha_i + \sum_{i=t_1+1}^{t_2} \alpha_i\right) + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i)^2 = 0$$

$$\sum_{i=t_2+1}^{p} \alpha_i - \sum_{i=h+1}^{t_1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i)^2 = 0$$

Քանի որ $\alpha_i$-երը ամբողջ թվեր են, ուստի $|\alpha_i| \le 1$, երբ $h+1 \le i \le p$, և $\alpha_i = 0$, $t_1 + 1 \le i \le t_2$: Այստեղից էլ՝ $\alpha_i \in \{0,1\}$, երբ $h+1 \le i \le t_1$, $\alpha_i \in \{-1,0\}$, երբ $t_2 + 1 \le i \le p$, և դրական ու բացասական 1-երի քանակները իրար հավասար են:

Նույն դատողությունները, ինչ որ նախորդ դեպքում, բերում են նրան, որ ստացված ինտերվալները արդյունք են $G$ ալգորիթմի որևէ ճյուղի: Թեորեմն ապացուցված է: □

**Ոչ օպտիմալության օրինակ**

Հետևյալ օրինակը ցույց է տալիս, որ $G$ ալգորիթմը օպտիմալ չէ:

$$m = 13,\ n = 8,\ S = (11,11,11,11,11,11,11,11):$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

**Նկար 4.2.1-1:** $m = 13,\ n = 8,\ S = (11,11,11,11,11,11,11,11)$ դեպքի համար մատրիցի կառուցումը ըստ $G$ ալգորիթմի և ըստ օպտիմալ ալգորիթմի

Նկար 4.2.1-1-ի ձախ կողմում մատրիցը կառուցված է ըստ $G$ ալգորիթմի: 1-5 սյուների կառուցումը միարժեք է, 6-8 սյուների կամայական կառուցում բերում է նույն երկարության ինտերվալների, ինչ որ բերված օրինակում; վերջին սյունում կա մեկ հատ երկու երկարության ինտերվալ, և հետևաբար, երկու կրկնվող տող՝ առաջին և երկրորդ տողերը: Իսկ նկար 4.1.2-1-ի աջ կողմում կառուցված մատրիցը, որի 5-րդ սյունը չի համապատասխանում $G$ ալգորիթմին, կրկնվող տողեր չունի:

### *4.2.2 $G$ ալգորիթմի հատկությունները*

Այս բաժնի նպատակն է ուսումնասիրել $G$ ալգորիթմի հատկությունները: Նախ, նպատակահարմար է Գլուխ2-ի հետևյալ լեմմաները վերաձևակերպել բինար մատրիցների տերմիններով:

**Լեմմա 4.2.2-1** (Գլուխ 2, Լեմմա 2.1.2-2): Դիցուք՝ տրված $S = (s_1, \cdots, s_n)$ վեկտորի համար $\overline{U}(S)$ -ը դատարկ չէ, և $s_k > m/2$ որևէ $k$ -ի համար: Այդ դեպքում $S' = (s_1, \cdots, s_{k-1}, s_k - 1, s_{k+1}, \cdots, s_n)$ վեկտորի համար $\overline{U}(S')$-ը դատարկ չէ:

**Լեմմա 4.2.2-2** (Գլուխ 2, Լեմմա 2.1.2-1): Դիցուք՝ տրված $S = (s_1, \cdots, s_n)$ վեկտորի համար $\overline{U}(S)$-ը դատարկ չէ: Այդ դեպքում $S' = (s_1, \cdots, s_{k-1}, m - s_k, s_{k+1}, \cdots, s_n)$ վեկտորի համար $\overline{U}(S')$-ը դատարկ չէ:

Այսպիսով, $\overline{U}(S)$ դասում գոյության/կառուցման խնդիրներում կարող ենք ենթադրել, որ $s_k \geq m/2$: Ենթադրելու ենք նաև, որ $s_1 \geq \cdots \geq s_n$, չնայած կառուցման խնդիրներում, ի տարբերություն գոյության խնդիրների, $S$ վեկտորի կոորդինատների կարգը կարող է ազդել հերթական սյան կառուցման վրա:

Հիշենք նաև որ կարող ենք սահմանափակվել $m \leq 2^{n-1}$ դեպքով:

**Թեորեմ 4.2.2-1:** Դիցուք՝ տրված է $S = (s_1, \cdots, s_n)$ վեկտորը, $s_1 \geq \cdots \geq s_n$, և $s_k > m/2$ որևէ $k$-ի համար: Այդ դեպքում, եթե $G$ ալգորիթմը կառուցում է մատրից $\overline{U}(S)$ դասից, ապա այն կառուցում է նաև մատրից $\overline{U}(S')$ դասից, որտեղ

$$S' = (s_1, \cdots, s_{k-1}, s_k - 1, s_{k+1}, \cdots, s_n)^1 :$$

Եթե համաձայն Լեմմա 4.2.2-1-ի $\overline{U}(S)$-ին պատկանելու առումով “լավ” վեկտորներ են հանդիսանում $m/2$-ին մոտ կոորդինատներ ունեցող վեկտորները, ապա ըստ Թեորեմ 4.2.2-1-ի նրանք “լավ” վեկտորներ են նաև $G$ ալգորիթմի տեսանկյունից, երբ $s_1 \geq \cdots \geq s_n$:

Նախքան թեորեմի ապացույցը նշենք որոշ դիտողություններ/հատկություններ $G$ ալգորիթմի կառուցումների հետ կապված:

1. Ինտերվալների քանակը սյուն առ սյուն աճում է՝ ակնհայտ է:
2. Կենտ երկարության ինտերվալների քանակը չի նվազում, իրոք, յուրաքանչյուր կենտ ինտերվալի տրոհումից առաջանում է մեկ կենտ ինտերվալ, զույգ ինտերվալի տրոհումից կարող է առաջանալ երկու կենտ ինտերվալ:
3. Եթե որևէ սյունում որևէ ինտերվալ (դիցուք՝ $d$ երկարության) ստանում է որոշ քանակով հավելյալ 1-եր (դիցուք՝ $c$ հատ), ապա հաջորդ սյուներում $d$-ի բոլոր տրոհումները ստանում են $\leq c$ քանակով հավելյալ 1-եր անկախ տրոհման երկարությունից, սա հետևում է կառուցումից:

Այժմ ապացուցենք Թեորեմ 4.2.2-1-ը:

**Ապացույց:** Դիցուք՝ $A \in \overline{U}(S)$ մատրիցը կառուցվել է $G$ ալգորիթմով: Այստեղից հետևում է, որ մատրիցի $n$-րդ սյունը կազմված է մեկ երկարության ինտերվալներից: Ապացուցենք, որ եթե $G$-ն մուտքում ստանում է $S' = (s_1, \cdots, s_{k-1}, s_k - 1, s_{k+1}, \cdots, s_n)$-ը, ապա կառուցված $A'$ մատրիցը նույնպես վերջին սյունում կունենա միայն մեկ երկարության ինտերվալներ:

$A$ և $A'$-ի առաջին $k-1$ սյուները համընկնում են (կարող ենք ենթադրել, որ երկու դեպքում էլ ոչ միարժեքության դեպքում ալգորիթմի միևնույն ճյուղերն են աշխատել): $A_k$-ով և $A_k{}'$-ով նշանակենք $A$ և $A'$ մատրիցների առաջին $k$ սյուները, համապատասխանաբար:

---

[1] Եթե $S$-ում կան $m/2$-ից մեծ արժեքով հավասար կոմպոնենտներ, ապա փոքրացնելու համար ընտրում ենք ամենամեծ համարով կոմպոնենտը, այսպիսով պահպանելով $S' = (s_1, \cdots, s_{k-1}, s_k - 1, s_{k+1}, \cdots, s_n)$-ում չաճման կարգը:

Հիշենք, որ $m/2$-ից մեծ արժեք ունեցող հավասար կոորդինատներից որպես $k$ ընտրում ենք ամենամեծ համարը: Եթե ստացվի $k = n$, ապա ակնհայտորեն վերջին սյունում կունենանք միայն մեկ երկարության ինտերվալներ: Դիցուք՝ $k < n$, և այդ դեպքում $s_k > s_{k+1}$:

Դիցուք՝ $l$ -ը $k - 1$ սյան կենտ երկարության ինտերվալների քանակն է, և $r_k = s_k - (m - s_k) = 2s_k - m$: $r_k$-ն և $l$-ը ունեն միևնույն զույգությունը, և հետևաբար, $r_k - l$-ը զույգ թիվ է: $r'_k$-ով նշանակենք $A'$ մատրիցի $k$-րդ սյան մեկերի և զրոների տարբերությունը՝ $r'_k = (s_k - 1) - \big(m - (s_k - 1)\big) = 2s_k - m - 2$, և $r'_k = r_k - 2$:

Դիտարկենք $k$-րդ սյան կառուցումը՝ $r_k$ և $r'_k = r_k - 2$ հավելյալ մեկերով:

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը:

ա) $r_k \leq l$, այստեղից հետևում է $r'_k < l$ անհավասարությունը:

**Առաջին փուլ**

$l$ հատ կենտ երկարության ինտերվալներից ընտրում ենք կամայական $r'_k$ հատը, ($r_k$ հատը) և տեղադրում մեկական 1 յուրաքանչյուրի վրա:

**Երկրորդ փուլ**

Մնացած կենտ երկորության ինտերվալներից կեսը ստանում է մեկական 1, մյուս կեսը՝ մեկական 0, որից հետո յուրաքանչյուր ինտերվալ բաժանվում է երկու հավասար մասի՝ ստանալով հավասար թվով 1-եր և 0-ներ:

Քանի որ ինտերվալների երկարությունները չեն փոխվում, ապա $A_k$ -ի և $A_k{}'$ -ի կառուցումների արդյունքում ստացվում են նույն երկարության ինտերվալներ, և հետևաբար, մնացած բոլոր սյուների կառուցումը երկու դեպքում էլ նույնն է:

բ)Դիտարկենք $r_k > l$ դեպքը:

Քանի որ $r_k - l$-ը զույգ է, ապա $r_k - l \geq 2$:

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1. $r'_k = l$

$A_k{}'$-ի կառուցումը:

**Առաջին փուլ**

Բոլոր կենտ երկարության ինտերվալները ստանում են մեկական 1 արժեք:

**Երկրորդ փուլ**

Մնացած $l - r'_k$ կենտ ինտերվալներից կեսը ստանում է մեկական 1, մյուս կեսը՝ մեկական 0, որից հետո յուրաքանչյուր ինտերվալ բաժանվում է երկու հավասար մասի՝ ստանալով հավասար թվով մեկեր և զրոներ:

Այժմ դիտարկենք $A_k$-ի կառուցման փուլերը

**Առաջին փուլ**

Բոլոր կենտ երկարության ինտերվալները ստանում են մեկական 1, և երկու հավելյալ 1 է առաջանում զույգ երկարության ինտերվալներից որևէ մեկի վրա բաշխելու համար: $d$-ով նշանակենք այն զույգ ինտերվալի երկարությունը, որը ստանում է երկու հավելյալ մեկը:

**Երկրորդ փուլ**

Յուրաքանչյուր ինտերվալ բաժանվում է երկու հավասար մասի՝ ստանալով հավասար թվով 1-եր և 0-ներ:

$d$-ի տրոհումներից բացի մյուս բոլոր ինտերվալների երկարությունները նույնն են $A_k$-ում և $A_k{}'$-ում, և կշարունակեն նույնը մնալ հետագա սյուներում, քանի որ $s_1 \geq \cdots \geq s_n$, և $s_k > s_{k+1}$-ից հետևում է, որ հավելյալ 1-եր չեն առաջանա հետագա սյուներում, և հետևաբար, բոլոր ինտերվալները կիսվում են, ուստի կհետևենք միայն $d$-ի տրոհումներին:

$$\begin{array}{lll} A_k & d & \begin{array}{l} \frac{d+2}{2} = \frac{d}{2} + 1 \\ \\ \frac{d-2}{2} = \frac{d}{2} - 1 \end{array} \\ A_k{}' & d & \begin{array}{l} \frac{d}{2} \\ \\ \frac{d}{2} \end{array} \end{array} \qquad (4.2.2\text{-}1)$$

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

- $\frac{d}{2}$-ը կենտ է

Հետևաբար, $\left(\frac{d}{2} + 1\right)$-ը և $(\frac{d}{2} - 1)$-ը զույգ են:

Քանի որ հավելյալ 1-եր չկան, ապա $(k+1)$-րդ սյունում կունենանք $d$-ից եկող հետևյալ տրոհումները.

$A_k$ - $\left(\frac{d}{2}+1\right)/2, \left(\frac{d}{2}+1\right)/2, \left(\frac{d}{2}-1\right)/2, \left(\frac{d}{2}-1\right)/2$

$A_k{}'$ - $\left(\frac{d}{2}+1\right)/2, \left(\frac{d}{2}-1\right)/2, \left(\frac{d}{2}-1\right)/2, \left(\frac{d}{2}+1\right)/2$

Այսպիսով, ստացվում են նույն երկարության ինտերվալներ, այսինքն հետագա սյուների կառուցումները նույնն են:

- $\frac{d}{2}$-ը զույգ է

$\left(\frac{d}{2}+1\right)$-ը և $\left(\frac{d}{2}-1\right)$-ը կենտ են:

Քանի որ հավելյալ մեկեր չկան, ապա $(k+1)$ -րդ սյունում $d$ -ի տրոհումներից կունենանք.

$A_k$ - $\left(\frac{d}{2}+1+1\right)/2, \left(\frac{d}{2}+1-1\right)/2, \left(\frac{d}{2}-1+1\right)/2, \left(\frac{d}{2}-1-1\right)/2$

$A_k{}'$ - $\left(\frac{d}{4}\right), \left(\frac{d}{4}\right), \left(\frac{d}{4}\right), \left(\frac{d}{4}\right)$

Այսպիսով, իրարից տարբերվող մասը հետևյալն է.

$s_k$-ից եկողը՝ $\frac{d}{4}+1, \frac{d}{4}-1$, $s_k-1$-ից եկողը՝ $\frac{d}{4}, \frac{d}{4}$ (4.2.2-2)

Պրոցեսը կշարունակվի, եթե $\frac{d}{4}$-ը զույգ է, և կշարունակվի մինչև այն $(k+t)$-րդ սյունը, որտեղ $\frac{d}{2^t}$ -ն առաջին կենտ երկարության ինտերվալն է: Այս սյունում արդեն $s_k$-ից եկող և $s_k-1$-ից եկող ինտերվալները կունենան նույն երկարությունները: Հակառակ դեպքում $d$-ն երկուսի աստիճան է: Դիցուք՝ $d=2^q$, և $(k+q+1)$-րդ սյունում առաջանում են $d$ հատ մեկ երկարության ինտերվալներ, և $k+q+1 \le n$, քանի որ ըստ ենթադրության, $(s_1, \cdots, s_k)$-ի համար $G$-ն կառուցում էր տարբեր տողերով մատրից:

2. $r'_k > l$

**Առաջին փուլ**

Բոլոր կենտ երկարության ինտերվալները ստանում են մեկական 1, որից հետո հավելյալ մեկերը տեղադրում ենք երկուական՝ սկսելով զույգ երկարության ինտերվալներից, այնուհետև շարունակում ենք տեղադրումը հաջորդաբար բոլոր կենտ և բոլոր զույգ ինտերվալների վրա, մինչև որ բոլոր հավելյալ 1-երը սպառվեն:

**Երկրորդ փուլ**

Յուրաքանչյուր ինտերվալ բաժանվում է երկու հավասար մասի՝ ստանալով հավասար թվով 1-եր և 0-ներ:

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

- Դիցուք՝ առաջին փուլը կանգ է առնում կենտ երկարության ինտերվալների վրա.

$A_k$-ի դեպքում ենթադրենք, որ $t$ հատ կենտ երկարության ինտերվալ ստանում են $c$ հատ հավելյալ մեկ ($c$-ն կենտ է), մնացած կենտ ինտերվալները կամ ստանում են $c-2$ հավելյալ մեկ, կամ ավելի կարճ են, և լցված են 1-երով: Զույգ երկարության ինտերվալները ստանում են $c-1$ հավելյալ 1, կամ ավելի կարճ են, և լցված են 1-երով:

$A'_k$-ի դեպքում՝ $t-1$ հատ կենտ երկարության ինտերվալ կստանան $c$ հատ հավելյալ 1 ($c$-ն կենտ է), մնացած կենտ ինտերվալները կամ կստանան $c-2$ հավելյալ 1, կամ ավելի կարճ են, և լցված են 1-երով: Զույգ երկարության ինտերվալները ստանում են $c-1$ հավելյալ 1, կամ ավելի կարճ են, և լցված են 1-երով:

Դիցուք՝ $d$-ն կենտ երկարության այն ինտերվալի երկարությունն է, որը $A_k$-ում ստացել էր երկու հատ հավելյալ 1, և $A'_k$- ում չէր ստացել:

$$A_k \quad d \begin{cases} (d+c)/2 \\ (d-c)/2 \end{cases}$$

$$A'_k \quad d \begin{cases} (d+c-2)/2 = (d+c)/2 - 1 \\ (d-(c-2))/2 = (d-c)/2 + 1 \end{cases}$$

Մնացած երկարությունները $k+1$-րդ սյունում նույնն են: Հնարավո՞ր է արդյոք, որ հաջորդ սյուներում մնացած ինտերվալների վրա բաշխումը փոխվի: Դիտարկենք հնարավոր տարբերակները.

ա) եթե $s_k-1$-ի պատճառով $d$-ն տրոհվի այնպիսի երկարությունների, որ հաջորդ սյունում դրանցից որևէ մեկը լցվի 1-երով, և այդ պատճառով հավելյալ 1-երի բաշխումը մյուս ինտերվալների վրա փոխվի (ավելանա):

Այս դեպքը հնարավոր չի, քանի որ $A'_k$-ում ավելի մեծ երկարության ինտերվալը՝ $(d+c)/2$-ն փոքրանում է, իսկ ավելի մեծ երկարության ինտերվալը՝ $(d-c)/2$-ն մեծանում է:

բ) եթե $A_k$-ում $(d+c)/2$-ը և $(d-c)/2$-ը կենտ են, և հետևաբար, հավելյալ 1-երի քանակը երկուսով պակաս կլինի, քան $A'_k$-ում, որտեղ երկուսն էլ զույգ են:

Այս դեպքը հնարավոր չի, քանի որ $(d+c)/2$-ը և $(d-c)/2$-ը նույն զույգությունը ունենալ չեն կարող:

Այլ դեպքեր հնարավոր չեն, ուստի մենք կարող ենք հետևել միայն $d$-ից առաջացող հետագա տրոհումներին:

- Դիցուք՝ առաջին փուլը կանգ է առնում զույգ երկարության ինտերվալների վրա.

$A_k$-ի դեպքում ենթադրենք, որ $q$ հատ զույգ երկարության ինտերվալ ստանում են $c$ հատ հավելյալ 1 ($c$-ն զույգ է), մնացած զույգ ինտերվալները կամ ստանում են $c-2$ հավելյալ 1, կամ ավելի կարճ են, և լցված են 1-երով: Կենտ երկարության ինտերվալները ստանում են $c-1$ հավելյալ 1, կամ ավելի կարճ են, և լցված են 1-երով:

$A'_k$-ի դեպքում՝ $q-1$ հատ զույգ երկարության ինտերվալ կստանան $c$ հատ հավելյալ 1 ($c$-ն զույգ է), մնացած զույգ ինտերվալները կամ կստանան $c-2$ հավելյալ 1, կամ ավելի կարճ են, և լցված են 1-երով: Կենտ երկարության ինտերվալները ստանում են $c-1$ հավելյալ 1, կամ ավելի կարճ են, և լցված են 1-երով:

Դիցուք՝ $d$-ն զույգ երկարության ինտերվալներից նրա երկարությունն է, որը $A_k$-ում ստացել էր երկու հատ հավելյալ 1, և $A'_k$- ում չէր ստացել:

$$A_k \quad d \begin{cases} (d+c)/2 \\ (d-c)/2 \end{cases}$$

$$A'_k \quad d \begin{cases} (d+c-2)/2 = (d+c)/2 - 1 \\ (d-(c-2))/2 = (d-c)/2 + 1 \end{cases}$$

Մնացած երկարությունները $k+1$-րդ սյունում նույնն են: Հնարավո՞ր է արդյոք, որ հաջորդ սյուներում մնացած ինտերվալների վրա բաշխումը փոխվի: Դիտարկենք հնարավոր տարբերակները.

ա) եթե $s_k - 1$-ի պատճառով $d$-ն տրոհվի այնպիսի երկարությունների, որ հաջորդ սյունում դրանցից որևէ մեկը լցվի 1-երով, և այդ պատճառով հավելյալ 1-երի բաշխումը մյուս ինտերվալների վրա փոխվի՝ ավելանա:

Այս դեպքը հնարավոր չի, քանի որ $A'_k$-ում ավելի մեծ երկարության ինտերվալը՝ $(d+c)/2$-ն փոքրանում է, իսկ ավելի մեծ երկարության ինտերվալը՝ $(d-c)/2$-ն մեծանում է:

բ) եթե $A_k$-ում $(d+c)/2$-ը և $(d-c)/2$-ը կենտ են, և հետևաբար, հավելյալ 1-երի քանակը երկուսով պակաս կլինի, քան $A'_k$-ում, որտեղ երկուսն էլ զույգ են:

Այս դեպքը հնարավոր չի, քանի որ $(d+c)/2$-ը և $(d-c)/2$-ը նույն զույգությունը ունենալ չեն կարող:

Ուրիշ դեպքեր հնարավոր չեն, ուստի մենք կարող ենք միայն հետևել $d$-ից առաջացող հետագա տրոհումներին:

Կառուցումները հեշտացնելու նպատակով կդիտարկենք մեկ մասնավոր դեպքի մանրամասն նկարագիրը, ընդհանուր դեպքում դատողությունները համանման են:

- Դիցուք՝ հավելյալ մեկերի քանակը՝ $r'_k$-ն, հավասար է կենտ ինտերվալների քանակին գումարած երկու անգամ զույգ ինտերվալների քանակ:

Առաջին փուլը կանգ է առնում կենտ երկարության ինտերվալների վրա:

$A_k$-ի դեպքում - մեկ հատ կենտ երկարության ինտերվալ ստանում է երեք հատ հավելյալ 1 ($c = 3$), մնացած կենտ ինտերվալները ստանում են մեկ հավելյալ 1: Զույգ երկարության ինտերվալները ստացել են երկուական 1:

$A'_k$-ի դեպքում - բոլոր կենտ երկարության ինտերվալները ստանում են մեկ հատ հավելյալ 1: Զույգ երկարության ինտերվալները ստացել են երկու հատ հավելյալ 1:

Դիցուք՝ $d$-ն կենտ երկարության ինտերվալներից նրա երկարությունն է, որը $A_k$-ում ստացել էր երեք հատ հավելյալ 1, և $A'_k$- ում՝ մեկ հատ: Կհետևենք միայն $d$-ից առաջացող հետագա տրոհումներին:

$$A_k \quad d \begin{cases} (d+3)/2 = (d+1)/2 + 1 \\ (d-3)/2 = (d-1)/2 - 1 \end{cases}$$

$$A'_k \quad d \begin{cases} (d+1)/2 \\ (d-1)/2 \end{cases}$$

Դիտարկենք հնարավոր դեպքերը.

- $(d+1)/2$-ը կենտ է և $(d-1)/2$-ը զույգ է (նույն զույգությունն ունենալ չեն կարող)

Այդ դեպքում, $(d+1)/2+1$ զույգ է, և $(d-1)/2-1$ -ը կենտ է: Քանի որ կենտ երկարության ինտերվալների քանակը չի կարող նվազել, և $s'_k \geq s_{k+1}$, ապա $A'_k$-ից եկող $(k+1)$-րդ սյունում կենտ երկարության ինտերվալները ստանում են ամենաշատը մեկ հավելյալ 1: Նույնը կարելի է ասել նաև $(k+1)$-րդ սյան $A_k$-ից եկող ինտերվալների մասին, քանի որ $s_k > s_{k+1}$, և հետևաբար, հավելյալ 1-երի քանակը 2-ով պակասում է: Զույգ երկարության ինտերվալները երկու դեպքում էլ ստանում են երկու կամ զրո հավելյալ 1: Կենթադրենք, որ նույն ինտերվալները երկու դեպքում էլ ստանում են նույն քանակով հավելյալ 1-երը:

Դիտարկենք առանձին դեպքերը.

- Զույգ երկարության ինտերվալները հավելյալ 1-եր չեն ստացել:

$(k+1)$-րդ սյունում կունենանք $d$-ից եկող հետևյալ տրոհումները.

