ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

Խ. ԱԲՈՎՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մկրտչյան Արաքսյա Տիգրանի

ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԻ ՆԵՐԱՌՈՒՄԸ ԵՎ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ

ԺԳ.00.02. («Դասավանդման և դաստիարակության մեթոդիկա» մասնագիտությամբ) մանկավարժական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ

Գիտ. ղեկավար ֆիզմաթ գիտ. թեկն., պրոֆեսոր Հ. Ս. Միքայելյան

ԵՐԵՎԱՆ

2015 թ.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Թեմայի արդիականությունը և հրատապությունը: Ժամանակակից կրթական հայեցակարգերում ավելի է կարևորվում սովորողների բարձրակարգ մտածողության զարգացման խնդիրը: Աշխարհում տեղի ունեցող արագընթաց զարգացումները իրենց անմիջական ներգործությունն են ունենում կրթական համակարգերի վրա՝ առաջադրելով գիտելիքահեն տնտեսության և տեղեկատվական հասարակության պայմաններում գործող և ապրող մարդու ձևավորման նոր պահանջ: Եվ դա իր հերթին առաջ է բերում կրթության բովանդակության վերանայման ու արդիականացման խնդիր:

Հանրահայտ է, որ հանրակրթության առանցքային նպատակներից մեկը աշակերտին մտածել սովորեցնելն է: Առանձնացվում են այդ նպատակին հասնելու երկու հիմնական ուղիներ. մտածողության մասին գիտության՝ տրամաբանության տարրերի իմացությունը և մաթեմատիկայի ուսումնասիրությունը, ինչը բոլոր ժամանակներում դիտվել է որպես սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման լավագույն միջոց: Սակայն այստեղ առաջանում են հետևյալ հարցադրումները. արդյո՞ք պետք է տրամաբանության հիմունքները ներառվեն հանրակրթական ծրագրերում, թե՞ միայն մաթեմատիկայի ուսուցումը բավարար է մտածողության ձևավորման խնդրի լուծման համար: Իսկ միգուցե պետք է համադրե՞լ այս մոտեցումները և տրամաբանության տարրերը ներառել մաթեմատիկայի դասընթացու՞մ: Տարբեր ժամանակներում տարբեր շեշտադրումներ են կատարվել ու տարբեր մոտեցումներ են ցուցաբերվել այդ հարցերի լուծման նկատմամբ: Դրանք համակողմանիորեն ուսումնասիրված են Ի. Հարութինեանցի, Լ. Ն. Լանդայի, Ջ. Բրուների, Լ. Քերոլի, Ջ. Պոյայի, Գ. Շեդրովիցկու, Հ. Ֆրոյդենտալի, Պ. Պ. Բլոնսկու, Վ. Մ. Բրադիսի, Ա. Ն. Կոլմոգորովի, Վ. Բոլտյանսկու, Ռ. Ս. Չերկասովի, Ա. Ա. Ստոլյարի, Յու. Ա. Պետրովի, Վ. Ի. Ռիժիկի, Գ. Ի. Սարանցևի, Ի. Լ. Տիմոֆեևայի, Գ. Ա. Բրուտյանի, Ս. Հ. Ավետիսյանի, Ա. Վ. Աբրահամյանի, Հ. Ս. Միքայելյանի, Ս. Է. Հակոբյանի, Է. Ի. Այվազյանի և այլոց կողմից:

Սակայն գիտամանկավարժական գրականության մեջ միասնական տեսակետ չի ձևավորվել: Ավելին, հաճախ արտահայտվում են միմյանց հակադիր, իրարամերժ կարծիքներ: Մասնավորապես ԽՍՀՄ-ում, որի կրթական ավանդույթները պահպանվում էին նաև մեր երկրում, 50-60-ական թվականներին գերիշխում և իրականացվում էր այն տեսակետը, որ անհրաժեշտ է միջնակարգ դպրոցում դասավանդել առանձին «Տրամաբանություն» առարկա [112]: Սակայն հետագայում, գաղափարական և քաղաքական նկատառումներից ելնելով, դադարեցվել է այդ առարկայի դասավանդումը, և առաջին պլան է մղվել այն տեսակետը, թե տրամաբանական մտածողության զարգացման համար պետք է բավարարվել մաթեմատիկայի ընձեռած հնարավորություններով, իսկ նման հնարավորություններ ստեղծեցին Ա. Ն. Կոլմոգորովի գլխավորությամբ ստեղծված դասագրքերը:

Հավանաբար, այդ դասագրքերի բարդությունն էր հիմնական պատճառը, որ հետագա տարիների ընթացքում աստիճանաբար նվազեց տրամաբանության բաղադրիչի դերը հանրակրթական ծրագրերում: Մասնավորապես 80-ական թվականներին ստեղծված մաթեմատիկայի, հատկապես հանրահաշվի ծրագրերի ու դասագրքերի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ գերիշխող են դարձել գիտելիքի հաղորդման և յուրացման վարժանքային սխեմաները, ինչի հետևանքով շոշափելի նահանջ է ունեցել սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման մակարդակը: Դրա վերաբերյալ բազմաթիվ արձագանքներ են առկա 1985 թվականից հետո հրատարակված գիտամանկավարժական գրականության մեջ: Հնչում էին տեսակետներ այն մասին, որ առանց տրամաբանական գիտելիքների ուսուցման, անհնար է ապահովել սովորողների մտավոր կարողությունների զարգացումը:

Այստեղ առաջին հերթին պետք է նշել Ա. Ա. Ստոլյարին, ով գտնում էր, որ մտածողության ցածր կուլտուրայի և տրամաբանական թերկրթվածության իրավիճակը շատ նմանություն ունի լեզվական գրագիտության վիճակի հետ. ինչպես որ ճիշտ գրելու և խոսելու համար անհրաժեշտ է գիտենալ և պահպանել լեզվի քերականական կանոնները, այնպես էլ ճիշտ մտածելու համար անհրաժեշտ է իմանալ և պահպանել տրամաբանության կանոնները [101] (իզուր չեն ասում, որ տրամաբանությունը մտածողության քերականությունն է):

20-րդ դարի վերջին տասնամյակում, ինչպես ՀՀ-ում, այնպես էլ արտերկրում, նոր մոտեցումներ ձևավորվեցին սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման խնդրի վերաբերյալ: Մասնավորապես, արժեքավոր էին ակադեմիկոսներ Գ. Ա. Բրուտյանի, Հ. Ա. Գևորգյանի և այլոց կողմից ստեղծված ձեռնարկները, որոնք հասցեագրված էին ավագ դպրոցի սովորողներին և առավել գործածական էին նախասիրական պարապմունքների ժամանակ [19], [26]: Սակայն դրանով հիմնահարցը դեռևս լիարժեք լուծում չէր ստանում: Այդ ընթացքում ձևավորվեց մեկ այլ մոտեցում ևս, որի էությունը հետևյալն է. տրամաբանական որոշակի գիտելիքներ ներառել մաթեմատիկայի առարկայական ծրագրերում և դրանով հուսալի հիմքերի վրա դնել ինչպես մաթեմատիկական կրթության բովանդակությունը, այնպես էլ սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացումը: Վերջին տասնամյակում ձևավորված այդ մոտեցումը կյանքի կոչելու հարցում լուրջ ներդրում էին հանդիսանում Հ. Ս. Միքայելյանի հեղինակած դասագրքերը, որոնցով նոր փուլ սկսվեց սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողությունը մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով զարգացնելու գործում [66]: Այդ մոտեցումը ամրագրվեց նաև ՀՀ կառավարության կողմից հաստատված «Հանրակրթական պետական կրթակարգում» և «Միջնակարգ կրթության պետական չափորոշչում»: Սակայն, դրա հետ մեկտեղ, տրամաբանական գիտելիքները հանրակրթական ծրագրերում ներառելու հարցի վերաբերյալ վեճերը դեռևս չեն հանդարտվել: Որոշ հեղինակներ, հավատարիմ մնալով խորհրդային վերջին տասնամյակների կրթական ավանդույթներին, քայլեր ձեռնարկեցին և ՀՀ հանրակրթական միջին դպրոցի հանրահաշվի ծրագրերից դուրս մղեցին տրամաբանությանը վերաբերող նյութը [46]: Այսպիսով, հիմնահարցի վերաբերյալ գոյություն ունեցող մոտեցումների հակասականությունը բավարար հիմք է տալիս եզրակացնելու, որ այն լուրջ հետազոտությունների կարիք ունի, և նրա լուծումից զգալիորեն կախված է կրթության բովանդակության փոփոխության ուղղությունն ու ընթացքը:

Հարցի լուծումը պահանջում է նաև որոնել ուղիներ, որոնք կնպաստեն սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության բնականոն զարգացմանը, ներառված կլինեն մաթեմատիկական հասկացությունների, դատողությունների և մտահանգումների ծրագրային կաղապարների շրջանակներում և կունենան սովորողների հետաքրքրասիրությունը բավարարելու ներուժ: Համապատասխանող ուսումնական նյութի մեթոդական մշակումը և փորձարկումը խիստ հրատապ է մանավանդ հանրահաշվի դասընթացում տրամաբանության տարրերի բացակայության պայմաններում:

Խնդրի մշակվածության աստիճանը: Գիտական և մեթոդական գրականության հանգամանալի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման վերաբերյալ Ա. Ա. Ստոլյարի, Յու. Ա. Պետրովի, Վ. Ի. Ռիժիկի, Գ. Ի. Սարանցևի, Ի. Լ. Տիմոֆեևայի և այլոց կողմից կատարված հետազոտությունները կրում են զուտ վերլուծական բնույթ և չեն ապահովում ընդհանուր հարցադրումների մակարդակից անցում առարկայական բովանդակային դաշտ, ուստի և գրեթե չեն արծարծում ուսուցման մեթոդիկայի մշակման հարցեր: Այդպիսի մշակումներ արված են Հ. Ս. Միքայելյանի աշխատանքներում, սակայն այդ մշակումները վերաբերում են միայն միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացին: Մինչդեռ «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառում ներառվում են տարբեր առարկաներ, որոնք դասավանդում են կրթական բոլոր աստիճաններում և, թեև մեր կողմից կատարված ուսումնասիրությունները ինչ-որ չափով ամբողջացնում են կատարված մոտեցումները, բայց, այնուամենայնիվ, հարցի համակարգված դիտարկումը մնում է բաց:

Հետազոտությունների շրջանակից դուրս են մնացել նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառումից բխող հարցեր, որոնք վերաբերում են ուսուցման ընթացքում ժամանակակից մեթոդների կիրառմանը:

Հետազոտության նպատակը: Հետազոտության նպատակը հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկա ուսումնական բնագավառի առարկաների ուսուցման գործընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման հիմնավորումն է և սովորողների լեզվահաղորդակցական կարողությունների ու տրամաբանական մտածողության զարգացմանը ծառայող մեթոդիկայի մշակումը:

Հետազոտության օբյեկտը: Հետազոտության օբյեկտը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի բովանդակությունն է և ուսուցման մեթոդական համակարգը:

Հետազոտության առարկան: Հետազոտության առարկան մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման և ուսուցման գործընթացն է:

Հետազոտության գիտական վարկածը:

եթե՝

• մաթեմատիկա ուսումնական բնագավառի կրթության բովանդակության մեջ համակարգված ձևով ներառվեն տրամաբանության տարրեր,

• մշակվեն ու ներդրվեն տրամաբանության տարրերի ուսուցման արդյունավետ մեթոդիկա և խնդիրների ու վարժությունների համապատասխան համակարգ,

ապա՝

• տրամաբանության տարրերի նպատակային գործառման շնորհիվ կբարձրանա մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի արդյունավետությունը, կապահովվի ուսումնական նյութի ինչպես ճանաչողական, այնպես էլ գործնական-կիրառական ուղղվածությունը:

• կբացահայտվի տրամաբանության տարրերին վերաբերող գիտելիքների, կարողությունների ու հմտությունների հիմնարար նշանակությունը սովորողների բարձրակարգ մտածողության ձևավերման ու զարգացման գործում,

Հետազոտության հիմնական խնդիրները: Հետազոտության նպատակին հասնելու համար անհրաժեշտ է եղել լուծել հետևյալ խնդիրները.

1. Տեսական հետազոտության միջոցով վեր հանել հանրակրթության համակարգում տրամաբանության առանձին առարկայի և մաթեմատիկայի ուսումնական առարկայի շրջանակներում տրամաբանության ուսուցման ուղղությամբ կատարված համաշխարհային և հայրենական փորձը, դրա նշանակությունը սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության զարգացման, արժեհամակարգի ձևավորման և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում:

2. Բացահայտել ՀՀ Հանրակրթության պետական չափորոշչում, մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչներում, ծրագրերում և դասագրքերում տրամաբանության տարրերի ներառման փորձը:

3. Մշակել և մատնանշել մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տրամաբանության տարրեր ներառելու և դրա միջոցով սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության զարգացումը ապահովող տեսական և գործնական արդյունավետ ուղիներ և դրանց իրականացմանն ուղղված, մեթոդապես մշակված և փորձարկված համապատասխան նյութեր և երաշխավորություններ:

4. Վեր հանել մաթեմատիկայի հանրակրթական դասընթացներում տրամաբանության տարրերի ներառման կապակցությամբ մաթեմատիկայի ուսուցիչների պատրաստման և վերապատրաստման համակարգերում համարժեք բարելավումներ կատարելու խնդիրները և առաջարկել դրանց լուծման որոշակի եղանակներ:

Հետազոտության փուլերը: Հետազոտական աշխատանքներն իրականացվել են երեք՝ միմյանց հետ փոխկապակցված փուլերով:

Առաջին փուլում (2008-2010 թ.թ.) կատարել ենք որոնողական աշխատանք, հավաքել և դասակարգել ենք թեմայի վերաբերյալ տեղեկատվական նյութը, ուսումնասիրել գրականությունը, առաջ ենք քաշել հիմնահարցի լուծման ընդհանուր մոտեցումներ, որոնք թույլ են տվել որոշակիացնել հետազոտության նպատակներն ու խնդիրները և ձևակերպել գիտական վարկած, հրատարակել ենք 2 հոդված:

Երկրորդ փուլում (2011-2012 թ.թ.) վերլուծել ենք առաջին փուլում հավաքված տեղեկատվական նյութը, հիմնահարցի լուծմանն առնչվող միջազգային և հայրենական փորձը, մշակել ենք նոր մոտեցումներ, կատարել դրանց արդյունավետությունը ստուգող գիտափորձեր, հրատարակել ենք 6 հոդված:

Երրորդ փուլում (2013-2014 թ.թ.) շարունակել ենք մանկավարժական գիտափորձերը, կատարել արդյունքների վերլուծություն, դրանց վերաբերյալ քննարկումներ ենք անցկացրել սեմինարներում, հաղորդումներ տվել գիտաժողովներում, պատրաստել ենք 2 հոդված, հստակեցրել ենք եզրակացությունները և ատենախոսությունը բերել ավարտուն տեսքի:

Հետազոտության մեթոդաբանական հիմունքները: Որպես հետազոտության մեթոդաբանական հիմք են ծառայել գիտական իմացության, արժեբանության, անձի զարգացման տեսությունների հիմնական դրույթները, զարգացնող ուսուցման և գործունեական մոտեցման հայեցակարգերը, ակտիվ ուսուցման մանկավարժական սկզբունքները:

Հետազոտության մեթոդները: Հետազոտության մեթոդական համակարգը ներառում է՝

ա) տեսական վերլուծություն.

թեմայի վերաբերյալ տեղեկատվության հավաքում, համեմատում և դասակարգում, առկա իրավիճակի բնութագրում և գնահատում,

բ) վերացարկում և ընդհանրացում.

նպատակների, խնդիրների և իրականացման հնարավորությունների հստակեցում, խնդիրների լուծման տարբերակների համադրում,

գ) հակադարձ կապի ապահովում.

մանկավարժական գիտափորձերի և հարցումների անցկացում, արդյունքների գնահատում, որոշումների ճշգրտում և կոնկրետացում:

Հետազոտության գիտական նորույթը:

1. Սովորողների տրամաբանական մտածողության և դրա հետ շաղկապված լեզվահաղորդակցական կարողությունների զարգացման խնդիրը ընդհանուր հարցադրումների և նպատակադրումների մակարդակից փոխադրվում է կոնկրետ առարկայական իրականացման դաշտ: Եվ դա կատարվում է փոխկապակցված երկու տեսանկյուններից.

ա) որոշակիացվում և հստակեցվում են տրամաբանության այն հասկացությունները, գործողությունները, օրենքները և կանոնները, որոնք հարկավոր են մաթեմատիկայի առարկայական ծրագրերում՝ ըստ կրթական աստիճանների համակարգված ձևով ներառելու համար, ընդ որում՝ հիմնավորվում է, որ նպատակահարմար է կրտսեր-միջին (4-6-րդ) դասարաններում ընդհանուր ծանոթություն տալ դատողության (ասույթի) նրա տեսակների ու ճշմարտային արժեքների մասին, միջին դպրոցում (7-9-րդ դասարաններում) ընդգրկել գիտելիքներ սահմանման, դասակարգման, տրամաբանական շաղկապների, ապացուցման և հերքման մասին, իսկ ավագ դպրոցում (10-12-րդ դասարաններում)՝ փոփոխական պարունակող դատողությունների, դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգումների մասին, բ) հանգամանորեն լուսաբանվում են տրամաբանության տարրերի ուսուցման մեթոդական հարցերը, առաջարկվում մեթոդական հնարներ, ներկայացվում խնդիրների, վարժությունների և առաջադրանքների նոր տեսակներ, որոնց նպատակային գործածման շնորհիվ ոչ միայն բացահայտվում են ուսումնական նյութի ճանաչողական և կիրառական տեսանկյունները, այլև ուսուցման գործընթացը սովորողների համար դառնում է մատչելի, հետաքրքիր և գրավիչ:

2. Դիտարկումների վերլուծության հիման վրա փաստարկներ են բերվում այն թեզի օգտին, ըստ որի մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման և արդյունավետ մեթոդների կիրառման շնորհիվ ուսումնական բնագավառների համակարգում զգալիորեն մեծանում է մաթեմատիկայի հանրակրթական-հումանիտար ներուժը, և արդյունքում՝ մաթեմատիկան, մի կողմից, «ընտրյալների» համար նախատեսված առարկայից սկսում է վերածվել բոլորի համար հասանելի առարկայի, մյուս կողմից՝ նպաստում է սովորողների մտածողության և ընդհանրապես դրական արժեքների ձևավորմանը:

Հետազոտության տեսական նշանակությունը:

Հանրակրթության համակարգում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տրամաբանության տարրերի անբացահայտ և տարերային գործառումը բավարար չէ սովորողների մտավոր կարողությունների պատշաճ մակարդակ ապահովելու համար, և անհրաժեշտ է կրթության բովանդակության մեջ բացորոշ ձևով ներառել տրամաբանության հիմունքներից ընտրված այնպիսի գիտելիքներ, որոնք համընդհանուր կիրառություններ ունեն ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ մյուս ուսումնական բնագավառներում և լավագույնս մեկնաբանվում են և ցուցադրվում մաթեմատիկական նյութի վրա: Մաթեմատիկայի ծրագրերում տրամաբանության տարրերի ներառումը հնարավորություն է տալիս հստակեցնել մաթեմատիկական մի շարք հիմնարար հասկացությունների սահմանումները, դրանք դարձնել ընկալելի և վերացնել դրանց սերտողական ուսուցումը:

Հետազոտության արդյունքում, հանրակրթության հիմնական նպատակներից ելնելով, նորովի է մեկնաբանվում մաթեմատիկա ուսումնական բնագավառի կրթության բովանդակության արդիականացման և վերամշակման հիմնահարցը, որոշակիացվում և հստակեցվում է մանկավարժական սկզբունքներին համապատասխան ընտրված տրամաբանական այն գիտելիքների համակարգը, որոնք հիմք են ծառայում սովորողների մտավոր կարողություններիի զարգացման համար: Հետազոտությունը նոր հնարավորություն է ընձեռում մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի զարգացման նպատակով ուսումնասիրությունների շրջանակը ընդլայնելու և խորացնելու ուղղությամբ:

Հետազոտության գործնական նշանակությունը: Հետազոտության արդյունքների կիրառական ոլորտն ընդգրկում է հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկա ուսումնական բնագավառին վերաբերող ամբողջ համակարգը՝ սկսած առարկայական չափորոշիչների ու ծրագրերի վերամշակումից և ուսումնական նյութերի ստեղծումից, մինչև դրանց հիման վրա ուսուցման գործընթացի իրականացումը ինչպես հանրակրթական ծրագրերի տարբեր աստիճաններում՝ տարրական, միջին և ավագ դպրոցներում, այնպես էլ մաթեմատիկայի ուսուցիչների պատրաստման և վերապատրաստման դասընթացներում: Մյուս կողմից՝ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման միջոցով սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության զարգացման շնորհիվ կայուն հիմքեր են ստեղծվում նաև մյուս ուսումնական առարկաների ուսուցման բարելավման համար, քանի որ տրամաբանական գիտելիքներն ու կարողությունները համապարփակ կիրառություններ ունեն մտագործունեության բոլոր բնագավառներում և, անշուշտ, մարդու առօրյա կյանքում: Առաջարկվող նյութերը, մասնավորապես Քերոլի սկուտեղի և հենցենյան ծառի տեսքով ապացուցումներին վերաբերող մեթոդական մշակումները կարող են օգտագործվել ուսուցչի պրակտիկ աշխատանքի ընթացքում:

Հետազոտության անցած փորձաքննությունը: Հետազոտության հիմնական արդյունքները պարբերաբար զեկուցվել են Խ. Աբովյանի անվան հայկական պետական մանկավարժական համալսարանի տարեկան գիտաժողովներում (2010թ., 2011թ., 2012թ.), մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի ամբիոնի գիտամեթոդական սեմինարում (2011-2015թթ.), «Մաթեմատիկական կրթություն» հանրապետական գիտաժողովներում (2013թ., 2014թ.), Ռուսաստանի Դաշնության Սոլիկամսկի և Պենզայի մանկավարժական համալսարանների միջազգային գիտաժողովներում (2015թ.), Թեմայի վերաբերյալ տպագրվել է 16 աշխատանք:

Հետազոտության հավաստիությունը: Հետազոտության հավաստիությունն ապահովված է մեթոդաբանության հիմունքների գիտական հիմնավորվածությամբ, հիմնահարցի վերաբերյալ պատմական և ժամանակակից փորձի վերլուծության խորությամբ ու բազմակողմանիությամբ, նպատակահարմար մեթոդների կիրառությամբ, առաջարկվող մեթոդիկաների փորձարարական ստուգմամբ, արդյունքների քանակական և որակական ցուցանիշների համեմատությամբ ու վերլուծությամբ, ընդհանրացումների մանկավարժական հիմնական սկզբունքներին համապատասխանությամբ:

Պաշտպանության ներկայացվող դրույթները: Պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ դրույթները.