$A_k \quad (d+1)/2+1)/2, ((d+1)/2+1)/2, ((d-1)/2-1+1)/2\,, ((d-1)/2-1-1)/2$

$A_k{}' \quad (d+1)/2+1)/2, ((d+1)/2-1)/2, (d-1)/4\,, (d-1)/4$

Այսպիսով, իրարից տարբերվող երկարությունները՝

$A_k \quad (d-1)/4+1, (d-1)/4-1$

$A_k{}' \quad (d-1)/4, (d-1)/4$

Ստացանք նույն երկարությունները, ինչ որ (4.2.2-2)-ում, և կարող ենք շարունակել նույն դատողություններով:

- Զույգ երկարության ինտերվալներից մեկը ստացել է երկու հավելյալ 1:

Այն դեպքում, երբ այդ հավելյալ 1-երը ստացել է զույգ երկարության այնպիսի ինտերվալ, որը չի եկել $d$ -ից, ապա կստանանք նախորդ դեպքը: Կարող ենք ենթադրել, որ

ալգորիթմի հենց այդ ճյուղն է աշխատել: Եթե ուրիշ զույգ երկարության ինտերվալ չկա (բացի $d$-ից եկողներից) - նշանակում է, որ կենտ ինտերվալների քանակը առնվազն երկուսով շատացել է, դա էլ իր հերթին նշանակում է, որ կենտերի վրա բաշխելուց հետո հավելյալ 1-երը սպառվում են:

- $(d+1)/2$-ը զույգ է և $(d-1)/2$-ը կենտ է

Այդ դեպքում, $(d+1)/2+1$ կենտ է, և $(d-1)/2-1$-ը զույգ է:

Իրարից տարբերվող երկարությունները՝

$A_k$ $\quad (d+1)/4+1, (d+1)/4-1$

$A_k{}'$ $\quad (d+1)/4, (d+1)/4$

Ստացանք նույն երկարությունները, ինչ որ (4.2.2-2)-ում, և կարող ենք շարունակել նույն դատողություններով: □

**Փորձարարական արդյունքներ**

$G$ ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքը գնահատելու համար դիտարկենք ալգորիթմի տեսանկյունից ամենավատ վեկտորները՝ ըստ Թեորեմ 4.2.2-1-ի դրանք մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաներից եկող վեկտորներն են:

Ալգորիթմի աշխատանքի փորձարկման համար կառուցվել են տարբեր վեկտորներ:

$n=6$-ի համար կառուցվել են $E^n$ որոշված բոլոր մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաները, որոնք ունեն $m=1,\cdots,2^5$ մեկ/true արժեք: Օրինակ, $m=28$-ի համար գոյություն ունեն $390050$ հատ մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիա:

Հաշվվել են համապատասխան սյուների գումարների վեկտորները: Քանի որ նույն չափերն ունեցող տարբեր (0,1)-մատրիցներ կարող են ունենալ սյուների գումարի միևնույն վեկտորը, ապա առաջացել են կրկնվող վեկտորներ, որոնք հեռացվել են հետագա դիտարկումից: Բացի դրանից դիտարկվել են միայն այն վեկտորները, որոնց կոորդինատները կարգավորված են ըստ նվազման կարգի: Քանի որ ալգորիթմի աշխատանքը կարող է կախված լինել կոորդինատների կարգից, ապա այսպիսի սահմանափակումը կարող էր նվազեցնել ալգորիթմի արդյունավետությունը: Այնուհետև, ալգորիթմի ճյուղավորումներից միայն մեկն է դիտարկվել (կամայական ընտրությամբ), որը նույնպես սահմանափակում է ալգորիթմի հնարավորությունները:

Նման սահմանափակումների նպատակը մի կողմից հաշվարկների պարզեցումն է, մյուս կողմից՝ ալգորիթմի աշխատանքի գնահատումը կամայական դեպքի համար:

Վերոհիշյալ բոլոր դեպքերում կառուցվող մատրիցի վերջին սյունում չտրոհված են մնացել ամենաշատը 2 երկարության ինտերվալներ ($m \leq 11$ դեպքերում չտրոհված ինտերվալ չի մնացել, այսինքն, ալգորիթմը կառուցել է տարբեր տողերով մատրիցը):

**Աղյուսակ 4.2.2-1**: $G$ ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքը:

| Տողերի քանակ | Վեկտորների քանակ | Մեկ հատ 2-երկարության ինտերվալ | Մեկից ավելի 2-երկարության ինտերվալ |
|---|---|---|---|
| 12 | 23 | 5 | 0 |
| 13 | 30 | 5 | 0 |
| 14 | 41 | 11 | 1 |
| 15 | 51 | 11 | 0 |
| 16 | 69 | 18 | 0 |
| 17 | 83 | 26 | 1 |
| 18 | 97 | 33 | 1 |
| 19 | 115 | 34 | 0 |
| 20 | 134 | 40 | 1 |
| 21 | 149 | 44 | 1 |
| 22 | 172 | 59 | 1 |
| 23 | 193 | 63 | 3 |
| 24 | 214 | 90 | 2 |
| 25 | 232 | 99 | 3 |
| 26 | 255 | 119 | 2 |
| 27 | 265 | 108 | 5 |
| 28 | 290 | 134 | 5 |
| 29 | 287 | 119 | 11 |
| 30 | 287 | 159 | 3 |
| 31 | 284 | 121 | 15 |
| 32 | 253 | 0 | 0 |

Աղյուսակ 4.2.2-1-ում ներկայացված են արդյունքները, որտեղ առաջին սյունը ցույց է տալիս մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիայի 1 արժեքի կետերի քանակը (մատրիցի տողերի քանակը), երկրորդ սյունը՝ մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիայի ասոցացված վեկտորների

(մատրիցի սյուների գումարի վեկտորների) քանակը կոորդինատների տեղափոխության ճշտությամբ, երրորդ սյունը՝ այն դեպքերի քանակը, որտեղ կառուցվող մատրիցի վերջում սյունում մնում է մեկ հատ 2 երկարության ինտերվալ, և չորրորդ սյունը՝ այն դեպքերի քանակը, որտեղ կառուցվող մատրիցի վերջում սյունում մնում է առնվազը երկու հատ 2 երկարության ինտերվալ:

Դիտարկվել են նաև հեշտ կառուցվող մոնոտոն ֆունկցիաներ մինչև 11 չափանի բինար խորանարդում, և ալգորիթմն աշխատացվել է համապատասխան սյուների գումարի վեկտորների վրա: Այս բոլորի համար ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքը նույնն է՝ վերջին սյունում երկուսից մեծ երկարության ինտերվալ չի առաջանում:

Փորձերից եկող այս ենթադրությունը, որ տարբեր տողերով մատրիցի դեպքում $G$-ն չի կարող թողնել 2-ից մեծ երկարության ինտերվալներ վերջին սյունում, տեսականորեն չի ապացուցվել, սակայն ընդունելով, որ այն ճիշտ է, գնահատենք աշխատանքի արդյունքը: Վատագույն դեպքում՝ վերջին սյունը կազմված է 2-երկարության ինտերվալներից, այստեղից՝ $m$ տող ունեցող մատրիցը կունենա $m/2$ հատ կրնկվող տողերի զույգ: Տարբեր տողերի զույգերի քանակը ըստ $G$-ի կլինի՝ $C_m^2 - \frac{m}{2} = \frac{m(m-2)}{2}$, և այսպիսով, հարաբերական արդյունավետության գնահատականը կլինի. $1 + \frac{1}{m-2}$:

### *4.2.3 G ալգորիթմի գնահատումը*

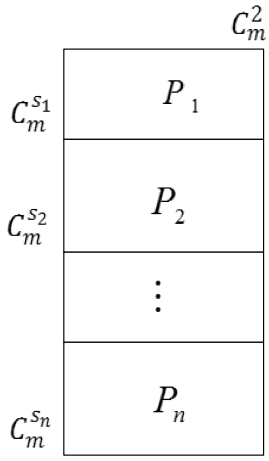
Այս բաժնում տրվում է $G$ ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքի երաշխիքի տեսական գնահատական՝ օգտագործելով բազմության ագահ ծածկույթ մեթոդը [186]:

Դիտարկվող խնդիրը հետևյալն էր՝ կառուցել $m \times n$ չափանի $M$ բինար մատրից, որը $i$-րդ սյունում ունենա տրված $s_i$ քանակով 1; և որում զույգ առ զույգ տարբեր տողերի քանակը լինի մաքսիմալ:

Դիտարկենք $M$ մատրիցի սյուն-առ-սյուն կառուցումը: $i$-րդ սյունում $s_i$ հատ 1-երը կարող են բաշխվել $C_m^{s_i}$ տարբեր ձևերով; յուրաքանչյուր բաշխման արդյունքում իրարից տարբերվող տողերի զույգերի քանակը միևնույնն է՝ $s_i(m - s_i)$: Համարակալենք $C_m^{s_i}$ հատ բաշխումները՝ $1,2,\cdots,C_m^{s_i}$:

Մյուս կողմից ունենք, որ $m$ տող ունեցող մատրիցի տարբեր տողերի զույգերի քանակը $C_m^2$ է: Համարակալենք տողերի զույգերը՝ $1,2,\cdots,C_m^2$ :

Այժմ կառուցենք $P$ բինար մատրիցը հետևյալ ձևով. $P$ -ն ունի $\sum_{i=1}^{n} C_m^{s_i}$ հատ տող՝ խմբավորված $P_1, P_2, \dots, P_n$ բլոկների/ենթամատրիցների; յուրաքանչյուր $P_i$ բլոկում կա $C_m^{s_i}$ հատ տող, որոնք պետք է համապատասխանեն $m$ տեղերում $s_i$ հատ 1-երի բաշխումներին: $P$ մատրիցն ունի $C_m^2$ հատ սյուն, որոնք պետք է համապատասխանեն $M$-ի տարբեր տողերի զույգերին՝ ըստ բաշխումների: Նկար 4.2.3-1-ում՝ մատրիցի կառուցվածքն է:




**Նկար 4.2.3-1:** $P$ մատրիցի կառուցվածքը:

$p_{i,j,k}$-ով նշանակենք $P_i$ ենթամատրիցի $(j,k)$ էլեմենտը.

$$p_{i,j,k} = \begin{cases} 1, \text{եթե M} - \text{ի տողերի k} - \text{րդ զույգը տարբերվում է i} - \text{րդ սյունով,} \\ \qquad \text{և այն էլ s}_\text{i} \text{ հատ մեկերի j} - \text{րդ բաշխումով} \\ 0, \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Այսպիսով, $P_i$ –ում $j$-րդ տողը ցույց կտա, թե $s_i$ հատ 1-երի $j$-րդ բաշխումը տողերի որ զույգերն է տարբերում, և հետևաբար $P_i$ –ի յուրաքանչյուր տող կպարունակի $s_i(m-s_i)$ հատ 1:

$P_i$ –ում $k$-րդ սյունը ցույց կտա, թե $M$-ի տողերի $k$-րդ համարով զույգը $s_i$ հատ մեկերի որ բաշխումներով է տարբերվում: $k$-րդ սյան 1-երի քանակը ցույց կտա, թե $s_i$ հատ 1-երի քանի հատ բաշխում կա, որի արդյունքում տողերի $k$-րդ համարով զույգը կտարբերվի $i$-րդ տեղում: Տողերի որևէ զույգ տարբերվում է $i$-րդ տեղում այն և միայն այն դեպքում, երբ տողերից մեկն այդ տեղում ունի 1 արժեք, մյուսը՝ 0; կամ հակառակը: Մնացած

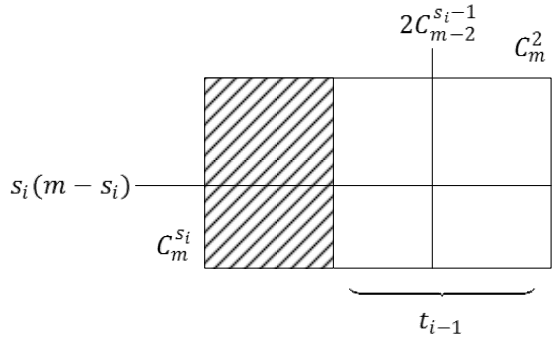
տեղերում մեկերի բաշխումը կամայական է: Այսպիսով, $P_i$ –ի յուրաքանչյուր սյուն կպարունակի $2C_{m-2}^{s_i-1}$ հատ մեկ: Ստացանք՝

$$s_i(m-s_i)C_m^{s_i} = 2C_{m-2}^{s_i-1}C_m^2 \qquad (4.2.3\text{-}1)$$

Այժմ, սյուն-առ-սյուն կառուցենք $M$-ը, և համապատասխան կառուցումը դիտարկենք $P$-ում: $M$-ի $i$-րդ սյան կառուցումով ֆիքսվում է մեկ տող $P_i$-ում:

$M$-ի առաջին սյունը կառուցել, - նշանակում է ընտրել $C_m^{s_1}$ բաշխումներից որևէ մեկը: Բաշխման արդյունքում տողերի որոշակի զույգեր իրարից կտարբերվեն՝ և այդպիսով ընտրվում/ֆիքսվում է $P_1$ -ի համապատասխան տողը: Այդ տողում առկա 1-երին համապատասխան $M$-ի տողերի $s_1(m-s_1)$ հատ զույգեր արդեն տարբերվել են, $P$-ում առանձնացնենք այդ մասը, և հանենք հետագա դիտարկումից:

Դիտարկենք հերթական $i$-րդ քայլը – դիցուք՝ $s_1, s_2, \cdots, s_{i-1}$ հատ 1-երն արդեն բաշխվել են $M$-ի առաջին $i-1$ հատ սյուներում, որի արդյունքում որոշակի տողերի զույգեր արդեն տարբերվել են: Մնացածը՝ դեռ ոչ: Ստորև բերված Նկար 4.2.3-2-ում արդեն տարբերված տողերի զույգերը պատկերված են շտրիխված մասում (առանց ընդհանրությունը խախտելու պատկերել ենք տարբերված տողերի զույգերը $P$ -ի սկզբնական մասում): Շտրիխված մասից դուրս առայժմ 1 չկա: Այժմ կառուցում ենք $M$-ի $i$-րդ սյունը և դիտարկենք այն $P$-ում՝ $P_i$ մասում:




**Նկար 4.2.3-2:** Հերթական $i$-րդ քայլը:

$i-1$ քայլ կատարելուց հետո չտարբերված զույգերի քանակը նշանակենք $t_{i-1}$ -ով: Հաշվենք չշտրիխված մասում 1-երի քանակը: Ունենք $t_{i-1}$ հատ սյուն, յուրաքանչյուրում՝ $2C_{m-2}^{s_i-1}$ հատ 1, հետևաբար, չշտրիխված մասում կա $2t_{i-1}C_{m-2}^{s_i-1}$ հատ 1: Բաժանելով այն $P_i$-ի տողերի քանակի վրա, կստանանք $P_i$-ի չշտրիխված մասի տողերում 1-երի միջին

քանակը՝ $\frac{2t_{i-1}C_{m-2}^{s_i-1}}{C_m^{s_i}}$ : Հետևաբար, գոյություն ունի տող, որն ունի առնվազը $\frac{2t_{i-1}C_{m-2}^{s_i-1}}{C_m^{s_i}}$ հատ 1: Քանի որ աշխատում ենք ամբողջ թվերի հետ, ապա կարող ենք ենթադրել, որ կա տող, որն ունի $\left\lceil\frac{2t_{i-1}C_{m-2}^{s_i-1}}{C_m^{s_i}}\right\rceil$ հատ 1: Ընտրենք հենց այդ տողը որպես $M$-ի $i$-րդ սյան կառուցում (տողի առկայությունը $P_i$-ի չշտրիխված մասում ապահովում է, որ $i$-րդ սյան այդպիսի կառուցում հնարավոր է): Այսինքն, $M$-ի $i$-րդ սյան կառուցման արդյունքում տողերի առնվազն $\left\lceil\frac{2t_{i-1}C_{m-2}^{s_i-1}}{C_m^{s_i}}\right\rceil$ հատ նոր զույգեր կտարբերվեն:

Այսպիսով, նշանակելով $i$ քայլ հետո չտարբերված զույգերի քանակը $t_i$-ով, կստանանք.

$$t_{i-1}-t_i \geq \frac{2t_{i-1}C_{m-2}^{s_i-1}}{C_m^{s_i}} = t_{i-1}\frac{2(m-2)!\,s_i!\,(m-s_i)!}{(s_i-1)!\,(m-s_i-1)!\,m!} =$$

$$= t_{i-1}\frac{s_i(m-s_i)}{C_m^2}$$

Հետևյալ լեմմայով ձևակերպենք ստացված կարևոր հատկությունը.

**Լեմմա 4.2.3-1:** Դիցուք՝ $M$ մատրիցի սյուն-առ-սյուն կառուցման $i$-րդ քայլում ունենք հետևյալը.

ա) առաջինից $i-1$-րդ սյուների որևէ կառուցում ($M$-ի տողերի զույգերի որևէ ծածկում),

բ) $M$-ի տողերի դեռևս չտարբերված զույգերի քանակը՝ $t_{i-1}$,

գ) $M$-ի $i$-րդ սյան 1-երի քանակը՝ $s_i$:

Այդ դեպքում, $i$-րդ քայլում գոյություն ունի $s_i$ 1-երի այնպիսի բաշխում, որ տողերի դեռևս չտարբերված զույգերի քանակի՝ $t_{i-1}$-ի առնվազն $\frac{s_i(m-s_i)}{C_m^2}$ մասը (կլորացումը դեպի մեծ ամբողջ մաս) տարբերվեն:

Կատարենք հետևյալ նշանակումը՝ $\xi_i = 1-\frac{s_i(m-s_i)}{C_m^2}$:

Լեմմա 4.2.3-1-ը պնդում է, որ գոյություն ունի $M$ մատրիցի սյուն առ սյուն կառուցման այնպիսի ալգորիթմ, որի հերթական $i$-րդ քայլի աշխատանքի արդյունքում տողերի դեռևս չտարբերված զույգերի ամենաշատը $\xi_i$ մասը կմնա չտարբերված: Ալգորիթմի

արդյունքը անկախ է առաջին $i-1$ հատ սյուների կառուցումից, ինչպես նաև $s_i$-երի դասավորությունից:

Այժմ, համեմատենք այս արդյունքը $G$ ագահ ալգորիթմի աշխատանքի $i$-րդ քայլի հետ:

Երկու դեպքում էլ $i$ -րդ քայլի կառուցումը անկախ է նախորդ $i-1$ քայլերի կառուցումից և $s_i$-երի դասավորությունից: Քանի որ $G$ ալգորիթմի դեպքում աշխատանքի հերթական $i$ -րդ քայլում տարբերվում են լոկալ քայլում հնարավոր մաքսիմալ թվով դեռևս չտարբերված տողերի զույգեր, ապա մնում են չտարբերված մինիմալ թվով տողերի զույգեր:

Այսպիսով, տեղի ունի հետևյալ պնդումը.

**Թեորեմ 4.2.3-1:** Սյուների տրված $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ վեկտորով $m \times n$ չափանի բինար մատրիցի կառուցման $G$ ագահ ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում չտարբերված տողերի զույգերի մասը չի գերազանցում $\xi_1\xi_2 \cdots \xi_n$ թիվը, որտեղ

$$\xi_i = 1 - \frac{s_i(m-s_i)}{C_m^2}, i = 1,2,\cdots,n:$$

Հասկանալու համար, թե այս գնահատականը որքան է ճշգրիտ, դիտարկվել են օրինակներ: Դիցուք՝ $m = 2^t$ և $s_j = 2^{t-1}$: Ակնհայտ է, որ համապատասխան մատրիցը կարող է կառուցվել $t$ քայլում (այսինքն, կարելի է կառուցել $t$ սյուն՝ տարբերելով մատրիցի բոլոր տողերը), և սա մինիմալ քանակն է: Այժմ դիտարկենք ագահ ալգորիթմով կառուցվածը, և գնահատենք համաձայն Թեորեմ 4.2.3-1-ի: $t$ քայլ հետո չծածկված/չտարբերված կմնա $C_{2^t}^2$ զույգերի $\left(1 - \frac{2^{t-i}2^{t-i}}{C_{2^t}^2}\right)^t$ մասը:

Ունենք, որ $1 - \frac{2^{t-i}2^{t-i}}{C_{2^t}^2} = 1 - \frac{2^{t-i}}{2^t-1} < 1/2$ :

Նշված մասը պարունակում է ամենաշատը $\frac{1}{2^t}\frac{2^t(2^t-1)}{2} < 2^{t-1}$ զույգ: $t$ քայլ հետո վերջին սյունում կունենանք 2 երկարության $2^{t-1}$ հատ ինտերվալ:

### *4.2.4. $G$ ալգորիթմի կիրառման օրինակներ*

Այս բաժնում կդիտարկենք $G$ ալգորիթմի հնարավոր կիրառման օրինակներ կապված փորձերի նախագծման խնդիրների և բալանսավորված բինար ծառերի դասերի հետ:

#### *4.2.4.1 $G$ ալգորիթմի կիրառումը փորձերի նախագծման խնդիրներում*

Փորձերի նախագծումը (design of experiments, DOE) հետազոտական տիրույթ է ([82], [52], [157]), որը նվիրված է փորձարարական գործառույթների իրականացման պլանավորմանը ըստ առկա նմուշների/ռեսուրսների խմբերի: Պլանավորման նպատակները կարող են տարբեր լինել, բայց ընդհանուր առմամբ դրանք հանգում են փորձերի որոշակի պարամետրերի օպտիմիզացիայի՝ գնահատված ելքային արժեքի դիսպերսիայի մինիմիզացիա, փորձարկումների հաշվարկային բարդության նվազեցում, նմուշների անհրաժեշտ դասերի կազմակերպում և այլն: Համակցված բլոկների նախագծումը (combinatorial block design, CBD) ([41], [38], [65]), որը փորձարկումների նախագծման տեսության գործիքներից մեկն է, փորձարարական միավորները միավորում է որոշակի պայմանների բավարարող համասեռ խմբերում: [41] -ում վերլուծվում է համակցված բլոկների նախագծման գոյության և բնութագրման խնդիրները, այն ենթադրությամբ, որ բլոկները (փորձարարական միավորների ենթաբազմությունները) հանդիսանում են բալանսավորված ոչ լրիվ բլոկ-նախագծեր (BIBD): [32]-ում դիտարկվում են բալանսավորված ոչ լրիվ բլոկ-նախագծերի ընդհանրացումներ՝ (t, k)-նախագծման խնդիրներ, որոնց հատուկ դեպքերը ներառում են գրաֆների/հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականության, Շտեյների մասնակի համակարգերի վերաբերյալ հայտնի խնդիրները:

Դիտարկենք փորձերի նախագծման հետևյալ բժշկական-կենսաբանական խնդիրը:

*Բազմադեղորայքային դիմադրողականությունը* այսօր հանրահայտ փորձաքար է կենսաբժշկության մեջ: Առողջապահության համաշխարհային կազմակերպության (WHO)-ի տվյալներով, այսօր գոյություն ունեցող ամենատարածված պաթոգեն բակտերիալ տեսակները կայունություն են ձեռք բերել մեկ կամ միաժամանակ մի քանի հակաբիոտիկների նկատմամբ: Օրինակ, Escherichia coli բակտերիաները, որոնք

մարդու և կենդանիներից շատերի մարսողական տրակտի կարևոր բաղադրիչներից են, 1950թ. գրանցված դիմադրողականության 7.2% արժեքի փոխարեն 2000թ. գրանցել են 63.6% վտանգավոր ցուցանիշ:

Բազմադեղորայքային դիմադրողականության դեմ պայքարը ակտիվ գիտական հետազոտման թեմա է, և այսօր օրակարգում գտնվող ճանապարհներից մեկը *հակաբիոտիկների խառնուրդների* /cocktail/ օգտագործումն է ([115]): Դիցուք՝ հակաբիոտիկների խառնուրդի ազդեցությունը որոշելու նպատակով կատարվող կենսաբժշկական փորձարկման համար առկա են $n$ տեսակի հակաբիոտիկներ, տրված սահմանափակ $s_1, s_2, \dots, s_n$ քանակություններով: Տեխնիկական տեսակետից կարևոր է նշել, որ $s_1, s_2, \dots, s_n$ ռեսուրսները մեկ անգամյա օգտագործման համար են: <u>Խնդիրը հետևյալն է</u>. նախագծել փորձարկումներ, որը տվյալ դեպքում նշանակում է ստեղծել թվով $m$ տարբեր խառնուրդներ այնպես, որ օգտագործվեն հակաբիոտիկների առկա $s_1, s_2, \dots, s_n$ քանակությունները:

Կարևոր է նշել, որ փորձարկումների խմբերի (տվյալ դեպքում հակաբիոտիկների խառնուրդների) չկրկնվելը փորձարկումների պլանավորման բնական պահանջ է: Ընդհանուր առմամբ, փորձարկման խմբերի տարբեր լինելը ունի տնտեսական նշանակություն, քանի որ ըստ կազմված խմբերի, դիմադրողականության ուսումնասիրումը երկարատև և թանկարժեք կենսաբժշկական հետազոտություն է: Եվ հետևաբար, դասերի տարբեր լինելու հետ մեկտեղ կարևոր է նաև ապահովել կազմվող խառնուրդների/խմբերի $m$ քանակի մինիմիզացիան: Սակայն, հաշվի առնելով, որ $s_1, s_2, \dots, s_n$ քանակները ֆիքսված են, խմբերի քանակի մինիմիզացիան կարող է բերել մեծ թվով հակաբիոտիկների մասնակցության յուրաքանչյուր փորձարկման մեջ, ինչը ցանկալի չէ: Նշենք նաև, որ յուրաքանչյուր խառնուրդ ունի իր փորձարարական արժեքը, և որ ընդհանուր կամ տնտեսական օպտիմիզացիայի հարց մենք չենք դիտարկում:

Խնդրի լուծումների տիրույթը կարող է լինել լայն, սակայն մենք բավարարվում ենք լուծումներից որևէ մեկը գտնելով, քանի որ դրանով պարզաբանվում է տրված քանակություններով փորձարկումների կազմակերպման հնարավոր լինելը: Հակառակ դեպքում, հարկ է փոփոխել հասանելի փորձանմուշների կազմը:

Այսպիսով, դիտարկվող խնդիրը հետևյալն է.

***Antibiotic_Cocktail*** ( ***A_C*** ) հնարավոր է արդյոք ստեղծել թվով $m$ <u>իրարից տարբեր խառնուրդներ</u> այնպես, որ օգտագործվեն հակաբիոտիկների առկա $s_1, s_2, \dots, s_n$ քանակությունները:

$A_C$ խնդրի լուծման համար կարելի է կիրառել $G$ ալգորիթմը: Նշենք որոշ առանձնահատկություններ:

1. $A_C$ խնդրում բնական է ենթադրել, որ հակաբիոտիկներից յուրաքանչյուրը մասնակցի հնարավոր փոքր թվով փորձարկումներում, և այսպիսով, $s_i \leq m/2, i = 1, \cdots, n$ – բնական սահմանափակում է, որը չի խախտում ալգորիթմի աշխատանքի ընդհանրությունը:
2. Ըստ $G$ ալգորիթմի փորձարարական արդյունքների, փոքր $n$-երի համար հիմնականում չտարբերված է մնում տողերի միայն մեկ զույգ (և ըստ ալգորիթմի կառուցումների, դա 0-ներից կազմված տողերի զույգն է, որոնք այս դեպքում, պարզապես կարելի է հեռացնել:

#### *4.2.4.2 G ալգորիթմի կիրառումը բալանսավորված ծառերի դասում*

Սահմանափակ բալանսով բինար ծառերը ([160], [23], [24]) որպես տվյալների հիմնական կառուցվածք օգտագործվում են դինամիկ տվյալների բազաներում ինֆորմացիայի փնտրման խնդիրներում: Դինամիկ միջավայրում, կապված ավելացվող կամ հեռացվող էլեմենտների առկայության հետ, կիրառվում են որոշակի սահմանափակումներ՝ բալանսի տերմիններով:

**Սահմանում 4.2.4.2-1** [160]**:** Դիցուք՝ $T_m$-ը ոչ դատակ, $m$ տերև (կշիռ) ունեցող բինար ծառ է, և $T_l$-ը և $T_r$-ը նրա արմատի ձախ և աջ ենթածառերն են $l$ և $r$ տերևներով: $\beta(T_m) = \frac{l}{m}$ հարաբերությունը կոչվում է $T_m$ ծառի բալանս (հարաբերական բալանս) արմատում: Ոչ դատարկ ենթածառերի համար $0 < \beta < 1$:

Տրված $\alpha$, $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ թվի համար $T_m$ ծառը կոչվում է $\alpha$ բալանսով կշռա-բալանսավորված ծառ, եթե

1) $\alpha \leq \beta(T_m) \leq 1 - \alpha$,
2) $T_m$-ի ձախ և աջ ենթածառերը $\alpha$ բալանսով կշռա-բալանսավորված ծառեր են:

$\alpha$ բալանսով կշռա-բալանսավորված ծառերի բազմությունը նշանակենք $WB[\alpha]$-ով:

Սահմանափակ բալանսով ծառերի կառուցման հետ կապված առաջանում են որոշ տրադիցիոն հարցադրումներ. ինչպիսի՞ն է ծառի բարձրությունը տրված բալանսի դեպքում; ինչպիսի՞ն է ծառի կշռված ճանապարհի երկարությունը; հնարավո՞ր է արդյոք ծառի կառուցումը տրված սահմանափակումներն ունեցող փնտրման մոդելում, և այլն:

[ReinNiv, 1997]-ում գնահատվում է $WB[\alpha]$ դասի ծառերի առավելագույն բարձրությունը՝ $h_\alpha(m)$-ը, դիտարկելով դասի ամենաասիմետրիկ ծառերը,

$$h_\alpha(m) \leq \frac{log_2 m}{log_2(1/(1-\alpha))}:$$

Ծառի բալանսը կարող ենք սահմանել նաև ենթածառերի կշիռների տարբերության տերմիններով:

**Սահմանում 4.2.4.2-2:** Դիցուք՝ $T_m$-ը ոչ դատակ, $m$ տերև ունեցող բինար ծառ է, և $T_l$-ը և $T_r$ -ը նրա արմատի ձախ և աջ ենթածառերն են $l$ և $r$ տերևներով, համապատասխանաբար ( $r \geq l$ ): $\delta(T_m) = r - l$ տարբերությունը կոչվում է $T_m$ -ի *տարբերական բալանս* արմատում:

**Սահմանում 4.2.4.2-3:** Տրված $d, 0 \leq d \leq m-1$ ամբողջ թվի համար $T_m$-ը կոչվում է $d$ *տարբերական բալանսով ծառ*, կամ պատկանում է $WDB[d]$ դասին, եթե.

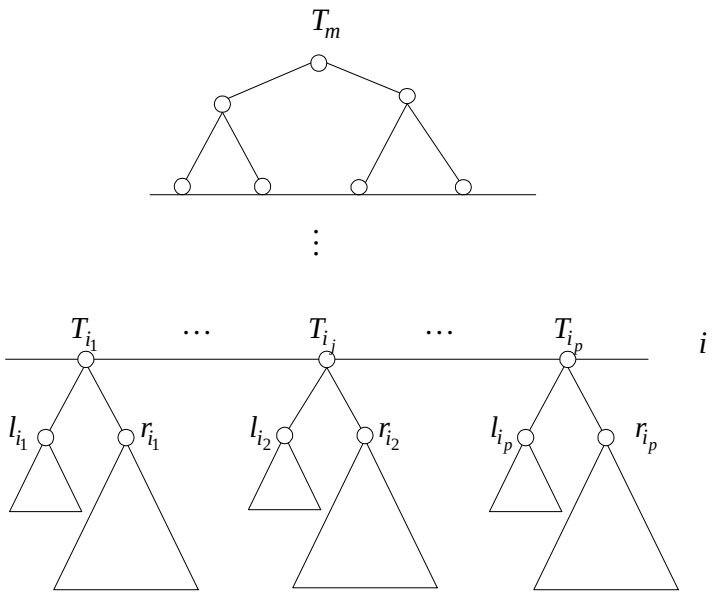
1) $\delta(T_m) \leq d$,
2) $T_m$-ի ձախ և աջ ենթածառերը պատկանում են $WDB[d]$ դասին:

Տարբերական և հարաբերական բալանսները կարելի է արտահայտել մեկը մյուսի միջոցով; և $WDB[d]$ դասի ծառերի բարձրությունը նույնպես կարելի է գնահատել կառուցելով դասի ամենաասիմետրիկ ծառը: Նկատենք, որ տարբերական բալանսը նպատակահարմար է կիրառել, քանի դեռ ենթածառերի կշիռները մեծ են $d$-ից; սակայն այն ճկուն է այն տեսանկյունից, որ ծառի մի մակարդակից մյուսը բալանսը կարող փոփոխվել և/կամ այն կարող է տրված լինել գումարային տեսքով:

Ընդհանրացնենք բալանսի գաղափարը՝ սահմանելով ***գումարային բալանս*** ըստ ծառի յուրաքանչյուր մակարդակի:

**Սահմանում 4.2.4.2-4:** Տրված են $D_0, \cdots, D_n$ , $0 \le D_i \le m-1$, $i = 0, \cdots, n$ ամբողջ թվերը: Կասենք, որ $T_m$ ծառը $i$ -րդ մակարդակում ունի $D_i$ *գումարային տարբերական բալանս*, եթե $R_i - L_i \le D_i$ , որտեղ $R_i$ -ն $i$ -րդ մակարդակում արմատ ունեցող բոլոր աջ ենթածառերի կշիռների գումարն է, իսկ $L_i$-ն նույն գումարն է ձախ ենթածառերի համար:

**Սահմանում 4.2.4.2-5:** $T_m$ ծառը կոչվում է $\{D_0, \cdots, D_n\}$ գումարային տարբերական բալանսով ծառ, եթե $i$-րդ մակարդակում գումարային բալանսը $D_i$ է, $i = 0, \cdots, n$:




**Նկար 4.2.4.2-1:** $T_m$ ծառի պատկերումը:

Դիցուք՝ $T_{i_1}, \cdots, T_{i_p}$ -ն $i$ -րդ մակարդակում արմատ ունեցող ենթածառերն են, $m_{i_1}, \cdots, m_{i_p}$ կշիռներով, և դիցուք՝ $l_{i_j}$ -ն և $r_{i_j}$ -ն հանդիսանում են $T_{i_j}$ -ի ձախ և աջ ենթածառերի կշիռների գումարը. $R_i = \sum_{j=1}^{p} r_{i_j}$ և $L_i = \sum_{j=1}^{p} l_{i_j}$ : Սխեմատիկ պատկերը բերված է Նկար 4.2.4.2-1-ում:

Գումարային բալանսով ծառերի կառուցումը կարող է հետապնդել տարբեր նպատակներ՝ ծառի գոյությունը/կառուցումը ըստ տրված նպատակային հայտանիշի, ինչպիսին է, օրինակ, ծառի բարձրությունը, ենթածառերի կշիռները կամ ենթածառերի քանակը ըստ մակարդակների, և այլն:

Գումարային բալանսով բինար ծառի կառուցման համար կիրառելու ենք $G$ ալգորիթմը: Նախ դիտարկենք $G$ ալգորիթմով կառուցված մատրիցների ներկայացումը

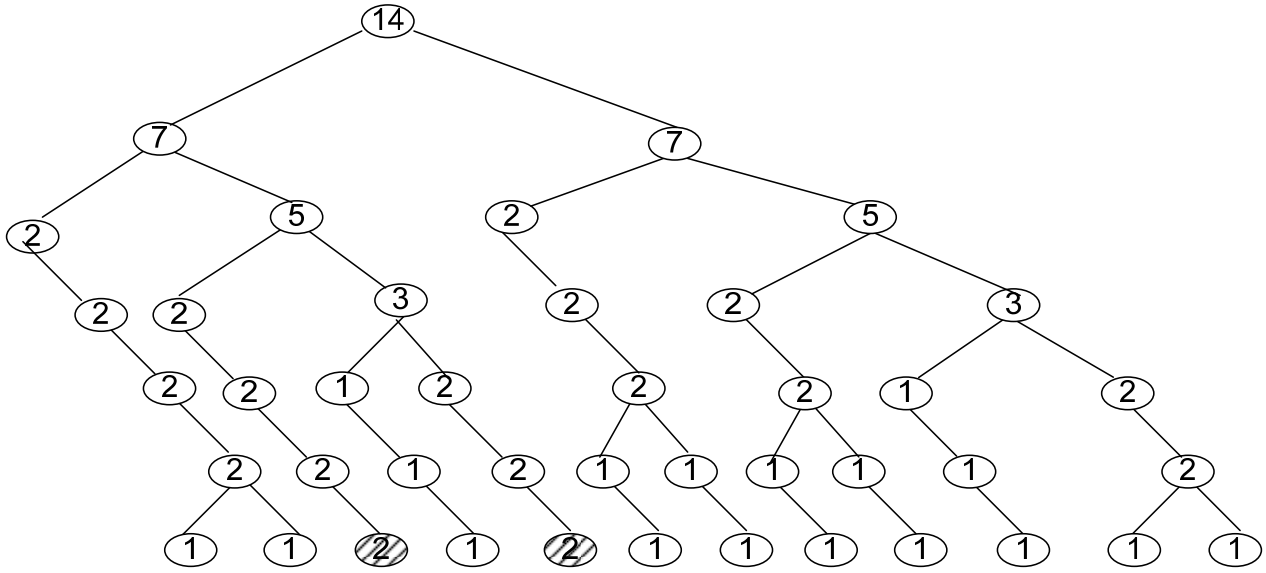
բինար ծառերի միջոցով: Դիցուք՝ $A$-ն $G$ ալգորիթմով կառուցված մատրից է $U(S)$ դասից: Առաջին սյան ինտերվալներն են $d_{1,1}, d_{1,2}$ , երկրորդ սյան ինտերվալները՝ $d_{2,1}, d_{2,2}, d_{2,3}, d_{2,4}$ , և այլն: Ընդհանուր առմամբ, $k$ -րդ սյունը բաղկացած է $2^k$ ինտերվալներից, կենտ համարով ինտերվալը լրացված է 1-երով, զույգ համարով ինտերվալը՝ 0-ներով: Նրանց մեջ կարող են լինել նաև 0 երկարության ինտերվալներ: $A$-ին համապատասխանեցնենք $T(G)$ բինար ծառը հետևյալ ձևով: Ծառի արմատին վերագրվում է $A$ մատրիցի տողերի բազմությունը: Ձախ ենթածառին /ենթածառի արմատին/ վերագրվում է $d_{1,2}$ ինտերվալին համապատասխանող տողերի բազմությունը, աջ ենթածառին՝ $d_{1,1}$ ինտերվալին համապատասխանող տողերի բազմությունը, և այլն: Այն ենթածառերը, որոնց արմատները գտնվում են $i$ -րդ մակարդակի վրա, համապատասխանում են մատրիցի $i$ -րդ սյան ինտերվալներին: Այսպիսի ներկայացման դեպքում ծառի /ենթածառի/ կշիռը նրան վերագրված բազմության հզորությունն է: Ծառի *տերևներ* են համարվում միայն արմատից բաղկացած (մեկ կշիռ ունեցող) ենթածառերը: Որոշ ենթածառեր չնայած այն բանին, որ ունեն մեկից մեծ կշիռներ, կարող են ունենալ դատարկ ենթածառեր: Մյուս կողմից, նպատակահարմար է մեկ կշիռ ունեցող ենթածառերը որպես տերև ներկայացնել ծառի միայն վերջին մակարդակում (եթե մեկ կշիռ ունեցող ենթածառ է առաջացել ծառի որևէ մակարդակում, ապա այն մեկ գագաթով շարունակել մինչև վերջին մակարդակը):

Եթե $A$ մատրիցի բոլոր $m$ տողերը իրարից տարբեր են, ապա կառուցված ծառը կունենա $m$ հատ տերև, այսինքն վերջին մակարդակում կունենանք միայն տերևներ, հակառակ դեպքում՝ վերջին մակարդակում կլինեն նաև մեկից մեծ կշիռ ունեցող ենթածառեր:

$T(G)$ ծառը կունենա $\{D_1, \cdots, D_n\}$ գումարային տարբերական բալանս, որտեղ $D_i = d_i - (m - d_i)$, $i = 1, \cdots, n$:

Որպես օրինակ դիտարկենք Նկար 4.2.1-2-ում (ձախ մասում) $G$ ալգորիթմով կառուցված մատրիցի ներկայացումը ծառի տեսքով (Նկար 4.2.4.2-2): Շրջանները համապատասխանում են գագաթներին, նրանց մեջ պատկերված թվերը՝ համապատասխան ինտերվալի երկարությանը: Վերջին մակարդակում ունենք երկու

հատ մեկից մեծ կշռով ենթածառ (շտրիխով շրջանները)՝ համապատասխան ինտերվալը ունի երկու երկարություն, այսինքն մատրիցն ունի երկու կրկնվող տող:




**Նկար 4.2.4.2-2:** Ներկայացում ծառի տեսքով $m = 14$, $n = 6$, $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = (7,10,10,12,12,12)$ օրինակի համար

Քանի որ $G$ ալգորիթմով հերթական $i$ –րդ սյունը կառուցելիս ինտերվալները տրոհվում են այնպես, որ հավասարաչափ բաշխվի 1-երի և 0-ների տարբերությունը (պահպանելով $D_i$-ն), ապա $T(G)$ ծառի յուրաքանչյուր $i$-րդ մակարդակում տարբերական բալանսը՝ $\max_j(r_{i_j} - l_{i_j})$ –ն, ամենափոքրն է ըստ բոլոր հնարավոր տրոհումների; և հետևաբար, $G$ ալգորիթմը, լոկալ օպտիմալ է տրված գումարային տարբերական բալանսով մինիմալ բարձրության ծառի համար:

## 4.3 Գումարային տարբերական բալանսով ծառի մոդել պատկերների՝ ըստ գրաֆիկական բնութագրերի դասակարգման խնդրի համար

Դիտարկենք հայերեն տպագիր էջից գրանշանների ավտոմատ վերծանման կիրառական խնդիրը: Դիցուք՝ $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ -ն գրանշանների պատկերների բազմություն է, որը հայերենի այբուբենի տառերի, կետադրական նշանների,

արաբական թվանշանների, ինչպես նաև այլ սիմվոլների (չակերտներ, փակագծեր, և այլն) հավաքածու է, ընդ որում, տրված տարբեր տառատեսակներով, տարբեր չափերով, թեքությամբ և այլն: Անհրաժեշտ է ճանաչել գրանշանները, կամ որ նույնն է՝ դասակարգել պատկերները, որտեղ դասերի քանակը հավասար է $A$ այբուբենի տարրերի քանակին: Յուրաքանչյուր գրանշան կարող է նկարագրվել պատկերի մի շարք գրաֆիկական և կառուցվածքային բնութագրերի միջոցով՝ բարձրություն, լայնություն, կշիռ, պրոյեկցիաներ, ծանրության կենտրոն, եզրագիծ, որոշակի ֆրագմենտի առկայություն/բացակայություն, եզրային կետերի քանակ, հատումների տեսակներ, և այլն: Խնդիրը, մի կողմից, բնութագրերի ճիշտ ընտրության, մյուս կողմից՝ պատկերի ճանաչման մեջ է ըստ այդ բնութագրերի:

Խնդրի մեր կողմից տրվող լուծումը հիմնվում է հիերարխիկ ծառերի կառուցման և օգտագործման վրա: Նախ սահմանվում է տեստերի $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ հավաքածուն, որտեղ $T$-ի յուրաքանչյուր տեստ հարց է կամ հարցերի կոմբինացիա պատկերի որոշակի բնութագրի մասին, որը կկիրառվի նշված ծառի գագաթների վրա:

Հիերարխիկ բինար ծառը կառուցվում է հետևյալ ձևով. Գրանշանների պատկերների բնութագրումների առկա $A$ բազմությունը վերագրվում է ծառի $V_0$ արմատին: Ծառի յուրաքանչյուր ոչ եզրային $V_i$ գագաթի համար (ներառյալ արմատը) $T$-ից ընտրվում է տեստ՝ $t_{V_i}$, որի կիրառման արդյունքում $V_i$ գագաթին վերագրված բազմությունը տրոհվում է երկու ենթաբազմությունների, որոնք էլ վերագրվում են $V_i$–ի ձախ և աջ ենթածառերի արմատներին: Պրոցեսը շարունակվում է այնքան ժամանակ, քանի դեռ գագաթներին վերագրված բազմությունները պարունակում են մեկից ավելի էլեմենտ: Եզրային գագաթներին վերագրվում են դասերի նշիչները՝ գրանշանները: Այսպիսով, յուրաքանչյուր գրանշանին համապատասխանում է ճանապարհ՝ արմատից մինչև համապատասխան տերևը: Դասակարգման պրոցեսը սկսվում է ծառի արմատից. կիրառվում է համապատասխան տեստը և ըստ տեստի արդյունքի անցում է կատարվում ձախ կամ աջ ենթածառին, և այդպես շարունակ, մինչև հասնի որևէ եզրային գագաթի: Յուրաքանչյուր գրանշանի ճանաչման բարդությունը կախված է ճանապարհի երկարությունից (ծառի արմատից մինչև եզրային գագաթ), ինչպես նաև տեստերի կիրառման ալգորիթմական բարդությունից: Տեստի բարդությունը կարող է վերագրվել

գագաթին կշռի տեսքով: Ծառի կառուցումը (տեստերի ընտրությունը, նրանց կիրառման կարգը, և այլն) կարող է հետապնդել տարբեր նպատակներ՝ ծառի բարձրության մինիմիզացիա, ծառի ամենարկար կշռված ճյուղի մինիմիզացիա, և այլն:

Հիերարխիկ ծառերի կառուցման առկա ալգորիթմների մեծ մասը (այդ թվում և CART ալգորիթմը ([55]) ծառի յուրաքանչյուր գագաթի համար գտնում է/հաշվարկում է լավագույն տեստը/կանոնը տրոհելու համար ծառի գագաթին վերագրված բազմությունը այնպես, որ ստացված ենթաբազմությունները լինեն հնարավորինս համասեռ՝ պարունակեն իրար նման պատկերներ: Այս նպատակով տվյալ գագաթում հաշվարկվում է ռեգրեսիոն սխալը և որոշվում է լավագույն տրոհումը:

Հայերեն տպատառ տեքստերի ավտոմատ ճանաչման “Armenian Reader” [(3)], [(4)] համակարգում կիրառվել է հետևյալ սկզբունքը.

(1) ծառի արմատից փոքր ($\leq k$) հեռավորություն ունեցող գագաթների համար ընտրվել են այնպիսի տեստեր, որոնք մի կողմից հեշտ հաշվարկելի են, մյուսից՝ տրոհում են բազմությունը իրար մոտ հզորության ենթաբազմությունների:

Ծառի այս մասի արդյունավետ կառուցման նպատակով հաշվարկվել է յուրաքանչյուր մակարդակի գումարային $D_i$ բալանսը ըստ գրանշանների հավաքածուի: Ընդ որում, մշակվել են այնպիսի տեստեր (տեստերի կոմբինացիաներ), որոնք մի կողմից գագաթին վերագրված գրանշանների բազմությունը տրոհում են ըստ համապատասխան բալանսի; մյուս կողմից՝ ապահովում են տրոհված բազմություններում գրանշանների նմանությունը: $\{D_0, \cdots, D_k\}$ գումարային բալանսով ծառի կառուցման համար կիրառվել է $G$ ալգորիթմը:

(2) արմատից ($> k$) հեռավորություն ունեցող գագաթների վրա (այստեղ գրանշանների փոքր խմբեր են համեմատաբար իրար նման պատկերներով), կիրառվում են գրանշանի առավել մանրակրկիտ հատկություններ ստուգող տեստեր: Հայտնի է, որ ստանդարտ տպագիր տեքստերի վրա այս համակարգի ճշտությունը հասնում է 97.5%.

**Եզրակացություններ չորրորդ գլխի վերաբերյալ**

Դիտարկվել է դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրների դաս, որտեղ ներմուծվել են նոր կարևոր սահմանափակումներ ի լրումն դասական տարբերակների; հետազոտվել է խնդիրների բարդությունը, մշակվել են նրանց մոտավոր լուծման արդյունավետ ալգորիթմներ:

- ✓ Ներմուծվել է շերտային պրոյեկցիայի գաղափարը ըստ մատրիցի սյուների որոշակի խմբերի կշիռների; հետազոտվել է տրված շերտային պրոյեկցիաներով բինար մատրիցի գոյության/կառուցման խնդիրների բարդությունը, մշակվել են նրանց մոտավոր լուծման ալգորիթմներ (կիրառվել Լագրանժյան ռելաքսացիայի մեթոդը, փոփոխականի տրոհման տեխնիկան, և կառուցվել են տրոհված խնդիրների լուծման ալգորիթմները):
- ✓ Մշակվել է սյուների տրված կշիռներով (ուղղահայաց պրոյեկցիա) և տարբեր տողեր ունեցող բինար մատրիցի սյուն-առ-սյուն կառուցման $G$ արդյունավետ ալգորիթմ; ապացուցվել է ալգորիթմի օպտիմալությունը լոկալ քայլում; ստացվել է արդյունքի երաշխիքի տեսական գնահատական; բերվել են փորձարարական արդյունքներ:
- ✓ Դիտարկվել են $G$ ալգորիթմի կիրառման օրինակներ կապված փորձերի նախագծման խնդիրների և բալանսավորված բինար ծառերի դասերի հետ:
- ✓ $G$ ալգորիթմը կիրառվել է գումարային բալանսով բինար ծառի մոդել կառուցելու համար պատկերների ըստ գրաֆիկական բնութագրերի դասակարգման խնդրում, մասնավորապես հայերեն տպատառ տեքստերի ավտոմատ ճանաչման “Armenian Reader” համակարգում:

# ԳԼՈՒԽ 5. ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐ ՄՈՆՈՏՈՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՄԱՆԸ ԵՆԹԱԿԱ ՄՈԴԵԼՆԵՐՈՒՄ

Աշխատանքի այս գլուխը նվիրված է մոնոտոնության ընդհանուր սահմանափակմանը ենթակա մոդելներում նոր կիրառական ալգորիթմների մշակմանը ([(5)], [(11)], [(15)], [(20)], [(28)], [(31)]): Օգտագործվում է Գլուխ 3-ում ներմուծված $\Xi_{m+1}^{n}$-ի խորանարդատիպ տրոհումը: Առաջարկվում է մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման նոր մոտեցում՝ հիմնված բազմարժեք բազմաչափ ցանցի խորանարդատիպ տրոհման տեխնիկայի վրա: $\Xi_{m+1}^{n}$-ում մոնոտոն ֆունկցիայի ճանաչումը հանգեցվում է բինար դեպքին և հաջորդիվ, Գ.Հանսելի-ի շղթաների կառուցվածքների օգտագործմանը; և այս ճանապարհով. /ա/ ապահովվում է ալգորիթմի կողմից մինիմալ հիշողության օգտագործումը; /բ/ ալգորիթմի աշխատանքը տրոհում է անկախ հաշվարկային պրոցեսների, որի արդյունքում հասանելի է դառնում հաշվարկների զուգահեռ իրականացումը: $\Xi_{m+1}^{n}$ -ի խորանարդատիպ տրոհման օգտագործմամբ մշակվում է քանակական ատրիբուտներով ասոցիատիվ կանոնների պեղման ալգորիթմ: Այս գլխում առաջարկվում է նաև շղթաների տրոհման ալգորիթմ մասնակի կարգավորված $P(n,3)$ բազմության համար:

## 5.1 Մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչում $\Xi_{m+1}^{n}$ ցանցում

Այս բաժնում դիտարկում ենք մոնոտոն ֆունկցիայի վերծանման խնդիրը $\Xi_{m+1}^{n}$-ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիաների համար: Խնդիրը բազմարժեք դեպքի համար հետազոտվել է Վ.Կորոբկովի, Վ.Ալեքսեևի և ուրիշների կողմից ([133], [16], [170], [191]): Նշենք որոշ արդյունքներ հետագա օգտագործման համար: [133]-ում դիտարկվել է մոնոտոն ֆունկցիայի ճանաչման մոդելի որոշ ընդլայնում: Դիտարկվել է կամայական մասնակի կարգավորված $T$ վերջավոր բազմության դեկարտյան $n$-րդ աստիճանը և այդ կառուցվածքի վրա որոշված բինար ֆունկցիաներ: Նշանակենք $\phi_T(n)$ -ով այդ ֆունկցիաների ճանաչման համար գուշակին (oracle) տրվող դիմումների անհրաժեշտ մինիմալ քանակը: Վ.Կորոբկովի կողմից ստացվել է հետևյալ գնահատականը.

**Թեորեմ 5.1-1** [133]:

$$C_1(T)\frac{|T|^n}{\sqrt{n}} \le \phi_T(n) \le C_2(T)\frac{|T|^n}{\sqrt{n}}, \qquad (5.1\text{-}1)$$

որտեղ $C_1(T)$-ը և $C_2(T)$-ը $T$-ից կախված հաստատուններ են:

[16]-ում Վ.Ալեքսեևն առաջարկել է $\Xi_{k_1k_2\cdots k_n} = \Xi_{k_1} \times \Xi_{k_2} \times \cdots \times \Xi_{k_n}$-բազմարժեք ցանցում (որտեղ $\Xi_{k_i} = \{0,1,\cdots,k-1\}, i = 1,\cdots,n$ ) մոնոտոն ֆունկցիայի ճանաչման $U_0$ ալգորիթմը, որը ինչ որ իմաստով Գ.Հանսելի ալգորիթմի ընդհանրացումն է:

**Թեորեմ 5.1-2** [16]:

$\frac{T(U_0)}{T(U_{opt})} \le \frac{1}{2}\lceil log_2(k-1)\rceil$, որտեղ $T(U_0)$-ն $U_0$ ալգորիթմի բարդությունն է, և $T(U_{opt})$-ը, օպտիմալ $U_{opt}$ ալգորիթմի բարդությունն է; $k = maxk_i$:

[16]-ից հայտնի է նաև, որ

$T(U_{opt}) \ge |M| + |N|$ և $T(U_0) \le |M| + \lfloor log_2 k\rfloor \cdot |N|$, որտեղ $M$-ը և $N$-ը $\Xi_{k_1k_2\cdots k_n}$ ցանցում միջին երկու շերտերի գագաթների բազմություններն են՝

$$M = \left\{(a_1,\cdots,a_n) \in \Xi_{k_1k_2\cdots k_n} | a_1 + \cdots + a_n = \left\lceil \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)\right\rceil\right\},$$

$$N = \left\{(a_1,\cdots,a_n) \in \Xi_{k_1k_2\cdots k_n} | a_1 + \cdots + a_n = \left\lceil \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)\right\rceil + 1\right\}:$$

Եթե դիտարկենք $U_0$ ալգորիթմի բարդությունը $\Xi_{m+1}^n$-ում որոշված մոնոտոն ֆունկցիայի համար, ապա՝ $T(U_0) \le |M'| + \lfloor log_2 m\rfloor \cdot |N'|$, որտեղ $M'$-ը և $N'$-ը $\Xi_{m+1}^n$-ի միջին շերտերն են.

$$M' = \left\{(a_1,\cdots,a_n) \in \Xi_{m+1}^n | a_1 + \cdots + a_n = \left\lceil \frac{m\cdot n}{2}\right\rceil\right\},$$

$$N' = \left\{(a_1,\cdots,a_n) \in \Xi_{m+1}^n | a_1 + \cdots + a_n = \left\lceil \frac{m\cdot n}{2}\right\rceil + 1\right\}:$$

### *5.1.1 Մոնոտոնության պահպանումը $\Xi_{m+1}^{n}$-ի խորանարդատիպ տրոհման շրջանակում*

Անդրադառնանք $\Xi_{m+1}^{n}$ -ի *խորանարդատիպ տրոհմանը* (սահմանված աշխատանքի Գլուխ3-ում). այն տրոհում է $\Xi_{m+1}^{n}$ -ը $|\widehat{H}|$ հատ ”ուղղահայաց” համարժեքության դասերի՝ կառուցվածքով բինար խորանարդին նույնանման կառուցվածքների, որոնք միարժեքորեն որոշվում են $\widehat{H}$-ի էլեմենտներով: Այս բաժնում ցույց կտանք, որ $\Xi_{m}^{n}$-ի խորանարդատիպ տրոհումը պահպանում է մոնոտոնությունը:

**Խորանարդատիպ տրոհման քանակական բնութագրեր**

Կենտ $m$-երի դեպքում $\Xi_{m+1}^{n}$-ում տրոհումների քանակական բնութագիրը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$(m+1)^n = ((m+1)/2)^n \cdot 2^n$ - համարժեքության դասերի քանակը $(\frac{m+1}{2})^n$ է, յուրաքանչյուր դասի հզորությունը՝ $2^n$:

Դիտարկենք զույգ $m$-երի դեպքը:

Դիտարկենք $\widehat{H}$-ի որևէ էլեմենտ, և դիցուք՝ $k$-ն այն կոմպոնենտների քանակն է, որոնց արժեքը հավասար չէ $m/2$-ի, և մնացած $n-k$ կոմպոնենտների արժեքը ֆիքսված՝ $m/2$ է: Նշված $k$ կոմպոնենտներն առաջացնում են $(m/2)^k$ -հզորության գագաթների բազմություն $\widehat{H}$-ում, և այդ գագաթներից յուրաքանչյուրն ունի իր $V$-համարժեքության դասը՝ $2^k$ հզորության: Այսպիսով, զույգ $m$ -երի դեպքում համապատասխան տրոհումները և քանակները բնութագրվում են հետևյալ բանաձևով՝

$(m+1)^n = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k \cdot 2^k \cdot (\frac{m}{2})^k) = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k \cdot m^k)$:

**Մոնոտոնության պահպանումը**

Դիցուք՝ $V$-ն $\Xi_{m+1}^{n}$-ի ուղղահայաց համարժեքության դասերից մեկն է, և $E(V)$-ն՝ նրան համապատասխան բինար խորանարդը (ինչպես սահմանված է Գլուխ 3-ում): Այսուհետ $V$-ն կհանդիսանա *սկզբնաղբյուրը /origin/*, և $E(V)$-ն՝ նրան *ինդուցված /induced/ բինար խորանարդը:* Ակնհայտ է, որ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն $V$-ի և $E(V)$-ի գագաթների միջև: $V$-ի գագաթները (ինչպես նաև այլ ենթակառուցվածքները՝ կող, շղթա, և այլն), կանվանենք *սկզբնաղբյուր*, իսկ

$E(V)$ -ում նրանց համապատասխան գագաթները (ինչպես նաև այլ ենթակառուցվածքները՝ կող, շղթա, և այլն)՝ *ինդուցված*:

Դիցուք՝ $b_1 < b_2 < \cdots < b_t$-ն պարզ շղթա է $V$-ում: Այդ շղթայի կամայական $b_i, b_{i+1}$ (հաջորդական) գագաթները հարևան են $V$-ում, սակայն $\Xi_{m+1}^n$-ում նրանք կարող են գտնվել ոչ հարևան շերտերում, և հետևաբար, $b_1 < b_2 < \cdots < b_t$-ն կարող է պարզ շղթա չլինել $\Xi_{m+1}^n$-ում (հարևանությունը $V$-ում և $\Xi_{m+1}^n$-ում տարբերվում են):

Նշված տերմիններով կարող ենք ձևակերպել հարևանության պահպանման մասին հետևյալ պնդումը՝

**Լեմմա 5.1.1-1:** Դիցուք՝ $\Xi_{m+1}^n$-ը տրոհված է ուղղահայաց համարժեքության դասերի, և $V$-ն այդ դասերից մեկն է: Եթե $b_1 < b_2 < \cdots < b_t$-ն պարզ շղթա է $V$-ում, ապա $b_1, b_2, \cdots, b_t$ –ին ինդուցված $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ գագաթներով կազմում է պարզ (ինդուցված) շղթա $E(V)$-ում՝ $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_t$: Եվ հակառակը՝ եթե $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_t$-ն պարզ շղթա է $E(V)$-ում, և $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ գագաթները հանդիսանում են ինդուցված գագաթներ $V$ -ի $b_1, b_2, \cdots, b_t$ գագաթների համար, ապա $b_1, b_2, \cdots, b_t$ գագաթներով կազմված է պարզ շղթա $V$-ում՝ $b_1 < b_2 < \cdots < b_t$:

Ապացույցը հետևում է բերված մեկնաբանություններից:

Որպես հետևանք ստացվում է հետևյալ պնդումը մոնոտոնության պահպանման մասին, որը ևս հեշտ է ստուգել.

**Թեորեմ 5.1.1-1:** Դիցուք՝ $\Xi_{m+1}^n$ -ը տրոհված է ուղղահայաց համարժեքության $\{V_i\}$ դասերի: Դիցուք՝ $F: \Xi_{m+1}^n \to \{0,1\}$ -ը որևէ բինար ֆունկցիա է, և $f_i: E(V_i) \to \{0,1\}$ ֆունկցիաները ստացվում են $F$ -ից ըստ համարժեքության դասերի այնպես, որ կամայական $\beta \in E(V_i)$ համար $f_i(\beta) = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $F(b) = 1$, որտեղ $b$-ն $\beta$-ի սկզբնաղբյուրն է: Այդ դեպքում, եթե $F$ ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա մոնոտոն են նաև բոլոր $f_i$ ֆունկցիաները:

### *5.1.2 Մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչում՝ հիմնված բազմարժեք ցանցի խորանարդատիպ տրոհման վրա*

Այս բաժնում կդիտարկենք մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչման այլընտրանքային մոտեցում՝ հիմնված բազմարժեք ցանցի խորանարդատիպ տրոհման վրա: Առաջարկվում է նոր մեթոդ՝ կառուցվում են երկու ալգորիթմներ, որտեղ գուշակին ներկայացվող գագաթներ ընտրելու պրոցեսը բաժանվում է ենթապրոցեսների՝ տրոհելով $\Xi_{m+1}^{n}$-ը չհատվող բինար խորանարդների:

Դիցուք՝ $F: \Xi_{m+1}^{n} \to \{0,1\}$-ը մոնոտոն ֆունկցիա է, տրված $\Omega_F$ գուշակի միջոցով:

Ալգորիթմ $CUBE_SPLIT1$ ( $CS1$ )-ը նախ տրոհում է $\Xi_{m+1}^{n}$ -ը ուղղահայաց համարժեքության $|\widehat{H}|$ դասերի, որից հետո յուրաքանչյուր դասում ճանաչում է համապատասխան մոնոտոն ֆունկցիան ըստ Գ.Հանսելի ալգորիթմի [106], և այնուհետև, միավորում է արդյունքները:

**Ալգորիթմ $CS1$:**

1. Տրոհել $\Xi_{m+1}^{n}$-ը ուղղահայաց համարժեքության դասերի՝ $V_1, V_2, \cdots, V_{|\widehat{H}|}$:
2. Կազմել համապատասխան ինդուցված միավոր խորանարդները՝ $E(V_1), E(V_2), \cdots, E(V_{|\widehat{H}|})$:
3. Յուրաքանչյուր $E(V_i)$ -խորանարդում սահմանել $f_i: E(V_i) \to \{0,1\}$ բինար ֆունկցիան հետևյալ ձևով. կամայական $\beta \in E(V_i)$-ի համար $f_i(\beta) = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $F(b) = 1$, որտեղ $b$-ն $\beta$-ի սկզբնաղբյուրն է $\Xi_{m+1}^{n}$-ում: $f_i$-ն մոնոտոն է (Թեորեմ 5.1.1-1), և տրվում է $\Omega_F$ գուշակի միջոցով: Կիրառել շղթաների տրոհման Գ.Հանսելի մեթոդը $f_i$ մոնոտոն ֆունկցիայի ճանաչման համար:
4. Միավորել $F$-ում $|\widehat{H}|$ հատ բինար ճանաչման արդյունքները:

**Թեորեմ 5.1.2-1:** Դիցուք՝ $\phi_{CS1}(n)$ -ը հարցումների մինիմալ քանակն է, որը բավարար է $CS1$ ալգորիթմի միջոցով $\Xi_{m+1}^{n}$-ում որոշված $n$ փոփոխականի կամայական մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչման համար: Այդ դեպքում,

$$\phi_{CS1}(n) = \sum_{k=0}^{n} \left( C_n^k \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^k \cdot \left( C_k^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} + C_k^{\lfloor k/2 \rfloor + 1} \right) \right) \text{ զույգ } m\text{-երի համար} \quad (5.1.2\text{-}1)$$

$$\phi_{CS1}(n) = \left(\frac{m+1}{2}\right)^n \cdot \left( C_n^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + C_n^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \right) \text{ կենտ } m\text{-երի համար} \quad (5.1.2\text{-}2)$$

Ապացույցը հետևում է Թեորեմ 5.1.1-1-ից և [106]-ի գնահատականներից, ինչպես նաև 5.1.1. բաժնում բերված քանակական բնութագրերից:

**Ալգորիթմի բարդության գնահատականի ասիմպտոտիկա**

Գնահատենք (5.1.2-1) և (5.1.2-2) –ում բերված բարդությունները:

Կօգտագործենք $C_n^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$-ի համար հետևյալ ասիմպտոտիկ գնահատականը, ինչի ստացման համար հարմար է կիրառել Ստիռլինգի (Stirling) հայտնի գնահատակը ֆակտորիալների համար ([81]).

$C_n^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sim \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} \cdot exp\left(-\frac{2k-n^2}{2n}\right)$, երբ $n, k \to \infty$ և $k - \frac{n}{2} = o\left(n^{3/4}\right)$:

Այս բանաձևը տեղադրելով (5.1.2-2)-ում, կստանանք, որ կենտ $m$-երի համար տեղի ունի.

$\phi_{CS1}(n) \to \left(\frac{m+1}{2}\right)^n \cdot 2 \cdot \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{4(m+1)^n}{\sqrt{2\pi n}}$, երբ $n \to \infty$:

Զույգ $m$-երի համար (5.1.2-1)-ում վերցնենք $k = m$: Հեշտ է տեսնել, որ այս դեպքում $\phi_{CS1}(n)$ մեծությունը ձգտում է $\frac{4m^n}{\sqrt{2\pi n}}$, երբ $n \to \infty$: Իրոք, փոքր $k$-երի համար, ասենք մինչև $n/2$, - ենթագումարը փոքր է: Մաքսիմալ գումարելին ստացվում է $n$-ին մոտ արժեքների համար: Սա ստուգելու համար կազմենք $C_n^k \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^k \cdot 2 \cdot \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}}$ -երի հարաբերությունը $k+1$-ի և $k$-ի համար: Այն հավասարեցնելով 1-ի, կստանանք. $k = n - \frac{(k+1)\sqrt{1+1/k}}{m}$, որն էլ ապացուցում է գնահատականը: Այստեղ կարևորը բարդությունն է, որը $\frac{4m^n}{\sqrt{2\pi n}}$ կարգի է:

$\boldsymbol{CS1}$ ալգորիթմի կարևորությունը նրանում է, որ այն օգտագործում է մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիայի ճանաչման ալգորիթմական տիրույթում կարևոր և մանրակրկիտ մշակված Գ.Հանսելի շղթաների կառուցվածքը: Հարկ է նշել Գ.Հանսելի շղթաների հետ կապված հանրահաշվական համակարգերը, որոնք առանց ալգորիթմների քայլերի քանակի ավելացման ապահովում են այն, որ նրանք օգտագործում են մինիմալ

հնարավոր հիշողություն: Մյուս կողմից, ինչպես նշվեց, մենք գործ ունենք չհատվող բինար խորանարդների հետ, և այս պատճառով հնարավոր են դառնում այս ալգորիթմի իրականացման համար զուգահեռ հաշվարկների կիրառումը:

Ալգորիթմ $CUBE_SPLIT2$ ($CS2$)-ը նախ կիրառում է Վ.Ալեքսեևի ալգորիթմը [16]՝ ճանաչելու համար մոնոտոն ֆունկցիան $\widehat{H}$-ին պատկանող մասում, և դիցուք՝ $M$-ը ֆունկցիայի 1 արժեքի կետերի բազմությունն է: Այնուհետև, դիտարկվում են $\Xi_{m+1}^{n}$-ի ուղղահայաց համարժեքության դասերից միայն նրանք, որոնք կետ են պարունակում $M$-ից:

**Ալգորիթմ $CS2$:**

1. Տրոհել $\Xi_{m+1}^{n}$-ը ուղղահայաց համարժեքության դասերի՝ $V_1, V_2, \cdots, V_{|\widehat{H}|}$:
2. Կազմել համապատասխան ինդուցված միավոր խորանարդները՝ $E(V_1), E(V_2), \cdots, E(V_{|\widehat{H}|})$:
3. $\widehat{H}$-ում սահմանել $F'\colon \widehat{H} \to \{0,1\}$ բինար ֆունկցիան հետևյալ ձևով. կամայական $b \in \widehat{H}$, $F'(b) = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $F(b) = 1$: Պարզ է, որ $F'$-ը մոնոտոն է, և տրվում է $\Omega_F$ գուշակի միջոցով:
4. Կիրառել Վ.Ալեքսեևի ալգորիթմը $\widehat{H}$-ում $F'$ ֆունկցիայի ճանաչման համար, և $M$-ով նշանակել $F'$-ի մեկ արժեքի կետերի բազմությունը /$\widehat{H}$-ում/:
5. Յուրաքանչյուր $e \in M$ էլեմենտի համար դիտարկել ուղղահայաց համարժեքության այն $V_e$ դասը, որին $e$-ն պատկանում է, և նրան ինդուցված $E(V_e)$ միավոր խորանարդը: $E(V_e)$ -ում սահմանել $f_e\colon E(V_e) \to \{0,1\}$ բինար ֆունկցիան հետևյալ ձևով. կամայական $\beta \in E(V_e)$ համար $f_e(\beta) = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $F'(b) = 1$, որտեղ $b$-ն $\beta$-ի սկզբնաղբյուրն է $\widehat{H}$-ում: $f_e$-ն մոնոտոն է (Թեորեմ 5.1.1-1), և տրվում է $\Omega_F$ օրակլի միջոցով: Կիրառել Գ.Հանսելի շղթաների տրոհման մեթոդը $f_e$ ֆունկցիայի ճանաչման համար:
6. Միավորել $F'$-ում $|M|$ հատ բինար ճանաչման արդյունքները:

**Թեորեմ 5.1.2-2:** Դիցուք՝ $\phi_{CS2}(n)$ -ը հարցումների մինիմալ քանակն է, որը բավարար է $CS2$ ալգորիթմի միջոցով $\Xi_{m+1}^{n}$-ում որոշված $n$ փոփոխականի կամայական մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչման համար: Այդ դեպքում,

$\phi_{CS2}(n) \leq (|M_{\hat{H}}| + \lfloor log_2 m \rfloor \cdot |N_{\hat{H}}|) + |M| \cdot \left( C_n^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + C_n^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \right)$, որտեղ $M_{\hat{H}}$-ը և $N_{\hat{H}}$-ը $\hat{H}$-ի միջին շերտերի կետերի բազմություններն են:

Ապացույցը հետևում է Թեորեմ 5.1.1-1-ից, [106]-ից և [16]-ից:

### *5.1.3 Քանակների պարզեցված գնահատականներ*

Ալգորիթմ $CS2$ -ի, ինչպես նաև Վ.Ալեքսեևի [16] ալգորիթմի բարդության գնահատականները հիմնված են բազմարժեք ցանցի միջին շերտի/շերտերի կետերի քանակի վրա, որոնք սակայն մինչ այժմ պարզ գնահատականներ չունեն, և այդ պատճառով ընկալելի չեն: Այս բաժնում դուրս են բերվում նշված քանակների գնահատականի պարզեցված և օգտագործելի տեսքերը:

Կօգտվենք որոշ հայտնի բանաձևերից: Կարևոր սկիզբ է հանդիսանում [159] աշխատանքը, որում դիտարկվում է $w_{m,n}(N)$ մեծությունը՝ $N$ ամբողջ թվի կարգավորված տրոհումների քանակը $n$ ( $1 \leq n \leq N$ ) ամբողջարժեք գումարելիների, այնպես որ յուրաքանչյուր գումարելին գտնվի $0$ -ից $m$ սահմաններում: Ստացված է հետևյալ արդյունքը.

**Լեմմա 5.1.3-1** ([159])

$w_{m,n}(N) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, C_n^i C_{N+n-1-i(m+1)}^{n-1}$:

Հեշտ է տեսնել, որ $w_{m,n}(N)$ մեծությունը համապատասխանում է $\Xi_{m+1}^n$-ի $N$-րդ շերտի հզորությանը:

Լեմմա 5.1.3-1-ում բերված բանաձևը անբացահայտ ձևով “վերահսկում է” գումարի ոչ զրոյական գումարելիների մասը: Երբ $N + n - 1 - i(m + 1)$-ը բացասական է, կամ երբ այն փոքր է $n - 1$-ից, ապա համապատասխան գումարելիները դառնում են 0: Արժե նշված սահմանափակումը բացահայտ ձևով ներառել բանաձևի մեջ:

[159]-ում դուրս է բերվում նաև $w_{m,n}(N)$ -ի ասիմպտոտիկ գնահատական՝ օգտագործելով թամբի կետի գնահատականը/saddle point evaluation of integrals:

Ստացվում է հետևյալ արդյունքը.

Դիցուք՝ $N \geq 1, m \geq 1$, և $n = \frac{2N}{m}\left(1 + c_1 N^{-1/2}\right)$ որևէ $c_1$ բացարձակ հաստատունի համար: Դիցուք՝ $\sigma = \frac{m}{6}\left(1 + \frac{m}{2}\right)$ և $N \to \infty$: Այդ դեպքում,

$$w_{m,n}(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma}}(m+1)^n exp\left(\frac{-(N-\frac{mn}{2})^2}{2n\sigma}\right)\left(1 - 2\phi\left(-n^{-\frac{1}{10}}\sqrt{\sigma}\right) + O\left(exp(-n^{1/5})\right)\right) \quad (5.1.3\text{-}1)$$

որտեղ $\phi(x)$-ը Գաուսյան կուտակային հավանականային բաշխումն է, և բանաձևի մոտարկման ճշտությունը/approximation error rate՝ $O\left(n^{-1/5}\right)$ է: Ճիշտ է, ստացված բանաձևն օգտակար է, սակայն նրա ասիմպտոտիկ գնահատականը հեշտ չէ օգտագործել մեր դեպքում:

Դիտարկենք (5.1.3-1) գնահատականի վերը նշված $n = \frac{2N}{m}\left(1 + c_1 N^{-1/2}\right)$ նախապայմանը և այն գրենք հետևյալ համարժեք տեսքով՝ $\frac{mn}{2} = N + c_1 N^{1/2}$ : Սա հնարավորություն է տալիս տեսնել, որ նախապայմանը տեղի չունի $N = \frac{mn}{2}$ –ի մոտ արժեքների համար: Սակայն հենց այդ դեպքն է անհրաժեշտ Վ.Ալեքսեևի ալգորիթմի բարդության և $M_{\hat{H}}$ և $N_{\hat{H}}$ մեծությունները գնահատելու համար: Առաջացած բարդությունը շրջանցելու և $M_{\hat{H}}$ և $N_{\hat{H}}$ մեծությունները գնահատելու համար դիմենք ևս մեկ հայտնի արդյունքի:

Անդրադառնանք [133]-ին: Այն դիտարկում է մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի ճանաչման մի ընդհանրացված մոդել: Այս հետազոտության մի մասնավոր ենթադեպքը, ինչպես կտեսնենք, լրացնում է /ավարտին է հասցնում/ [159]-ի գնահատականները և օգնում է պարզորեն հասկանալ մոնոտոն ճանաչման բարդությունը և նրա զուգահեռացման արժեքը: Դրա համար մեզ անհրաժեշտ է դիտարկել (5.1-1)-ի ապացույցի որոշ տարրեր [133]-ից:

Դիտարկենք մասնակի կարգավորված մի $T = \{r_1, r_2, \cdots, r_s\}$ բազմություն: $T$ բազմությունը արտապատկերենք հարթության վրա շերտերի տեսքով: Ստորին-զրոյական շերտում տեղադրվում են այն տարրերը, որոնք նախորդող տարրեր չունեն: Առաջին շերտում՝ զրոյականին անմիջական հաջորդող տարրերն են: Եվ այսպես, շերտ առ շերտ մինչև որ բոլոր տարրերը կսպառվեն ([46]): Դիցուք՝ օգտագործված շերտերի փաստացի քանակը $r \leq s$ է: Նշանակենք՝ $N(T, 1, k) = s_k$-ով $k$-րդ շերտի տարրերի քանակը: Ընդհանրացնելով, դիտարկենք $T$-ի դեկարտյան $n$-րդ աստիճանը, $T^n$, և

$N(T,n,k)$-ով նշանակենք $T^n$-ում առաջացած $k$-րդ շերտի էլեմենտների քանակը, $k = 0,1,\cdots,nr$ : $T^n$ -ում դիտարկենք $n$ միատեսակ բաշխված $\xi_i$ պատահական փոփոխականներ/մեծություններ, որոնք ընդունում են $j$ , $0 \le j \le r$ արժեքը $\frac{s_j}{s}$ հավանականությամբ: Կարելի է ստուգել, որ $N(T,n,k) = P\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i = k\} \cdot s^n$ : Բ.Գնեդենկոյի մի թեորեմից, որը բերվում է [95] աշխատանքում հետևում է, որ հավասարաչափ ըստ $k$-ի, և $n \to \infty$ դեպքում՝

$$P\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i = k\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sqrt{D\xi}} \cdot exp^{-\frac{(k-nM\xi)^2}{2nD\xi}} \qquad (5.1.3\text{-}2)$$

Այստեղ $M\xi$-ն և $D\xi$-ն նշանակում են $\xi$ պատահական մեծության մաթսպասումն ու դիսպերսիան ([136], [19]): (5.1-1)-ը այս բանաձևի հետևանքն է:

Այժմ մանրամասնորեն դիտարկենք $\Xi_{m+1}^n$-ի դեպքը:

$\Xi_{m+1}^n$ -ի դեպքում $T$ -ն պարզապես գծային կարգավորված $\Xi_{m+1} = \{0,1,\cdots,m\}$ բազմությունն է: Հաշվենք հավանականային բաշխումների արժեքները.

$M\xi = \sum_{k=0}^{m} \frac{k}{m+1} = \frac{m}{2}$, և

$D\xi = \sum_{k=0}^{m} \frac{k^2}{m+1} - \frac{m^2}{2} = \frac{m(2m+1)}{6} - \frac{m^2}{2} = \frac{m(m+2)}{12}$ :

Տեղադրենք $M\xi$-ն ու $D\xi$-ն (5.1.3-2)-ում, - կստանանք (5.1.3-1)-ի առաջին երեք արտադրիչները՝

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma}}(m+1)^n exp\left(\frac{-(N-\frac{mn}{2})^2}{2n\sigma}\right) \qquad (5.1.3\text{-}3)$$

Այս ճանապարհով, (5.1.3-1)-ում վերանում է $c_1 > 0$ սահմանափակումը, և (5.1.3-3)-ը ստացվում է որպես բազմաչափ բազմարժեք ցանցում մոնոտոն ճանաչման Վ.Ալեքսեևի ալգորիթմի բարդության պարզ գնահատական:

## 5.2 Քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղում հիմնված բազմարժեք ցանցի խորանարդատիպ տրոհման վրա

Այս բաժնում բազմարժեք ցանցի խորանարդատիպ տրոհումը օգտագործվում է տվյալների պեղման քանակական ասոցիատիվ կանոնների դուրսբերման մոդելում,

որտեղ ի տարբերություն բինար դեպքի, առարկաների առկա կամ բացակա լինելուց բացի հաշվի է առնում նաև նրանց պատիկությունը:

Քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղման խնդիրներում ատրիբուտները կարող են լինել ինչպես կատեգորիկ (օրինակ՝ բնակավայր, սեռ, մասնագիտություն), այնպես էլ թվային (օրինակ, տարիք, աշխատավարձ): Օրինակ, եթե դիտարկենք որևէ կազմակերպության աշխատակիցների բազան, ապա նրա պեղման արդյունքում դուրսբերված ասոցիատիվ կանոն կարող է հանդիսանալ հետևյալը.

$\{\text{տարիք}\ [25,40]\} \Rightarrow \{\text{աշխատավարձ}\ [100000,200000]\}$ ( $supp = 0.3,\ conf = 0.8$ ), որն ասում է, որ աշխատակիցների 30%-ը (կանոնի ապահովումը, supp) 25-40 տարեկան է, և նրանց 80%-ի (conf, կանոնի հուսալիությունը) աշխատավարձը $100000$-ից $200000$ է: Խնդիրն է՝ գտնել բոլոր ասոցիատիվ կանոնները, որոնց ապահովումը և հուսալիությունը փոքր չեն նախապես տրված շեմերից:

Դիտարկում ենք քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղման մոդել, որտեղ ենթադրվում է, որ բոլոր ատրիբուտները մոնոտոն են: Մոնոտոնությունը դա ատրիբուտների զույգի հատկություն է: Եթե $a$ քանակական ատրիբուտի արժեքի աճը միշտ հանգեցնում է $b$ ատրիբուտի արժեքի աճին ապա $a$-ն և $b$-ն կապված են դրական մոնոտոն հարաբերությամբ: $b$ -ի արժեքի մշտական նվազումը բնութագրվում է բացասական մոնոտոն հարաբերությամբ: Օրինակ դիտարկենք մարդու մարմնի ջերմատիճանը՝ $a$ : Դիցուք $b$ -ն մրսածության հետ կապված հիվանդության ինտենսիվությունն է: $a$-ն և $b$-ն մոնոտոն չեն կապված քանի որ մարդու մարմնի նորմալ ջերմաստիճանը 36.5 ÷37.5 է: Դրանից ինչպես բարձր այնպես էլ ցածր արժեքները կապված են նորմալ վիճակից շեղման հետ և սա խախտում է $(a,b)$ մոնոտոնությունը: Եթե դիտարկենք ածանցյալ $c = |a - 37.0|$ ատրիբուտ, ապա $(c,b)$-ն կվերածվի դրական մոնոտոն հարաբերության: Դրական մոնոտոն առնչությունը կիրառական ատրիբուտների տիրույթում հաճախ հանդիպող է, և այն երբեմն կարելի է վերականգնել պարզ ձևափոխությունների արդյունքում: Մենք ենթադրելու ենք նշված հատկության առկայությունը ստորև դիտարկվող ատրիբուտների բազմության մեջ: Նշենք նաև որ մոնոտոնությունը ի սկզբանե առկա է բինար ատրիբուտների տիրույթում և որ հենց այս հատկությունն է որ հնարավոր է դարձնում բինար ասոցիատիվ կանոնների պեղման

արդյունավետ մոդելները և ալգորիթմները – հաճախ հանդիպող հավաքների պեղումը, և բուն կանոնի պեղումը ըստ տրված ապահովման և հուսալիության արժեքների:

Այսպիսով մենք ենթադրում ենք, որ մոնոտոնությունը ոչ պարտադիր բայց բնական հատկություն է մի շարք կիրառություններում, ինչպիսին է օրինակ աշխատատեղերի առցանց տեղեկացման հետ կապված խնդիրը (job shop) ըստ հայտարարությունների (http://www.indeed.com): Այս խնդրում հիմնական տվյալները՝ մասնագետների բնութագրերն են, մասնագիտական դասիչների աղյուսակներն ու բառարաններն են, և թափուր աշխատատեղերի մասին հայտարարությունների հոսքն է: Խնդրի տեխնիկական մակարդակում ունենք փաստաթղթերի բազա, յուրաքանչյուր փաստաթուղթը կազմված է բառերից ([122]): Ներկայացնում ենք այն աղյուսակի տեսքով, որտեղ տողերը համապատասխանում են փաստաթղթերին, և սյուները համապատասխանում են բառերին: Աղյուսակի $(i,j)$ -տեղում գրված է $j$ -րդ բառի/բառարմատի հանդես գալու հաճախությունը $i$ -րդ փաստաթղթում: Խնդիրը տարբեր փաստաթղթերի կամ նրանց տարրերի միջև ասոցացիաներ գտնելն է ըստ նրանցում հաճախ հանդիպող բառերի /բառերի համախմբությունների/: Կարևոր է նաև փաստաթղթերի դասակարգման խնդիրը՝ ըստ նրանցում հաճախ հանդիպող բառերի /բառերի համախմբությունների/: Այստեղ, ինչպես տվյալների պեղման տրադիցիոն մոդելներում, կարևոր փուլ է հաճախ հանդիպող առարկաների բազմությունների կառուցման խնդիրը: Ատրիբուտների մոնոտոնությունը ատրիբուտների հաճախ կրկնվող հավաքների բնութագրական ֆունկցիան վերածում է մոնոտոն բինար ֆունկցիայի որի վերծանումն էլ հանդիսանում է մեր մոտակա նպատակը:

### *5.2.1 $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ ցանցի խորանարդատիպ տրոհումը*

Դիցուք՝ $\tilde{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$-ը $n$-չափանի ամբողջարժեք վեկտոր է, դիտարկենք հետևյալ $n$-չափանի բազմարժեք ցանցը.

$$\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n} = \Xi_{m_1} \times \Xi_{m_2} \times \cdots \times \Xi_{m_n} = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) |\, a_i \in \Xi_{m_i}, i \in \overline{1,n}\}$$

որտեղ $\Xi_{m_i} = \{0,1,\cdots, m_i - 1\}$:

Այս բաժնում ընդհանրացնելու ենք խորանարդատիպ տրոհման գաղափարը $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ ցանցի համար:

$\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ում սահմանենք հետևյալ էլեմենտները/էլեմենտների դասերը (համանման $\Xi^n_{m+1}$-ում համապատասխան սահմանումների):

**Միջին էլեմենտ/էլեմենտներ**

**Սահմանում 5.2.1-1:** $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ի հետևյալ էլեմենտները կանվանենք *միջին էլեմենտներ*. $\tilde{m}_{mid+} = \left(\left\lceil\frac{m_1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{m_2}{2}\right\rceil, \dots, \left\lceil\frac{m_n}{2}\right\rceil\right)$ և $\tilde{m}_{mid-} = \left(\left\lfloor\frac{m_1}{2}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{m_2}{2}\right\rfloor, \dots, \left\lfloor\frac{m_n}{2}\right\rfloor\right)$:

Նկատենք, որ այս էլեմենտները համընկնում են, երբ բոլոր $m_i$-երը զույգ են:

$\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ի բոլոր այն էլեմենտները, որոնց կոորդինատները $m_{imid+} = \left\lceil\frac{m_i}{2}\right\rceil$ և/կամ $m_{imid-} = \left\lfloor\frac{m_i}{2}\right\rfloor$ են, տեղադրված են $\tilde{m}_{mid+}$ և $\tilde{m}_{mid-}$ շերտերի միջև:

**Վերին և ստորին էլեմենտներ**

**Սահմանում 5.2.1-2:** $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ի $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ էլեմենտը կանվանենք վերին էլեմենտ, եթե $(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \tilde{m}_{mid+}$, և կանվանենք ստորին էլեմենտ, եթե $(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \tilde{m}_{mid-}$: $\hat{\Xi}$–ով և $\check{\Xi}$ –ով նշանակենք, համապատասխանաբար, $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ի վերին և ստորին էլեմենտների բազմությունը: Հեշտ է ստուգել, որ.

$$|\hat{\Xi}| = |\check{\Xi}| = \prod_{i=1}^{n}(\lfloor m_i/2 \rfloor + 1):$$

**Ուղղահայաց համարժեքություն**

**Սահմանում 5.2.1-3:** $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ի $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ և $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ էլեմենտները կանվանենք *ուղղահայաց համարժեք*, եթե $a_i \in \{b_i, m_i - b_i\}$, $1 \leq i \leq n$:

$V(a)$ -ով նշանակենք $a$ գագաթի *ուղղահայաց համարժեքության (կամ $V$ -համարժեքության) դասը*՝ բոլոր այն գագաթների դասը, որոնք ուղղահայաց համարժեք են $a$-ին: $V(a)$ -ում առանձնացնում ենք 2 գագաթ՝ $\hat{a}$ և $\check{a}$, որոնց կոմպոնենտները սահմանվում են հետևյալ ձևով.

$$\hat{a}_i = \begin{cases} a_i, & \text{եթե } a_i \geq m_{imid+} \\ m - a_i, & \text{եթե } a_i < m_{imid-} \end{cases}$$

$$\breve{a}_i = \begin{cases} m - a_i, & \text{եթե } a_i > m_{imid+} \\ a_i, & \text{եթե } a_i \le m_{imid-} \end{cases}$$

Կամայական $V(a)$ –ի համար $\hat{a}$-ն և $\breve{a}$-ն միակ էլեմենտներն են, որ պատկանում են $\hat{\Xi}$–ին և $\breve{\Xi}$ –ին, համապատասխանաբար:

Այսպիսով, $V(a)$ դասի բոլոր էլեմենտները կարող են ստացվել դասի վերին և/կամ ստորին էլեմենտից՝ $V$ -համարժեքության միջոցով: Ակնհայտ է, որ $\hat{\Xi}$ –ի (կամ $\breve{\Xi}$ –ի) տարբեր էլեմենտների $V$ -համարժեքության դասերը չեն հատվում: Սա ապահովում է $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ի տրոհումը $|\hat{\Xi}|$ քանակով համարժեքության դասերի, որոնք էլ միարժեքորեն որոշվում են $\hat{\Xi}$ –ի էլեմենտներով: Դիցուք՝ $a \in \Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ էլեմենտի $m_i/2$ -ից տարբեր արժեքով կոմպոնենտների քանակը $k_{\neq}$ է՝ $k_{\neq} = |\{a_i : a_i \neq m_i/2\}|$: Աստեղից՝ $|V(a)| = 2^{k_{\neq}}$:

Յուրաքանչյուր $b \in V(a)$ էլեմենտին համապատասխանության մեջ դնենք $n$ -երկարության բինար հաջորդականություն՝ $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ այնպես, որ $\gamma_i = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $b_i = \hat{a}_i$: Այսպիսով, $V(a)$-ն իզոմորֆ է $k_{\neq}$-չափանի բինար $E^{k_{\neq}}$ խորանարդին; 0-րդ շերտում $V(a)$-ի ստորին էլեմենտն է (որը պատկանում է $\breve{\Xi}$-ին); $i$-րդ շերտը կազմված է $V(a)$-ի բոլոր այն էլեմենտներից, որոնք կարող են ստացվել ստորին էլեմենտից՝ $i$ քանակով կոմպոնենտների ինվերսիայի միջոցով:

Այսպիսով, $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ի համարժեքության դասերը ունեն միավոր խորանարդին նույնանման կառուցածք:

**Խորանարդատիպ տրոհման քանակական բնութագրեր**

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

ա) $\tilde{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$-ի բոլոր $m_i$ կոորդինատները կենտ են: Այս դեպքում, տրոհման բոլոր $|\hat{\Xi}|$ դասերի հզորությունը $2^n$ է:

բ) $\tilde{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ -ի բոլոր $m_i$ կոորդինատները զույգ են: Այս դեպքում յուրաքանչյուր $\tilde{a} \in \Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ էլեմենտ կարող է ունենալ կամայական $k_{\neq} \le n$ քանակով $m_i/2$ -ից տարբեր արժեքով կոմպոնենտ: Այս էլեմենտներին համապատասխան խորանարդները ունեն $2^{k_{\neq}}$ գագաթ: Բոլոր այսպիսի էլեմենտների (որոնք ունեն $k_{\neq} \le n$ քանակով միջինից տարբեր արժեքով կոմպոնենտներ) քանակը նշանակենք $\hat{\varphi}(\tilde{m}, k_{\neq})$-ով: Հեշտ է տեսնել, որ.

$$\hat{\varphi}(\tilde{m}, k_{\neq}) = \prod_{I \subseteq \tilde{m},\, |I|=k_{\neq}} \hat{\varphi}(\tilde{m}, I) = \prod_{I \subseteq \tilde{m},\, |I|=k_{\neq}} \prod_{m_i \in I} m_i/2 :$$

Համապատասխան ծնող ֆունկցիան հետևյալն է.

$$\hat{g}(\tilde{m}) = \prod_{i=1}^{n} (1 + (m_i/2)x). \qquad (5.2.1\text{-}1)$$

$\hat{\varphi}(\tilde{m}, k_{\neq})$-ն գտնելու համար պետք է հաշվել $x^{k_{\neq}}$-ի գործակիցները:

Մյուս կողմից,

$$\sum_{k_{\neq}} \hat{\varphi}(\tilde{m}, k_{\neq}) 2^{k_{\neq}} = \prod_i (m_i + 1), \qquad (5.2.1\text{-}2)$$

որը խորանարդային տրոհման քանակների որոշակի ստուգում է:

$\hat{\varphi}(\tilde{m}, k_{\neq})$-ն $x^{k_{\neq}}$-ի գործակիցն է $\hat{g}(\tilde{m})$-ում (5.2.1-1): Այստեղ տեղադրելով $x = 2$, մենք բազմապատկում ենք $\hat{\varphi}(\tilde{m}, k_{\neq})$ գործակիցները $2^{k_{\neq}}$-ով, որն էլ տալիս է (5.2.1-2)-ի ձախ կողմում համապատասխան գումարելին: Իսկ $x = 2$ –ի ուղղակի տեղադրումը (5.2.1-1)-ում, տալիս է (5.2.1-2)-ի աջ կողմի բանաձևը, - որն էլ ավարտում է ստուգումը:

Ընդհանուր դեպքը, երբ $\tilde{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$-ը կարող է ունենալ ինչպես կենտ, այնպես էլ զույգ կոորդինատ, - վերլուծվում է այս երկու դեպքերի միավորման միջոցով:

### *5.2.2 Մոնոտոն ֆունկցիայի ճանաչում $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ում*

Այս բաժնում կներկայացնենք $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ -ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչման $CUBE_SPLIT$ ($CS$) ալգորիթմը, որը $CS1$-ի ընդհանրացումն է (նմանատիպ ձևով կարելի է ընդհանրացնել $CS2$-ը):

Դիցուք՝ $F: \Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n} \to \{0,1\}$ -ը մոնոտոն ֆունկցիա է, տրված $\Omega_F$ գուշակի միջոցով: Ալգորիթմ $CS$-ը նախ տրոհում է $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ը ուղղահայաց համարժեքության $|\hat{\Xi}|$ դասերի, որից հետո յուրաքանչյուր դասում ճանաչում է համապատասխան մոնոտոն ֆունկցիան ըստ Գ.Հանսելի ալգորիթմի [106], և այնուհետև, միավորում է արդյունքները:

**Ալգորիթմ $CS$:**

1. Տրոհել $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ը ուղղահայաց համարժեքության դասերի՝ $V_1, V_2, \cdots, V_{|\hat{\Xi}|}$:
2. Կազմել համապատասխան ինդուցված միավոր խորանարդները՝ $E(V_1), E(V_2), \cdots, E(V_{|\hat{\Xi}|})$:

3. Յուրաքանչյուր $E(V_i)$ -խորանարդում սահմանել $f_i: E(V_i) \to \{0,1\}$ բինար ֆունկցիան հետևյալ ձևով. կամայական $\beta \in E(V_i)$-ի համար $f_i(\beta) = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $F(b) = 1$, որտեղ $b$-ն $\beta$-ի սկզբնաղբյուրն է $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ում: $f_i$-ն մոնոտոն է, և տրվում է $\Omega_F$ օրակլի միջոցով: Կիրառել շղթաների տրոհման Գ.Հանսելի մեթոդը $f_i$ մոնոտոն ֆունկցիայի ճանաչման համար:
4. Միավորել $F$-ում $|\hat{\Xi}|$ հատ բինար ճանաչման արդյունքները:

Հեշտ է ստուգել, որ տեղի ունի.

**Թեորեմ 5.2.2-1:** Դիցուք՝ $\phi_{CS}(n)$-ը հարցումների մինիմալ քանակն է, որը բավարար է $CS$ ալգորիթմի միջոցով $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ում որոշված $n$ փոփոխականի կամայական մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչման համար: Այդ դեպքում,

$$\phi_{CS}(n) = \sum_{k=0}^{n}\left(\hat{\varphi}(\tilde{m},k)\cdot\left(C_k^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} + C_k^{\lfloor k/2\rfloor+1}\right)\right),$$ երբ բոլոր $m_i$-երը զույգ են;

$$\phi_{CS}(n) = \prod_i\left(\frac{m_i+1}{2}\right)\cdot\left(C_n^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} + C_n^{\lfloor n/2\rfloor+1}\right)$$ երբ բոլոր $m_i$-երը կենտ են:

Ընդհանուր դեպքը, երբ $m_i$-երի մեջ կարող են լինել ինչպես զույգ, այնպես էլ կենտ արժեքներ, - կարող է վերլուծվել ինտեգրելով նշված երկու դեպքերը:

### *5.2.3. Քանակական ատրիբուտներով ասոցիատիվ կանոնների պեղում – հաճախ հանդիպող առարկաների խմբերի դուրսբերում*

Դիցուք՝ տրված է $T$ աղյուսակը $n$ ատրիբուտների բազմությամբ՝ $A_1, A_2, \dots, A_n$: $T$-ի տողերը տրանզակցիաներ են, որտեղ առկա են քանակական ատրիբուտներ: Ենթադրենք, որ $A_i$ ատրիբուտի արժեքների տիրույթը՝ $[0, m_i]$ է: Այս ենթադրությամբ, մեկ առանձին վերցրած տրանզակցիան կարելի է պատկերել որպես $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ բազմարժեք ցանցի էլեմենտ:

Դիտարկելու ենք $A \Rightarrow B$ կանոններ, որտեղ կանոնի աջ մասում (կանոնի նպատակը) բինար ատրիբուտ է, ձախ մասում քանակական ատրիբուտներ են: Ենթադրվում է, որ ատրիբուտները դրական մոնոտոնորեն են առնչվում կանոնի

նպատակին, այսինքն՝ ատրիբուտի արժեքի աճը մեծացնում է առարկայի հանդես գալու հավանականությունը: Մոնոտոնությունը կարող է ենթադրվել կամայական դեպքում՝ երբ կանոնի նպատակը ստացիոնար վարքից շեղման հայտնաբերումն է: Որոշ բացառիկ դեպքերում ատրիբուտի արժեքի տիրույթը կարող է տրոհվել ինտերվալների, որոնցից յուրաքանչյուրում մոնոտոնություն տեղի ունի:

Այս ենթադրությամբ ստանում ենք մոդել՝ հիմնված հաճախ հանդիպող բազմություններ աճեցնելու տեխնիկայի վրա, որտեղ $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ի խորանարդատիպ տրոհումն ու մոնոտոն ֆունկցիայի ճանաչումը հանդես են գալիս որպես մոդելի ալգորիթմական հիմք:

Քանի որ քանակական ատրիբուտների դեպքում ըստ մոնոտոնության հատկության՝ եթե $(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n) \in \Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ էլեմենտը հաճախ հանդիպող է, ապա հաճախ հանդիպող է նաև $(a_1,\cdots,a_i-1,\cdots,a_n)$ էլեմենտը, ապա հաճախ հանդիպող առարկաների բազմության գտնելու խնդիրը հանգում է $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ -ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչմանը: Որի համար էլ կիրառվում է $CS$ ալգորիթմը:

Որպես հնարավոր կիրառման մեկ օրինակ դիտարկենք ցանցերի ներխուժման հայտնաբերման խնդիրը: Տրված են համակարգչի արձանագրային աշխատանքային LOG ֆայլերը, որոնց օգնությամբ հարկ է գտնել համակարգչի աշխատանքի ստացիոնար վարքից շեղման նկարագրերը: LOG ֆայլը դինամիկ աղյուսակ է, որի տողերը ասույթներ են ատրիբուտների որոշ խմբերի տերմիններով: Օրինակ, tcpdump LOG ֆայլը տպում է հետևյալ ինֆորմացիան.

- A time stamp,
- Source IP address,
- Source port,
- Destination IP address,
- Destination ports,
- Flags,
- The data sequence number of this packet,
- The data sequence number of the data expected in return,
- The number of bytes of receive buffer space available,
- An indicator of whether or not the data is urgent.

Ստորև բերված է այդպիսի LOG ֆայլի մի ֆրագմենտ,

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 974761325.386521 | 193.232.229.12 | 3333 | 10.1.34.15 | 1158 | tcp | 0 | (DF) |
| 974761325.406128 | 10.1.34.15 | 1158 | 193.232.229.12 | 3333 | tcp | 0 | (DF) |
| 974761325.417524 | 195.250.71.34 | 46004 | 204.160.241.71 | 80 | tcp | 0 | (DF) |
| 974761325.429686 | 10.1.34.15 | 1158 | 193.232.229.12 | 3333 | tcp | 396 | (DF) |
| 974761325.430180 | 193.232.229.12 | 3333 | 10.1.34.15 | 1158 | tcp | 0 | (DF) |
| 974761325.433208 | 193.232.229.12 | 3333 | 10.1.34.15 | 1158 | tcp | 1460 | (DF) |
| 974761325.434462 | 193.232.229.12 | 3333 | 10.1.34.15 | 1158 | tcp | 1460 | (DF) |
| 974761325.490779 | 10.1.23.12 | 1521 | 193.232.229.12 | 3333 | tcp | 0 | (DF) |
| 974761325.493772 | 10.1.23.12 | 1521 | 193.232.229.12 | 3333 | tcp | 0 | (DF) |
| 974761325.494071 | 193.232.229.12 | 3333 | 10.1.23.12 | 1521 | tcp | 0 | (DF) |
| 974761325.503551 | 10.1.23.12 | 1521 | 193.232.229.12 | 3333 | tcp | 0 | (DF) |
| 974761325.577713 | 195.250.71.34 | 46004 | 204.160.241.71 | 80 | tcp | 0 | (DF) |
| 974761325.584547 | 10.1.34.15 | 1158 | 193.232.229.12 | 3333 | tcp | 0 | (DF) |
| 974761325.586745 | 193.232.229.12 | 3333 | 10.1.34.15 | 1158 | tcp | 1460 | (DF) |
| 974761325.587997 | 193.232.229.12 | 3333 | 10.1.34.15 | 1158 | tcp | 1460 | (DF) |
| 974761325.589253 | 193.232.229.12 | 3333 | 10.1.34.15 | 1158 | tcp | 1460 | (DF) |

SPARTA համակարգում [(5)], որի նպատակը նման աղյուսակներից կանոնների պեղման միջոցով համակարգչային ցանցի աշխատանքի ստացիոնար իրավիճակից շեղումների արձանագրումն է, դիտարկվել է միայն բինար և կատեգորիկ ատրիբուտների դեպքերը:

Ստորև դուրս է բերված պեղված կանոնների մի ֆրագմենտ.

974761325.386521 - 974761326.195642: 1158 -> 3333, 10.1.34.15
974761325.386521 - 974761326.195642: 3333, 1158 -> 10.1.34.15
974761325.386521 - 974761326.195642: 10.1.34.15, 1158 -> 3333
974761325.386521 - 974761326.195642: 1158 -> 193.232.229.12 3333, 10.1.34.15
974761325.386521 - 974761326.195642: 193.232.229.12, 1158 -> 3333 , 10.1.34.15
974761325.386521 - 974761326.195642: 3333, 1158 -> 193.232.229.12 10.1.34.15
974761325.386521 - 974761326.195642: 10.1.34.15, 1158 -> 193.232.229.12 3333
974761325.386521 - 974761326.195642: 193.232.229.12, 3333, 1158 -> 10.1.34.15
974761325.386521 - 974761326.195642: 193.232.229.12, 10.1.34.15, 1158 -> 3333
974761325.386521 - 974761326.195642: 3333, 10.1.34.15, 1158 -> 193.232.229.12

Ինչպես տեսնում ենք LOG ֆայլը կարող է պարունակել նույն ատրիբուտը միևնույն ժամանակային պատուհանում (ինչպես բերված է ստորև).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 974761325.433208 | 193.232.229.12 | 3333 | 10.1.34.15 | 1158 | tcp 1460 (DF) |
| 974761325.434462 | 193.232.229.12 | 3333 | 10.1.34.15 | 1158 | tcp 1460 (DF) |

Ժամանակային պատուհանում կարելի է սահմանել տարբեր նպատակային պատահարներ, օրինակ IP հասցեներին շղթայական դիմում, շղթաների երկարություն, կամ կամայական այլ գործողությունների հաջորդում մեկը մյուսին: Նախնական LOG ֆայլից այս ճանապահով ևս ստացվում է ածանցյալ ֆայլ բազմաթիվ քանակական ատրիբուտներով: Վերը նշված մոնոտոն ատրիբուտներով քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղումը նպատակ ունի այս մասով ընդլայնել և ուժեղացնել SPARTA և նմանատիպ համակարգերի գործիքային կազմը: Սա հնարավոր է դառնում վերածել արդյունավետ հաշվարկման մոդելի խորանարդատիպ տրոհումների մեխանիզմի օգնությամբ: $CS$ ալգորիթմի կիրառումը հնարավոր է դարձնում գտնել հաճախ հանդիպող քանակական ատրիբուտներով բազմությունները՝ ընդլայնելով պեղման ենթակա կանոնների դասը:

## 5.1 Մասնակի կարգավորված բազմության շղթաների տրոհման մեթոդ

Այս բաժնում դիտարկվում է մասնակի կարգավորված $P(n,k)$ բազմությունը, որում սահմանված մոնոտոն բինար ֆունկցիաները համապատասխանում են ամենաանհարթ հիպերգրաֆային հաջորդականություններին (տես 3.1): Առաջարկվում է $P(n,k)$ –ի շղթաների տրոհման ալգորիթմ, որն էլ օգտագործվում է մոնոտոն ֆունկցիայի ճանաչման համար:

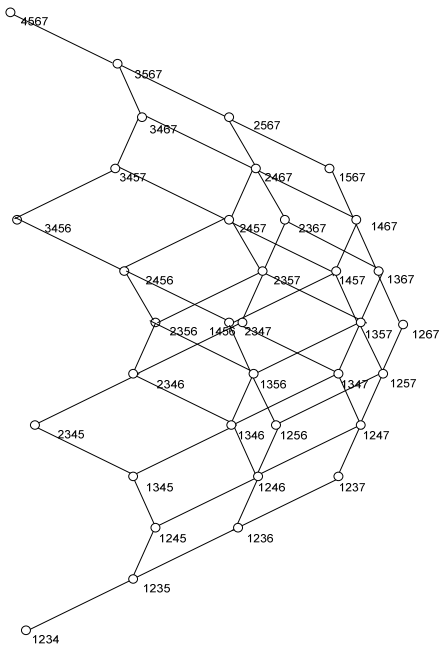
$P(n,k)$ -ով նշանակենք $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ բազմության $k$ -էլեմենտանոց ենթաբազմությունների բազմությունը, $1\le k\le n$.

$P(n,k)=\{(a_1,\cdots,a_k)|1\le a_1\le n-k+1, 2\le a_2\le n-k+2,\cdots,k\le a_k\le n\}$:

Եթե յուրաքանչյուր $(a_1,\cdots,a_k)$-ին համապատասխանության մեջ դնենք $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$-բինար հաջորդականություն այնպես, որ $\beta_i=1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $i\in\{a_1,\cdots,a_k\}$, ապա $P(n,k)$ -ն կհամապատասխանի $E^n$ -ի $k$ -րդ շերտի գագաթների բազմությունը: Օրինակ, $P(5,3)$ -ի $(2,3,5)$ էլեմենտին $E^5$ -ում կհամապատասխանի $(0,1,1,0,1)$ գագաթը:

$P(n,k)$ -ն մասնակի կարգավորված բազմություն է կոմպոնենտ-առ-կոմպոնենտ համեմատման մասնակի կարգով.

Դիցուք՝ $(a_1,\cdots,a_k)$ -ն և $(b_1,\cdots,b_k)$ -ն էլեմենտներ են $P(n,k)$ -ից: $(a_1,\cdots,a_k)\le(b_1,\cdots,b_k)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_i\le b_i,\ i=1,2,\cdots,k$: $P(n,k)$-ի մինիմալ էլեմենտը $(1,2,\cdots,k)$-ն է, և մաքսիմալ էլեմենտը՝ $(n-k+1,n-k+2,\cdots,n)$-ն: $(a_1,\cdots,a_k)$ էլեմենտի ռանգը սահմանենք որպես նրա կոմպոնենտների արժեքների գումար՝ $r(a_1,\cdots,a_k)=a_1+\cdots+a_k$ : Կառուցենք Հասսեի դիագրամը՝ այն ունի $k\cdot(n-k)+1$ մակարդակ, համարակալված $0$-ից $k\cdot(n-k)$: Մինիմալ մակարդակի վրա միակ մինիմալ էլեմենտը՝ $(1,2,\cdots,k)$-ն է գտնվում: Մաքսիմալ մակարդակի վրա գտնվում է $(n-k+1,n-k+2,\cdots,n)$ էլեմենտը: Ընդհանուր առմամբ, $i$ -րդ մակարդակի վրա գտնվում են $P(n,k)$-ի բոլոր այն էլեմենտները, որոնք ծածկում են $(i-1)$-րդ մակարդակի որևէ էլեմենտ: $i$-րդ մակարդակի վրա գտնվող բոլոր էլեմենտների ռանգը հավասար է $i+(1+\cdots+k)$-ի: Մտցնենք միջին մակարդակի/մակարդակների գաղափարը՝ այն $k\cdot(n-k)/2$ համարով մակարդակն է, երբ կամ $k$-ն զույգ է, կամ $k$-ն և $n$-ը միաժամանակ կենտ են; և $(k\cdot(n-k)\pm1)/2$ համարով մակարդակն է, երբ $k$-ն կենտ է, իսկ $n$-ը զույգ: Նկար 5.3-1-ում պատկերված է Հասսեի դիագրամը $n=7,k=4$ դեպքի համար:




**Նկար 5.3-1:** Հասսեի դիագրամը $\Xi_4^4$-ի համար:

$P(n,k)$-ի յուրաքանչյուր շերտ կազմված է զույգ առ զույգ անհամեմատելի էլեմենտներից, այսինքն՝ հակաշղթա է:

Եթե $w(P(n,k))$ -ով նշանակենք $P(n,k)$ -ի լայնությունը՝ ամենամեծ հակաշղթայի էլեմենտների քանակը, ապա Դիլվորթի թեորեմի համաձայն գոյություն ունի $P(n,k)$-ի տրոհում $w(P(n,k))$ քանակով շղթաների: Մենք ուշադրությունը կենտրոնացնելու ենք $P(n,3)$-ի վրա, կգտնենք $w(P(n,3))$-ը և $P(n,3)$-ի տրոհումը շղթաների:

### 5.3-1 *Քանակներ և բանաձևեր $P(n,3)$-ում*

Աշխատանքի այս բաժնում կստանանք $P(n,3)$-ի շերտերի էլեմենտների քանակը հաշվելու բանաձև, որի միջոցով կորոշվի ամենամեծ քանակով էլեմենտներ ունեցող շերտը և նրա էլեմենտների քանակը:

$L_l$-ով նշանակենք $P(n,3)$-ի այն շերտը, որի էլեմենտները ունեն $l$ ռանգ.

$$L_l = \{(i_1, i_2, i_3) | i_1 + i_2 + i_3 = l, 1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n\}$$

Հաշվենք $L_l$-ի հզորությունը.

Հեշտ է տեսնել, որ.

1. $\max(1, l - 2n + 1) \le i_1 \le \left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor - 1$,
2. Ֆիքսված $i_1$-ի համար $\max(i_1 + 1, l - i_1 - n) \le i_2 \le \lceil (l - i_1)/2 \rceil - 1$,
3. $i_1$-ի և $i_2$-ի համար $i_3$-ը միակն է:

Այսպիսով, $|L_l| = \sum_{i_1 = max(1, l-2n+1)}^{\lfloor l/3 \rfloor} \left( \lceil (l - i_1)/2 \rceil - max(i_1 + 1, l - i_1 - n) \right)$:

Ստացված բանաձևը, սակայն, հարմար չէ որոշելու համար ամենամեծ հզորության շերտը: Դիտարկենք $P(n,3)$-ի հետագա հատկություններ:

**Սիմետրիա**

$P(n,3)$-ի $j$-րդ մակարդակի էլեմենտների ռանգը $j + 6$ է:

Կենտ $n$-ի դեպքում $P(n,3)$-ի միջին շերտն է՝ $L_{mid} = \frac{3(n-3)}{2}$ (համարակալումը 0-ից է), և զույգ $n$-ի դեպքում $P(n,3)$-ն ունի երկու միջին շերտ՝ $L_{mid+} = \frac{3(n-3)+1}{2}$, $L_{mid-} = \frac{3(n-3)-1}{2}$:

$P(n,3)$-ը սիմետրիկ է իր միջին շերտի/շերտերի նկատմամբ. եթե $(i_1, i_2, i_3)$ էլեմենտը գտնվում է որևէ $j$ -րդ շերտում, ապա $(n + 1 - i_3, n + 1 - i_2, n + 1 - i_1)$ -ը գտնվում է $(3(n-3) - j)$-րդ շերտում:

$\hat{P}(n,3)$-ով և $\check{P}(n,3)$-ով նշանակենք $P(n,3)$-ում միջին շերտերից վերև և ներքև ընկած մասերը, համապատասխանաբար:

**Տրոհում**

$P(n,3)$ -ի կառուցվածքը բնական ձևով բաժանվում է 3 մասի՝ այդ մասերը նշանակենք $P^1(n,3)$ , $P^2(n,3)$ , $P^3(n,3)$ -ով, համապատասխանաբար: $P^1(n,3)$ -ը ընդգրկում է $P(n,3)$-ի առաջին $n-3$, և $P^3(n,3)$-ը ընդգրկում է $P(n,3)$-ի վերջին $n-3$ մակարդակները: $P^2(n,3)$-ում գտնվում են մնացած $n-3+1$ մակարդակները:

$P^1(n,3)$-ի յուրաքանչյուր էլեմենտի համապատասխանում է $P^3(n,3)$-ի որոշակի էլեմենտ: Օրինակ, $P^1(n,3)$-ի $i$-րդ շերտում գտնվող $(1,2,i+3)$ էլեմենտին համապատասխանում է $P^3(n,3)$-ի $(3(n-3)-i)$-րդ շերտում գտնվող $(n-i-2,n-1,n)$ էլեմենտը: Պարզ է, որ $P(n,3)$-ի միջին շերտը/շերտերը ընկած են $P^2(n,3)$-ի մեջ: Հիմնական ուշադրությունը կկենտրոնացնենք $P^2(n,3)$-ի վրա: Կհաշվենք $P^2(n,3)$-ի շերտերի հզորությունները, և կհետևենք $i$-րդ շերտի $(1,i+1,n)$ գագաթին/էլեմենտին:

**Քանակներ $P^1(n,3)$-ում և $P^3(n,3)$-ում**

$P^1(n,3)$-ի էլեմենտները կարող են գեներացվել շերտ առ շերտ՝ յուրաքանչյուր $i$ –րդ շերտում սկսելով $(1,2,i+3)$ էլեմենտից հետևյալ ձևով. նախ, աճեցնենք երկրորդ կոմպոնենտը և նվազեցնենք երրորդ կոմպոնենտը միաժամանակ: Օրինակ, $i=7$ շերտում կստանանք.

$(1,2,10),(1,3,9),(1,4,8),(1,5,7)$ էլեմենտները; այնուհետև սկսելով $(2,3,i+1)$ էլեմենտից՝ աճեցնենք երկրորդ կոմպոնենտը և նվազեցնենք երրորդ կոմպոնենտը միաժամանակ: Օրինակ, $i=7$-ի համար կստանանք.

$(2,3,8),(2,4,7),(2,5,6)$ էլեմենտները: Այսպես, ընդհանուր դեպքում, սկսելով $(1+j,2+j,i+3-2j)$ էլեմենտից՝ և աճեցնելով երկրորդ կոմպոնենտը և նվազեցնելով երրորդ կոմպոնենտը միաժամանակ, քանի դեռ $1+j\leq\left\lfloor\frac{1+2+i+3}{3}\right\rfloor-1<$ այսինքն, քանի դեռ $j\leq\left\lfloor\frac{i}{3}\right\rfloor$: Նշված օրինակում կշարունակենք. $(3,4,6)$:

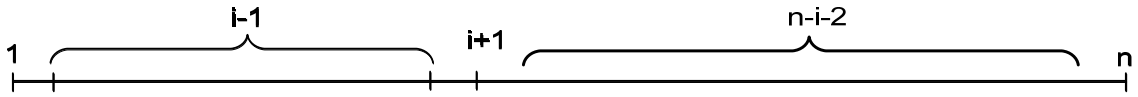
Պարզ է, որ շերտի էլեմենտների քանակը աճում է $i$-ի հետ մեկտեղ, այսինքն, $P^1(n,3)$-ը ունի մաքսիմալ թվով էլեմենտներ իր վերջին՝ $(n-3-1)$-րդ շերտում:

Միանման է $P^3(n,3)$-ի դեպքը:

**Քանակներ $P^2(n,3)$-ում**

Կառուցենք $P^2(n,3)$-ի $i+1$-րդ շերտի $(a,b,c)$ գագաթները:

$i+1$ -րդ շերտը պարունակում է $(1,i+1,n)$ էլեմենտը, - սկսենք այդ էլեմենտից: Մեկնաբանումը՝ Նկար 5.3.1-1-ում:




**Նկար 5.3.1-1:** $i+1$-րդ շերտի մեկնաբանումը

Կառուցումները կկատարենք մի քանի խմբով: Խումբը սահմանվում է որպես գագաթների բազմություն, որոնցում առաջին կոմպոնենտի արժեքը ֆիքսված է, օրինակ, $(1,i+1,n)$ -ի համար արժեքը մեկ է: $G_{i+1}^a$-ով կնշանակենք այն խումբը, որտեղ առաջին կոմպոնենտը $a$ է: $b_{min}$-ով նշանակենք $G_{i+1}^a$-ում երկրորդ՝ $b$ կոմպոնենտի ամենափոքր հնարավոր արժեքը: Երրորդ՝ $c$ կոմպոնենտը առաջին և երկրորդ կոմպոնենտներով որոշվում է միարժեքորեն: $c_{max}$-ով նշանակենք $G_{i+1}^a$-ում երրորդ կոմպոնենտի ամենամեծ հնարավոր արժեքը ֆիքսված $a$-ի համար:

Այժմ տրված առաջին կոմպոնենտի՝ $a$-ի համար սահմանենք *խմբի գործողություն*՝ խմբի էլեմենտների գեներացման համար: Սկզբում հաշվում ենք $b_{min}$-ը և $c_{max}$-ը տրված $a$-ի համար, այնուհետև խմբի գործողությամբ $b_{min}$-ը մեծացնում ենք, և $c_{max}$-ը փոքրացնում ենք: Պարզ է, որ այս խումբը կազմված է $i+1$-րդ շերտի բոլոր այն էլեմենտներից, որոնցում առաջին կոմպոնենտը $a$-ն է: Տարբեր առաջին կոմպոնենտների խմբերը չեն հատվում, և այսպիսով, $\cup_a G_{i+1}^a$-ով տրվում է $P^2(n,3)$-ի $i+1$-րդ շերտը: Ավելին, հեշտ է հաշվել խմբի էլեմենտների քանակը, եթե գիտենք $b_{min}$ -ը և $c_{max}$ -ը, ապա խմբի էլեմենտների քանակը հավասար է $1+\lfloor(c_{max}-b_{min}-1)/2\rfloor$ կամ որ նույնն է՝ $\lfloor(c_{max}-b_{min}+1)/2\rfloor$:

Կկատարենք հետևյալ երկու գործողությունները.

- կհաշվենք խմբի էլեմենտների քանակը բոլոր հնարավոր $a$-երի համար,

- կհաշվենք և կհամեմատենք հարևան շերտերի խմբերը – սրա նպատակն է գտնել $P^2(n,3)$-ի ամենամեծ շերտը:

Սկսում ենք $(1, i+1, n)$ էլեմենտից, այնուհետև մեծացնում ենք առաջին կոմպոնենտը մեկով: Որպեսզի պահենք էլեմենտը նույն շերտում՝ երկրորդ կոմպոնենտը փոքրացնում ենք մեկով, երրորդը թողնում ենք անփոփոխ՝ այս պահին այն $n$ է: Նշված գործողությունը կրկնում ենք այնքան, քանի դեռ երկրորդ կոմպոնենտը մեծ է առաջինից – ստանում ենք $i+1$-րդ շերտից էլեմենտների շարքեր/series: Այս էլեմենտները ունեն այն հատկությունը, որ ֆիքսված $a$-ի համար $b = b_{min}$ և $c = c_{max} = n$: Գտնենք $a$-ի և $b$-ի արժեքները այս գործողությունների ավարտին: Երկու դեպք է հնարավոր.

a) $a$-ն և $b$-ն հանդիպում են (այլևս հնարավոր չի լինում մեծացնել/փոքրացնել), երբ $a = (i-1)/2$ և $b_{min} = \frac{i-1}{2} + 1$, եթե $(i-1)$-ը զույգ է
b) $a$-ն և $b$-ն հանդիպում են, երբ $a = (i-2)/2$ և $b_{min} = \frac{i-2}{2} + 2$, եթե $(i-1)$-ը կենտ է:

Այնուհետև, $a$-ն մեծացնենք մեկով, և $c$-ն փոքրացնենք մեկով, կստանանք հետևյալ էլեմենտը. $\left(\frac{i-2}{2} + 1, \frac{i-2}{2} + 2, n-1\right)$, որը գեներացնում է նոր՝ լրացուցիչ խումբ, այն նշանակենք $G^*_{i+1}$-ով:

Այս փուլում կառուցված բոլոր խմբերը անվանենք $G1_{i+1}$ խմբեր:

Այս փուլից հետո $a$-ն դեռևս կարող է մեծանալ մինչև հասնի իր առավելագույն արժեքին՝ $a = \lfloor (1 + i + 1 + n - 3) \rfloor / 3$ : Շարունակենք մեծացնել $a$ -ն: Այս փուլում արդեն $a$ -ի մեծանալը ստիպում է, որ $b$-ն էլ մեծանա: Այսպիսով, $a$-ն և $b$-ն (սա ամենափոքր $b$-ն է՝ $b_{min}$-ը) մեծացնում ենք մեկով, և $c$-ն փոքրացնում ենք երկուսով (սա $c_{max}$-ն է):

Այս գործողությունը կրկնելու արդյունքում, որն ավարտվում է, երբ $a = \lfloor (1 + i + 1 + n - 3) \rfloor / 3$, - ստանում ենք էլեմենտների նոր խմբեր, որոնք կանվանենք $G2_{i+1}$ խմբեր:

**Աղյուսակ 5.3.1-1**: Խմբերը $i+1$ –րդ և $i$ –րդ շերտերի համար

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Layer $i+1$ | $G1^1_{i+1}$ | $G1^2_{i+1}$ | $\cdots$ | $G1^{(i-2)/2}_{i+1}$ | $G^*_{i+1}$ | $G2^{(i-2)/2+2}_{i+1}$ | $\cdots$ |
| Layer $i$ | $G1^1_i$ | $G1^2_i$ | $\cdots$ | $G1^{(i-2)/2}_i$ | $G2^{(i-2)/2+2}_i$ | $G2^{(i-2)/2+3}_i$ | $\cdots$ |

Աղյուսակ 5.3.1-1-ում ներկայացված են խմբերի երկու շարք. առաջինը՝ $i+1$ –րդ շերտի համար, և երկրորդը՝ $i$ –րդ շերտի համար: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $i-1$ –ը կենտ է:

Կարևոր է նկատել, որ $G1_i^1, G1_i^2, \cdots, G1_i^{(i-2)2-1}$ խմբերը կոնգրուենտ են $G1_{i+1}^2, G1_{i+1}^3, \cdots, G1_{i+1}^{(i-2)2}$ խմբերին, նրանց հզորությունները նույնն են, և նրանք կարող են հանվել դիտարկումից $i$ –րդ և $i+1$ րդ շերտերի հզորությունները համեմատելիս:

$i-1$ –ի զույգ լինելու դեպքը՝ համանման է:

**Խմբերը և նրանց հզորությունները**

$\boldsymbol{G_{i+1}^{1+j}}$ : Այս խումբը կազմված է այնպիսի էլեմենտներից, որտեղ $a=1+j$, $b=i+1-j$, և $c=n$, այսինքն, $(1+j, i+1-j, n)$: $j$-ի հնարավոր արժեքներն են. $0,1,\cdots,(i-1)/2$ , երբ $i-1$-ը զույգ է, և՝ $0,1,\cdots,(i-2)/2$, երբ $i-1$-ը կենտ է: Յուրաքանչյուր $j$-ի ենթախումբը գեներացվում է խմբի գործողությամբ: Այսպիսով, $j$-ի ենթախումբը պարունակում է $1+\left\lfloor\frac{n-(i+1-j)-1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-i+j}{2}\right\rfloor$ էլեմենտ:

Վերջին ենթախումբը սկսվում է $(1+\frac{i-1}{2}, 2+\frac{i-1}{2}, n)$ էլեմենտով, կամ որ նույնն է՝ $(\frac{i+1}{2}, 1+\frac{i+1}{2}, n)$, երբ $i-1$-ը զույգ է, և $(\frac{i+1}{2}, 2+\frac{i+1}{2}, n)$, երբ $i-1$-ը կենտ է:

Այսպիսով, ստանում ենք $\sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}}\left\lfloor\frac{n-i+j}{2}\right\rfloor$ էլեմենտ, երբ $i-1$ -ը զույգ է, և $\sum_{j=0}^{\frac{i-2}{2}}\left\lfloor\frac{n-i+j}{2}\right\rfloor$ էլեմենտ, երբ $i-1$-ը կենտ է:

$\boldsymbol{G_{i+1}^{*}}$**:** Այս խումբը գոյություն ունի միայն, երբ $i-1$-ը կենտ է: Այն սկսվում է է $(2+\frac{i-2}{2}, 3+\frac{i-2}{2}, n-1)$ էլեմենտով, կամ որ նույնն է՝ $(1+\frac{i}{2}, 2+\frac{i}{2}, n-1)$ , և գեներացնում է $\left\lfloor\frac{n-1-\left(2+\frac{i}{2}\right)-1}{2}\right\rfloor$ էլեմենտ: Այսպիսով, $|G_{i+1}^{*}|=\left\lfloor\frac{n-4-i/2}{2}\right\rfloor$:

$G1_{i+1}$ –ը այս բոլոր խմբերի միավորումն է.

$G1_{i+1}=\left(\cup_j G1_{i+1}^{1+j}\right)\cup G_{i+1}^{*}$ :

$\boldsymbol{G2_{i+1}}$ : Այս խումբը կազմված է այնպիսի էլեմենտներից, որտեղ $a=1+\frac{i-1}{2}+j=\frac{i+1}{2}+j$, $b=2+\frac{i-1}{2}+j=1+\frac{i+1}{2}+j$, և $c=n-2j$, որտեղ $j$-ի հնարավոր արժեքներն են. 1, …,

քանի դեռ $\frac{i+1}{2}+j \leq \left\lfloor\frac{i+n-1}{3}\right\rfloor$, այսինքն, $j \leq \left\lfloor\frac{i+n-1}{3}\right\rfloor - \frac{i+1}{2}$, երբ $i-1$-ը զույգ է, և $\frac{i}{2}+j \leq \left\lfloor\frac{i+n-1}{3}\right\rfloor$, այսինքն, $j \leq \left\lfloor\frac{i+n-1}{3}\right\rfloor - \frac{i}{2}$, երբ $i-1$-ը կենտ է: Յուրաքանչյուր $j$-ի համար ենթախումբը գեներացվում է խմբի գործողություններով: Այսպիսով, $j$-ի ենթախումբը պարունակում է $1+\left\lfloor\frac{n-2j-(1+\frac{i+1}{2}+j)-1}{2}\right\rfloor$ էլեմենտ:

$|G2_{i+1}| = \sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{i+n-1}{3}\right\rfloor-\frac{i+1}{2}} \left\lfloor\frac{n-2j-(\frac{i+1}{2}+j)}{2}\right\rfloor$, երբ $i-1$-ը զույգ է,

$|G2_{i+1}| = \sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{i+n-1}{3}\right\rfloor-\frac{i}{2}} \left\lfloor\frac{n-2j-(\frac{i}{2}+j)}{2}\right\rfloor$, երբ $i-1$-ը կենտ է:

Այս բոլոր դատողություններից հետևում է հետևյալ պնդումը.

**Թեորեմ 5.3.1-1:** $G1_{i+1}$-ը և $G2_{i+1}$-ը էլեմենտների չհատվող խմբեր են, որոնք ծածկում են $P^2(n,3)$-ի $i+1$-րդ շերտը:

Մեր հաջորդ նպատակն է գտնել հարևան շերտերում հզորությունների աճման տիրույթները:

Կազմենք $P^2(n,3)$-ի $i$-րդ շերտի համար $G1$ և $G2$ խմբերը: Կդիտարկենք միայն զույգ $i-1$-ի դեպքը: Կենտի դեպքը կարելի է ստանալ նմանատիպ դատողություններով:

$\boldsymbol{G_i^{1+j}}$ - Այս խումբը կազմված է այնպիսի էլեմենտներից, որտեղ $a=1+j$, $b=i-j$, և $c=n$, այսինքն, $(1+j, i-j, n)$: $j$-ի հնարավոր արժեքներն են. $0,1,\cdots,\frac{i-1}{2}-1$: Յուրաքանչյուր $j$-ի ենթախումբը գեներացվում է խմբի գործողությամբ: Այսպիսով, $j$-ի ենթախումբը պարունակում է

$1+\left\lfloor\frac{n-(i-j)-1}{2}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{n-i+j+1}{2}\right\rfloor$ էլեմենտ:

Վերջին ենթախումբը սկսվում է $(\frac{i-1}{2}, 2+\frac{i-1}{2}, n)$ էլեմենտով:

Այսպիսով, ստանում ենք $\sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}} \left\lfloor\frac{n-i+j+1}{2}\right\rfloor$ էլեմենտ:

Այստեղ ունենք լրացուցիչ խումբ՝

$\boldsymbol{G1_i^*}$ - Այս խումբը սկսվում է

$\left(\frac{i-1}{2}+1,\frac{i-1}{2}+2,n-1\right)=\left(\frac{i+1}{2},1+\frac{i+1}{2}+2,n-1\right)$ -ով, որը գեներացնում է $|G1_i^*|=\left\lfloor\frac{n-1-(i+1)/2}{2}\right\rfloor$ էլեմենտ՝ խմբի գործողությամբ: Այնուհետև, կազմվում է $G1_i$ –ն՝ այս բոլոր խմբերի միավորումը.

$G1_i=\left(\bigcup_j G1_i^{1+j}\right)\cup G_i^*$ :

$\boldsymbol{G2_i}$ - Այս խումբը կազմված է այնպիսի էլեմենտներից, որտեղ $a=1+\frac{i-1}{2}+j=\frac{i+1}{2}+j$, $b=1+\frac{i+1}{2}+j$, և $c=n-1-2j$, որտեղ $j$-ի հնարավոր արժեքներն են. $1,\cdots$, քանի դեռ $\frac{i+1}{2}+j\le\left\lfloor\frac{n+i-2}{3}\right\rfloor$, այսինքն, $j\le\left\lfloor\frac{n+i-2}{3}\right\rfloor-\frac{i+1}{2}$ : Այնուհետև, յուրաքանչյուր $j$ -ի համար ենթախումբը գեներացվում է խմբի գործողություններով: Այսպիսով, $j$-ի ենթախումբը պարունակում է $1+\left\lfloor\frac{n-1-2j-(1+\frac{i+1}{2}+j)-1}{2}\right\rfloor$ էլեմենտ:

$|G2_i|=\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n+i-2}{3}\right\rfloor-\frac{i+1}{2}}\left\lfloor\frac{n-2j-(1+\frac{i+1}{2}+j)}{2}\right\rfloor$:

Հաշվենք տարբերությունները՝ $|G1_{i+1}|-|G1_i|$ և $|G2_{i+1}|-|G2_i|$:

$$|G1_{i+1}|-|G1_i|=\sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}}\left\lfloor\frac{n-i+j}{2}\right\rfloor-\sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}}\left\lfloor\frac{n-i+j+1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1-\frac{i+2}{2}}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-i}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1-\frac{i+1}{2}}{2}\right\rfloor$$

$$|G2_{i+1}|-|G2_i|=\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n+i-1}{3}\right\rfloor-\frac{i+1}{2}}\left\lfloor\frac{n-2j-((i+1)/2+j)}{2}\right\rfloor-\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n+i-2}{3}\right\rfloor-\frac{i+1}{2}}\left\lfloor\frac{n-2j-1-((i+1)/2+j)}{2}\right\rfloor$$

Առանձնացնենք հետևյալ դեպքերը.

a) 3-ը $n+i-1$-ի բաժանարար է, որից հետևում է, որ $\left\lfloor\frac{n+i-2}{3}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n+i-1}{3}\right\rfloor-1$;

b) $n+i-1$-ը 3-ի վրա բաժանելուց ստացվում է 1 մնացորդ, որից էլ հետևում է, որ $\left\lfloor\frac{n+i-2}{3}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n+i-1}{3}\right\rfloor$;

c) $n+i-1$-ը 3-ի վրա բաժանելուց ստացվում է 2 մնացորդ, որից էլ հետևում է, որ $\left\lfloor\frac{n+i-2}{3}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n+i-1}{3}\right\rfloor$;

Դիտարկենք b) կամ c) դեպքերը:

$$|G2_{i+1}|-|G2_i|=\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n+i-1}{3}\right\rfloor-\frac{i+1}{2}}\left(\left\lfloor\frac{n-2j-((i+1)/2+j)}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-2j-\left(\frac{i+1}{2}+j\right)}{2}\right\rfloor\right)=$$

$$\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n+i-1}{3}\right\rfloor-\frac{i+1}{2}}\left(\left\lfloor\frac{n-\frac{i+1}{2}-3j}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-\left(\frac{i+1}{2}-1-3j\right)}{2}\right\rfloor\right):$$

1) $n-\frac{i+1}{2}$-ը զույգ է, այստեղից՝ $n-\frac{i+1}{2}-3j$-ն զույգ է, զույգ $j$-երի համար, և կենտ է՝ կենտ $j$-երի համար:

1a) $n-\frac{i+1}{2}$-ը զույգ է, և $j$-ն զույգ է, այստեղից՝

$$\left\lfloor\frac{n-\frac{i+1}{2}-3j}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-\frac{i+1}{2}-1-3j}{2}\right\rfloor+1$$

1b) $n-\frac{i+1}{2}$-ը զույգ է, և $j$-ն կենտ է, այստեղից՝

$$\left\lfloor\frac{n-\frac{i+1}{2}-3j}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-\frac{i+1}{2}-1-3j}{2}\right\rfloor$$

Այսպիսով, 1a)-ի դեպքում,

$|G2_{i+1}|-|G2_i|=\sum_{\text{զույգ } j}^{\left\lfloor\frac{n+i-1}{3}\right\rfloor-\frac{i+1}{2}}1$, որը մոտավորապես հավասար է վերին ինդեքսի արժեքի կեսին:

2) $n-\frac{i+1}{2}$-ը կենտ է, այստեղից՝ $n-\frac{i+1}{2}-3j$-ն կենտ է զույգ $j$-երի համար, և զույգ է՝ կենտ $j$-երի համար:

2a) $n-\frac{i+1}{2}$-ը կենտ է և $j$-ն զույգ է, այստեղից՝

$$\left\lfloor\frac{n-\frac{i+1}{2}-3j}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-\frac{i+1}{2}-1-3j}{2}\right\rfloor$$

2b) $n-\frac{i+1}{2}$-ը կենտ է, և $j$-ն կենտ է, այստեղից՝

$$\left\lfloor\frac{n-\frac{i+1}{2}-3j}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-\frac{i+1}{2}-1-3j}{2}\right\rfloor+1$$

Այսպիսով, 2b)-ի դեպքում

$|G2_{i+1}|-|G2_i|=\sum_{\text{կենտ } j}^{\left\lfloor\frac{n+i-1}{3}\right\rfloor-\frac{i+1}{2}}1$, որը մոտավորապես հավասար է վերին ինդեքսի արժեքի կեսին:

Բոլոր հնարավոր դեպքերի հետագա վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ կենտ $n$ –երի համար $P^2(n,3)$-ի $\frac{n+1}{2}$-րդ շերտը, և զույգ $n$ –երի համար $P^2(n,3)$-ի $\frac{n}{2}$-րդ և $\frac{n}{2}+1$-րդ

շերտերը հանդիսանում են $P(n,3)$-ի մասքսիմալ հզորության շերտեր: Երկու դեպքում էլ սրանք միջին շերտերն են:

### *5.3-2 $P(n,3)$-ի տրոհումը շղթաների*

Այս բաժնում են $P(n,3)$-ը կտրոհենք չհատվող շղթաների: Յուրաքանչյուր շղթան կպարունակի ամենամեծ հակաշղթայի ճիշտ մեկ էլեմենտ, և հետևաբար, կանցնի միջին շերտով/շերտերով: Քանի որ սիմետրիա կա, ապա բավական է շղթաները կառուցել միայն $\hat{P}(n,3)$-ում կամ միայն $\check{P}(n,3)$-ում, - այնուհետև շարունակել ըստ սիմետրիայի:

Նկատենք, որ ամենամեծ հզորության հակաշղթան պարունակում է $(1,\frac{n+1}{2},n)$ էլեմենտը կենտ $n$ -երի համար, իսկ զույգ $n$ -երի համար երկու ամենամեծ հզորության հակաշղթաները պարունակում են, համապատասխանաբար, $(1,\frac{n}{2},n)$ և $(1,\frac{n}{2}+1,n)$ էլեմենտները:

**Ալգորիթմ $AIN_SPLIT(CHS)$ :**

1. **Էլեմենտների դասավորում:** Դիտարկելու ենք շերտերում էլեմենտների լեքսիկոգրաֆիկ կարգը:

2. **$\check{P}(n,3)$ -ում շղթաների ֆրագմենտի կառուցում:** Դիտարկենք ռեկուրսիվ պրոցեդուրա: Առաջին շղթան սկսվում է $(1,2,3)$ էլեմենտով: Ընդհանուր առմամբ, յուրաքանչյուր ընթացիկ շղթա սկսվում է ամենաներքևի շերտի (քանի դեռ այն չօգտագործված էլեմենտներ է պարունակում) ամենափոքր դեռևս չօգտագործված էլեմենտով, և բարձրանում է վերև՝ մինչև հասնի $L_{mid}$ շերտին կենտ $n$-երի համար /կամ $L_{mid+}$ շերտին զույգ $n$-երի համար/: Այստեղից հետո շղթաները բարձրանում են վերև՝ մեծացնելով երրորդ կոմպոնենտը, մինչև այն հասնի $n$-ի, կամ էլեմենտը հասնի միջին շերտին: Եթե որևէ քայլում հանդիպում ենք արդեն օգտագործված էլեմենտի, ապա հետ ենք գնում և մեկով մեծացնում երկրորդ կոմպոնենտը, այնուհետև շարունակում ենք՝ մեծացնելով երրորդ կոմպոնենտը: Այն դեպքում, երբ երկրորդ կոմպոնենտի մեծացնելն է բերում արդեն օգտագործված էլեմենտի, ապա հետ ենք գնում և մեծացնում առաջին կոմպոնենտը, և այլն, մինչև շղթան հասնի միջին շերտին, կամ՝ մինչև հասնի փակուղի, այսինքն, այլևս հնարավոր չլինի շարունակել:

$L_{mid}$ /կամ $L_{mid+}$ / շերտին պատկանող $e$ էլեմենտի համար $C(e)$-ով նշանակենք այդ էլեմենտին հասնող շղթան: Առաջին շղթան, որը սկսվում է (1,2,3) էլեմենտով, հասնում է $(1,\frac{n+1}{2},n)$-ին կենտ $n$-երի համար, և, $(1,\frac{n}{2}+1,n)$-ին ՝ զույգ $n$-ի համար:

Որպես օրինակ դիտարկենք $P(9,3)$-ը:

$159, 168, 249, 258, 267, 348, 357, 456$ – սրանք $L_{mid}$ շերտի էլեմենտներն են:

Ալգորիթմով կառուցված շղթաները $\check{P}(9,3)$-ում հետևյալն են.

$C(159) = \{123,124,125,126,127,128,129,139,149,159\}$,

$C(168) = \{134,135,136,137,138,148,158,168\}$,

$C(249) = \{234,235,236,237,238,239,249\}$,

$C(267) = \{145,146,147,157,167,267\}$,

$C(258) = \{245,246,247,248,258\}$,

$C(357) = \{156,256,257,357\}$,

$C(348) = \{345,346,347,348\}$,

$C(456) = \{356,456\}$:

3. **Շշղթաների աճեցում դեպի $\widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{n},\mathbf{3})$ :** ամբողջական շղթաները $P(n,3)$ -ում կառուցվում են՝ ընդլայնելով/աճեցնելով շղթաների $\check{P}(n,3)$- ին պատկանող մասը դեպի $\hat{P}(n,3)$: Օգտագործելու ենք $P(n,3)$-ի սիմետրիկ լինելը հետևյալ ձևով (որը հեշտ է ստուգել)՝ $L_{mid}$ շերտին պատկանող յուրաքանչյուր $e = (i_1, i_2, i_3)$ էլեմենտնի համար նրա “հակադարձ” $e^{op} = (n+1-i_1, n+1-i_2, n+1-i_3)$ էլեմենտը նույնպես պատկանում է $L_{mid}$ շերտին կենտ $n$ -երի համար: Զույգ $n$ -երի համար $L_{mid-}$ -ին պատկանող յուրաքանչյուր $e = (i_1, i_2, i_3)$ էլեմենտնի համար նրա “հակադարձ” $e^{op} = (n+1-i_1, n+1-i_2, n+1-i_3)$ էլեմենտը պատկանում է $L_{mid+}$ շերտին, և հակառակը:

Վերը բերված օրինակի համար.

$159^{op} = 159$ , $168^{op} = 249$ , $249^{op} = 168$ , $267^{op} = 348$ , $258^{op} = 258$ , $357^{op} = 357$ , $348^{op} = 267$, $456^{op} = 456$:

$\check{P}(n,3)$-ին պատկանող $C(e)$ շղթայի շարունակությունը $\hat{P}(n,3)$-ում նշանակենք $C(e^{up})$-ով: Այն կազմված է $C(e)$-ի էլեմենտների հակադարձ էլեմենտներից՝ վերցված հակառակ կարգով.

$C^{up}(159) = \{149^{op}, 139^{op}, 129^{op}, 128^{op}, 127^{op}, 126^{op}, 124^{op}, 123^{op}\} =$

$\{169,179,189,289,389,489,589,689,789\}$ ;

$C^{up}(168) = \{178,278,378,478,578,678\}$;

$C^{up}(249) = \{259,269,279,379,479,579,679\}$;

$C^{up}(267) = \{367,467,567\}$;

$C^{up}(258) = \{268,368,468,568\}$;

$C^{up}(357) = \{358,458,459\}$;

$C^{up}(348) = \{349,359,369,469,569\}$;

$C^{up}(456) = \{457\}$:

Այսպիսով, ստացանք հետևյալ շղթաները.

$\{123,124,125,126,127,128,129,139,149,159,169,179,189,289,389,489,589,689,789\}$,

$\{134,135,136,137,138,148,158,168,178,278,378,478,578,678\}$,

$\{234,235,236,237,238,239,249,259,269,279,379,479,579,679\}$,

$\{145,146,147,157,167,267,367,467,567\}$,

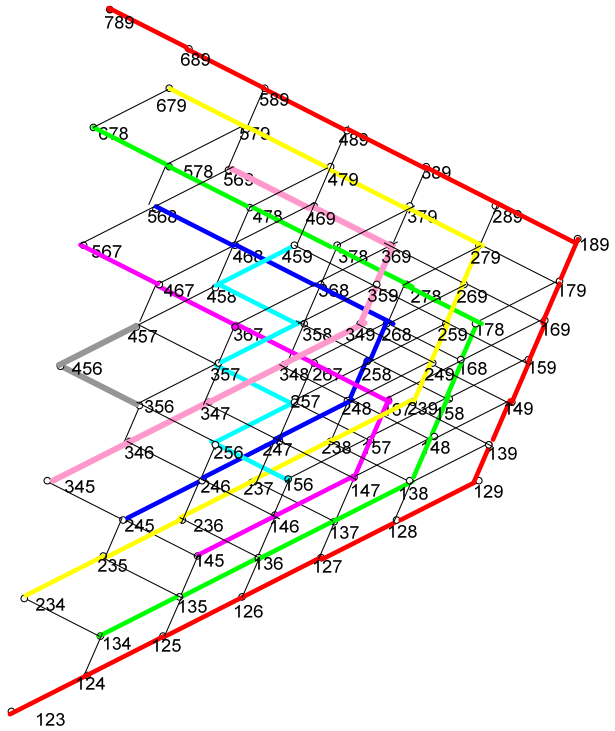
$\{245,246,247,248,258,268,368,468,568\}$,

$\{156,256,257,357,358,458,459\}$,

$\{345,346,347,348,349,359,369,469,569\}$,

$\{356,456,457\}$:

$CHS$ ալգորիթմով կառուցված շղթաները պատկերված են Նկար 5.3.2-1–ում:




**Նկար 5.3.2-1:** Կառուցված շղթաները $\check{P}(9,3)$-ում:

4. **Ալգորիթմի ճիշտ լինելը/կոռեկտությունը:** Նախ պնդում ենք, որ $PSP$ ալգորիթմը փակուղի չի մտնում շղթաները $\check{P}(n,3)$ -ում աճեցնելիս: Այնուհետեև, անհրաժեշտ է ապացուցել, որ 2-րդ քայլում կառուցված շղթաները ծածկում են ամբողջ $\check{P}(n,3)$-ը: Այս երկուսը ապացուցվում են ինդուկցիայով ըստ $n$-ի, հաշվի առնելով $P(n,3)$-ի $l$-րդ շերտի կառուցվածքը, - որը $P(n-i,2)$-ի $\leq l$-րդ շերտերի միավորումն է, $i=1,\cdots$:

Այսպիսով, կառուցեցինք չհատվող շղթաներ, որոնց միավորումը ծածկում է $P(n,3)$-ի բոլոր էլեմենտները: Տեսական արդյունքը այն է, որ ի հավելումն Ռ.Դիլվորթի թեորեմի [72], մենք կառուցում ենք ծածկող էլեմենտներից կազմված շղթաները: Կիրառական արդյունքը այն է, որ $P(n,3)$-ի տրոհումը շղթաների նախատեսված է օգտագործվել $P(n,3)$-ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիաների ճանաչման համար: Մյուս կողմից էլ՝ $P(n,3)$ -ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիաները (0 արժեքի գագաթների բազմությունը) համապատասխանում են 3-համասեռ պարզ հիպերգրաֆների ամենաանհարթ հաջորդականություններին, որոնք, ինչպես գիտենք, գեներացնող բազմություն են հանդիսանում 3-համասեռ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների համար:

**Եզրակացություններ հինգերորդ գլխի վերաբերյալ**

Ներմուծվել է բազմարժեք բազմաչափ ցանցի՝ *չհատվող բինար խորանարդների տրոհման նոր տեխնիկա*, որի հիման վրա կառուցվել են մոնոտոն բինար ֆունկցիաների վերծանման ալգորիթմներ; սա այլընտրանք է Վ.Ալեքսեևի հայտնի ալգորիթմին, ունի նրա հետ համադրելի բարդություն, սակայն կարևոր է, որ այս ալգորիթմները օգտագործում են պարզ մեկնաբանելի կառուցվածքներ և հեշտորեն զուգահեռացվող են: Մշակվել է շղթաների տրոհման ալգորիթմ մասնակի կարգավորված $P(n,3)$ բազմության համար, որը նախատեսված է օգտագործվել $P(n,3)$ -ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիաների ճանաչման համար: $P(n,3)$-ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիաները համապատասխանում են 3-համասեռ պարզ հիպերգրաֆների ամենաանհարթ հաջորդականություններին, որոնք գեներացնող բազմություն են հանդիսանում 3-համասեռ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների համար:

- ✓ Կառուցվել են մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման ալգորիթմներ, որտեղ գուշակին ներկայացվող գագաթներ ընտրելու պրոցեսը բաժանվում է ենթապրոցեսների՝ տրոհելով $\Xi_{m+1}^{n}$-ը չհատվող բինար խորանարդների, և այդպիսով /ա/ ապահովվում է մինիմալ հիշողության օգտագործումը (ինչպես բինար դեպքում); /բ/ ալգորիթմի աշխատանքը տրոհվում է անկախ հաշվարկային պրոցեսների՝ զուգահեռ իրականացման հնարավորությամբ: Դուրս են բերվել ալգորիթմների բարդության գնահատական-բանաձևեր:
- ✓ Ալգորիթմները կիրառվել են քանակական ասոցիատիվ կանոնների (հաճախ հանդիպող հավաքների բազմության) դուրսբերման համար մոնոտոն ատրիբուտներով տվյալների դեպքում, որը նպատակ ունի նոր միջոցներ տրամադրել կիրառական խնդիրներում, ինչպիսին է, օրինակ, ցանցերի ներխուժման հայտնաբերումը LOG ֆայլերի վերլուծման օգնությամբ:
- ✓ Մշակվել է շղթաների տրոհման ալգորիթմ մասնակի կարգավորված $P(n,3)$ բազմության համար:

## ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

1. Տրվել է $n$ գագաթով և $m$ կողով պարզ հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների բազմության ամբողջական նկարագիրը բազմարժեք բազմաչափ $\Xi_{m+1}^{n}$ ցանցի ենթաբազմության տեսքով՝ եզրային էլեմենտների և նրանցով ծնվող մոնոտոն տիրույթների տերմիններով, որտեղ եզրային էլեմենտները գեներացվում են մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների միջոցով [(7)], [(8)], [(13)]: Դուրս են բերվել տիրույթի կարևոր կառուցվածքային առանձնահատկություններ [(9)], [(14)], [(21)], [(22)], [(24)], [(25)], [(26)], [(27)], [(29)].
   - գտնվել են մինիմալ կշռով եզրային էլեմենտները՝ նրանք համապատասխանում են միավոր $E^n$ խորանարդի բառարանային սեղմված $m$-ենթաբազմությանը և միակն են կոորդինատների տեղափոխությունների ճշտությամբ;
   - մաքսիմալ կշռով էլեմենտները համապատասխանում են $E^n$ -ի $\tilde{1}$ կենտրոնով գնդաձև $m$-ենթաբազմություններին; նրանց բնութագրման խնդիրը համարժեք է հիպերգրաֆային հաջորդականությունների խնդրին՝ համասեռ հիպերգրաֆների դեպքում;
   - գտնվել են $\bar{r}_{min}$ և $r_{max}$ շեմեր այնպես, որ $\bar{r}_{min}$ -ից փոքր կշռով հաջորդականությունները հիպերգրաֆային են, և $r_{max}$ -ից մեծ կշռով հաջորդականությունները հիպերգրաֆային չեն:
   - գտնվել է անհրաժեշտ և բավարար պայման ըստ տրված աստիճանային հաջորդականության պարզ ռեգուլյար հիպերգրաֆի գոյության համար:

   Նշված արդյունքների ձեռքբերումը մասնակիորեն հիմնված է $\Xi_{m}^{n}$ ցանցի խորանարդատիպ տրոհման մեթոդի վրա, ինչը ստացել է նաև այլ կարևոր կիրառություններ [(11)], [(15)], [(28)], [(31)]:

2. Մշակվել է սյուների տրված կշիռներ (աստիճանային հաջորդականություն) և տարբեր տողեր ունեցող բինար մատրիցի (պարզ հիպերգրաֆ) սյուն-առ-սյուն կառուցման $G$ արդյունավետ ալգորիթմ [(1)], [(10)], [(12)], [(16)], [(17)], [(18)], [(19)], [(23)], [(30)].

- ապացուցվել է, որ ալգորիթմի լոկալ քայլում հերթական սյան կառուցումը օպտիմալ է՝ որպես նպատակային ֆունկցիա դիտարկելով մատրիցի տարբեր տողերի զույգերի քանակը (որի օպտիմալ արժեքը ապահում է մատրիցի տողերի տարբեր լինելը);
- տրվել է ալգորիթմի արդյունքի երաշխիքի գնահատական սյուների կշիռներով արտահայտվող պարզ բանաձևի տեսքով;

3. Մշակվել է բազմարժեք բազմաչափ $\Xi_{m+1}^{n}$ ցանցում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման նոր մեթոդ՝ հիմնած բազմարժեք բազմաչափ ցանցի խորանարդատիպ տրոհման վրա [(11)], [(28)], [(31)].
   - կառուցվել են մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման $CS$ ( $CS1$ , $CS2$ ) ալգորիթմներ՝ ներկայացված օպտիմալ բինար վերծանիչների չհատվող բազմությունների տեսքով;
   - դուրս է բերվել ալգորիթմների բարդության գնահատական-բանաձև:

4. Ստացված արդյունքները նոր կիրառական համակարգերի նախագծման հիմք են հանդիսացել.
   - $G$ ալգորիթմը կիրառվել է գումարային բալանսով բինար ծառի մոդել կառուցելու համար պատկերների ըստ գրաֆիկական բնութագրերի դասակարգման խնդրում, մասնավորապես հայերեն տպատառ տեքստերի ավտոմատ ճանաչման “Armenian Reader” համակարգում [(2)], [(3)], [(4)], [(6)];
   - $CS$ ալգորիթմը նոր գործիք է տրամադրում քանակական ասոցիատիվ կանոնների (հաճախ հանդիպող հավաքների բազմության) դուրսբերման համար մոնոտոն ատրիբուտներով տվյալների դեպքում [(31)], ինչն իր հերթին ընդլայնում է հոսքային տվյալների պեղման հնարավորությունները, ինչպես օրինակ, LOG ֆայլերի վերլուծումը ցանցերի ներխուժման հայտնաբերման SPARTA համակարգում է (Data Analysis Module) [(5)], [(20)];

Նշված ալգորիթմները թույլ են տալիս զուգահեռ իրականացում, ինչն էական է տվյալների պեղման մեծածավալ խնդիրների լուծման համար:

## ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅՈՎ ՀՐԱՏԱՐԱԿԱԾ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԸ


1) Саакян А.А., Об одном классе (0,1)-матриц, связанных с разбиениями подмножеств $E^n$. Доклады НАН Армении, Том 97, 2, 1997, стр. 12-16.
2) Aslanyan L, Manoucherians J., Sahakian H., Hierarchical Recognition Technologies for Graphical Primiteves, Proceedings of CSIT 1997, Yerevan, 1997, pp. 137-140.
3) Aslanyan L., Sahakyan H., System for Recognizing Printed Armenian Texts, Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 9, No. 1, 1999, pp. 17-18.
4) Aslanyan L, Sahakyan H., "Armenian Reader" – an OCR system for Armenian printed texts, Proceedings of CSIT 1997, Yerevan, 1999, pp. 269-273.
5) Aslanyan L., Margaryan K., Sahakyan H., Data analysis algorithms in network protection systems, The Third International Conference "Digital Information Processing and Controle in Extreme Situations", Minsk, 2002, ISBN: 985-6453-80-1, pp. 221-225.
6) Aslanyan L., Sahakyan H., Differential Balanced Trees and (0,1)-Matrices, "Information Theories and Applications", Volume 10, Number 4, 2003, pp. 363-369.
7) Sahakyan H., Aslanyan L., The boundary descriptors of the n-dimensional unit cube subset partitioning, "Information Theories and Applications", Volume 13, Number 3, 2006, pp. 209-215.
8) Aslanyan L., Sahakyan H., Numerical characterization of n-cube subset partitioning, "Electronic Notes in Discrete Mathematics", Volume 27, pp. 3-4/110, October 2006, Elsevier B.V.,ODSA 2006 - Conference on Optimal Discrete Structures and algorithms.
9) Sahakyan H., Description reduction for restricted sets of (0,1) matrices, "Information Theories and Applications", Volume 14, Number 4, 2007, pp. 311-315.
10) Aslanyan L., Sahakyan H., Hovsepyan A., On constrained convexity tomography and Lagrangean approximations, "Mathematical Problems of Computer Science", Volume 30, 2008, pp.111-122.
11) Sahakyan H., Aslanyan L., On Structural Resource of Monotone Recognition, "Information Theories and Applications", Volume 15, Number 3, 2008, pp. 285-289
12) Sahakyan H., Aslanyan L., Lagrangean approximation for combinatorial inverse problems, "Algorithmic and Mathematical Foundations of Artificial Intelligence", Volume 2, Number 1, 2008, pp. 14-20.
13) Sahakyan H., Numerical characterization of n-cube subset partitioning, "Discrete Applied Mathematics", Volume 157, 2009, pp. 2191-2197.

14) Sahakyan H., Aslanyan L., Generating More Boundary Elements of Subset Projections, Intenational Book Series “Information Science and Computing”, Book 9 “Intelligent Processing”, 2009, pp. 139-144.
15) Sahakyan H., Aslanyan L., Chain Split of Partial Ordered Set of k-Subsets, “New Trends in Information Technologies”, 2010, pp. 55-65.
16) Sahakyan H., Aslanyan L., Linear Program Form for ray different discrete tomography, “Information Technologies and Knowledge”, Volume 4, Number 1, 2010, pp. 41-50.
17) Sahakyan H., Approximation greedy algorithm for reconstructing of (0.1)-matrices with different rows, “Information Theories and Applications”, Volume 17, Number 2, 2010, pp. 124-137.
18) Aslanyan L., Hovsepyan A., Sahakyan H., Constraint convexity tomography and Lagrangian approximations, “Information Theories and Applications”, Volume 17, Number 3, 2010, pp. 203-212.
19) Sahakyan H., Aslanyan L., Evaluation of Greedy algorithm of constructing (0,1)-matrices with different rows, “Information Technologies and Knowledge”, Volume 5, Number 1, 2011, pp. 55-66.
20) Aslanyan L., Bojilov V., Burak P., Ivanova N., Korobulina O., Krissilov A., Markov K., Milenov K., Milenov P., Milenova L., Radkov R., Sahakyan H., Shutko A., Intelligent Data Processing in Global Monitoring for Environment and Security, Chapter 1 “Managing Risk and Safety”, ITHEA, Sofia (Bulgaria) and Kiev (Ukraine), 410 p., 2011.
21) Sahakyan H., Aslanyan L., On hypergraph degree sequence characterization, “Mathematical Problems of Computer Science”, Volume 38, 2012, pp.89-90. International Conference Mathematical Logic and Applications dedicated to the 80th Anniversary of Igor Zaslavski, 1-3 November, 2012, Yerevan, Armenia.
22) Sahakyan H., (0,1)-matrices with different rows, CSIT 2013 Revised Selected Papers, IEEE conference proceedings, 7 p., DOI: 10.1109/CSITechnol.2013.6710342.
23) Sahakyan H., Constrained object-characterization tables and algorithms, "Information Content and Processing", Volume 1, Number 2, 2014, pp.136-144.
24) Sahakyan H., Essential points of the n-cube subset partitioning characterization, “Discrete Applied Mathematics”, Volume 163, part 2, 2014, pp. 205-213.
25) Sahakyan H., On the set of simple hypergraph degree sequences, “Applied Mathematical Sciences”, Volume 9, Number 5, 2015, pp. 243-253.

26) Aslanyan L., Gronau H.-D., Sahakyan H., Wagner P., Constraint Satisfaction Problems on Specific Subsets of the n-Dimensional Unit Cube, CSIT 2015 Revised Selected Papers, IEEE conference proceedings, pp. 47-52, DOI:10.1109/CSITechnol.2015.7358249.
27) Sahakyan H., Aslanyan L., Convexity related issues for the set of hypergraphic sequences, "Information Theories and Applications", Volume 23, Number 1, 2016, pp.39-47.
28) Aslanyan L., Sahakyan H., Splitting technique in monotone recognition, "Discrete Applied Mathematics", Volume 216 Issue P3, 2017, pp. 502-512.
29) Arsenyan I., Aslanyan L., Sahakyan H., Randomized Set Systems Constrained by the Discrete Tomography, "Information Theories and Applications", Volume 23, Number 3, 2016, pp.203-231.
30) Sahakyan H.A., Hypergraph degree sequence approximation, "NAS RA Reports", Volume 117, Number 1, 2017, pp.26-34.
31) Aslanyan L., Sahakyan H., Cube-split technique in quantitative association rule mining, "Information Theories and Applications", Volume 24, N3, 2017, pp. 3-20.

# ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ


1. Асланян Л.А., Изопериметрическая задача и смежные экстремальные задачи для дискретных пространств. Проблемы кибернетики, вып. 36, с. 85-126 (1979).
2. Aslanyan L.A., Recognition method based on classification by disjunctive normal forms, *Cybernetics*, Vol. 11, issue 5, pp. 779–787, 1975 (Translated from Kibernetika, No. 5, pp. 103–110, September–October, 1975).
3. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т.1. М., Наука, 1974.
4. Журавлев, Ю., Избранные научные труды, Магистр, Москва, 1998, 418стр.
5. Карп Р.М., Сводимость комбинаторных задач. Киб. Сб. М., Мир, 1975.
6. Коршунов А.Д., О числе монотонных булевых функций, Проблемы кибернетики. М: Наука, 1981, Вып. 38. С. 5-108.
7. Мошков М.Ю., Условные тесты. Проблемы кибернетики, вып. 40, с. 131-170 (1983).
8. Нигматуллин Р.Г., Некоторые метрические соотношения в единичном кубе. Дискретный анализ, вып. 9, Новосибирск, 1967, с. 47-58.
9. Nigmatullin R.G., Variational principle in algebra of logic, Discrete Anal., Novosibirsk 10 (1967), 69-89.
10. Самарский А. А., Михайлов А. П., Математическое Моделирование: Идеи, Методы, Примеры, М., Наука, Физматлит, 320с., 1997.
11. Хачиян Л.Г., Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании. Журнал вычислительной математики и математической физики, том.20, 1980,1. http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-78901-9.
12. Agrawal R., Imielinski T., and Swami A., Mining association rules between sets of items in large databases, In Proceedings of the ACM SIGMOD International Conference on Management of Data, pages 207-216, Washington D.C., May 1993.

13. Agrawal R., Mannila H., Srikant R., Toivonen H., Verkamo I., Fast Discovery of Association Rules, Advances in knowledge discovery and data mining 12 (1), pp. 307-328, 1996.
14. Agrawal R., Srikant R., Fast algorithms for mining association rules, In Proceedings of 20th International Conference Very Large Data Bases, VLDB, Santiago, Chile, pp. 487-499.
15. Aho V., Hopcroft J., Ullman D., Published by Addison Wesley The design and Analysis of Computer Algorithms, 1972.
16. Alekseev V., On deciphering of some classes of monotone many valued functions, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1976, vol. 16, N. 1, 189-198.
17. Alhswede R., Katona G.O.H., Contributions to the geometry of Hamming spaces, Discrete Math. 17 (1977) 1-22.
18. Ahlswede R,. Khachatrian L., The Complete Intersection Theorem for Systems of Finite Sets, Europ . J . Combinatorics (1997) 18 , 125 – 136.
19. Alon N. and Spencer J., The probabilistic method (2ed), New York: Wiley-Interscience, 2000.
20. Alpers A, Brunetti S., Stability results for the reconstruction of binary pictures from two projections, Image and Vision Computing, 25(10), 1599-1608 (2007).
21. Alpers A., Gritzmann P., Stability and Instability in Discrete Tomography, Chapter in book Digital and Image Geometry, pp. 27-38, DOI: 10.1007/3-540-45576-0_11.
22. Ambarzumian V. A., Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 96, 172 (1936).
23. Andersson Arne, Improving Partial Rebuilding by Using Simple Balance Criteria. In Frank Dehne, Jorg-Rudiger Sack, and Nicola Santoro, editors, 1st International Workshop on Algorithms and Data Structures, Lecture Notes in Computer Science, volume 382, pages 393-402. Springer-Verlag, 1989.
24. Andersson Arne, General Balanced Trees, Journal of Algorithms, 30, 1-18, (1999).

25. Aslanyan L., Danoyan H., Complexity of Hash-Coding type search algorithms with perfect codes, Journal of Next Generation Information Technology (JNIT), Volume 5, Number 4, November 2014, 26-35.
26. Aslanyan L., Danoyan H., On the optimality of the Hash-Coding type nearest neighbor search algorithm, Selected Revised Papers of 9th CSIT conference, IEEE Xplore, 2013.
27. Aslanyan L., Khachatryan R., Association rule mining with n-dimensional unit cube chain split technique, Information Theories and Applications, ISN 1310-0513, 2008, Volume 1, Number 2, p. 108-125.
28. Aumann Y., Lindell Y., A Statistical Theory for Quantitative Association Rules, Journal of Intelligent Information Systems, vol. 20, 255-283, 2003.
29. Barak B., Structure vs Combinatorics in Computational Complexity, Electronic Colloquium on Computational Complexity, Report No. 182, 1-11, (2013).
30. Barcucci E., Del Lungo A., Nivat M., and Pinzani R.: Reconstructing convex polyominoes from horizontal and vertical projections. Theor. Comput. Sci. 155, 321–347 (1996).
31. Batenburg K. Joost, Recent developments in Discrete Tomography, Workshop on Tomography Reconstruction ENS Paris, December 11th, 2012.
32. Bhattacharya A., Singhi Navin M., Some approaches for solving the general (t, k)-design existence problem and other related problems, Discrete Applied Mathematics 161 (2013) 1180–1186.
33. Behrens Sarah, Erbes Cathy, Ferrara Mike, Hartke Stephen, Reinger Ben, Spinoza Hannah, and Tomilson Charles, New results on degree sequences of uniform hypergraphs, Electronic Journal of Combinatorics 20 (2013), no. 4.
34. Bendall G., Margot F., Greedy Type Resistance of Combinatorial Problems, Discrete Optimization 3 (2006), 288–298.
35. Berge C., Graphs and Hypergraphs. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.
36. Berge C., Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets, North-Holland, 1989.

37. Bermondt G-C., Ergincan F., Bus interconnection networks. Discrete Applied Mathematics 68, pp.1-15, (1996.
38. Beth T., Jungnickel D., Lenz H., Design Theory, Wissenshiaftoverlag Mahheim, Wien/Zurich, 1985.
39. Bezrukov S., Edge Isoperimetric Problems on Graphs, Graph Theory and Combinatorial Biology, Bolyai Soc. Math. Stud. 7, L. Lovasz, A. Gyarfas, G.O.H. Katona, A. Recski, L. Szekely eds., Budapest 1999, 157-197.
40. Bhanu Murthy N.L., Murali K. Srinivasan, The polytope of degree sequences of hypergraphs, Linear Algebra Appl., 350 (2002) 147–170.
41. Bhattacharya A., Singhi N. M., Some approaches for solving the general (t,k)-design existence problem and other related problems, Discrete Applied Mathematics, 161, pp. 1180–1186, 2013.
42. Billington D., Conditions for degree sequences to be realisable by 3-uniform hypergraphs, The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 3, 1988, 71-91.
43. Billington D., Lattices and Degree Sequences of Uniform Hypergraphs. Ars Combinatoria, 21A, 1986, 9-19.
44. Billington D., The (s,p)-exchange property, Ars Combinatoria, 23, 1987, 185-200.
45. Billey S., Burke J., Chartier T., Greenbaum A. and LeVeque R., Discrete mathematical modeling, Math 381 Course Notes, University of Washington, 116p., 2010,
46. Birkhoff G., Lattice Theory, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol.25, revised edition, American Mathematical Society, N. Y., 1948.
47. Blet Loic, Hypertree Decomposition and Constraint Satisfaction Problems, November 30, 2010.
48. Blinovski V., Greenhill C., Asymptotic enumeration of sparse uniform hypergraphs with given degrees, European Journal of Combinatorics, vol.51. pp. 287-296, 2016.
49. Bollobas B., Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability, Cambridge University press, 1986 (transferred to digital printing in 2001).

50. Bondy J.A., Murty U.S.R, Graph theory with applications, North Holland, 1976.
51. Boonyasombat V., Degree sequences of connected hypergraphs and hypertrees, Lecture Notes in Math., 1073 (1984) 236–247.
52. Bose R. C., On the construction of balanced incomplete block designs, Annals of Eugenics. 9 (1939), 358–399.
53. Boulicaut JF., Bykowski A., Jeudy B., Towards the Tractable Discovery of Association Rules with Negations, In Larsen H.L., Andreasen T., Christiansen H., Kacprzyk J., Zadrożny S. (eds) Flexible Query Answering Systems, Advances in Soft Computing, vol 7, 2001, Physica, Heidelberg.
54. Brailsford S, Potts C., Smith B., Constraint satisfaction problems: Algorithms and applications, Invited Review, European Journal of Operational Research 119, pp.557-581, 1999.
55. Breiman L., Friedman J.H., Olshen R.A. and Stone C.J., Classification and Regression Trees, Belmont, CA: Wadsworh, Inc., 1984.
56. Bretto A., Hypergraph Theory, an Introdauction, Springer International Publishing Switzerland 2013, DOI 10.1007/978-3-319-00080-0.
57. Brualdi R. A., Matrices of zeros and ones with fixed row and column sum vectors, Linear Algebra Appl., 33 (1980), 159-231.
58. Bulatov A., Tractable conservative Constraint Satisfaction Problems, In 18th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS'03), IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, USA, 321.
59. Daydé M., Décamps, Gould J., On the Use of Block Stretching for Solving Unassembled Linear Systems, Calculateurs Parallèles.Dans: Calculateurs Paralleles, Reseaux et Systemes Repartis, Vol. 10, N. 4, p. 391-399, 1998
60. Daydé M.,Décamps J, L'Excellent J.-Y.,Gould N.I.M.,Solution of Large-Scale Optimization Problems using Element-by-Element Preconditioners.Dans:Fith SIAM Conference on Optimization,Victoria, Canada,20/05/96.
61. Chernikov S. N., Linear inequalities, Itogi Nauki. Ser. Mat. Algebra. Topol. Geom. 1966, 1968, 137–187.

62. Choudum S.A., On graphic and 3-hypergraphic sequences, Discrete Math. 87 (1991), 91–95.
63. Chrobak M., Durr C., Reconstructing hv-convex polyominoes from orthogonal projections. Inform, Process. Lett. 69(6), 283–289 (1999).
64. Colbourn Charles J., Kocay W.L. and Stinson D.R., Some NP-complete problems for hypergraph degree sequences, Discrete Applied Mathematics 14, p. 239-254 (1986).
65. Colbourn C. J., Dinitz J. H., Handbook of Combinatorial Designs, second ed., Chapman and Hall/CRC, 2006.
66. Conforti Michele, Cornuéjols Gérard, Zambelli Giacomo, Integer Programming, Graduate Texts in Mathematics, Volume 271, 2014, ISBN: 978-3-319-11007-3 (Print) 978-3-319-11008-0 (Online).
67. Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R., Clifford D., Introduction to Algorithms, The MIT Press, 2009.
68. Dahl G., Flatberg T., Optimization and reconstruction of hv-convex (0, 1)-matrices, Disc. Appl. Math. 151, 93–105 (2005).
69. Del Lungo A., Polyominoes deffined by two vectors, Theoretical Computer Science, 127, 187-198 (1994).
70. Demange M. and Monnot J., An introduction to inverse combinatorial problems, *Paradigms of Combinatorial Optimization: Problems and New Approaches*, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, USA, vol. 2, 2013. DOI: 10.1002/9781118600207.ch17.
71. Dewdney A., Degree sequences in complexes and hypergraphs, Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975) 535–540.
72. Dilworth, Robert P., A decomposition theorem for partially ordered sets, Annals of Mathematics, 51 (1): 161–166.
73. Dudek A., Frieze A., Ruchinski A., Silekis M., Approximate counting of regular hypergraphs, Information Processing Letters, vol.113, issues 19-21, pp. 785-788, 2013.
74. Durr Ch., Chrobak M., Reconstructing hv-convex polyominoes from orthogonal projections, Information Processing Letters 69 (1999) pp. 283-291.

75. Eggleston H. G., Chapter 1 - General properties of convex sets, pp. 1-32, Publisher: Cambridge University Press, 1958 Online Publication, 2010, DOI:http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511566172.002
76. Engel K., Sperner Theory, Encyclopaedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 65, Cambridge University Press, New York, 1997, p. 417.
77. Erdős P., Graph theory and probability, Canad. J. Math., vol.11, pp. 34–38. DOI: 10.4153/CJM-1959-003-9.MR 0102081.
78. Erdős P. and Gallai T., Graphs with prescribed degrees of vertices. Mat. Lapok, 11:264–274, 1960.
79. Erdős P., Ko C. and Rado R., Intersection theorems for systems of finite sets, Quart. J. Math. Oxford 12, 313–320, 1961.
80. Tomas Feder and Moshe Y. Vardi, The computational structure of monotone monadic SNP and constraint satisfaction: a study through Datalog and group theory, SIAM J. Comput. 28, 1 (1998), 57–104.
81. Feller W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume I, 3rd (revised) edition, ISBN: 9780471257080.
82. Fisher, Ronald A. *The Design of Experiments (9th ed.). Macmillan*. ISBN 0-02-844690-9
83. Freuder E. C., Complexity of K-Tree Structured Constraint Satisfaction Problems, In Proc. of AAAI-90. Boston, MA, 4–9, 1990.
84. Fisher M., The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems, Management Science, Vol. 50, No. 12, 2004, pp. 1861-1871.
85. Fukuda T., Morimoto Y., Morishita S., Tokuyama T., Mining Optimized Association Rules for Numeric Attributes, PODS '96 Proceedings of the fifteenth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART symposium on Principles of database systems, pp. 182-191, Montreal, Quebec, Canada, June 04 - 06, 1996; Journal of Computer and System Sciences, Volume 58, Issue 1, pp. 1-12, February 1999.

86. Fukuda T., Morimoto Y., Morishita S., Tokuyama T Data mining using two-dimensional optimized association rules: Scheme, algorithms, and visualization, in Proceedings of the ACM SIGMOD Conference on Management of Data, pp. 13-23, June 1996.
87. Gale D., A theorem on flows in networks, Pacific J. Math., 7 (1957), pp. 1073–1082.
88. Gardner R. J. and Gritzmann P., Discrete Tomography: determination of finite sets by x-rays, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 349, Number 6, June 1997, pp. 2271-2295.
89. Gardner R. J., Gritzmann P., Prangenberg D., On the computational complexity of reconstructing lattice sets from their X-rays, Technical Report (970-05012), Techn. Univ. Munchen, fak. f. math, 1997.
90. Gardner R. J., Gritzmann P., Prangenberg D., On the computational complexity of reconstructing lattice sets from their X-rays, Discrete Mathematics 202 (1999) 45-71.
91. Garey M. R., Johnson D. S., Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP Completeness, Freeman and Company, 1979.
92. Geoffrion A., Lagrangean Relaxation for Integer Programming, Mathematical Programming Study 2, 1974, 82-114, North-Holland Publishing Company.
93. Gessel, I., On the number of convex polyominoes, Ann. Sci. Math. Quŕebec 24, 63–66 (2000).
94. Ghoshal G., Zlatić V. , Caldarelli G. and Newman M. E. J., Random hypergraphs and their applications, PHYSICAL REVIEW E 79, 066118, 2009.
95. Gnedenko B., On a local limit theorem of probability theory, Uspekhi Math. Nauk, 1948, v. 3, n. 3(25), 187-194.
96. Goemans M., Linear Programming and Polyhedral Combinatorics, Massachusetts Institute of Technology, 2007.
97. Golomb S.W., Polyominoes, Scribner, New York, 1965.
98. Georg Gottlob, Gianluigi Greco, and Francesco Scarcello, Tractable Optimization Problems through Hypergraph-Based Structural Restrictions, S. Albers et al. (Eds.), ICALP 2009, Part II, LNCS 5556, pp. 16–30, 2009, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009.

99. Martin Grohe, The complexity of homomorphism and constraint satisfaction problems seen from the other side, J. ACM 54, 1 (2007), 1. DOI:http://dx.doi.org/10.1145/1206035.1206036.
100. Martin Grohe, Johann A. Makowsky, Model theoretic methods in finite combinatorics: AMS-ASL special session, January 5–8, 2009 Washington, DC, Martin Grohe, Johann A. Makowsky, editors, Contemporary mathematics, v. 558, AMS, 519p., 2011.
101. Gronau H.-D.O.F. and Proske Chr., Maximal families of restricted subsets of a finite set, Acta Cybernetica, Tom.5, Fasc.4 (1982).
102. Gronau H.-D., On maximal families of subsets of a finite set, Discrete Mathematics, vol. 34, pp. 119-130, 1981.
103. Gua Xiaofeng, Lai Hong-Jian, Realizing degree sequences with k-edge-connected uniform hypergraphs, Discrete Mathematics 313 (2013), 1394–1400.
104. Guignard M., Lagrangian Relaxation, Encyclopedia of Operations Research and Management Science, pp 845-860, 2016.
105. Jaques Hadamard (1902), Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Princeton University Bulletin, 49-52.
106. Hansel G,. Sur le nombre des fonctiones booleennes monotones de n variables, C. r. Acad. Sci., 1966, 262.
107. Harary F., Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
108. Harper L.H., Global Methods for Combinatorial Isoperimetric Problems, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
109. Annotated Bibliography on Association Rule Mining by Michael Hahsler, http://michael.hahsler.net/research/bib/association_rules.
110. Han J., Cheng H., Xin D., Yan X., Frequent pattern mining: Current status and future directions, Data Mining and Knowledge Discovery, 14(1), 2007.
111. Harris J. Hirst J.L., Mossinghoff M., Combinatorics and Graph Theory, Springer, 2008.
112. Herman G. T., Kuba A. (eds.), Advances in Discrete Tomography and its Applications, BirkhËauser, Boston (2007).

113. Herman G.T. and Kuba A., Discrete Tomography: Foundations, Algorithms, and Applications, Birkhäuser, Boston, 1999.

114. Heuberger C., Inverse combinatorial optimization: a survey on problems, methods and results, Journal of Combinatorial Optimization, vol. 8, pp. 329–361, 2004.

115. Hickman R., Could antibiotic cocktails be the answer? An in vitro study into antibiotic combinations with enhanced activity against Escherichia coli, Biology Education Centre and Department of Cell and Molecular Biology, Uppsala University, 2011.

116. Imberman S., Domanski B., Finding Association Rules from Quantitative Data Using Data Booleanization, Americas Conference on Information Systems, Proceedings, 2001.

117. Irving R., Jerrum M., Three-dimensional statistical data security problem, SIAM J. Comput. 23 (1994), pp.170-84.

118. Jarray F., Costa M.-C., and Picouleau C., Approximating hv-Convex Binary Matrices and Images from Discrete Projections, International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI 2008: Discrete Geometry for Computer Imagery pp 413-422.

119. Jinschek J., Batenburg K., Calderon H., Van Dyck D., Chen F., Kisielowski C., Prospects for bright field and dark field electron tomography on a discrete grid, Microscopy Microanal. 10 (Suppl. 3) (2004), pp.44-45. Cambridge Journals Online.

120. P. Jeavons, D. A. Cohen, and M. Gyssens, Closure properties of constraints, J. ACM 44, 4 (1997), 527–548.

121. Jukna S., Extremal Combinatorics With Applications in Computer Science, Springer,2011.

122. Kao A. and Poteet S. (Editors), Natural Language Processing and Text Mining, Springer, 2007.

123. Katona G., A theorem of finite sets, Theory of Graphs, Academy of Sciences, Budapest, pp. 187-207, 1968.

124. Katerinochkina N., On sets, containing maximal number of pair wise incomparable n-dimensional k-valued vectors, Mathematical notes, v. 24, no, 3, Sept. 1978.

125. Kisieloski C., Schwander P., Baumann F., Seibt M., Kim Y., and Ourmazd A., An approach to quantitative high-resolution transmission electron microscopy of crystalline materials, Ultramicroscopy 58 (1995), pp.131-55.

126. Kleitman D., On Dedekind's problem: the number of monotone Boolean functions, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 21, no. 3 (1969) pp. 677-682.

127. Klivans C., Reiner V., Shifted set families, degree sequences, and plethysm, Electron. J. Combin., 15(1): Research Paper 14, 35, 2008.

128. Knuth D. E., The Art of Computer Programming, Vol. 1, Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.

129. Knuth D. The Art of Computer Programming, vol.3. Sorting and Searching, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

130. Kocay W. and Li Pak Ching, On 3-hypergraphs with equal degree sequences, Ars Combin. 82 (2007), 145–157. MR 2292314 (2007k:05049)

131. Koren Michael, Extreme degree sequences of simple graphs, J. Combinatorial Theory Ser. B, 15:213–224, 1973.

132. Koren M., Pairs of sequences with a unique realization by bipartite graphs. J. Combin. Theory, 1976, B21, 3, pp. 224-234.

133. Korobkov V., On monotone functions of algebra of logic, Prob. Cyb, 13, 1965.

134. Korshunov A., On the number of monotone Boolean functions, Prob. Cyb, 38, 1981.

135. Korshunov A., Monotone Boolean functions, Uspekhi Math. Nauk, 2003, Vol.58, Issue 5(353), 89-162.

136. Kospanov E., On algorithm of synthesis of rather simple tests, Discrete Analaysis (in Russian), vol. 8, pp. 43-47, 1966.

137. Krom Melven R., The Decision Problem for a Class of First-Order Formulas in Which all Disjunctions are Binary, Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 13: 15–20, 1967.

138. Kruskal J., The number of simplicies in a complex, Mathematical Optimization Techniques, Univ. Of California Press, pp. 251-278, 1963.

139. Kuba, A., Reconstruction in different classes of 2D discrete sets, Lecture Notes in Comput., In: Bertrand, G., Couprie, M., Perroton, L. (eds.) DGCI 1999. LNCS, vol. 1568, pp. 153–163. Springer, Heidelberg (1999).

140. Ladner R., On the structure of polynomial time reducibility, Journal of the ACM, 22:1, pp. 155–171, 1975.

141. Li H. F., Lee S. Y., Shan M. K., DSM-PLW: single-pass mining of path traversal patterns over streaming web click-sequences, Proc. of Computer Networks on Web Dynamics, pp. 1474–1487, 2006.

142. van Lint J. H. and Wilson R. M., A Course in Combinatorics. Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

143. Mannila H., Terzi E., Nestedness and segmented nestedness, KDD'07 Proceedings of the 13th ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery and data mining, 480-489 (2007).

144. Mannila H., Toivonen H., Verkamo I., Efficient algorithms for discovering association rules, In AAAI Workshop on Knowledge Discovery in Databases, pp. 181-192, Seattle, Washington D.C., AAAI Press, 1994.

145. Daniel Marx, Can You Beat Treewidth?, Theory of Computing 6, 1 (2010), 85–112. DOI: http://dx.doi.org/10.4086/toc.2010.v006a005.

146. Daniel Marx, Tractable hypergraph properties for constraint satisfaction and conjunctive queries, Journal of the ACM (JACM), Volume 60 Issue 6, November 2013, Article No. 42.

147. Mihail M., Vishnoi N., On Generating Graphs with Prescribed Vertex Degrees for Complex Network Modeling, College of Computing Georgia Institute of Technology, 11 p.

148. Molnar B., Applications of Hyppergraphs in Informatics: A Survay and Opportunities for Research, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 42 (2014) 261-282.

149. Montanari U., Networks of constraints: Fundamental properties and applications to picture processing, Information Sciences, vol. 7, pp. 95–132, 1974.

150. Muselli M., Monotone Boolean functions are universal approximators, Istituto di Elettronica e di Ingegneria, 21p. 2003.

151. Nemhauser G. and Wolsey L., Integer and combinatorial optimization, John Wiley & Sons INC., 1999, 763p.

152. Paschos Vangelis Th. (Editor), Paradigms of Combinatorial Optimization: Problems and New Approaches, 2nd Edition, ISBN: 978-1-119-01519-2, August 2014, Wiley-ISTE.

153. Piatetsky-Shapiro G., Discovery, analysis, and presentation of strong rules, In Knowledge Discovery in Databases, pp. 229-248, 1991.

154. Pirzada S, Degree sequences of k-multi-hypertournaments, Appl. Math. J. Chinese Univ. 2009, 24(3): 350-354.

155. Prause G.P.M. and Onnasch D.G.W., Binary reconstruction of the heart chambers from biplane angiographic image sequence, IEEE Transactions Medical Imaging, 15 (1996) 532-559.

156. Radon, Johann (1917), Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse [Reports on the proceedings of the Royal Saxonian Academy of Sciences at Leipzig, mathematical and physical section], Leipzig: Teubner (69): 262–277; Translation: Radon, J.; Parks, P.C. (translator) (1986), On the determination of functions from their integral values along certain manifolds, IEEE Transactions on Medical Imaging, 5 (4): 170–176,doi:10.1109/TMI.1986.4307775, PMID 18244009.

157. Rao C. R. [1996. (Ed. with S. Ghosh). Handbook of Statistics 13: Design and Analysis of Experiments. North Holland.

158. Rastogi R., Shim K., Mining Optimized Association Rules with Categorical and Numeric Attributes, IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, vol. 14, no. 1, 2002.

159. Ratsaby Joel, Estimate of the Number of Restricted Integer-partitions, Appl. Anal. Discrete Math. 2 (2008), 222–233.

160. Reingold E., Nivergelt J. and Deo N., Combinatorial Algorithms, Theory and Practice, Prentice-Hall, 1977.

161. Ricky Ini Liu, Nonconvexity of the set of hypergraph degree sequences, Electronic journal of combinatorics 20(1) (2013), #P21.

162. Roberts F., Discrete Mathematical Models, with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems, 559p., 1976,

163. Roman S., Lattices and Ordered Sets, Springer, 2000, DOI: 10.1007/978-0-387-78901-9.

164. Roy S., Ravindran B., Measuring Network Centrality Using Hypergraphs, CODS '15, March 18 - 21, 2015, Bangalore, India, 11p.

165. Ryser H.J., Combinatorial Mathematics, 1963.

166. Ryser H.J., Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, Canad. J. Math. 9 (1957) 371–377.

167. Salleb-Aouissi A., Vrain C., Nortet C., QuantMiner: A Genetic Algorithm for Mining Quantitative Association Rules, In the Proceedings of the 20th International Conference on Artificial Intelligence, 2007, pp. 1035-1040, India, http://www1.ccls.columbia.edu/~ansaf/QuantMiner.

168. Sally C., Chris N. Potts, Barbara M. Smith, Constraint satisfaction problems: Algorithms and applications, Invited Review, European Journal of Operational Research 119 (1999), 557-581.

169. Schrijver A., THEORY OF LINEAR AND INTEGER PROGRAMMING, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, A Wiley-Interscience Publication, 1998.

170. Serjantov A., Optimal algorithm for deciphering of some classes of monotone functions, Journal of Computational Mathematics and Math. Physics, 1983, vol. 23, N. 1, 206-212.

171. Slump, C.H., Gerbrands, J.J., A network flow approach to reconstruction of the left ventricle from two projections, Comput. Gr. Im. Proc., 18, 18.36 (1982).

172. Schaefer Thomas J., The complexity of satisfiability problems, In Conference Record of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (San Diego, Calif., 1978). ACM, New York, 216– 226.

173. Skibenko I. T. , Enumeration of hypergraphs, I. Cybernetics, March 1984, Volume 20, Issue 2, pp 167-172, Springer (Translated from Kibernetika, No. 2, pp. 1–4, 13, March–April, 1984).

174. Skibenko I.T. , Enumeration of hypergraphs, II. Cybernetics, July 1984, Volume 20, Issue 4, pp 467-477, Springer (Translated from Kibernetika, No. 4, pp. 1–9, July–August, 1984).

175. Sokolov D., On optimal deciphering of monotone functions of logic algebra, Journal of Computational Mathematics and Math. Physics, 1982, Vol. 22, N.12, 1878-1887.

176. Sokolov D., Optimal deciphering of monotone Boolean functions, Journal of Computational Mathematics and Math. Physics, 1987, Vol. 27, N.2, 449-461.

177. Srikant R., Agrawal R., Mining Quantitative Association Rules in Large Relational Databases, In Proc. of ACM SIGMOD Conference on Management of Data, Montreal, Canada, 1996.

178. Stasi D., Sadeghi K., Rinaldo A., Petrovi S., Fienberg S., $\beta$- models for random hypergraphs with a given degree sequence, arXiv:1407.1004v1 [math.ST] 3 Jul 2014.

179. Steven R., Lattices and Ordered Sets, 2008, ISBN 0-387-78900-2, 305.

180. Tanguy J.-M., Mathematical Models, Environmental Hydraulics, volume 2 of 5, edited by Jean-Michel Tanguy, WILEY, 556p., 2010.

181. Toivonen H., Sampling Large Databases for Association Rules, In Proceedings of the 22th International Conference on Very Large Data Bases, pp. 134-145, Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 1996.

182. Tonoyan G., The successive splitting of vertices of an n-dimensional unit cube into chains and decoding problems of monotonic Boolean functions, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, Volume 19, Issue 6, 1979, Pages 179-191.

183. Tsang Ed, Foundations of Constraint Satisfaction, Academic Press, 1993.

184. Van Dalen B., On the difference between solutions of discrete tomography problems, Journal of Combinatorics and Number Theory 1, 15-29, 2009.

185. Van Dalen B., On the difference between solutions of discrete tomography problems II, Pure Mathematics and Applications 20, 103-112, 2009.

186. Vazirani V., Approximation Algorithms, Springer Science & Business Media, 2002, 380 p.

187. Vizing, V. G., On an estimate of the chromatic class of a p-graph, Diskret. Analiz. (in Russian), 3: 25–30, (1964).

188. Webb G. I., Discovering associations with numeric variables, Proceedings of the 7th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, pp. 383-388, New York, 2001, ACM Press.

189. Woeginger G.J., The reconstruction of polyominoes from their orthogonal projections, Inform. Process. Lett., 77, pp. 225-229, 2001.

190. Yoda K., Fukuda T., Morimoto Y., Morishita S., Tokuyama T., Computing optimized rectilinear regions for association rules, in Proceedings of the Third International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, pp. 96-103, Aug. 1997.

191. Zolotykh N., Chirkov A., On the complexity of deciphering of threshold functions of many-valued logic, proceedings of the XI International seminar "Discrete mathematics and its applications", Commemorate on the 80th anniversary of academician Lupanov (18-23 June, 2012), 2012, 63-77.