1. Հանրակրթական մաթեմատիկայի առարկայախմբի դասընթացներում հարկավոր է համակարգված ձևով ներառել տրամաբանության տարրեր, ինչը.

ա) հնարավորություն է տալիս արմատապես բարելավելու սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության զարգացման խնդրի լուծումը,

բ) հիմք է ծառայում դասընթացի տեխնիկավարժանքային ուղղվածությունը գաղափարական-բովանդակային դաշտ տեղափոխելու, սերտողական ուսուցման թերությունները նվազեցնելու և ուսուցման արդյունավետությունը բարձրացնելու համար,

գ) ստեղծում է սովորողների դաստիարակության և արժեհամակարգի ձևավորման լրացուցիչ հնարավորություններ:

2. Մաթեմատիկայի ուսուցման արդյունավետության բարձրացմանը նպաստում է մեթոդական համակարգի հարստացումը այնպիսի մեթոդական հնարներով, որոնց օգնությամբ տրամաբանական գործողությունները **վերացական ձևերի մակարդակից փոխադրվում են պատկերային ընկալումների մակարդակ** և միաժամանակ ստանում են լեզվական հստակ ձևակերպումներ: Դրա շնորհիվ՝

ա) ուսուցման գործընթացը սովորողների համար դառնում է մատչելի և հետաքրքիր, բ) հեշտությամբ են կանխվում տրամաբանական գործողություններ կատարելիս սովորողների կողմից թույլ տրվող հնարավոր սխալները,

գ) նոր հնարավորություններ են ստեղծվում միջառարկայական կապերի բացահայտման և բազմառարկայական ինտեգրված ուսուցման համար:

3. Հանրակրթական ծրագրերի բովանդակության մեջ տրամաբանական բաղադրիչի ուժեղացումը կապված է ուսուցիչների տրամաբանական պատրաստվածության մակարդակի բարձրացման խնդրի հետ, որի լուծման համար հարկավոր է կատարել բովանդակային փոփոխություններ բուհական ծրագրերում:

Ատենախոսության կառուցվածքը: Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երկու գլխից՝ յուրաքանչյուրը ներկայացված կետերով, ենթակետերով, 23 նկարներից, 5 գծապատկերներից, 5 աղյուսակներից, եզրակացությունից, գրականության ցանկից (163 անուն), ընդհանուր ծավալը՝ 166 էջ: Ատենախոսությունում զետեղված են նաև հավելվածներ՝ 34 էջ ծավալով:

ԳԼՈՒԽ 1. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՈՒՄ ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԻ ՆԵՐԱՌՄԱՆ ՄԵԹՈԴԱԲԱՆԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

1.1. Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման հիմնահարցը

1.1.1. Տրամաբանության ուսուցման պատմական և ժամանակակից փորձը

Տրամաբանությունը որպես գիտություն սկզբնավորվել է Հին Հունաստանում, ավելի քան երկու հազար տարի առաջ փիլիսոփայության ընդերքում, որտեղ տրամաբանությանը հատկացվող յուրահատուկ տեղը պայմանավորված էր հիմնականում այն հանգամանքով, որ այն կապված էր բանավիճելու արվեստի հետ, որը հին հունական քաղաք-պետություններում, իսկ հետագայում նաև Հին Հռոմում հասարակական կյանքի կազմակերպման առանձնահատկությունն էր: Այստեղ ստեղծվում էին դպրոցներ, որոնցում մարդիկ սովորում էին ճշմարիտը փնտրելու, բանավիճելու և դիմացինին իր տեսակետի մեջ համոզելու արվեստը: Նրանք սովորում էին բազմաթիվ փաստերից ընտրել ճշմարիտները, կառուցել դրանք իրար հետ կապող դատողությունների տրամաբանական շղթա, հանգել ճշմարիտ դատողությունների: Սկզբում ճշմարիտ մտածողության օրենքներն ու ձևերը սովորում էին հռետորական արվեստի շրջանակներում, որը համարվում էր մարդկանց մտածողության, համոզմունքների ներգործության միջոցներից մեկը: Այդ ժամանակներից էլ ընդունված է, որ տրամաբանությունը գիտություն է ոչ միայն մտածողության, այլև օբյեկտիվ իրականության առարկաների մասին: Այդպես էր նաև Հին Հնդկաստանում, Հին Հռոմում և այլ երկրներում:

Հին Հունաստանում ապացուցման տրամաբանական ձևը՝ դեդուկտիվ մտահանգումների շղթայի տեսքով մենք հանդիպում ենք Էլեաթների դպրոցում (Պարմենիդեսի և Զենոնի մոտ): Այդ դպրոցի հիմնադիրն է համարվում Քսենոփանեսը:

Զենոնը հնարամիտ ու ինքնատիպ խնդիրներ էր առաջարկում, որոնք հայտնի են որպես ապորիաներ (անլուծելի խնդիրներ): Դրանք մինչև օրս էլ գտնվում են փիլիսոփաների, մաթեմատիկոսների, տրամաբանների ուշադրության կենտրոնում և լուրջ խթան են հանդիսացել անտիկ գիտության և փիլիսոփայության հետագա զարգացման համար: Փիլիսոփայության պատմության մեջ Զենոնը համարվում է դիալեկտիկայի հայրը (տվյալ դեպքում դիալեկտիկա հասկացությունը նշանակում է բանավեճի ընթացքում որևէ դրույթի հերքման կամ ապացուցման, երկխոսության միջոցով ճշմարտության բացահայտման արվեստ) [85, 25]:

Մ.թ.ա. 5-րդ դարում Հին Հունական փիլիսոփայության մեջ հայտնվեցին այսպես կոչված սոփեստները, որոնցից Պրոտոգորասը և Գորգիասը առաջինն էին, որ Հունաստանում ստեղծեցին հռետորության տեսությունը: Մշակելով պերճախոսության տեսությունը՝ սոփեստները շոշափում էին նաև տրամաբանության հարցերը: *Պրոտոգորասը* (մ.թ.ա. 481-411 թ.թ.) գրեց հատուկ գիրք՝ «Վիճաբանելու արվեստ» վերնագրով: Պրոտոգորասը վիճելու վարպետ էր, ճանապարհորդում էր Հունաստանով, կազմակերպում էր բանավեճեր՝ գրավելով բազմաթիվ լսողների: Նա առաջինն էր, որ սկսեց կիրառել «զրույցի սոկրատյան մեթոդը»: Այդ մեթոդի էությունն այն է, որ զրուցակցին տրվում են հարցեր և ցույց է տրվում նրա պատասխանների ոչ ճշմարիտ լինելը: Այդ պատճառով Պրոտոգորասը հռետորների խոսակցության ժամանակ սկսեց ուսումնասիրել մտահանգման տեսակները:

Դեմոկրիտեսը (մ.թ.ա. 460-370 թ.թ.) ստեղծում է տրամաբանությունը էմպիրիկ հիմքերի վրա, այդ պատճառով նա համարվում է ինդուկտիվ տրամաբանության ստեղծողներից մեկը: Դեմոկրիտեսը քննարկել է դատողությունը՝ նրա մեջ առանձնացնելով սուբյեկտը և պրեդիկատը, ինչպես նաև դիտարկել է հասկացության սահմանումը [85, 26]:

Սոկրատեսի մոտ (մ.թ.ա. 469-399 թ.թ.) առաջին պլանի վրա էր մեթոդի խնդիրը, որի միջոցով կարելի է ստանալ ճշմարիտ գիտելիք: Սոկրատեսը պարզեց, որ որևէ առարկայի մասին գիտելիք ունենալ նշանակում է իմանալ տվյալ առարկայի սահմանումը և հասկացությունը: Սոկրատեսի ուսմունքը շարունակեց նրա աշակերտ, հունական դասական փիլիսոփայության խոշորագույն ներկայացուցիչ *Պլատոնը* (մ.թ.ա.

428-347 թ.թ.): Նա ստեղծեց իր դպրոցը Աթենքում, որն անվանեց Ակադեմիա: Իր գործունեության մեջ Պլատոնը կարևոր տեղ էր տալիս ճանաչողության տեսությանը և տրամաբանությանը: Պլատոնը ձգտում էր ստեղծել հասկացություն և այնուհետև իրականացնել այդ հասկացության բաժանումը իր տեսակների, որի նախասիրած տրամաբանական մեթոդը եղել է դիխոտոմիան [29]:

Բայց որպես գիտություն տրամաբանության ստեղծողը հունական դասական փիլիսոփայության մյուս խոշորագույն ներկայացուցիչն է *Արիստոտելը* (մ.թ.ա. 384-322 թ.թ.), հին աշխարհի մեծագույն մտածողը, որին անվանում են հունական փիլիսոփայության Ալեքսանդր Մակեդոնացի կամ հունական փիլիսոփայության «Զևս»: Նա մշակել է տրամաբանության ընդհանուր տեսությունը և հատուկ աշխատություններ է գրել տրամաբանություն գիտության առանձին բաժինների վերաբերյալ: Արիստոտելն է առաջին անգամ տվել տրամաբանության համակարգված շարադրանքը: Արիստոտելի տրամաբանությունը անվանում են «ավանդական» կամ ֆորմալ տրամաբանություն: Արիստոտելը, վերլուծության ենթարկելով մարդկային մտածողության այնպիսի ձևերը, ինչպիսիք են հասկացությունը, դատողությունը և մտահանգումը, ցույց տվեց, որ իրենց բովանդակությամբ միմյանցից միանգամայն տարբեր դատողությունները կարող են իրար նման լինել ըստ իրենց ձևական կառուցվածքի [27, 9]: Այսպիսով, հնարավոր է դառնում դատողության և մտահանգման կառուցվածքի ուսումնասիրման գործընթացում բոլոր կոնկրետ հասկացությունները փոխարինել բովանդակությունից միանգամայն զուրկ սիմվոլներով: Սիմվոլներն այստեղ հանդես են գալիս որպես փոփոխականներ, որոնց փոխարեն կարելի է տեղադրել տարբեր բովանդակությամբ օժտված հասկացություններ: Ավանդական տրամաբանությունը ներառում էր այնպիսի բաժիններ, ինչպիսիք են *հասկացությունը, դատողությունը, ճշմարիտ մտածողության (սկզբունքները) օրենքները, մտահանգումները (դեդուկտիվ, ինդուկտիվ, անալոգիայով), փաստարկման տեսության տրամաբանական հիմունքները, հիպոթեզը:* Չնայած Արիստոտելը տրամաբանության գիտության հիմնադիրն է, սակայն նա տրամաբանությունը առանձին գիտություն չէր դիտում, ընդունելով, որ դա ճշմարտության բացահայտման գործիք է, զենք, մեթոդ կամ մեթոդաբանություն [126]:

Արիստոտելից հետո ստոյիկյան փիլիսոփաների կողմից մշակվեց ասույթների տրամաբանությունը, այդ թվում նաև պայմանական և բաժանարար մտահանգումների տեսությունը: Ստոյի հիմնադիրն է *Զենոն Կիտիոնացին* (մ.թ.ա. 336-264 թ.թ.): Այս դպրոցի տրամաբանները տվել են նաև տրամաբանական տերմինների վերլուծությունը՝ ժխտում, կոնյունկցիա, դիզյունկցիա, իմպլիկացիա:

Միջնադարյան կրթության համակարգում, սկսած 5-րդ դարից, տրամաբանությանը հատկացվում էր հատուկ տեղ: Տեսական գիտությունները կազմում էին այսպես կոչված *«յոթ ազատ արվեստները»:* Դրանք բաժանվում էին երկու մասի: Առաջին հերթին ուսումնասիրվում էին քերականությունը, հռետորությունը և դիալեկտիկան, որոնք կազմում էին «եռյակ» (տրիվիում): Այնուհետև գալիս էին «չափի մասին գիտությունները»՝ թվաբանությունը, երկրաչափությունը, աստղագիտությունը և երաժշտությունը, որոնք կազմում էին «քառյակը» (քվադրիումը): «Յոթնյակի» ուսումնասիրությունից հետո միայն ուսուցանվում էին «գործնական գիտությունները»՝ տոմարագիտությունը, բժշկագիտությունը և այլն: Իսկ, տրամաբանությունը՝ որպես մտածողության գործիք, մտահանգման և ապացուցման միջոց, համարվում էր ուսման նախադուռը [26, 256]:

Մինչև 14-րդ դարը եվրոպական միջնադարյան գիտության՝ դպրոցային փիլիսոփայության կամ սխոլաստիկայի շրջանակներում, սկզբնական շրջանում վերլուծվում էին հասկացությունների տեսության (սահմանման, բաժանման) հարցերը, իսկ հետագայում սկսեցին մանրամասնորեն վերլուծել դեդուկտիվ մտահանգումների, ապացուցումների և հերքումների,տրամաբանական սխալների յուրահատկությունները: Արդյունքում այնպիսի մեծ հավատ առաջացավ մտածողության տրամաբանական կառուցվածքների գործառության հնարավորությունների նկատմամբ, որ արվեցին տրամաբանական «մտածող մեքենա» ստեղծելու առաջին փորձերը: Դրանցից հայտնի է Ռայմունդ Լուլիուսի մեքենան [16, 11]:

17-րդ դարից սկսած և ընդհուպ մինչև 19-րդ դարը Եվրոպայում լայն ճանաչում է գտել և որպես դասագիրք օգտագործվել է *Ա. Առնոյի* և *Պ. Նիկոլի* ձևական տրամաբանության՝ *«Տրամաբանություն կամ մտածելու արվեստը»* աշխատությունը, այսպես կոչված *Պոր-Ռոյալի տրամաբանությունը,* որի մեջ առաջին անգամ տրամաբանությունը շարադրված է ներկայումս ընդունված համակարգով և իր հիմնական բաժիններով՝ հասկացություն, դատողություն, մտահանգում, ապացուցում [26, 258]:

Գիտության պատմական զարգացման ընթացքում, հատկապես 17-րդ դարից հետո կոնկրետ գիտությունների, իսկ առաջին հերթին *մաթեմատիկայի և տրամաբանության ուսումնասիրման խնդիրներն սկսում են ավելի մերձենալ միմյանց:* Հիմքեր են ստեղծվում մաթեմատիկական տրամաբանության սաղմնավորման համար, և այդ գործում մեծ դեր ունեն հատկապես գերմանացի ականավոր գիտնական *Գ. Վ. Լայբնիցի* (1646-1716 թ.թ.) և ապա անգլիացի նշանավոր մաթեմատիկոս *Ջ. Բուլի* (1815-1864 թ.թ.) աշխատանքները: Դրանք նվիրված են այն գաղափարի իրականացմանը, ըստ որի՝ տրամաբանության նկատմամբ կիրառվում են հանրահաշվի օրենքները, և տրամաբանական մտահանգումները ներկայացվում են որպես հանրահաշվական բանաձևերի ձևափոխությունների արդյունքներ [16, 12-20]:

Այն բանի շնորհիվ, որ մտածողության օրենքները, կշռադատության ձևերն ու ընթացքը նույնպես դարձան մաթեմատիկական մեթոդներով ուսումնասիրության առարկա, զգալիորեն ընդլայնվեց տրամաբանության հետազոտությունների շրջանակը: Եթե մինչ այդ հնարավոր էր տրամաբանությանը վերաբերող գիտելիքների համակարգն ամբողջությամբ դարձնել ժամանակի առաջավոր դպրոցներում սովորողների համար ուսումնառության նյութ, ապա 19-րդ դարի կեսից հետո տրամաբանության բնագավառն արդեն այնքան էր ընդլայնվել ու խորացել, որ չէր կարող լրիվությամբ ընդգրկվել ուսումնական գործընթացում: Այդ առումով ծագում էին մանկավարժական լուրջ հիմնահարցեր՝ կապված ինչպես կրթության բովանդակության մեջ տրամաբանության բաղադրիչի հստակեցման, այնպես էլ ուսուցման կազմակերպման եղանակների ու մեթոդների հետ:

19-րդ և 20-րդ հարյուրամյակների սահմանագծին առաջադեմ մաթեմատիկական և մանկավարժական միտքը միտված էր բարեփոխելու մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացը այնպես, որ այն համապատասխաներ տվյալ ժամանակի պահանջներին: Այդ առումով ուշագրավ է *Ա. Կ. Վլասովի* հետևյալ տեսակետը. «Միջնակարգ դպրոցի խնդիրը կայանում է նրանում, որ այն տա այնպիսի կրթություն, որը գրգռի մտքի աշխատանքը և գիտության տարբեր ոլորտներում գիտելիքի հանդեպ առաջացնի հետաքրքրություններ, որոնց արդյունքները կվերածվեն ընդհանուր սեփականության» [142, 43-44]: Վլասովի կարծիքով, տրամաբանորեն վերամշակված բովանդակությունը և դրա արդյունքում ձեռք բերված կարողություններն ու հմտությունները մեծագույն արժեք են ներկայացնում ընդհանուր կրթության համար:

20-րդ դարի մաթեմատիկական կրթության բարեփոխման պատմության մեջ կարելի է առանձնացնել երեք փուլ: Առաջինը ներառում է հարյուրամյակի սկզբից մինչև 70-ական թվականները, երկրորդը վերաբերում է 70-ականներից մինչև 90-ականները, երրորդ փուլը սկսվում է 90-անների սկզբից:

Մաթեմատիկական կրթության բարեփոխման առաջին փուլը իրականացվում էր այնպիսի պայմաններում, երբ մաթեմատիկան դիտարկվում էր որպես իրական աշխարհի քանակական հարաբերություններն ու տարածական ձևերը ուսումնասիրող գիտություն: Այս փուլում մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի ուսումնասիրությունները տարվում էին դիդակտիկական այնպիսի եղանակների փնտրման ուղղությամբ, որոնք կնպաստեին գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների որակյալ յուրացմանը:

40-ական թվականներին ի հայտ եկան ԷՀՄ-ները, կիբեռնետիկան, և ըստ այդմ, նկատվեց առաջխաղացում դեպի դիսկրետ մաթեմատիկան, ինչը բերեց մաթեմատիկայի այնպիսի բաժինների զարգացմանը, ինչպիսիք էին մաթեմատիկական տրամաբանությունը, հավանականությունների տեսությունը, կոմբինատորիկան, խաղերի և կոդավորման տեսությունները: Մաթեմատիկան ակտիվորեն ներառվեց բոլոր գիտությունների մեջ:

Հոկտեմբերյան հեղափոխությունը, պատերազմները կրթության բարեփոխումների դադարեցման պատճառ հանդիսացան, ինչի արդյունքում ի թիվս բազմաթիվ այլ սահմանափակումների, մասնավորապես ԽՍՀՄ-ում վերացվեց տրամաբանություն առարկայի ուսուցումը ինչպես հանրակրթական, այնպես էլ բուհական համակարգերում: Սակայն *50-ականներին* խորհրդային միջնակարգ դպրոցը նորից անդրադարձավ տրամաբանությանը, և սկսվեց դասավանդվել առանձին

«Տրամաբանություն» առարկան [112], ինչին դեմ էր կրթությանն առնչվող գործիչների, այդ թվում նաև գիտնականների մի զգալի մասը:

70-ական թվականներից սկսվում է մաթեմատիկական կրթության բարեփոխման նոր փուլ: Նշենք ևս մի դրույթ, որը նշանակալից ազդեցություն ունեցավ բարեփոխման գաղափարախոսության վրա: Ժ. Պիաժեն, ուսումնասիրելով երեխաների մտավոր զարգացումը, հանգեց հետևյալ եզրակացությանը. «Տարրական մաթեմատիկական յուրաքանչյուր ստրուկտուրայի (հանրահաշվական, կարգային և տոպոլոգիական) պետք է համապատասխանի մտածողության կառուցվածքին: Մաթեմատիկական մտածողությունը նրա կողմից դիտարկվում էր որպես մտածողության տարրական կառուցվածքների կոմպոզիցիա, և այդ պատճառով մտածողության ձևավորման կարևոր պայման է դառնում մաթեմատիկական ստրուկտուրաների ուսումնասիրությունը: Այլ խոսքերով՝ սովորողների մաթեմատիկական մտածողության զարգացման համար ամենամեծ արդյունավետությունն ունի մաթեմատիկայի այնպիսի դասավանդումը, որը հենվում է բազմությունների տեսության և մաթեմատիկական տրամաբանության տարրերի վրա (այսինքն, այնպիսի հասկացություններ, որոնք ավելի վերացական են և ընդհանրական)»: Ահա այս կերպ մաթեմատիկայի վերաբերյալ ստրուկտուրալ պատկերացումները իրենց ազդեցություններն ունեցան նշված շրջանի մաթեմատիկայի դպրոցական ծրագրերի և դասագրքերի վրա [142, 44]:

Այդ շրջանում մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ծայրահեղ մոդեռնիստական շարադրման հետ զուգահեռ, որոշ երկրներում կատարվում էր դրա չափավոր արդիականացում: Դա վերաբերում էր այնպիսի երկրներին, ինչպիսիք էին ԽՍՀՄ-ը, Լեհաստանը, Գերմանիան, Չեխոսլովակիան, Ռումինիան, ԱՄՆ-ն, Անգլիան և այլն: Մի շարք ծրագրերում ներմուծվեցին վիճակագրության և հավանականությունների տեսությունների, մաթեմատիկական տրամաբանության տարրերը, գործողության, խմբի, ստրուկտուրայի հասկացությունները:

ԽՍՀՄ-ում մաթեմատիկական կրթության բարեփոխման աշխատանքները ղեկավարում էր ակադեմիկոս *Ա. Ն Կոլմոգորովը:* Կարևոր են նրա դիտարկումները մաթեմատիկայի տեսական և պրակտիկ ուսուցման մեջ տրամաբանության դերի հստակեցման վերաբերյալ: Բերենք միայն նման մեկ օրինակ. «Այստեղ հատկապես մեծ է մաթեմատիկան դասավանդողների պատասխանատվությունը, քանի որ առանձին «Տրամաբանություն» առարկա դպրոցում չկա, և տրամաբանության տարրերի հետ դպրոցականների ծանոթացումը գործնականորեն հիմնականում կատարվում է մաթեմատիկայի դասի ընթացքում» [155, 29]:

Սակայն պարզվեց, որ Կոլմոգրովի մոտեցմամբ գրված հանրահաշվի և երկրաչափության դպրոցական դասագրքերը շատ բարդ են սովորողների համար և, ի վերջո, մասնագետներին բերեց այն համոզման, որ պետք է հրաժարվել դրանցից: Դպրոցը նորից անցավ այնպիսի դասագրքերի, որոնց գաղափարախոսությունը շատ քիչ էր տարբերվում 50-60-ականների դասագրքերի գաղափարախոսությունից, և դրանցում բացակայում էին ինչպես բազմատեսաբանական լեզուն, այնպես էլ տրամաբանության տարրերը: Եվ այս միտումը շարունակվեց մինչև ԽՍՀՄ անկումը:

Հետխորհրդային շրջանում տրամաբանության դասավանդման փորձը տարբեր է ինչպես ԽՍՀՄ փորձից, այնպես էլ ըստ առանձին երկրների: Մեր կողմից կատարվել է հետխորհրդային մի քանի պետությունների մաթեմատիկայի հանրակրթական առարկայական ծրագրերի, չափորոշիչների ու կրթական հայեցակարգերի համեմատական վերլուծություն՝ պարզելու համար, թե ինչպես է այս հիմնահարցը լուծում գտնում այնտեղ [158]-[163]:

Այս ուղղությամբ *Ռուսաստանի Դաշնության* հանրակրթական հաստատություններում մաթեմատկայի ուսուցմանը վերաբերող միջին դպրոցի կրթական խնդիրները ներառում են նաև տրամաբանության տարրերի ուսուցմանը միտված խնդիրներ. սովորողների ինտելեկտուալ զարգացում, անձնավորության որակների ձևավորում, որոնք անհրաժեշտ են մարդուն ժամանակակից հասարակության մեջ լիարժեք կյանքի համար՝ մտքի պարզություն և ճշգրտություն, քննադատական մտածողություն, ինդուկցիա, տրամաբանական մտածողություն, ալգորիթմական կուլտուրայի տարրեր [162]: Կրթական այս աստիճանում մաթեմատիկայի ծրագրերի բովանդակության մեջ ներառվում է տրամաբանության տարրերին վերաբերող նյութի պարտադիր մինիմում. *սահմանում, ապացուցում, աքսիոմներ և թեորեմներ, հետևություն, անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ,* *հակաօրինակ և հակասող ենթադրությամբ ապացույց, ուղիղ և հակադարձ թեորեմ, գաղափար աքսիոմատիկ համակարգի և երկրաչափության աքսիոմատիկ կառուցման մասին, Էվկլիդեսի 5-րդ պոստուլատը և նրա պատմությունը:* Ավագ դպրոցում մաթեմատիկայի ուսուցումն ուղղված է տրամաբանական մտածողության, ալգորիթմական կուլտուրայի, տարածական երևակայության, մաթեմատիկական մտածողության և ինտուիցիայի, ստեղծագործական ընդունակությունների զարգացմանը, որոնք անհրաժեշտ են կրթության շարունակման, մաթեմատիկայի շրջանակներում ինքնուրույն աշխատանքի և ապագա մասնագիտական գործունեության իրականացման համար: Ասվածից հետևում է, որ այստեղ նույնպես կարևորվում է մաթեմատիկայի ուսուցման տրամաբանական բաղադրիչը:

Բելառուսի միջին դպրոցն ավարտողների մաթեմատիկական պատրաստվածության մակարդակի նկատմամբ դրվում են տրամաբանական բաղադրիչին վերաբերող հետևյալ պահանջները. *տիրապետել վերլուծության, համադրության, համեմատման, ընդհանրացման, կոնկրետացման, համակարգման* և այլ գործողությունների, ինչպես նաև ծանոթանալ ճանաչողության գիտական մեթոդներին՝ վերլուծություն, համադրություն, ինդուկցիա, դեդուկցիա, անալոգիա, ընդհանրացում, կոնկրետացում, վերացարկում [159], [161]: Ուսուցման հաջորդ փուլում (VII-IX-րդ դասարաններ) ենթադրվում է մտածողության ինդուկտիվ և դեդուկտիվ տարրերի զարգացում, ինչը ուժեղացնում է տեսական ընդհանրացումների և հետևությունների դերը: Միևնույն ժամանակ կարևորվում է տարբեր դիտողական միջոցների օգտագործումը՝ որպես հիպոթեզի աղբյուր, իսկ առանձին դեպքերում նաև փաստարկման համար: Ավագ դպրոցում մաթեմատիկայի ուսուցումը տրամաբանական բաղադրիչի մասով ենթադրում է սովորողների ինտելեկտուալ զարգացում, մտածողության որակների ձևավորում, որոնք բնորոշ են ոչ միայն մաթեմատիկական գիտության բնագավառում գործունեությանը, այլ նաև անհրաժեշտ են հասարակության մեջ լիարժեք ինտեգրվելու և անձնային կյանքի կազմակերպման համար:

Մաթեմատիկական կրթության տրամաբանական բաղադրիչին մեծ տեղ է հատկացվում *Վրաստանի* հանրակրթական դպրոցում: Այստեղ մաթեմատիկայի ուսուցման հիմնական նպատակների շրջանակում նախատեսվում է տրամաբանական բաղադրիչի հետևյալ գործառույթների իրականացում. *զարգացնել աշակերտների մտածելու կարողությունը, դեդուկտիվ և ինդուկտիվ դատողություններ կատարելու, կարծիքները հիմնավորելու, երևույթները և փաստերը վերլուծելու ունակությունը:* Նշվում են տրամաբանության հետ առնչվող այն հիմնական կարողությունները և հմտությունները, որոնց ձևավորմանը ծառայում է ժամանակակից մաթեմատիկական կրթությունը. *վարկածի ձևակերպում և մասնավոր դեպքերում դրա հետազոտում, նախնական տվյալների ընտրություն և կազմակերպում* (այդ թվում աքսիոմների կամ/և արդեն հայտնի փաստերի), *էական հատկանիշների և տվյալների բաշխում, ապացուցման, հիմնավորման եղանակի ընտրություն* (օրինակ, հիմնավորելիս կիրառել էվրիստիկական մեթոդը), *տարբեր տեսակի արտահայտությունների համապատասխան կիրառություն, օրինակ, պայմանական դատողություն («եթե..., ապա…»), քանակային բովանդակության արտահայտում, ենթադրություն, սահմանում, տեսություն, վարկած, տարբեր դեպքերի թվարկում, դատողություն, որոնել այլընտրանքային ուղի, փաստարկել ընդունած որոշման ստույգությունն ու արդյունավետությունը, բացատրել և փաստարկել ընդհանրացման կամ դեդուկցիայի միջոցով ստացված եզրակացությունները, վերլուծել թեորեմների, դրույթների եզրակացությունները՝ մեկ կամ մի քանի պայմանի, սահմանափակման, նվազեցման կամ հանման միջոցով, արձանագրել բացառության դեպքերը և հակաօրինակներ գտնելով հիմնավորել դրանց ընդհանրացման անճշտությունը:* Տրամաբանության տարրերին վերաբերող թեմաները հիմնականում զետեղված են 8-րդ և 9-րդ դասարանների ծրագրերում [160]:

Կատարված վերլուծությունները ցույց են տալիս, որ մեր կողմից ուսումնասիրված երկրների կրթական համակարգերում մեծ նշանակություն է տրվում տրամաբանության տարրերի իմացությանը, ընդ որում՝ արդի պայմաններում մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տրամաբանության անբացահայտ և տարերային գործառումը բավարար չի համարվում սովորողների մտավոր կարողությունների պատշաճ մակարդակ ապահովելու համար, և անհրաժեշտ է համարվում միջին և ավագ դպրոցների ծրագրերում բացորոշ ձևով ներառել տրամաբանության հիմունքներից ընտրված այնպիսի գիտելիքներ, որոնք համընդհանուր կիրառություններ ունեն ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ մյուս ուսումնական բնագավառներում:

1.1.2. Տրամաբանության տարրերի ուսուցման հայրենական փորձը

Վաղ միջնադարից մինչև XX դարի վերջ: Թեև դեռևս մ.թ.ա. 1-ին դարում Հին Հռոմում տրամաբանության զարգացման գործում իրենց մասնակցությունն են ունեցել հայազգի մտածողները, ինչպես օրինակ ճանաչված քերական և ճարտասան *Տիրան Հայկազնը*, ով հավաքել է հին հունական մտածողների երկերը, այնուամենայնիվ ընդունված է ասել, որ հայ տրամաբանական մտքի պատմությունը ըստ էության սկսվում է *Դավիթ Անհաղթով* (5-րդ դ. վերջ-6-րդ դ. սկիզբ), ով վաղ միջնադարի փիլիսոփայության, գիտության, մշակույթի նշանավոր դեմքերից է և մեծարվել է որպես «եռամեծ փիլիսոփա»: Նրա երկերը ընթերցվել և մեկնվել են ոչ միայն Հայաստանում, այլև շատ երկրներում: Դավիթ Անհաղթը անդրադարձել է Արիստոտելի տրամաբանական աշխատություններին, այդ թվում հետևելով նրա սիլլոգիստիկային վերաբերող «Առաջին անալիտիկա» աշխատությանը՝ ստեղծել է տրամաբանության իր ուսմունքը, ինչը հազվագյուտ երևույթ է վաղ միջնադարի գրականության մեջ: Հետևելով Արիստոտելին, Դավիթ Անհաղթը տարբերում է *անալիտիկան* («վերլուծականն») և *դիալեկտիկան* («տրամաբանականն»): Անալիտիկան ուսմունք է սիլլոգիստական մտահանգման մասին, որտեղ նախադրյալների կոնկրետ ճշմարտության հարցը չի քննվում, իսկ դիալեկտիկան նկատի ունի ապացուցումների ու հերքումների ոլորտը, որտեղ քննության խնդիրը նախադրյալների կոնկրետ ճշմարտության հարցն է [28, 120-121]: Տրամաբանության հարցերին Դավիթ Անհաղթը անդրադարձել է նաև իր «Սահմանք իմաստասիրության» աշխատության մեջ, որտեղ քննում է հասկացությունների ճշգրտման, սահմանման ու բաժանման տրամաբանական գործողությունների հետ կապված որոշակի նրբություններ: Նա կատարել է գիտությունների դասակարգում և անդրադարձել է նաև գիտելիքների համակարգի մեջ տրամաբանության՝ որպես մտածողության գործիքի ունեցած առաջնային դերին [56, 98-108]:

Ճշմարիտ գիտությունների ուսումնասիրությունը Հայաստանում կայուն հիմքերի վրա դնող առաջին հայ գիտնականը *Անանիա Շիրակացին* էր (7-րդ դար), ում գիտամանկավարժական գործունեությունը և թողած ժառանգությունը մեծ ազդեցություն է ունեցել հայ գիտության և դպրության հետագա զարգացման վրա: Գիտելիքները խորացնելու նպատակով՝ նա շուրջ 11 տարի ճանապարհորդել ու սովորել է տարբեր երկրներում, այնուհետև վերադառնալով հայրենիք, բացել է դպրոց, գրել դասագրքեր և իր գործունեությունն ամբողջությամբ նվիրել է գիտության և կրթության խնդիրների լուծմանը: Շիրակացին զարգացնում է ժամանակին տարածում գտած «յոթ ազատ արվեստների» ուսմունքը, նա գտնում էր, որ «քառյակ» ցիկլը (մաթեմատիկական գիտությունները) ուսումնասիրելուց հետո անհրաժեշտ է կրկին անդրադառնող «եռյակ» ցիկլի և մի շարք լրացուցիչ առարկաների ուսուցմանը: Այսինքն, ըստ Շիրակացու կրթությունը սկսվում է «եռյակ» առարկաներից (1-ին աստիճան), հետո անցում է կատարվելու «քառյակ» առարկաներին (2-րդ աստիճան), որն ավարտելուց հետո ևս մեկ անգամ, վերամշակված ձևով, անդրադարձ է արվելու 1-ին աստիճանի առարկաներին, և այդ ձևով ծրագիրն ստանում է ամբողջական բնույթ [55, 93-94]: Շիրակացին Հայաստանում առաջին գիտնականներից մեկն էր, ով հիմքեր է ստեղծել *«ճշմարտության երկակիություն»* ուսմունքի մշակման համար: Ըստ այդ ուսմունքի՝ դիտումներով և տրամաբանությամբ ձեռք բերված գիտելիքների ճշմարտությունը անկախ է աստվածաբանական ճշմարտություններից, և կարիք չկա դրանք միմյանց հակադրել կամ բխեցնել մեկը մյուսից: Ճշմարտության այդպիսի ընկալումը հնարավորություններ էր ստեղծում ու նոր հեռանկարներ բացում գիտության անկաշկանդ զարգացման համար: Եվ 10-14-րդ դարերում, երբ շարունակվում էին տրամաբանության դասական աշխատությունների, այդ թվում նաև Դավիթ Անհաղթի երկերի մեկնությունները, արդեն որոշակի միտում էր նկատվում առկա գիտության մեթոդաբանությունն ու տրամաբանությունը կրոնական գաղափարախոսությունից անկախ դարձնելու ուղղությամբ: Այս ժամանակի տրամաբանական աշխատություններից հայտնի են հատկապես *Վահրամ Րաբունու, Գրիգոր Տաթևացու, Գրիգոր Մագիստրոսի, Հովհան Որոտնեցու* երկերը [26, 260-261]:

Գրիգոր Մագիստրոսը (շուրջ 990-1058 թ.թ.)՝ականավոր հայ փիլիսոփան, լուսավորիչն ու ռազմաքաղաքական գործիչը, մեծ դեր է խաղացել գիտության և կրթության, դպրոցական գործի զարգացման ասպարեզում, ջանք չի խնայել ուսումն ու գիտությունը երկրում տարածելու ուղղությամբ: Նա հիմնել է կամ նպաստել բազմաթիվ դպրոցների հիմնադրման, որոնցից մի քանիսում դասավանդել է անձամբ: Նա սերտ կապերի մեջ է եղել Անիի, Բջնիի, Կեչառիսի, Սանահինի դպրոցների հետ, բարերարի դեր է կատարել, մասնակցել է ուսումնակրթական ծրագրերի կազմման աշխատանքներին: Մագիստրոսը կրթությունը դիտում է որպես երկարատև և բազմաստիճան գործընթաց, որի միջուկը կազմում էին «յոթ ազատ արվեստները» (կամ գիտությունները): Սակայն մինչ «յոթ արվեստների» դասավանդումը անհրաժեշտ է անցնել նախապատրաստական փուլ, որն ընդգրկում է գրելու ու կարդալու արվեստի ուսուցումը, Հին և Նոր կտակարանների տեքստերի վարժ ընթերցումն ու բովանդակության յուրացումը, հին հեթանոսական դիցաբանության և գրականության իմացությունը: Նախապատրաստական փուլին պետք է հաջորդի միջնադարյան բարձրագույն կրթության առաջին աստիճանը՝ «եռյակ» (trivium) առարկաների՝ քերականություն, հռետորական արվեստ և դիալեկտիկա (տարրական տրամաբանություն) ուսուցումը: Ուսուցման սույն աստիճանը ավարտվում է «պլատոնյան և արիստոտելյան սահմանումներով և պյութագորասյան դատողություններով», որոնք «հոմերոսյան և պլատոնյան դիալեկտիկական» դատողությունների հետ միասին կազմում են դիալեկտիկայի (տրամաբանության) բովանդակությունը: Մագիստրոսը քերականությունը համարում է «ողջ փիլիսոփայության», բոլոր գիտելիքների «դարբասը». այն նշմարում է գիտելիքի ձեռքբերման ուղիները, որպեսզի մարդիկ՝ «տեսնելով (իմացության) ճշմարիտ ուղին և չշեղվելով դրանից», շարժվեն դեպի իրենց նպատակը՝ «կատարյալ իմաստության», այսինքն՝ փիլիսոփայության յուրացման: Այլ կերպ ասած՝ քերականության իմացությունը անհրաժեշտ է փիլիսոփայության աստիճանական բարձրացման համար: «Եռյակ» առարկաների խորազնին ուսումնասիրությունից հետո միայն անցում է կատարվում ուսուցման երկրորդ աստիճանին՝ բնագիտության և «քառյակ» (quadrivium)՝ մաթեմատիկական գիտությունների ուսումնասիրմանը [55, 41]:

17-րդ դարում է ապրել ու գործել հայ տրամաբանական մտքի խոշոր ներկայացուցիչ *Սիմեոն Ջուղայեցին*: Նրա *«Գիրք տրամաբանության»* աշխատությունը բացառիկ երևույթ է: Այն մի նոր փուլ է նախանշում տրամաբանության ողջ պատմության մեջ, ընդ որում, դա առաջին աշխատությունն է, որի մեջ տրամաբանությունը շարադրված է ամբողջությամբ՝ ներկայումս դասական դարձած իր երեք բաժիններով՝ հասկացություն, դատողություն, մտահանգում, իսկ մի առանձին գլուխ էլ նվիրված է տրամաբանական սխալներին (իր տերմինաբանությամբ՝ «պատրանքներին»): Տրամաբանության ամբողջական այսպիսի շարադրանք է նաև Պոր-Ռոյալի տրամաբանությունը, որի մասին մենք նշեցինք նախորդ կետում, սակայն այն մշակվել է միայն մի քանի տասնամյակ հետո: Սիմեոն Ջուղայեցու «Գիրք տրամաբանության»-ը օգտագործվել է որպես հայկական դպրոցների դասագիրք մինչև 19-րդ դարը: Նույն նպատակով այն թարգմանվել է նաև վրացերեն՝ «Դիալեկտիկա» վերնագրով [26, 261]:

19-րդ դարում հայ տրամաբանական միտքը գտնվում էր եվրոպական ազդեցության տակ և անմիջականորեն արտացոլում էր ժամանակի ըմբռնումները: Գերիշխող գաղափարն այն էր, որ տրամաբանության խնդիրը գիտության համար հետազոտության մեթոդի, իսկ կրթական համակարգի համար՝ մտածողության ու ճանաչողության ուղեցույցի մշակումն է: Տրամաբանության մեջ բախվում էին երկու ուղղություններ: Ինդուկտիվիստական ուղղությունը գերապատվությունը տալիս էր հետազոտության փորձնական եղանակներին և գտնում էր, որ գիտության համընդհանուր օրենքները կարող են հիմնավորվել միայն ինդուկտիվ եղանակով՝ փորձնական տվյալների ընդհանրացման հիման վրա: Գիտական ճանաչողության մեթոդը՝ ինդուկցիան է, մինչդեռ դեդուկցիան պարզապես մի միջոց է եղած գիտելիքները խորացնելու համար, այլ ոչ թե նոր գիտելիքներ ստանալու: Ինդուկտիվիզմի ծրագրով աշխատություններ են գրել նշանավոր բանաստեղծ, բանասեր գիտնական, փիլիսոփա, Վենետիկի Մխիթարյան միաբանության հայր *Արսեն Բագրատունին* և լուսավորիչ, ժամանակի բնագիտության նվաճումների քարոզիչ, փիլիսոփա *Գալուստ Կոստանդյանը*: Մյուս ուղղությունը առավելությունը տալիս էր արիստոտելյան դեդուկտիվ տրամաբանությանը, քանի որ տրամաբանությունը համարվում էր տեսական մտածողության միջոց: Այդ հիման վրա ուսուցման համակարգում տրամաբանությանը հատկացվում էր ներածության դեր: Տրամաբանության վերաբերյալ այս պատկերացումներն են արտահայտում մխիթարյան այրեր *Ավքսենտիոս Գուրգենյանը, Պողոս Էմմանուելյանը, Անտոն Գարագաշյանը* իրենց կարևոր հետազոտություններում: 19-րդ դարում և 20-րդ դարի սկզբին գրվել են նաև տրամաբանության հայերեն բազմաթիվ դպրոցական ձեռնարկներ:

Պետք է նշել, որ *հայերի կողմից շատ է կարևորվել դպրոցական դասընթացում և մանկավարժական կրթության մեջ տրամաբանության տարրերի ներառման հիմնահարցը:* Մասնավորապես՝ Ներսիսյան դպրոցի հոգեբանության և տրամաբանության ուսուցիչ *Իսահակ Հարությիւնեանցը* իր «Ձեռնարկ հայ ուսուցիչների և թեմական դպրոցների վերջին դասարանի աշակերտների համար» աշխատությունում (1895թ.) գրում է. «Տրամաբանությունը գիտություն է, որն անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր զարգացած անձնավորության և մանավանդ ուսուցչի համար: Ուսուցչի պարտավորությունն է կրթել նոր սերնդի միտքը, իսկ միտքը կրթելու համար պետք է իմանալ մտածողության կանոնները: Ոչ թե միջնակարգ, այլ նույնիսկ տարրական դպրոցը միմիայն տեղեկություններ չպետք է հաղորդի աշակերտներին, այլ պետք է սովորեցնի մտածել. դպրոցը չպետք է լինի միայն սովորելու տեղ, այլ նաև մտածելու սրբավայր: Սակայն արդյոք դպրոցում սովորողները կարո՞ղ են կանոնավոր մտածել, եթե նույնիսկ ուսուցիչները չգիտենան կանոնավոր մտածելու օրենքները. մտածելով սովորեցնող ուսուցչից միայն կարելի է ուսանել մտածելով: Այդ է պատճառը, որ ուսուցչից պահանջվում է ոչ միայն գիտություն, այլև մտքի կանոնների համաձայն մտածելու կարողություն, որ նա պետք է ձեռք բերի տրամաբանական ուսման շնորհիվ: Ուսուցիչ լինելու անհրաժեշտ պայմանը մեթոդիկայի կամ դասավանդման եղանակի գիտությունն է, իսկ մեթոդիկան հիմնվում է հոգեբանական և տրամաբանական օրենքների վրա: Ուսուցանելիս մանկան միտքը պետք է կրթել այն կանոնավոր վարժություններով, որոնք տրամաբանական օրենքներից են բխում, իսկ տրամաբանական օրենքներն ոչ այլ ինչ են, եթե ոչ բնական մտածողության կանոնները: Ինչպես որ մարդու մարմինը միայն կերակուր ընդունելով չի կարող առողջ, ամրակազմ և ճկուն լինել, այնպես էլ միտքը միայն գիտություններից առնված տեղեկություններով չի կարող պարզ, ուժեղ և գործոն լինել: Երկուսն էլ վարժությամբ և ինքնուրույն գործունեությամբ կարող են կատարելության մոտենալ. մարմնի վարժությունը շարժումն է, իսկ մտքինը՝ մտածելը: Տրամաբանությունը որոշում է մարդու մտածողության պայմաններն ու սահմանները, տարբերում և զտում է ճիշտ ու բնական դատողությունը սխալմունքից ու խաբեությունից. այն դատողությանը տալիս է վստահություն, պարզություն և ճշտություն: Առանց տրամաբանական օրենքների գիտության դժվար է ինքնուրույն հայացք ունենալ տարբեր տեսակետներով բացատրվող զանազան գիտական և հասարակական խնդիրների մասին» [48, 27-28]: Նա նաև նշում է. «Մեր միջնակարգ դպրոցներն ավանդելով ապագա հայ ուսուցիչներին և հասարակական գործիչներին տրամաբանության տարրական դասընթացը՝ միջոց են տալիս նրանց ապագայում կարդացած ավելի ընդարձակ տրամաբանական աշխատություններն ըմբռնելու և հասկանալու: Թեև առանց տրամաբանություն իմանալու էլ կարելի է ուղիղ մտածել, ինչպես որ առանց քերականություն սովորելու կարելի է ուղիղ խոսել և առանց թվաբանություն սովորելու կարելի է ճիշտ գումարել, սակայն, այնուամենայնիվ, առանց տրամաբանական կանոնների չի կարելի ըմբռնել իրերն ու հարաբերություններն իրենց իսկական պարզությամբ ու ճշտությամբ»:

Խորհրդային շրջանում ուսումնասիրություններ են գրվել ինչպես ավանդական տրամաբանության, այնպես էլ գիտության մեթոդաբանության և տրամաբանության վերաբերյալ: Հայ գիտնականները հետազոտում էին մաթեմատիկական տրամաբանության տեսական հարցերը, զարգացնում էին մաթեմատիկայի հիմնավորման մեջ կոնստրուկտիվ ուղղության հարցադրումները, մշակում էին էլեկտրոնայի հաշվիչ մեքենաների նախագծման ու կիրառման հետ կապված տրամաբանական հիմնահարցեր [26, 262]:

1978 թվականին *Ա. Աբրահամյանը* իր «Աշակերտների տրամաբանական մտածողության զարգացումը մաթեմատիկայի դասերին» աշխատանքում խոսում է երեխաների տրամաբանական մտածողության զարգացումը խթանող ուղիներ որոնելու մասին: Նա առաջարկում է տրամաբանական մտածողության զարգացման հետևյալ ուղիները. տրամաբանական հարց ու պատասխան, պրոբլեմային ուսուցման առանձնահատկությունները, լուծումների տարբերակներ հայտնաբերելը, խնդիրներ լուծելու ալգորիթմներ մշակելը, ընդհանրացնող դասեր կազմակերպելը, «Պաշտպանությունը» որպես ուսուցման մեթոդ, նախագծային բնույթի հանձնարարություններ կատարելը, մաթեմատիկայի ուսուցումը և ֆորմալիզմը, մտքերը մաթեմատիկայի լեզվով գրառելը, մաթեմատիկական կաբինետի կահավորումը, ինչպես կազմել ու լուծել տրամաբանական հավասարումները, ապացույցներ վերլուծելը, մաթեմատիկական խաչբառերը: Նրա կողմից առաջարկվում է նաև աշակերտների տրամաբանական մտածողության զարգացմանը նպաստող խնդիրներ [1]:

1994 թվականին լույս է տեսել *Հ. Ա. Գևորգյանի* և *Վ. Խ. Բաղդասարյանի* կողմից գրված *«Տրամաբանություն»* ձեռնարկը, որը նախատեսված է միջնակարգ դպրոցի բարձր դասարանների համար: Ձեռնարկի բովանդակության մեջ են մտնում հետևյալ գլուխները. տրամաբանության առարկան և նշանակությունը, հասկացություն, դատողություն, մտահանգում, ապացուցում և հերքում, մտածողության հիմնական տրամաբանական օրենքները [26]:

1998 թվականին հրատարակվել է *Գ. Ա. Բրուտյանի «Տրամաբանություն»* ուսումնական ձեռնարկը, որը նախատեսված էր հանրակրթական դպրոցի 9-10-րդ դասարանների համար: Նա գրում է. «Տասնամյակների ընթացքում Հայաստանի միջնակարգ դպրոցների, տեխնիկումների աշակերտները զրկված են եղել տրամաբսւնությունը որպես ուսումնական առարկա ուսումնասիրելուց: Բավարար չի եղել նաև բարձրագույն ուսումնական հաստատությունների վիճակը: Տրամաբանությունը որոշ ընդհատումներով ուսումնական ծրագրի մեջ է ներառված եղել փիլիսոփայության, իրավաբանական, բանասիրական, պատմության ֆակուլտետների համար: 1957թ. հրատարակվել է առաջին բուհական դասագիրքը հայերեն, որն առ այսօր երեք հրատարակություն է ունեցել: Այն կոչված է եղել բավարարել նշված մասնագիտությունների պահանջները, որոնցից յուրաքանչյուրը, անշուշտ, իր առանձնահատուկ խնդիրներն է առաջադրում տրամաբսւնության դասավանդման և դասագրքի նկատմամբ: Ակնհայտ է, որ ներկա պայմաններում, երբ տրամաբանության ուսուցումը ինչպես միջնակարգ, այնպես էլ բարձրագույն դպրոցներում անհրաժեշտություն է դարձել, տրամաբանության դասագրքերի ստեղծումը առաջնահերթ խնդիր է» [19, 3-5]:

Ձեռնարկը նախատեսված է միջնակարգ դպրոցների, ճեմարանների, բարձր դասարանների աշակերտների և տեխնիկումի սովորողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև տրամաբանությունը դասավանդող ուսուցիչներին, ինչպես նաև այլ առարկաների դասավանդման ընթացքում տրամաբանական մտածելակերպի զարգացման վրա ուշադրություն դարձնող դասատուներին: Այն բաղկացած է հետևյալ գլուխներից. տրամաբանության առարկան, հասկացություն, դատողություն, տրամաբանության հիմնական օրենքները, մտահանգում, փաստարկման տրամաբանական հիմունքները, պրոբլեմ, վարկած, գիտական տեսություն, մաթեմատիկական տրամաբանության տարրերը, ընդհանուր գաղափար փոխակերպման տրամաբանության մասին [19]:

XX դարի վերջից մինչև մեր օրերը: Անկախացումից հետո ՀՀ հանրակրթության մաթեմատիկայի առարկայական բնագավառի արդիականացման ուղղությամբ տարվող աշխատանքները առաջին փուլում (մինչև 2004 թվականը) կրում էին տարրերային բնույթ: Դրանք կատարվում էին մեկուսի՝ մաթեմատիկական կրթության սահմաններում և չէին ներառվում հանրակրթական ընդհանուր բարեփոխումների շրջանակներում (նման հարց չէր էլ դիտարկվում): Անկախության առաջին տարիներին դեռևս շարունակում էին գործածության մեջ մնալ ԽՍՀՄ-ի օրոք ստեղծված ծրագրերն ու դասագրքերը: Ծրագրերի վերանայման աշխատանքներն սկսվեցին 1996–ին, երբ կրթության պետական կառավարման լիազորված մարմնի հանձնարարությամբ հեղինակային խումբը մշակեց մաթեմատիկայի առարկայախմբի ծրագիրը, որը հիմնականում հենվում էր խորհրդային շրջանում կիրառված համապատասխան ծրագրի վրա և շատ քիչ էր տարբերվում նրանից, իսկ տրամաբանության տարրերի ներառման ուղղությամբ որևէ էական առաջընթաց նրանում բացակայում էր: Սակայն մասնագետների շրջանում հասունանում էր ազգային կրթության հայեցակարգի ստեղծման, մաթեմատիկայի ուսուցման առանձնահատկությունների, կրթության կազմակերպման ավտորիտար հարացույցից հրաժարվելու, կրթությունը հումանիստական խնդիրների իրականացմանը նպատակաուղղելու և նմանատիպ այլ հիմնախնդիրների լուծման անհրաժեշտությունը:

Հիմնախնդիրներից մեկը կապված էր տրամաբանության տարրերը մաթեմատիկայի դասընթացում ներառելու հարցի հետ: Այդ կապակցությամբ *Հ. Ս. Միքայելյանը* նշում է. «Այնպես, ինչպես մայրենի լեզվի խորը իմացությունը հնարավոր է դառնում միայն քերականության համակարգված ուսուցման շնորհիվ, այդպես էլ մտածողության օրինաչափությունների իմացությունը ճիշտ դատելու հնարավորություն է տալիս: Կատարված բազմաթիվ գիտափորձերը ցույց են տալիս, որ առանց տրամաբանության տարրերի ուսուցման, սովորողները ճշգրիտ դատողություններ չեն կարողանում կատարել անգամ պարզ իրավիճակներում: Եվ հանրահաշվի դասընթացում տրամաբանության որոշ թեմաների ներառումը հնարավորություն է տալիս հստակեցնելու սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության հիմքում ընկած կարևորագույն հասկացություններ և ավելի խորացնելու հայոց լեզվի ու հանրահաշվի լեզվի միջև զուգահեռների անցկացումը: Այստեղ խոսքը առաջին հերթին վերաբերում է ասույթների տրամաբանությանը, մասնավորապես՝ տրամաբանական շաղկապների ուսուցմանը: Այս ոչ դեդուկտիվ մոտեցումը հնարավորություն է տալիս սովորողներին հասկանալու մաթեմատիկական մոտեցման հիմնական առանձնահատկությունը, այն է՝ առաջադրվող հարցերի հստակ, երկակի իմաստներ չպարունակող պատասխանների առկայություն» [68, 87-88]: Այս մոտեցման հիման վրա նրա կողմից առաջարկվեց հանրահաշվի ծրագիր, որում միջին դպրոցի համար հարցերի նշված շրջանակում որոշակիորեն լուծվում էր նաև մեզ հետաքրքրող հիմնախնդիրը: Ներկայացված ծրագրային առաջարկի վերաբերյալ մասնագետների շրջանում և ԿԳ նախարարությունում անցկացվեցին քննարկումներ և նախարարության նախաձեռնությամբ 1998-ին կազմակերպվեց մաթեմատիկայի առարկայական ծրագրերին նվիրված մասնագիտական համաժողով: Համաժողովում, ի թիվս հայեցակարգային այլ հարցերի, բարձրացվեց և կարևորվեց մաթեմատիկայի ուսուցումը տեխնիկավարժանքային հագեցվածությունից դեպի սովորողների գաղափարական և մտածողության զարգացման դաշտ նպատակաուղղելու խնդիրը: Արդյունքում՝ ԿԳ նախարարությունը ընդունեց միջին դպրոցի հանրահաշվի նոր ծրագիր, որում ներառված էին նաև տրամաբանության տարրերը [45]: Այնուհետև հայտարարվեց դասագրքերի մրցույթ, և միջին դպրոցի հանրահաշվի դասագրքերի մրցույթը կազմակերպվեց այդ նոր ծրագրին համապատասխան:

Ծրագիրը նախատեսում է տրամաբանական նյութի շարադրանքը *«Տրամաբանության հանրահաշիվը»* ընդհանուր թեմայի շրջանակներում և ներառում է հետևյալ նյութերը. *հավասարումներ, հավասարման արմատները և լուծումները, անհավասարումներ, անհայտի թույլատրելի արժեքների բազմությունը, նույնություններ, նույնական հավասարումներ, նույնաբար ճշմարիտ անհավասարումներ, ասույթ, ասույթի ճշմարտային արժեքները, բանաձևերի համախումբը կամ տրամաբանական գումարը, ոչ խիստ անհավասարություններ, ոչ խիստ անհավասարումներ, բանաձևերի համակարգը կամ տրամաբանական արտադրյալը, կրկնակի անհավասարումներ, միջակայքեր, բանաձևի ժխտումը, բանաձևերի համարժեքությունը, համարժեքության օրենքները, բանաձևերի համախմբերի և համակարգերի համարժեքության օրենքները, բանաձևերի ժխտման հատկությունները, պարզ բանաձևերի կապը, նույնական բանաձևեր* [45, 3-15]:

Ինչպես տեսնում ենք, այստեղ ներկայացվում են ասույթների տրամաբանության տարրերը և պրեդիկատների տրամաբանության վերաբերյալ պարզագույն հասկացություններ: Նոր ծրագրում տեղ գտած այդ թեմաները արտացոլվեցին ՀՀ հանրակրթական միջին դպրոցի հանրահաշվի նոր դասագրքերում [65], [66], [67]:

Կրթական բարեփոխումների համար շրջադարձային էր հատկապես 2004 թվականը, երբ ընդունվեց ՀՀ պետական Կրթակարգը, որը ներառում էր կրթական քաղաքականության հիմնական դրույթները, դաստիարակության, ուսուցման, ուսումնառության և գնահատման ընդհանուր սկզբունքները [44, 5-18]: Կրթակարգի հիման վրա ստեղծվեց միջնակարգ կրթության պետական չափորոշիչը, որտեղ սահմանվում էին կրթության բովանդակության կառուցվածքը, սովորողների ուսումնական բեռնվածության առավելագույն չափը, սովորողներին ներկայացվող ընդհանրական որակական պահանջները, գնահատման ձևերն ու սանդղակը [44, 23-71]: Ճիշտ է, դեռևս 1998–ից ակադեմիկոս Է. Ղազարյանի գլխավորությամբ կազմվել էր Հանրակրթության պետական չափորոշչի նախագիծը և 2000 թվականից մտել էր գործածության մեջ [54], սակայն կարճ ժամանակից հետո կարիք ուներ վերանայումների, քանի որ այն նախատեսված էր 10-ամյա միջնակարգ դպրոցի համար, այնինչ 2001 թվականին «Կրթության մասին» ՀՀ օրենքում կատարվեցին փոփոխություններ, և անցում կատարվեց 11-ամյա միջնակարգ կրթության: Նրա ազդեցությունը առանձնապես մեծ չէր կարող լինել հետագայում կազմված միջնակարգ կրթության պետական չափորոշչի վրա, քանի որ վերջինս նախատեսված էր արդեն 12-ամյա կրթության համար: Այդ բոլորով հանդերձ՝ 2000 թվականից գործածության համար նախատեսված պետական չափորոշիչը մաթեմատիկային վերաբերող մասով ուներ որոշակի առաջխաղացում, քանի որ նրանում, մասնավորապես հիմնական դպրոցի ուսուցման խնդիրների ցանկում շեշտվում էր *սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության, ապացուցողական ունակությունների, փաստարկված և հիմնավորված հաջորդական մտային քայլեր կատարելու կարողությունների ձևավորումն ու զարգացումը* [54, 35]: Ավելին, այդ չափորոշչի հիման վրա 2001 թվականին մշակված մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշչում որոշակիացված էին ուսուցման հենքային բովանդակությունը և սովորողների պատրաստվածությանը ներկայացվող պահանջները, որոնց մեջ հստակ նշված էին նաև տրամաբանության տարրերին վերաբերող հարցերը: Մասնավորապես 6-8-րդ դասարանների հանրահաշվի ուսուցման բովանդակության մեջ ներառված էին ասույթները, բանաձևի ճշմարտային արժեքները, բանաձևերի համախումբը և համակարգը, բանաձևերի համարժեքությունն ու համարժեքության հիմնական օրենքները, նույնությունն ու նույնական ձևափոխությունները: Իսկ սովորողներից պահանջվում էր իմանալ ասույթների հետ կատարվող պարզագույն գործողությունների իմաստը, դրանց կիրառությունները լեզվում, կարողանալ ասույթների հետ կատարվող գործողությունները կիրառել հավասարումների և անհավասարումների համակարգերի և համախմբերի լուծման հասկացությունը ըմբռնելու համար [43, 25], [43, 27-28]: Այս նոր մոտեցումները որոշակի արտացոլում էին գտել 12-ամյա դպրոցի միջնակարգ կրթության պետական չափորոշչում, որում տրամաբանության տարրերին վերաբերող բովանդակային գիծը «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառում տարածվում էր ինչպես դեպի ներքև (ցածր դասարաններ), այնպես էլ դեպի վերև (բարձր դասարաններ):

Ե՛վ Կրթակարգը, և՛ միջնակարգ կրթության պետական չափորոշիչը նոր քայլ էին ՀՀ կրթության արդիականացման, ավտորիտար կրթական համակարգից հրաժարվելու և հումանիստական կրթական հարացույցին մոտենալու և արևմտյան առաջադիմական կրթական միտումները որդեգրելու տեսանկյունից: Մանավորապես, միջնակարգ կրթության պետական չափորոշչով կրթական յուրաքանչյուր աստիճանում «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի համար նախատեսվում էր գիտելիքների, կարողությունների և արժեքների այնպիսի որակների տիրապետում, որոնց կարելի էր հասնել միայն մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման միջոցով: Այսինքն, 2004 թվականին ընդունված միջնակարգ կրթության պետական չափորոշիչը ռեալ հիմքեր էր ստեղծում խնդրո առարկա հարցերի շրջանակը մաթեմատիկայում ավելի համակարգված ներառելու համար:

Հանրակրթության և հատկապես մաթեմատիկական կրթության բարեփոխումների հայեցակարգերի մշակման համար կարևոր նշանակություն ունեին *Մ. Ա. Մկրտչյանի* [86] և [87] աշխատանքներում ամփոփված վերլուծություններն ու հարցադրումները: Անդրադառնալով կրթության բովանդակության հիմնահարցին՝ նա քննադատաբար է վերաբերվում պատմականորեն ամրապնդված այն մոտեցմանը, ըստ որի ենթադրվում էր, որ «սերտելով որոշակի մաթեմատիկական գիտելիքներ և լուծելով մաթեմատիկական խնդիրներ՝ երեխաները յուրացնում են նաև որոշակի մաթեմատիկական մեթոդներ» [86, 7]: Ի տարբերություն դրա՝ Մ. Մկրտչյանը առաջ է քաշում մեկ այլ մոտեցում և հիմնավորում, որ ժամանակակից իրադրությունը պահանջում է մաթեմատիկական կրթության բովանդակության այնպիսի վերափոխում, որը գիտելիքի փոխարեն առաջին պլան է մղում մաթեմատիկական մեթոդը, մաթեմատիկական կուլտուրան, մաթեմատիկական մտածելակերպը: Մտագործունեության համընդհանուր մեթոդների և մտահաղորդակցման ընդհանուր կարողությունների վերաբերյալ նրա սկզբունքային հարցադրումները որոշակիորեն արտացոլվել են Հանրակրթության պետական կրթակարգի և միջնակարգ կրթության պետական չափորոշչի բովանդակության մեջ:

Միջնակարգ կրթության պետական չափորոշչով ներկայացված պահանջները որոշակիացվում և ամրագրվում են հանրակրթական առարկաների չափորոշիչներում, ընդ որում, որոշակիացումը կատարվում է երկու տեսանկյունից՝ առարկայի բովանդակային միջուկով և սովորողներին ներկայացվող որակական պահանջներով: Բովանդակային միջուկում՝ ըստ բովանդակային գծերի, ներկայացվում է ուսուցման համար պարտադիր ուսումնական նյութը: Սովորողներին գիտելիքների, կարողությունների ու հմտությունների վերաբերյալ ներկայացվող պահանջները դասակարգված են երեք՝ նվազագույն, միջին և բարձր պատրաստվածության մակարդակների:

Առարկայական չափորոշիչների հիման վրա մշակվում են ուսումնական առարկաների ծրագրերը, որոնք հիմք են ծառայում նաև դասագրքերի, ձեռնարկների և ուսումնական այլ նյութերի ստեղծման համար:

2004-2005 թվականներին մշակվեցին մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչները և ծրագրերը, որոնք փորձարկումներից և լրամշակումներից հետո դրվեցին գործողության մեջ, և դրանց հիման վրա 2006 և 2009 թվականներին կատարվեց համապատասխանաբար միջին և ավագ դպրոցների մաթեմատիկայի դասագրքերի մրցույթ:

Հաջորդ տարիներին հանրակրթության բնագավառում կատարվեցին որոշակի փոփոխություններ: Նախ՝ Հանրակրթության պետական կրթակարգը, թեև նրա ուժը կորցրած լինելու վերաբերյալ որոշում չի ընդունվել, այնուամենայնիվ, փաստորեն գրեթե դուրս է մնացել գործածությունից: Ճիշտ է, նրանում ամփոփված դրույթների զգալի մասը ներառվել է 2009 թ. ընդունված «Հանրակրթության մասին» ՀՀ օրենքում, սակայն կրթության բովանդակության բարեփոխումներին վերաբերող հարցադրումները չեն արժանացել բավարար ուշադրության: Մյուս փոփոխությունը կապված էր չափորոշչի հետ. 2006 թվականից գործածության մեջ մտած «Միջնակարգ կրթության պետական չափորոշիչը» ՀՀ կառավարության կողմից 2010 թ. ապրիլի 8-ի N439-Ն որոշմամբ ճանաչվել է ուժը կորցրած, և այդ նույն որոշման համաձայն հաստատվել ու անմիջապես գործածության մեջ է մտել «Հանրակրթության պետական չափորոշիչը», որ 1 տարի հետո՝ 2011 թ. N1088-Ն որոշմամբ փոփոխվել է և գործածության է երաշխավորվել նոր խմբագրությամբ [44]:

Չանդրադառնալով չափորոշչի փոփոխություններին առնչվող բոլոր հանգամանքներին՝ նշենք, որ մեր խնդրո առարկա տրամաբանության տարրերի ուսուցման և սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության զարգացման նպատակին վերաբերող մոտեցումը չափորոշչի այդ բոլոր փոփոխությունների ընթացքում պահպանվել է և այն դիտվել է որպես կարևոր խնդիր՝ միջնակարգ կրթության բոլոր աստիճանների համար: Ըստ Հանրակրթության պետական չափորոշչի՝ կրթական ծրագրերի բովանդակությանը ներկայացվող պահանջների ցանկում «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառին վերաբերող բաժիններում, սկսած տարրական դպրոցից, շեշտված է ծրագրում տրամաբանական մտածողության մասին գիտելիքներ ներառելու պահանջը [44, կետ 13-14]: Համապատասխան պահանջներ են ներկայացված նաև միջին և ավագ դպրոցների կրթական ծրագրերի բովանդակության և սովորողների պատրաստվածության վերաբերյալ [44, կետ 27, 32, 46, 51, 52, 66(3), 67(3) 68(3)]:

Վերջին տարիներին կատարված մյուս փոփոխությունները կապված են մաթեմատիկայի առարկայական ծրագրերի և դասագրքերի հետ, որոնց մենք հանգամանորեն կանդրադառնանք հաջորդ պարագրաֆում:

1.1.3. Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման մեթոդամանկավարժական խնդիրները

Հանրակրթական դպրոցի շրջանակներում տրամաբանության տարրերի ներմուծման հարցը քննարկված է բազմաթիվ հետազոտողների աշխատանքներում: Հարցը համակողմանիորեն ուսումնասիրված է Լ. Ն. Լանդայի, Ջ. Բրուների, Լ. Քերոլի, Ջ. Պոյայի, Հ. Ֆրոյդենտալի, Պ. Պ. Բլոնսկու, Վ. Մ. Բրադիսի, Ա. Ն. Կոլմոգորովի, Վ. Բոլտյանսկու, Ռ. Ս. Չերկասովի, Ա. Ա. Ստոլյարի, Յու. Ա. Պետրովի, Վ. Ի. Ռիժիկի, Գ. Ի. Սարանցևի, Ի. Լ. Տիմոֆեևայի, Ի. Հարութիւնեանցի, Ա. Վ. Աբրահամյանի, Հ. Ս. Միքայելյանի, Ս. Է. Հակոբյանի, Է. Ի. Այվազյանի և այլոց կողմից:

Առանձնանում են մասնագետների երկու ծայրահեղ մոտեցումներ: Առաջին մոտեցման կողմնակիցները գտնում են, որ հանրակրթություն առանձին

«Տրամաբանություն» առարկա կամ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հատուկ տրամաբանական կառույցներ ներմուծելու անհրաժեշտություն չկա: Ամեն ինչ սովորողների կողմից ընկալվում է ինտուիտիվ մակարդակով: Երկրորդ մոտեցման կողմնակիցները, հակառակը, պնդում են, որ միջնակարգ դպրոց պետք է ներմուծել տրամաբանության որոշակի պաշար՝ առանձին «Տրամաբանություն» առարկայի կամ էլ մաթեմատիկայի դասընթացի առանձին թեմաների (բաժինների) տեսքով:

Ինչպես առանձին առարկայի, այնպես էլ մաթեմատիկայի դասընթացում առանձին թեմաների տեսքով տրամաբանության միջնակարգ դպրոց բացահայտ ներմուծելու անցյալի մեզ հայտնի բոլոր փորձերը հիմնականում անհաջող են եղել [8, 48]: Նման փորձեր արվել են XIX և XX դարերում՝ զանազան երկրներում, որոնց շարքում հատկանշական են կոլմոգորովյան ծրագրի սահմաններում մաթեմատիկական տրամաբանության տարրերի մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթաց ներմուծելու մի շարք գիտնականների փորձերը (Վ. Բոլտյանսկի, Ա. Ա. Ստոլյար և այլն) [109], [148], որոնք ի վերջո իրենց տեղը զիջեցին ավանդական մոտեցումներին: Սակայն հետազոտողները, պարբերաբար և հետևողականորեն հնչեցնում են այն տեսակետը, որ առանց տրամաբանական գիտելիքների ուսուցման, անհնար է ապահովել սովորողների մտավոր կարողությունների բնականոն զարգացումը: Մանկավարժության և մտագործունեության տրամաբանական հիմնախնդիրների հետազոտությունը առանձնահատուկ կարևորություն ունի Գ. Պ. Շեդրովիցկու, Վ. Մ. Ռոզինի և այլոց աշխատանքներում [156]: «Տրամաբանական հետազոտության մեջ,- գրում է Գ. Պ. Շեդրովիցկին,- վերլուծության են ենթարկվում մարդկության «մշակութային ֆոնդում» ներառվող «նորմերն» ու գործունեությունները. գործունեություններ, որոնց պետք է տիրապետեն անհատները, այն, ինչն *անհրաժեշտ է* որոշակի խնդիրներ լուծելու համար, և այդ տեսակետից պետք է իրականացվեն յուրաքանչյուրի կողմից՝ անկախ նրա անհատական առանձնահատկություններից, տրամադրության տակ եղած միջոցներից ու հնարավորություններից…»:

Դեռևս տասնիններորդ դարի վերջերին Ներսիսյան դպրոցի ուսուցիչ Իսահակ Հարութիւնեանցը գրում է. «Թե՛ հին և թե՛ նոր նշանավոր մտածողները, ինչպես օրինակ Սոկրատեսը, Արիստոտելը, Դեկարտը, Կանտը, Վունդը և այլն, մտածել են մտքի միևնույն կանոններով: Բոլոր ազգերն էլ, չնայելով նրանց լեզուների և քերականությունների տարբերությանը, մտածման միևնույն կանոններին են հետևում: Տրամաբանությունը բոլոր ազգերի համար նույնն է, մտածման օրենքները նույնն են թե՛ մաթեմատիկայի, թե՛ ֆիզիկայի, թե՛ քիմիայի և թե՛ այլ բնական գիտությունների մեջ: Թեև առանց տրամաբանություն իմանալու էլ կարելի է ուղիղ մտածել, ինչպես որ առանց քերականություն սովորելու կարելի է ուղիղ խոսել և առանց թվաբանություն սովորելու կարելի է ճիշտ գումարել, սակայն այնուամենայնիվ, առանց տրամաբանական կանոնների չի կարելի ըմբռնել իրերն ու հարաբերություններն իրենց իսկական պարզությամբ ու ճշտությամբ» [48, 32]:

Հանրակրթական դպրոցում տրամաբանության տարրերի ուսուցման, դրանք մաթեմատիկայի դասընթացում ներառելու հիմնահարցը հանգամանորեն ուսումնասիրել է հայտնի մեթոդիստ *Ա. Ա. Ստոլյարը* [131]: Նա հանրակրթության ավագ դասարաններում դասավանդելով մաթեմատիկա, այնուհետև տրամաբանություն, եկավ այն եզրակացության, որ այս առարկաների առանձին դասավանդումը արդյունավետ չէ: Եվ մաթեմատիկան ու տրամաբանությունը դասավանդելով միացյալ ձևով («տրամաբանությունը մաթեմատիկայի մեջ»), նա հասավ լուրջ հաջողությունների, ինչը ներկայացված է նրա՝ «Մաթեմատիկայի դասերին երեխաների տրամաբանական մտածողության դաստիարակումը» թեմայով թեկնածուական ատենախոսության մեջ [147]: Հետագայում նա շարունակեց իր աշխատանքները և պաշտպանեց դոկտորական ատենախոսություն՝ «Մաթեմատիկայի դասավանդման տրամաբանական խնդիրները» թեմայով (1970 թ.): Այս ուղղությամբ արժեքավոր են նաև Ստոլյարի մենագրությունները, որոնք շատ կարևոր նշանակություն ունեցան նաև մաթեմատիկայի դասավանդման ողջ գործընթացում [131]:

Ստոլյարը նշում է. «Բոլորը համաձայն են, որ սովորեցնել առաջին հերթին նշանակում է սովորեցնել մտածել: Բայց ինչպե՞ս սովորեցնել մտածել: Պե՞տք է արդյոք ուսուցման որոշակի փուլում մեր դատողությունները դարձնել ուսուցման առարկա, թե՞ տարբեր առարկաների ուսուցումը բավական է սովորողների մտածողությունը բավարար չափով զարգացնելու համար: Այս հարցում արդեն կարծիքները բաժանվում են: Հասկանալի է, որ դատելու ունակությունը մարդու մոտ ձևավորվում է կենսափորձի և ոչ թե տրամաբանական օրենքների տիրապետման արդյունքում, չնայած վերջինիս վրա է հենված մարդկային մտածողությունը: Մարդիկ դատում են, չիմանալով տրամաբանության օրենքները, այնպես, ինչպես և խոսում են մայրենի լեզվով, առանց իմանալու այդ լեզվի քերականական կանոնները: Սակայն կարելի՞ է սրանից եզրակացնել, որ անօգուտ է մայրենի լեզվի ուսուցումը, նրա քերականության ուսումնասիրությունը: Հասկանալի է, որ ոչ-ոք չի կասկածում, որ միայն լեզվից օգտվելը, այդ լեզվով խոսելը բավարար չէ նրա խորը իմացության համար, և այն պետք է դառնա հատուկ ուսուցման առարկա: Սակայն, ճիշտ համանման իրադրության մեջ, մտածողության մասին գիտության՝ տրամաբանության ուսուցման խնդրում, կարծիքների նման միասնականություն չկա» [101, 19]: Ստոլյարը գտնում է, որ տրամաբանության տարրերի ներառումը մաթեմատիկայի ուսուցման մեջ չի նշանակում այդ տարրերի հատուկ և առանձնացված ուսուցում: Անհրաժեշտ է, որ տրամաբանության տարրերը դառնան մաթեմատիկայի դասավանդման անքակտելի մասը, նրա արդյունավետության բարձրացման և սովորողների տրամաբանական զարգացման կարևոր միջոց:

Ռ. Ս. Չերկասովը և *Ա. Ա. Ստոլյարը* գտնում են, որ մաթեմատիկա սովորելով՝ սովորողները տիրապետում են վերլուծություն, ընդհանրացում, մասնավորեցում կատարելու կարողություն, կարողանում են առանձնացնել անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, սահմանել հասկացություններ, կազմել դատողություններ: Այս ամենը ձևավորում է սովորողների մտածողությունը և նպաստում նրանց խոսքի զարգացմանը, հատկապես զարգացնում են մտքի արտահայտման այնպիսի որակներ, ինպիսիք են՝ կարգը, ճշգրտությունը, պարզությունը, հակիրճությունը, հիմնավորվածությունը [155, 4]: Սակայն մաթեմատիկայի դասավանդման ավանդական մեթոդիկայի էական թերություններից մեկն այն է, որ չի պարզաբանվում և սովորողների համար անհասկանալի է մնում ուսուցանվող նյութի տրամաբանությունը: Սովորաբար, մաթեմատիկայի ուսուցման ընթացքում ձգտում են վերացնել սովորողների կողմից մաթեմատիկական նյութի ընկալման դժվարությունները բացատրությունների կրկնություններով ու նյութի մաթեմատիկական բաղադրիչի մեկնաբանություններով: Դա արվում է նաև այն դեպքում, երբ ընկալման դժվարությունը կապված է նյութի տրամաբանական բաղադրիչի չհասկացման հետ: Նման փորձերը անպտուղ են, քանի որ չեն վերացնում դժվարության պատճառները [101]: Մաթեմատիկայի ուսուցման կենտրոնական խնդիրներից մեկը մաթեմատիկական պնդումների ճշմարտության հաստատումն է (շատ հաճախ ապացուցման միջոցով), իսկ այդ պնդումների ճշմարտական արժեքները կախված են նրանց տրամաբանական կառուցվածքից: Այստեղից, Չերկասովը և Ստոլյարը եզրակացնում են, որ մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի խնդիրներց մեկը մաթեմատիկական պնդումների տրամաբանական կառուցվածքի բացահայտումն է: Այսպես, օրինակ, ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ նրա ուսուցման մեջ լայն կիրառություն ունեն համարժեքության և հետևության առնչությունները: Դրանցից առաջինը բերվում է երկրորդին, իսկ երկրորդը՝ հետևությունը ցանկացած ապացուցման հիմքն է: Կասկած չկա, որ հանրակրթության շրջանակներում այդ առնչությունները պետք է ուսումնասիրվեն մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում, ինչի համար անհրաժեշտ է բացահայտել համապատասխան մաթեմատիկական պնդումների տրամաբանական կառուցվածքները: Հասկանալ հասկացությունների սահմանումների, տեսության պնդումների (աքսիոմ և թեորեմ) ապացուցման տրամաբանական կառուցվածքը գիտելիքների յուրացման անհրաժեշտ պայման է: Բացահայտել բարդ պնդման տրամաբանական կառուցվածքը նշանակում է ցույց տալ, թե ինչպիսի՞ տարրական պնդումներից և ինչպե՞ս է կազմված այն, այսինքն ինչպիսի՞ շաղկապներով և ի՞նչ կարգով են կիրառված «ոչ», «և», «կամ», «եթե…, ապա…», «այն և միայն այն դեպքում», «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական կապերը: Մաթեմատիկական պնդումների տրամաբանական կառուցվածքի բացահայտումը կլիներ անօգուտ, եթե չպարզաբանվեին, չգտնվեին օգտագործվող շաղկապների ճշմարտական արժեքները [155, 17]: Այսպիսով, տրամաբանության տարրերի դերը մաթեմատիկայի տեսական և գործնական ուսուցման մեջ կայանում է նրանում, որ նախ՝ մտածողության ընդհանուր՝ տրամաբանական գործողությունների յուրացումը սովորողների ճանաչողական գործունեության ձևավորման և զարգացման անհրաժեշտ պայման է, և ապա՝ մաթեմատիկական տրամաբանության շրջանակներում վերամշակված որոշ ընդհանուր հասկացություններ (ասույթ, պրեդիկատ, տրամաբանական գործողություններ, հետևության, համարժեքության հարաբերություններ և այլն) նպաստում են դիտարկվող մաթեմատիկական կառուցվածքի բացահայտմանը և նրա մաթեմատիկական բովանդակության ավելի խոր ընկալմանը:

Վ. Ի Ռիժիկը նույնպես համամիտ է այն մտքի հետ, որ անհրաժեշտ է ոչ թե դպրոցում դասավանդել առանձին տրամաբանություն առարկան, այլ հարկավոր է տրամաբանության առանձին տարրեր ընդգրկել մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի մեջ: Նա նշում է. «Մի ժամանակ այդպիսի դասընթաց դասավանդվում էր սովետական դպրոցում, և ես առիթ ունեի լսել այն մի ամբողջ տարի: Բավականին դժվար էր ներթափանցել հասկացության, դատողության, մտահանգման գաղափարների այնպիսի ներկայացման մեջ, որը կտրված էր կյանքից, և որ ավելի տարօրինակ էր, կապված չէր մաթեմատիկայի հետ (բերվում էին միայն տրամաբանական այս կամ այն դրույթի մասին զուտ մաթեմատիկական օրինակներ)» [140, 39]: Ճանաչողության կարևոր փուլերից մեկը հասկացության տիրապետումն է: Նախադասության հասկացությունը (նաև՝ մաթեմատիկայում) ենթադրում է ոչ միայն այդ նախադասության, այլև նրա ժխտման և շրջման (հակադարձ նախադասության) և հակադիրի (հակադարձին հակադիր պնդում) ճշմարտական գնահատական: Առանց գիտակցելու պնդման կառուցվածքը, անհնար է գրագետ կառուցել ո՛չ նրա ժխտումը, ո՛չ շրջումը, ո՛չ հակադարձը: Եվ հեշտ չէ նաև դրանց ձևակերպումներն ստանալը: Անհրաժեշտ է իրարից տարբերել փոփոխականներ չպարունակող պնդումները (ասույթ) փոփոխականով նախադասություններից (պրեդիկատներ), առանձնացնել պրեդիկատների փոփոխականները և դրանց վրա դնել սահմանափակումներ և այլն: Իրադրությունն ավելի է խճճվում, երբ մենք օգտագործում ենք այնպիսի բառեր, ինչպիսիք են *մի քանի, միայն, ոչ միայն, այն և միայն* և այլն: Նա նշում է, որ առանձնակի դժվարություններ են ի հայտ գալիս ասույթների ժխտման կազմման ժամանակ: Այդ խնդիրը ծագում է նույնիսկ այն ժամանակ, երբ պահանջվում է ձևակերպել ժխտումը ամենապարզ կենցաղային իրավիճակներում, իրավիճակներ, որոնք հեռու են մաթեմատիկայից: Երբ մենք ինչ-որ բանում համաձայն չենք, ապա ասված նախադասությունը համարում ենք ոչ ճշմարիտ: Իսկ ո՞ր նախադասությունն ենք մենք համարում ճիշտ: Պարզ է, որ դրա ժխտումը: Իսկ ինչպե՞ս այն ձևակերպել, որտեղ դնել ոչ մասնիկը և այլն: Ինֆորմատիկայի դասընթացը միայն սրում է խնդիրը. առանց օգտագործելու մաթեմատիկական տրամաբանության հիմունքները, ինչպե՞ս աշակերտներին սովորեցնել կոմպյուտերային գաղափարախոսությունը» [140]: Ռիժիկը բերում է նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթաց տրամաբանության տարրերի ներմուծման օգտին արվող մի շարք փաստարկներ, որոնց մեջ առանձնացնենք մեր կարծիքով կարևորները: Այն.

• նպաստում է աշակերտների տրամաբանական կուլտուրայի աճին,

• կարող է օգնել ճշգրիտ խոսքի ձևակերպմանը այնտեղ, որտեղ դա անհրաժեշտ է, օրինակ՝ փաստաթղթերում, իրավաբանական իրավիճակում, պատասխանատու խոսակցության մեջ,

• կարող է օգնել մաթեմատիկական պնդումների յուրացմանը,

• օգնում է ինֆորմատիկայի հիմունքների յուրացմանը,

• արդյունավետ է տրամաբանական բնույթի խնդիրների լուծման ընթացքում,

• պրեդիկատների հետ աշխատանքը բնականաբար շաղկապված է բազմությունների տեսության հիմնական հասկացությունների հետ, առանց որոնց ներկա մաթեմատիկակական կրթությունը տարօրինակ տեսք կունենար [139, 36]:

Վ. Ֆելլերը նույնպես կարևորում է ձևական-տրամաբանական կառույցի դերը ուսուցման գործընթացում: Նա կարևորում է տեսական նյութի ուսուցման հետևյալ երեք տեսանկյունները և դրանց փոխկապակցվածությունը.

ա) ձևական-տրամաբանական պատկերացում,

բ) ներըմբռնողական (ինտուիտիվ) պատկերացումներ,

գ) կիրառություն:

«Առարկայի բնույթն ընդհանրապես և նրա հրապույրը անհնար է իրականում գնահատել՝ չդիտարկելով այս երեք տեսանկյունները նրանց փոխկապվածության մեջ» [140, 39]:

Շատ հեղինակներ, օրինակ՝ Ա. Ա. Ստոլյարը, գտնում են, որ մաթեմատիկական կրթությունում ֆորմալ տրամաբանության ներդնումը օգտակար է, բայց հարկավոր է պահպանել խելամիտ սահմաններ: Պետք է լավ հասկանալ, որ այդ ներմուծումը հղի է որոշ մեթոդական դժվարությունների հանգեցնող խնդիրներով, քանի որ այն ոչ լիովին է համաձայնեցվում ինչպես մաթեմատիկական, այնպես էլ բնական լեզվի հետ: Ցուցադրելով ֆորմալ տրամաբանության օգտագործման առավելությունը՝ չպետք է մոռանալ այն, որ դրա ներմուծումը բերում է իր դժվարությունները [140, 41]:

Գ. Ի. Սարանցևը գտնում է, որ սովորողները շատ հաճախ թույլ են տալիս սխալներ, որոնք կապված են հասկացության սեռը և տեսակը ճիշտ չհասկանալու հետ: Հաճախ են հանդիպում այնպիսի սխալներ, երբ երեխան սահմանման մեջ չի նշում սեռը, թույլ է տալիս «շրջապտույտ» կոչվող սխալը, ձևակերպում է սահմանումը՝ նրանում բաց թողնելով առանձին բառեր: Ելնելով մաթեմատիկայի բազմաթիվ ուսուցիչների փորձից, նա հանգում է այն եզրակացության, որ դպրոցում մաթեմատիկական ոչ մի հասկացության ձևավորումը մաքուր ձևով չի ներառվում նրա տրամաբանական սխեմայի մեջ: Մեծ մասամբ հասկացությունը (առանց սահմանման) միանգամից կիրառվում է խնդիրների լուծման ժամանակ: Հաշվի առնելով, որ ցածր դասարանների աշակերտները չեն հասկանում անհրաժեշտության և բավարարության իմաստը, պնդումների համարժեքությունը, նրանց մնում է անգիր սովորել հասկացությունների սահմանումները և ուսուցչի թելադրության տակ լուծել խնդիրներ [142]:

Տրամաբանության տարրերի ուսուցման գործընթացը կարելի է և անհրաժեշտ է սկսել առաջին դասարանից՝ համապատասխան մակարդակով: Զ. Պ. Դենեշը, օրինակ, մշակել է դիդակտիկ նյութեր (տրամաբանական բլոկներ) և հատուկ խաղեր նախադպրոցական տարիքի երեխաներին տրամաբանական գործողությունները սովորեցնելու համար: Ի դեպ, համանման մշակումներ կրտսեր դպրոցականների համար կատարվել են նաև մեզանում, այդ առումով ուշագրավ է օրինակ Ա. Հակոբյանի և Ն. Խրիմյանի [34] աշխատանքը: Ա. Ա. Ստոլյարը գտնում է. «Այդ «տրամաբանական ծրագիրը» անհրաժեշտ է իրականացնել տարրական և միջին դպրոցում, իսկ բարձր դասարաններում կարելի կլինի իրականացնել տրամաբանության համակարգված ուսուցում գոնե աշակերտների մի մասի համար, օրինակ ֆակուլտատիվ պարապմունքների միջոցով, կամ էլ շարունակել տրամաբանական գիտելիքների ընդլայնումը մաթեմատիկական նյութի ուսուցման հետ զուգահեռ» [101, 24-25]:

Տրամաբանական կրթվածության վիճակի բացահայտման նպատակով մենք անցկացրել ենք հարցումներ ինչպես բարձր դասարանների աշակերտների, այնպես էլ բուհում նոր ընդունված առաջին կուրսի ուսանողների շրջանում: Պարզվում է, որ նրանց մոտ դեռևս հաճախ են հանդիպում հետևյալ տիպի սխալները.

ա) դատողության ժխտումը շփոթում են հերքման հետ,

բ) սխալ են կատարում «ցանկացած» և «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևեր (քվանտորներ) պարունակող բարդ դատողությունների ժխտումը,

գ) տրամաբանական շաղկապները շփոթում են (նույնացնում են) քերականական շաղկապներին, հատկապես, երբ խոսքը վերաբերում «եթե…, ապա…» շաղկապի գործածությանը,

դ) «եթե…, ապա…» շաղկապ պարունակող բարդ (պայմանական) դատողությունը շփոթում են մտահանգման հետ:

Կարելի է այս տիպական սխալների ցանկը շարունակել, սակայն նշվածները ևս բավարար հիմք են տալիս ասելու, որ սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման և տրամաբանական գրագիտության մակարդակի բարձրացման նպատակով անհրաժեշտ է կրթական ծրագրերում ավելի ուժեղացնել «Տրամաբանության հիմունքների» բաղադրիչի դերը, քան արվում է ներկայումս [83, 172-174]:

Տրամաբանական շաղկապները, առանց բացառության, լայնորեն կիրառվում են մաթեմատիկայի բոլոր, այդ թվում և դպրոցական դասընթացներում: Դրանց գործածությանը հանդիպում ենք թվաբանության, երկրաչափության, հանրահաշվի, մաթանալիզի հիմունքների թեմաներից յուրաքանչյուրի բովանդակության շարադրանքում: Այդ ամենի մեջ շաղկապները կիրառվում են երկու մակարդակով.

ա) ինտուիտիվ մակարդակ, երբ շաղկապները գործածվում են տարերայնորեն՝ քերականական շաղկապների դրսևորման ձևով. դրանց իմաստներն ընկալվում են հիմնականում լեզվի դասընթացից ձեռք բերված հմտությունների հիման վրա, իսկ մաթեմատիկական տեքստերի շնորհիվ կատարվում են միայն որոշ պարզաբանումներ և ճշգրտումներ,

բ) համակարգված և գիտակցված մակարդակ, երբ շաղկապները գործածվում են՝ նախապես ճշգրիտ սահմանելով դրանց իմաստները, դրանք դիտելով որպես մաթեմատիկայի լեզվի բաղադրիչներ: Սրանցից յուրաքանչյուրը ստանում է հանրահաշվական կիրառություն, մասնավորապես բանաձևերի համակարգի, համախմբի և համարժեքության օրենքների ու հատկությունների միջոցով: Դրանց շնորհիվ հնարավորություն է ստեղծվում ոչ միայն հասկանալի ներկայացնել մի շարք հանրահաշվական կարևոր հասկացություններ, այլև զարգացնել լեզվատրամաբանական մտածողությունը, խորը կապեր բացահայտել հանրահաշվական լեզվի և բնական լեզվի միջև:

Մաթեմատիկայի դասընթացներում շաղկապների գործածության հետ կապված մի շարք հարցեր դեռևս կարիք ունեն հստակեցման և մեթոդական մշակման: Գիտափորձերի արդյունքները հստակ ցույց են տալիս, որ առանց տրամաբանության, ավանդական մեթոդներով մաթեմատիկայի ուսուցումը չի ապահովում տրամաբանական մտածողության էական զարգացում [101]:

ա) Ավանդական մեթոդիկայով սովորող աշակերտները համարում են, որ, ասենք, 5≤5, 2≤2 ասույթները կեղծ են, քանի որ չեն հասկանում ասույթների տրամաբանական գումարի իմաստը: Տրամաբանական գումարի իմաստի չիմացությունը հաճախ հանգեցնում է նաև լուրջ մաթեմատիկական սխալների: *Օրինակ, ≤ նշան պարունակող* ոչ խիստ անհավասարումներում առկա տրամաբանական կապի անտեսման, «կամ» և «և» տրամաբանական շաղկապների գործառությունների սխալ կիրառման պատճառով սովորողները հաճախ հանգում են սխալ եզրակացությունների, ենթադրելով, որ տրված անհավասարումը լուծում չունի (որպես լուծում ընդունվում է ոչ թե բաղադրիչ անհավասարման ու հավասարման լուծումների միավորումը, այլ հատումը) [75, 40-47]:

բ) Սովորողների ճնշող մեծամասնությունը (ինչպես նաև հատուկ տրամաբանական պատրաստվածություն չունեցող ուսանողները) չեն կարողանում ճիշտ կառուցել բարդ տրամաբանական կառույցներով ասույթների ժխտումները, և դրանով է բացատրվում նրանց դատողություններում, մասնավորապես օժանդակ ապացույցներում հաճախ հանդիպող սխալները [76, 6-8]:

գ) «Եթե…, ապա…», «…-ից հետևում է …» և այլ շաղկապները հաճախ են հանդիպում մաթեմատիկական տեքստերում, այդ թվում և դպրոցական դասագրքերում, որոնց ընկալումը կատարվում է միայն ինտուիտիվ մակարդակով, ինչը մի շարք դեպքերում առաջ է բերում անճշտություններ, հատկապես երբ տրամաբանական շաղկապները ուղղակիորեն նույնացվում են քերականական շաղկապների հետ: Քերականական «եթե..., ապա…» շաղկապը ոչ բոլոր դեպքերում է համընկնում տրամաբանական «եթե..., ապա…» շաղկապի հետ: Հաճախ արտահայտվում են «եթե..., ապա…» շաղկապ պարունակող բարդ նախադասություններ, որոնք իմպլիկացիա ամենևին չեն ներկայացնում: Օրինակ, զուգահեռագիծը և սեղանը համեմատելիս ասվում է. «Եթե զուգահեռագծի մեջ զուգահեռ կողմերը հավասար են, ապա սեղանի մեջ զուգահեռ կողմերը հավասար չեն»: Դժվար չէ համոզվել, որ բերված օրինակում «եթե..., ապա…» շաղկապի շնորհիվ պնդման մեջ մտնող երկու բաղադրիչ ասույթներից մեկը մյուսից կախման մեջ չի դրվում որպես պայմանի և հետևանքի: Եվ եթե փորձենք «վերականգնել» տրամաբանական շաղկապը, ապա կտեսնենք, որ քերականական «եթե..., ապա…» շաղկապը կատարում է տրամաբանական «և» շաղկապի դերը:

դ) Իմպլիկացիայի ինտուիտիվ ընկալումը խիստ անբավարար է հատկապես «եթե..., ապա…» տրամաբանական շաղկապ պարունակող բարդ ասույթների նկատմամբ ժխտման գործողությունը անսխալ կատարելու համար: Մեր կողմից հարցման ենթարկված գրեթե բոլոր սովորողները սխալներ են թույլ տալիս $A \rightarrow B$ (եթե A, ապա B) տեսքի պնդումների ժխտումը կազմելիս, այն ներկայացնելով $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$ տեսքով (եթե ոչ A, ապա ոչ B): Օրինակ, որպես «Եթե թիվը վերջանում 2–ով, ապա այն զույգ է» դատողության ժխտում ներկայացվում է «Եթե թիվը չի վերջանում 2–ով, ապա այն զույգ թիվ չէ» ակնհայտ սխալ կառուցվածքով դատողությունը:

ե) Քվանտորների ներկայացումը դեռևս կատարվում է ինտուիտիվ մակարդակով, ինչի հետևանքով առաջ են գալիս դժվարություններ ընդհանուր և մասնավոր դատողություններով արտահայտված պնդումների իմաստի ընկալման և դրանց նկատմամբ տրամաբանական գործողություններ կատարելու ընթացքում: Մաթեմատիկական տեքստերում ընդհանրության և գոյության քվանտորներն արտահայտվում են տարբեր բառերով, սակայն որոշ դեպքերում քվանտոր ներկայացնող բառ չի օգտագործվում, և հատկապես այդ դեպքերում ի հայտ են գալիս որոշ անճշտություններ: Մասնավորապես, եթե դատողության սուբյեկտը (տրամաբանական ենթական) ընդհանուր հասկացություն է, ապա սովորաբար քվանտորը չի արտահայտվում, և դժվար է լինում ընկալել, որ պնդումը վերաբերում է սուբյեկտի անբողջ ծավալին: Օրինակ, երբ ասվում է. «Շրջանագծի տրամագիծը երկու անգամ մեծ է նրա շառավիղից», ապա այստեղ պնդումը վերաբերում է ցանկացած շրջանագծի յուրաքանչյուր տրամագծին: Ձևակերպման մեջ քվանտորները բացահայտ չեն նշվում, բայց ենթադրվում է, որ դրանք հասկացվում են, և հենց այդ հանգամանքն էլ որոշ իրավիճակներում հանգեցնում է շփոթության: Հասկանալի է, որ մտքեր արտահայտելիս բնական լեզվում գործում է նաև հակիրճության պահանջը: Ելնելով դրանից՝ դասընթացի շարադրանքներում հաճախ «զեղչվում են» ոչ միայն քվանտորները, այլ նաև տրամաբանական շաղկապները (հաճախ դրանք փոխարինվում են կետադրական նշաններով): Այդ ամենի հետևանքով ծագում են անհստակություններ: Եվ երբ վիճահարույց հարցեր են առաջանում, անհրաժեշտ է լինում տվյալ տեքստերում վերծանել և բացորոշ ներկայացնել տրամաբանական արժեք ունեցող բառերը: Սակայն այդպիսի վերծանում կարող է կատարվել միայն այն դեպքում, երբ համակարգված գիտելիքներ են տրվում տրամաբանական շաղկապների և քվանտորների վերաբերյալ:

Տրամաբանական լուրջ խնդիրներ են առաջանում հատկապես քվանտորներ պարունակող դատողությունների նկատմամբ ժխտման գործողություն կատարելիս (օրինակ, ինչպե՞ս կլինի հետևյալ պնդման հակառակը՝ ժխտումը. «Ցանկացած թվի համար գոյություն ունի նրանից ավելի մեծ պարզ թիվ»): Այս տեսքի պնդումների ժխտումը ձևակերպելու համար պահանջվում են որոշակի գիտելիքներ տրամաբանությունից (կոնյունկցիայի և դիզյունկցիայի ժխտման օրենքները (Դե Մորգանի կանոնները):

Ընդհանրապես, մաթեմատիկայի ուսուցման մեջ հաճախ հարկ է լինում ձևակերպել բարդ տրամաբանական կառուցվածքով պնդման ժխտումը: Հաճախ դա արվում է ինտուիտիվորեն, առանց տրամաբանական օրենքների կիրառման և այդ ժամանակ թույլ են տրվում բազմաթիվ սխալներ: Այնինչ, նման պնդման ժխտման կառուցման օրենքները կարող են բացատրվել աստիճանաբար, որոնց նշանակությունը համեմատելի են մայրենի լեզվի ուղղագրության օրենքների հետ. մի անգամ յուրացվելուց հետո դրանք կիրառվում են, այնուհետև ինքնաբերաբար ազատվում են ամեն անգամ լուծումներ որոնելու անհրաժեշտությունից [155]:

զ) Ժխտումը որպես տրամաբանական գործողություն հաճախ սխալ է ընկալվում, այն շփոթվում ու նույնացվում է հերքման հետ: Հայտնի է, որ հերքումն այնպիսի տրամաբանական գործողություն է, որով ցույց է տրվում որևէ պնդման կեղծ լինելը: Ուրեմն՝ հերքվել կարող է միայն կեղծ կամ անհիմն պնդումը: Մինչդեռ ժխտումը որևէ պնդման նկատմամբ կիրառելիս ստացվում է մի այնպիսի պնդում, որը կեղծ է, եթե տրված պնդումը ճշմարիտ է, և ճշմարիտ է, եթե տրված պնդումը կեղծ է: Ժխտել կարելի է ցանկացած պնդում՝ լինի այն կեղծ թե ճշմարիտ: Այսպիսով, դատողության ժխտումը և դատողության հերքումը միանգամայն տարբեր գործողություններ են, և չի կարելի հանդուրժել, որ «ժխտելը» և «հերքելը» դիտվեն որպես համարժեքներ: Հարկ է նշել, որ ուսուցման գործընթացում հերքումը գրեթե չեն սովորեցնում: Դա լուրջ բացթողում է ընդհանուր կրթական և դաստիարակչական աշխատանքների կազմակերպման մեջ, քանի որ կյանքում հաճախ է առաջանում հերքման անհրաժեշտությունը:

է) Արտածման պարզագույն կանոնների յուրացումը չի նշանակում, որ դրանք յուրացնողը անհրաժեշտության դեպքում կարող է եզրակացությունը արտածել տրված նախադրյալներից, անհրաժեշտության դեպքում մտածել համապատասխան արտածման կանոնի մասին, այնպես, ինչպես քերականական կանոնների յուրացումը դեռևս չի նշանակում, թե այն իմացողը կարող է յուրաքանչյուր անգամ որոշել, թե իր մտքերը շարադրելու համար ի՞նչ կանոն պետք է կիրառել: Մանկավարժական փորձը ցույց է տալիս սակայն, որ արտածման պարզագույն կանոնների ուսուցումը և դրանց կիրառման ուղղությամբ որոշ վարժվածությունը հանգեցնում են ճիշտ կառուցված դատողությունների կազմման ուղղությամբ ինտուիցիայի զարգացմանը:

ը) Դիտումները ցույց են տալիս, որ սովորողները բազմիցս գործ են ունենում սահմանման հետ, ընդ որում հեշտությամբ կարողանում են վերարտադրել բազմազան հասկացությունների սահմանումները: Մինչդեռ ինքնուրույն կերպով սահմանում ձևակերպելիս, սովորաբար, թույլ են տալիս բազմաթիվ սխալներ, և հիմնականում այն պատճառով, որ նրանք երբեք չեն ուսումնասիրել, թե ինչ է սահմանումը կամ որոնք են սահմանման կանոնները և ինչպես է պետք կատարել այդ գործողությունը: Նույնը վերաբերում է տրամաբանական մյուս գործողություններին՝ դասակարգմանը, ապացուցմանը, հերքմանը և այլն: Դրանց վերաբերյալ սովորողները ունեն սոսկ ընդհանուր, կցկտուր պատկերացումներ, բայց դրանք երբեք չեն եղել հատուկ ուսուցման առարկա: Եվ եթե մտածողության ընդհանուր օրենքներին վերաբերող հիմնարար գիտությունը՝ տրամաբանությունը, լիարժեք չի ընդգրկվել ուսումնական ծրագրերում, ապա առաջանում է տրամաբանական թերկրթվածության իրավիճակ:

1.2. Տրամաբանության տարրերի ներառումը ՀՀ Հանրակրթական ծրագրերում

1.2.1. Տրամաբանության տարրերը «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի առարկայական չափորոշիչներում, ծրագրերում և գործող դասագրքերում

Ինչպես նշվեց, անկախացումից հետո ՀՀ հանրակրթության բնագավառում բարեփոխումները համակարգված ընթացք ստացան հատկապես 2004 թվականից հետո, երբ գործածության երաշխավորվեցին հանրակրթության պետական կրթակարգը և միջնակարգ կրթության պետական չափորոշիչը: Բարեփոխումների մի բաղադրիչը վերաբերում էր կրթության բովանդակությանը, և այդ համատեքստում կարևորություն ստացավ նաև մեր խնդրո առարկա «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի բովանդակության մեջ տրամաբանության տարրերի ներառման հարցը: Այդ ուղղությամբ կատարվել է հսկայական աշխատանք. կրթական բոլոր աստիճանների համար մշակվել են առարկայական չափորոշիչներ, ծրագրեր, որոնց հիման վրա ստեղծվել են համապատասխան դասագրքեր: Հետևապես անհրաժեշտ է հետազոտել ստեղծված իրավիճակը և բացահայտել, թե այդ ամենի մեջ ինչպես են արտացոլվել տրամաբանության տարրերի ուսուցմանը վերաբերող խնդիրները:

Հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի առարկայական բնագավառը *կրտսեր դպրոցում* ներկայանում է «Մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայով: Այդ առարկայի չափորոշչի բովանդակային միջուկում տրամաբանության և ինֆորմատիկայի տարրերը կազմում են առանձին բովանդակային գիծ, որտեղ ներառված *«Գաղափար* *դատողության մասին», «Առարկաների խմբավորում և տեսակավորում ըստ տրված հատկանիշի՝ համեմատման, վերլուծման, համադրման միջոցով», «Խնդրի պահանջ և պայման»* և այլ նյութեր կամ անմիջականորեն վերաբերում են տրամաբանության տարրերին, կամ էլ առնչվում են դրանց հետ: Նախատեսվում է նյութի իմացությունը միայն գաղափար կազմելու մակարդակով: Դրա ուսուցումը, բացի առարկայի առջև դրված նպատակների իրականացումից, լավ հիմքեր է ստեղծում միջին դպրոցի բարձր դասարաններում տրամաբանության տարրերի համակարգված ուսուցումը կազմակերպելու համար: Առարկայական չափորոշչում տարրական դպրոցն ավարտողի համար տրամաբանությանը վերաբերող գիտելիքներն ու կարողություններին ներկայացվող պահանջները բերված են հավելված 1-Բ-ի կետ 1-ում:

Առարկայական ծրագրում չափորոշչի բովանդակային միջուկում ամփոփված նյութը վերաբաշխված է ըստ դասարանների և ըստ հաջորդական թեմաների: Թեմաներից յուրաքանչյուրի համար բովանդակության և հատկացված ժամաքանակի հետ մեկտեղ նշված են տվյալ թեմային վերաբերող կրթական հիմնական խնդիրները, ինչպես նաև սովորողների համար ակնկալվող չափորոշչային գիտելիքները, կարողություններն ու հմտությունները: Տարրական դպրոցի ծրագրում տրամաբանությանը վերաբերող հարցերը նախատեսվում է ուսումնասիրել հիմնականում 3-րդ դասարանում: «Տվյալներ, դրանց հավաքումը և մշակումը: Խնդիրներ» թեման ամբողջությամբ նվիրված է դրան [53, 33]: Այդ թեմայի ուսուցման համար նախատեսվող հարցերի շրջանակը և տրամաբանության տարրերի ներառման տեսակետից սովորողների հնարավորություն ընձեռելու չափորոշչային պահանջները ներկայացված են հավելված 1-Բ-ի կետ 1-ում:

Ուսումնասիրելով հանրակրթական դպրոցի առաջին և երկրորդ դասարանի դասագրքերը [88], [89], տեսնում ենք, որ այստեղ տրամաբանության տարրերին վերաբերող նյութեր չկան: Փոխարենը երեխաների տրամաբանական մտածողության զարգացման հարցը լուծվում է բազմաթիվ տրամաբանական խնդիրների միջոցով: Երրորդ դասարանի դասընթացում երեխաները ծանոթանում են ճշմարիտ և կեղծ դատողությունների հետ: Առկա են բազմաթիվ վարժություններ, որոնցով պարզվում է դատողության ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը [90, 29-33], [90, 44-46], [90, 51], [90, 65-66], [90, 69], [90, 82], [90, 89], [90, 125], [90, 127], [90, 136]: Չորրորդ դասարանի դասագրքում նույնպես կան վարժություններ ճշմարիտ և կեղծ դատողությունների վերաբերյալ [91, 8], [91, 22], [91, 31], [91, 59], [91, 110], [91, 121]: Յուրաքանչյուր դասի վարժությունների համակարգում առանձնացված են ոչ ստանդարտ տրամաբանական խնդիրներ և վարժություններ:

Տրամաբանության տարրերին վերաբերող ծրագրային նյութը պատշաճ արտացոլում է գտել նաև մաթեմատիկայի 3-րդ դասարանի մյուս այլընտրանքային դասագրքում ևս [52, 154-156], [52, 188-201]: Ընդ որում մեծ կարևորություն է տրվում նաև մաթեմատիկայի և մայրենի լեզվի միջառարկայական կապերին [49, 78-84]:

Միջին դպրոցի *5-6 -րդ դասարաններում* մաթեմատիկան դարձյալ ներկայանում է «Մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայով, որի չափորոշչի բովանդակային միջուկում շարունակվում է տարրական դպրոցի տրամաբանության և ինֆորմատիկայի բովանդակային գիծը: Թեև նյութի ուսուցման գիտականության պահանջը այստեղ նույնպես բավականին մեղմ է, սակայն քննարկվող հարցերի շրջանակը շատ ավելի լայն է, քան տարրական դպրոցում: *Նախատեսվում է սովորողին նախնական գաղափար տալ ասույթների, ալգորիթմի, «և», «կամ», «եթե…, ապա…» տրամաբանական ձևեր պարունակող դատողությունների մասին, ծանոթություն բազմության, ենթաբազմության, բազմությունների միավորման և հատման հետ, գաղափար համեմատման, համադրման, վերլուծման միջոցով և ըստ տրված հատկանիշի առարկաների խմբավորման և դասակարգման մասին: Խնդրի օրինակի վրա նախատեսվում է գաղափար տալ պահանջի և պայմանի, տվյալների հենքի վրա՝ հայտնիի և անհայտի տրամաբանական հասկացությունների մասին:* Առարկայական չափորոշչում տրամաբանությանը վերաբերող գիտելիքները, կարողություններն ու հմտությունները 5-6 րդ դասարանները ավարտողի համար ներկայացված են հստակ ձևակերպված պահանջներով [53, 19-20], որոնք տրված են հավելվածի 1-Բ-ի կետ 2-ում:

«Մաթեմատիկա» առարկայի ծրագրերը մշակվել են առարկայական չափորոշչին համապատասխան և ծառայում են որպես հիմնական փաստաթուղթ՝ չափորոշիչների վրա հիմնված ուսուցում իրականացնելու համար: Ծրագրում հիմնական դպրոցի 5-6 -րդ դասարանների համար ըստ դասարանների պլանավորված է ուսումնական նյութն այնպես, որ դրա հաջորդական ուսումնասիրությունը սովորողների համար հնարավորություն է ընձեռում՝ ապահովել չափորոշչային գիտելիքների իմացությունը, զարգացնել տրամաբանական և ստեղծագործական ունակությունները, գիտելիքները կիրառելու, ինքնուրույն գործունեություն իրականացնելու կարողություններն ու փորձը, նպաստել արժեքային համակարգի ձևավորմանը և սոցիալական հմտությունների զարգացմանը:

Ծրագրերում առարկայի բովանդակային գծերը տարածվում են միասնաբար և փոխկապակցված ձևով, ամբողջական թեմաների միջոցով: Թեմաներից յուրաքանչյուրի համար նշված են նախատեսված ժամաքանակը, թեմայի բովանդակությունը, դրան վերաբերող կրթական հիմնական խնդիրները, ինչպես նաև սովորողների համար ակնկալվող չափորոշչային գիտելիքները, կարողություններն ու հմտությունները: Կարևոր է նկատի ունենալ, որ սովորողների սոցիալական հմտությունների զարգացումն ու արժեքային համակարգի ձևավորումը դիտվում են որպես բոլոր թեմաների ուսուցմանն ուղեկցող խնդիրներ:

5-6-րդ դասարանների ծրագրում տրամաբանությանը վերաբերող հարցեր նախատեսվում է ուսումնասիրել հիմնականում 6-րդ դասարանում: «Տվյալներ, տվյալների հավաքում և մշակում» թեման, որի համար նախատեսված է հատկացնել 20 ժամ, ամբողջությամբ նվիրված է դրան: Այդ թեմայի ուսուցման համար նախատեսվում է դիտարկել հետևյալ հարցերը [53, 42], խաղային և առօրյա խնդիրների մոդելների ստեղծում և լուծման ալգորիթմների կազմում (գետանց, լաբիրինթոս, կեղծ դրամներ, մեկ հպում, շախմատի տախտակ, դոմինո և այլն):

Թեմայի ուսուցումը ունի հետևյալ կրթական հիմնական խնդիրները. խորացնել կարողություններ կիրառական ստանդարտ խնդիրների մոդելավորման և լուծման վերաբերյալ, տալ պատկերացումներ ոչ ստանդարտ խնդիրների և դրանց լուծումների վերաբերյալ: Այն սովորողին հնարավորություն է ընձեռելու ապահովելու չափորոշչային հետևյալ պահանջները. հասկանալ և կիրառել խնդիրների լուծման ալգորիթմը. առանձնացնել խնդրի պայմանը և պահանջը, հայտնի և անհայտ տվյալները, խնդիրը հանգեցնել ավելի պարզ խնդիրների, բացահայտել խնդրում եղած մեծությունների միջև եղած կապերը, խնդրի լուծման պլան կազմել, լուծել խնդիրը և ստուգել արդյունքները, խնդիրների լուծման ընթացքում օգտագործել գծապատկերներ, աղյուսակներ, կրճատ գրառումներ, խնդրի լուծման տարբեր եղանակներ փնտրել, տրված պայմանների դեպքում ձևակերպել խնդրի պահանջ, խնդրի պահանջի բավարարման համար պակասող պայմաններ և տվյալներ գտնել, առօրյա և խաղային խնդիրների համար մոդելներ ստեղծել և կազմել լուծման ալգորիթմներ:

Առարկայական ծրագրում ընդգրկված նյութը համեմատելով չափորոշչի պահանջների հետ, նկատում ենք, որ չափորոշչային պահանջները հիմնականում արտացոլված են առարկայական ծրագրում: Հետևաբար, տվյալ ծրագրով ուսուցումը սովորողներին ապահովում է պատրաստվածության չափորոշչային մակարդակ: Միաժամանակ նկատում ենք, որ չափորոշչի բովանդակային միջուկում ներկայացված «Գաղափար ասույթի մասին», «ոչ», «և», «կամ», «եթե…, ապա…» տրամաբանական ձևեր պարունակող դատողությունների օրինակներ, ինչպես նաև «Ծանոթություն բազմությունների հետ, բազմությունների միավորման և հատման օրինակներ» հարցերը 5-6-րդ դասարանների ծրագրում ընդգրկված թեմաների բովանդակության մեջ հստակ հիշատակված չեն: Հավանաբար ենթադրվում է, որ այդ հարցերը անուղղակի և անբացահայտ կերպով կլուսաբանվեն ծրագրային մյուս թեմաների խնդիրների համակարգում: Սակայն ծրագրում շարադրված թեմաների կրթական խնդիրների, ինչպես նաև չափորոշչային ակնկալիքների հանգամանալի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ ինչպես ասույթների ու տրամաբանական շաղկապների, այնպես էլ բազմությունների վերաբերյալ ակնարկներ անգամ չեն նշվում: Ուստի կարծում ենք, որ մաթեմատիկայի 5-6-րդ դասարանների ծրագրում թույլ է տրվել մասնակի բացթողում, և այդ պատճառով հիշատակված հարցերը ավելի հանգամանորեն պետք է դիտարկել հաջորդ դասարանների հանրահաշվի ծրագրում [82, 3-11]:

5-րդ դասարանի դասագրքում տրամաբանության տարրերին վերաբերող թեմաներ չեն ընդգրկված [92]: Սակայն ուսումնասիրվող առարկան աշակերտների համար ավելի գրավիչ դարձնելու նպատակով բոլոր դասերում տրվում են հետաքրքիր բովանդակություն ունեցող խնդիրներ: Դրանք անմիջականորեն չեն կապվում տվյալ դասի ուսումնական նյութի հետ և որևէ կերպ չպիտի ազդեն աշակերտի կողմից դասի յուրացման գնահատման վրա: Այդ խնդիրները չորս տեսակ են՝ հետաքրքրաշարժ, տրամաբանական, թեստային և հին խնդիրներ [94]: Հետաքրքրաշարժ խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ է հանդես բերել ոչ ստանդարտ մոտեցում և բավականաչափ սրամտություն: Տրամաբանական խնդրի լուծումը ստացվում է տրված պայմաններից հետևողական մտահանգումներ կատարելու, այսինքն՝ տրամաբանական մտածելակերպ դրսևորելու միջոցով: Թեստային խնդիրը լուծելու համար պետք է հանդես բերել առավելագույն դիտողականություն և իրողությունների միջև ոչ բացահայտ կապերը տեսնելու ունակություն: Հին խնդիրները պատկերացում են տալիս, թե թվաբանության ինչ հարցեր էին հետաքրքրում մարդկանց անցյալում, և ինչպիսին էր նրանց մտածելակերպը: 6-րդ դասարանի դասագրքի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ այստեղ նույնպես առկա են խնդիրների վերոհիշյալ տեսակները: Սակայն այս դասընթացում ներառված են նաև տրամաբանության տարրերին վերաբերող դասեր: Մասնավորապես՝ «Ճշմարիտ և կեղծ ասույթներ» դասի մեջ խոսվում է կեղծ և ճշմարիտ ասույթների, ասույթների տրամաբանական գումարի, արտադրյալի և ժխտման մասին: Համապատասխանաբար ներկայացվում են վերոհիշյալ տրամաբանական գործողությունների ճշմարտային աղյուսակները [93, 169-172]:

Միջին դպրոցի 7-9 դասարաններում մաթեմատիկան ներկայացվում է հանրահաշվի և երկրաչափության ուսումնական առարկաներով: Այստեղ արդեն, ելնելով աշակերտների տարիքային առանձնահատկություններից, տրամաբանության տարրերը հնարավոր է ներկայացնել գիտական բավարար խստությամբ և որոշակի համակարգով: Հարկ է նկատել, որ ինչպես նշված, այնպես էլ երկրաչափության առարկայի չափորոշիչով ներկայացված նյութը, ըստ էության, էականորեն չի տարբերվում խորհրդային դպրոցի երկրաչափության ծրագրերում ընդգրկված նյութից: Իսկ ահա միջին դպրոցի հանրահաշվի չափորոշչային պահանջները և չափորոշչային նյութը էականորեն տարբերվում են խորհրդային շրջանի համապատասխան պահանջներից և նյութից [80, 10-20]:

Միջին դպրոցի հանրահաշվի առարկայական նոր ծրագրում և դասագրքերում տրամաբանության տարրերին նվիրված նյութ չի ընդգրկվում: Ընդ որում 2011 թ-ից ՀՀ կրթական համակարգ մտցված *Ս. Մ. Նիկոլսկու* և այլ հեղինակների թարգմանաբար ներկայացված *«Հանրահաշիվ 7-9»* [95], [96], [97] *դասագրքերում առհասարակ բացակայում են զուտ տրամաբանության տարրերին նվիրված նյութերը:* Գրված լինելով ԽՍՀՄ-ի փլուզումից շատ առաջ, դեռևս «լճացման» տարիներին, դրանք նպատակաուղղված են ոչ թե սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման, այլ մաթեմատիկայի վերաբերյալ զուտ տեխնիկավարժանքային հմտությունների ձեռք բերմանը: Եվ պատահական չէ, որ այդ դասագրքերը ՌԴ-ում արդեն դուրս են մնացել գործածությունից (եթե մի քանի տարի առաջ դրանց գործածության ցուցանիշը ՌԴ-ում կազմում էր ընդամենը 3%, ապա ներկայումս որպես դասագիրք՝ դրանք առհասարակ չեն օգտագործվում):

Երկրաչափության չափորոշչի բովանդակային միջուկում ներառված տրամաբանական նյութը ներկայանում է զուտ մաթեմատիկական տեսքով, սակայն դրա հետևում դժվար չէ տեսնել տրամաբանական կառույցը: Իսկ այդ երկրաչափական տեսքը նյութին տալիս է կոնկրետ առարկայական նկարագիր և դյուրին է դարձնում նրա յուրացումը, այն, ինչի մասին գրում է Վ. Ի Ռիժիկը (տես 1-ին պարագրաֆի 1.3 կետը):

Ժամանակակից կրթական հայեցակարգերում ընդգծվում է կրթության բովանդակության մեջ երկրաչափության բաղադրիչի ընդլայնման կարևորությունը: Երկրաչափական մտածելակերպը, մի կողմից, իր մեջ կրում է աշխարհի ճանաչողության մեթոդները, և այդ առումով այն ունի բնագիտական բնույթ, իսկ մյուս կողմից՝ չի կառչում շրջապատող աշխարհի ֆիզիկական ձևերին և առնչություններին, այլ դիտարկում է իդեալական պատկերներ և տարածական ձևեր: Արդյունքում, երկրաչափական հետազոտության օբյեկտները դիտվում են, մի կողմից՝ որպես առարկայորեն տեսանելի և ընկալելի պատկերներ, իսկ մյուս կողմից՝ որպես մտքի վերացական առարկաներ, որոնց հատկությունների բացահայտումը կատարվում է զուտ տրամաբանական միջոցներով: Ինչպես նշվում է առարկայական չափորոշչի հայեցակարգում, երկրաչափությունը բացառիկ և կատարյալ միջոց է, որով տրամաբանական մտածողության ընթացքը ուղեկցվում է դրան համապատասխանող պատկերային ընկալմամբ: Ի տարբերություն մյուս ուսումնական բնագավառների, որոնցում այս կամ այն չափով նույնպես օգտագործվում են պատկերներ՝ միջնորդված ձևով դիտողականություն ապահովելու համար, երկրաչափության մեջ պատկերներն ուղղակիորեն համապատասխանում են նյութի բովանդակությանն ու տրամաբանական կառուցվածքին: Այդպիսով, երկրաչափության միջոցով կարգավորվում է սովորողի մտավոր գործունեությունը, զարգանում է նրա երևակայությունը և, հետևապես, զարգանում է նաև ստեղծագործական կարողությունը, քանի որ առհասարակ ստեղծագործական գործընթացի հիմքում ընկած է հենց երևակայությունը:

Քանի որ ժամանակակից ընկալմամբ կրթական գործունեության համար բարձրագույն արժեքը մարդն է, իսկ գլխավոր նպատակը նրա ներդաշնակ զարգացումը, այդ պատճառով ներկայումս դասընթացի գլխավոր նպատակ է համարվում ոչ միայն աշակերտներին երկրաչափություն սովորեցնելը, այլև երկրաչափություն ուսումնասիրելու միջոցով աշակերտների ունակությունների զարգացումը: Օրինակ, մտավոր զարգացման տեսանկյունից գլխավոր նպատակ է դիտվում ոչ թե այս կամ այն թեորեմի ապացուցումը սովորեցնելը, այլ ապացուցումներ կատարելու կարողությունների ձևավորումն ու զարգացումը: Առաջին հայացքից կարող է թվալ, թե որևէ պնդման ապացուցումն իմանալը առանձնապես չի տարբերվում ապացուցել կարողանալուց: Սակայն, բանն այն է, որ մի դեպքում ակտիվ դերում է հիշողությամբ ընկալումը, իսկ մյուս դեպքում՝ ճանաչողական, հետազոտական, ստեղծագործական գործընթացը: Առաջինը անկայուն է, կիրառելի է միայն ծանոթ իրադրություններում, մինչդեռ երկրորդն ավելի կայուն է, կիրառելի է նաև անծանոթ իրադրություններում: Նույնը վերաբերում է խնդիրներ լուծելուն առհասարակ: Այսպես, կրթական առումով առանձնապես մեծ չէ որևէ խնդրի լուծումն իմանալու նշանակությունը: Այնինչ, խնդրի պարագայում կրթական հիմնական նպատակն է գիտելիքների օգտագործման միջոցով խնդրի արտահայտած իրադրությունը վերլուծելու, լուծման ուղիներ որոնելու, կողմնորոշվելու, վարկածներ առաջադրելու, կանխատեսումներ անելու, վճիռներ կայացնելու, գործողությունների պլան մշակելու, արդյունքները ստուգելու, գնահատելու, անհրաժեշտ ճշգրտումներ կատարելու, հետևանքները վերլուծելու և այլ կարողությունների ու հմտությունների զարգացումը [47, 84]:

Երկրաչափության դասընթացի համար հատկանշական է այն, որ խնդիր է դրվում զարգացնել ինտուիտիվ՝ պատկերային ընկալումները և տրամաբանական արտահայտչաձևերը, արտածումները, հիմնավորումները: Միջին դպրոցի երկրաչափության բովանդակային միջուկում տրամաբանական հիմունքներին են վերաբերում հետևյալ նյութերը. *սահմանում, աքսիոմ, թեորեմ, հետևանք թեորեմից, անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, ուղիղ և հակադարձ թեորեմներ, ապացուցում և հերքում, ուղղակի և անուղղակի ապացուցումներ, ապացուցում հակառակից, անալոգիա, երկրաչափության աքսիոմների մասին, Էվկլիդեսի 5-րդ պոստուլատը և նրա պատմությունը, տեղեկություն ոչ Էվկլիդյան երկրաչափության մասին* [53, 144]: Այս նյութերին համահունչ ձևակերպում են ստացել նաև սովորողին ներկայացվող պահանջները և կրթական ընդհանուր խնդիրները, որոնք ներկայացվում են հավելված 1-Գ-ի կետ 3-ում: Միջին դպրոցի երկրաչափության ծրագրերում տրամաբանության տարրերի ուսուցման հարցը արծարծվում է նաև այդ ուսումնական առարկայի կրթական ընդհանուր խնդիրների մեջ [53, 163-164]:

Տրամաբանության տարրերի վերաբերյալ միջին դպրոցի երկրաչափության դասագրքերում իրականացվում են հետևյալ խնդիրները: 7-րդ դասարանի դասընթացում տրամաբանության տարրերից երեխաները ստանում են պատկերացումներ աքսիոմ և թեորեմ հասկացությունների մասին, իմանում են թեորեմի պայմանի և եզրակացության մասին, հակադարձ թեորեմի մասին, պատկերացում է տրվում հակասող ենթադրությամբ ապացուցման մասին [2, 70-81]: 8-րդ և 9-րդ դասարանի դասընթացում տրամաբանության տարրերին նվիրված կոնկրետ նյութեր չեն տեղադրված, չնայած դասընթացն այնպես է կառուցված, որ տրված ապացուցումները, խնդիրների լուծումները հնարավորություն են տալիս աշակերտի մոտ զարգացնելու վերլուծելու, համադրելու, ապացուցելու, ճշմարիտ դատողություններ կատարելու ունակություններ [39, 50, 71]: Տրամաբանական մտածողության զարգացմանը նպաստում է նաև 9-րդ դասարանի դասագրքում հավելվածի ձևով ներկայացված «Երկրաչափության աքսիոմների մասին» նյութի ուսումնասիրումը [3], [4, 29-131]:

Ավագ դպրոցի *երկրաչափության* ընդհանուր և տարբերակված հոսքերի առարկայական չափորոշչի բովանդակային միջուկում տրամաբանության տարրերի ներառման առումով էական տարբերություն չենք տեսնում, սակայն տարբերակում կատարվում է ինչպես ուսուցման նպատակների, այնպես էլ սովորողին ներկայացվող չափորոշչային պահանջների տեսակետից (տես հավելված 1-Բ-ի կետ 4): Այստեղ բնականաբար տարբերակած հոսքերում նախատեսվում է նյութի ավելի խորը իմացություն բոլոր երեք մակարդակներում [79, 9-30]:

Արժեքավոր պետք է համարել նաև սովորողի արժեքային համակարգի ձևավորման գործում տրամաբանության տարրերի ներառման չափորոշչային պահանջներից բխող հետևությունը: Մասնավորապես, այդ համակարգում պահանջվում է, որ սովորողը կարևորի գրավոր և բանավոր խոսքի հստակությունը, ճշգրտությունը, հակիրճությունը, մատչելիությունը, չլինի դյուրահավատ՝ կարևորի փաստերի հավաստիությունը և փաստարկների անհրաժեշտությունը, չցուցաբերի ավելորդ կասկածամտություն՝ կարևորի փաստարկների բավարարությունը և հետևությունների հիմնավորվածությունը [40, 11-12]: Իսկ դրանք հնարավոր է լիարժեք իրականացնել ուսուցման գործընթացում տրամաբանության տարրերին պատշաճ ուշադրություն դարձնելու միջոցով:

Համեմատելով առարկայական չափորոշչում տրամաբանությանը վերաբերող գիտելիքների, կարողությունների ու հմտությունները հանրակրթական, տարբերակված և խորացված հոսքերում սովորողների համար ներկայացված պահանջները, տեսնում ենք, որ Ա և Բ մակարդակներում էական տարբերություններ չեն նկատվում, մինչդեռ Գ մակարդակում խորացված հոսքի պահանջների մեջ ավելանում են նաև աքսիոմատիկ տեսության մասին գիտելիքներ:

Ավագ դպրոցի ծրագրերում ընդգրկված թեմաների բովանդակության մեջ զուտ տրամաբանությանը վերաբերող հարցեր չեն հիշատակվում: Սակայն այդ թեմաների կրթական հիմնական խնդիրների և չափորոշչային ակնկալիքների հանգամանալի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ տրամաբանական գիտելիքները դրսևորվում են կիրառությունների ձևով:

Ավագ դպրոցի տարբեր հոսքերի երկրաչափության ծրագրերում կրթական ընդհանուր խնդիրներն ըստ դասարանների տրված են առարկայական չափորոշիչներում և ծրագրերում [47, 103-104], [47, 111-112], [47, 120-121] և ներկայացված են հավելված 1-Գ-ում:

Ավագ դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի երկրաչափության դասագրքերում տրամաբանության տարրերի ներառման վերաբերյալ կարելի է ասել հետևյալը: 10-րդ դասարանի դասագրքում գաղափար է տրվում հասկացության մասին [36, 5-8]: «Զրույց աքսիոմի և աքսիոմակարգի մասին» լրացուցիչ ընթերցանության համար նախատեսված պարագրաֆում խոսվում է աքսիոմների և աքսիոմատիկ համակարգերի մասին [36, 13-14]: 11-րդ և 12-րդ դասարանների դասընթացում տրամաբանության տարրերին նվիրված կոնկրետ նյութեր չեն ընդգրկված, սակայն ներկայացված են բազմաթիվ խնդիրներ, որոնցում պահանջվում է որոշել տարբեր կառուցվածքով դատողությունների ճշմարտային արժեքները, իսկ դասագրքերում առաջարկված խմբային աշխատանքները վերաբերում են սահմանմանը փոխարինող հնարներին, համեմատման, դասակարգման, փաստարկման եղանակներին [37], [38]: Մինչդեռ ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի երկրաչափության դասագրքերում (հեղ Շարիգին Ի. Ֆ) [98], [99], [100], ինչպես նաև համապատասխան ուսուցչի ձեռնարկում [13] նման նյութեր չեն ընդգրկված:

Ավագ դպրոցի *«Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր»* ուսումնական առարկայի չափորոշչում ընդհանուր և տարբերակված հոսքերում նախատեսվում է առարկայի գրեթե նույն բովանդակային միջուկը, իսկ խորացված ուսուցման հոսքում կատարվում է բովանդակային միջուկի ինչպես խորացում, այնպես էլ ընդլայնում՝ նաև տրամաբանության տարրերի ներառման առումով:

Տարբերակված հոսքի համար բովանդակային միջուկում ներառվում է տրամաբանության տարրերին նվիրված հետևյալ նյութը. *փոփոխական պարունակող դատողություն, «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով դատողություններ, դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը, հետևություն և համարժեքություն, ինդուկցիա և դեդուկցիա, մաթեմատիկական ինդուկցիա, ապացուցում և հերքում, ապացուցման և հերքման հիմնական եղանակները:* Նույնը ներառված է նաև ընդհանուր հոսքի բովանդակային միջուկում, միայն այս հոսքում սովորողները պետք է գաղափար ունենան նաև դեդուկտիվ մտահանգման կանոնների մասին, իսկ խորացված ուսուցման հոսքում սովորողը պետք է ինչպես ամբողջ բովանդակային միջուկը, այնպես էլ դեդուկտիվ մտահանգման կանոնները ուսումնասիրի խորությամբ: Խորացված ուսուցման հոսքում նախատեսվում է նաև սովորողներին ծանոթացնել ապացուցման և հերքման, դրանց կատարման հիմնական եղանակների մասին:

Առարկայական չափորոշչում տրամաբանությանը վերաբերյալ սովորողի գիտելիքներին, կարողություններին և հմտություններին ներկայացվող պահանջները ավագ դպրոցի տարբերակված (հանրակրթական) հոսքի համար ներկայացված են հավելված 1-Բ-ի կետ 3-ում, [47, 17], իսկ խորացված ուսուցման հոսքի համար՝ հավելված 1-Բ-ի կետ 3-ում [47, 40]:

«Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» առարկայի ծրագրում տրամաբանությանը վերաբերող հարցեր նախատեսվում է ուսումնասիրել հիմնականում 11-րդ դասարանում՝ «Թվային հաջորդականություն, սահման» թեմայի շրջանակներում: Նախատեսվում է ըստ հոսքերի ուսումնասիրել հետևյալ նյութերը:

Ընդհանուր և տարբերակված հոսքեր: Թվային հաջորդականություն, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի կիրառություններ, ասույթներ, փոփոխական պարունակող ասույթ, դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը, հետևություն և համարժեքություն:

Խորացված ուսուցման հոսք: Փոփոխական պարունակող դատողություն, «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով դատողություններ, դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը, հետևությունը և համարժեքությունը, դեդուկտիվ մտահանգում, դեդուկտիվ մտահանգման հիմնական կանոնները, ինդուկտիվ մտահանգում, մաթեմատիկական ինդուկցիա, ապացուցում և հերքում, ապացուցման և հերքման հիմնական եղանակները:

10-րդ և 12-րդ դասարանների ծրագրերում ընդգրկված թեմաների բովանդակության մեջ զուտ տրամաբանությանը վերաբերող հարցեր չեն հիշատակվում: Սակայն այդ թեմաների կրթական հիմնական խնդիրների և չափորոշչային ակնկալիքների հանգամանալի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ տրամաբանական գիտելիքները դրսևորվում են կիրառությունների ձևով [5], [6]:

Այսպես, օրինակ, և’ ընդհանուր, և’ տարբերակված հոսքերի համար 10-րդ դասարանի «Եռանկյունաչափության տարրեր» թեմայի կրթական հիմնական խնդիրներից են՝

- Եռանկյունաչափական նույնությունների ու բանաձևերի արտածումների միջոցով ձևավորել ապացուցելու, ընդհանրացումներ կատարելու կարողություններ,
- Եռանկյունաչափական բանաձևերի արտածման, հավասարությունների ապացուցման և արտահայտությունների պարզեցումներ կատարելու միջոցով խթանել նկատելու, ապացուցելու և ապացուցման քայլերի կարճ հաջորդականություն գտնելու կարողություններ ու հմտություններ:

Ավագ դպրոցի հարահաշվի և մաթեմատիկական անալիզի 10-րդ դասարանի և՛ հումանիտար, և՛ բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի դասընթացներում տրամաբանության տարրերին վերաբերող նյութեր չեն ընդգրկված [20], [23]: 11-րդ դասարանի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի դասընթացում առկա է «Տրամաբանության տարրերը: Թվային հաջորդականություն, սահման» գլուխը [24, 38-73], որտեղ ընդգրկված են տրամաբանության տարրերին վերաբերող հետևյալ հասկացությունները՝ ասույթներ, դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը, փոփոխական պարունակող ասույթներ, Դե Մորգանի կանոնները, հետևություն, համարժեքություն, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: Իսկ նույն դասարանի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի դասընթացում առկա է «Տրամաբանության տարրերը» գլուխը [21, 50-79], որտեղ, բացի վերոհիշյալ հասկացություններից ընդգրկված են նաև գոյության և ընդհանրության քվանտորներ, դեդուկտիվ մտահանգում՝ բաժանման կանոն, բխեցման կանոն, հակադրության կանոն, փաստը կիրառելու կանոն, լրիվ ինդուկցիայի կանոն, բացառման կանոն, ինդուկտիվ մտահանգում՝ լրիվ և թերի ինդուկցիա, ապացուցում և հերքում, ապացուցման և հերքման հիմնական կանոնները՝ համադրման մեթոդ, հակասող ենթադրության մեթոդ, բացառման մեթոդ, Դիրիխլեյի մեթոդը, հակաօրինակ:

12-րդ դասարանի դասընթացի և՛ ընդհանուր ու հումանիտար, և՛ բնագիտամաթեմատիկական հոսքի դասընթացում տրամաբանության տարրերին նվիրված թեմաներ նույնպես չեն ընդգրկված, սակայն ներկայացված են բազմաթիվ խնդիրներ, որոնց պահանջում առկա է տրամաբանական տարբեր կառուցվածքային ձևեր ունեցող պնդումների ճշմարտային արժեքները որոշելու հարցադրում [22], [25]:

Ամփոփելով ՀՀ հանրակրթական գործող ծրագրերում (մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչներում, ծրագրերում և դասագրքերում) տրամաբանության տարրերի ընդգրկմանը վերաբերող վերլուծությունը, նկատում ենք, որ առկա է հետևյալ պատկերը.

ա) Վերջին տասնամյակում կրթական բոլոր աստիճաններում «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի համար գործածության երաշխավորված առարկայական ծրագրերում, չափորոշիչներում և դասագրքերում որոշակի համամասնությամբ, որպես բովանդակային գիծ, ներառվել են տրամաբանության տարրեր, որոնց ուսուցումն իրականացվել է ինչպես ինքնուրույն, այնպես էլ մաթեմատիկական նյութի հետ շաղկապված թեմաներով:

բ) Տրամաբանության տարրերի ուսուցման բովանդակային այդ գծի մեջ ակնհայտ խզում են առաջացրել 2011 թ. գործածության մեջ մտած 7-9-րդ դասարանների հանրահաշվի [95], [96] դասագրքերը և դրանց հարմարեցված առարկայական ծրագիրը [46], որոնցում տրամաբանության տարրերին վերաբերող թեմաներ իսպառ բացակայում են: Այդ նույն մոտեցումն է ցուցաբերված նաև համապատասխան ուսուցչի ձեռնարկում [14]: Արդյունքում ստեղծվել է մի իրավիճակ, երբ 1-6-րդ դասարաններում տրամաբանության տարրերի ուսուցման համար անհրաժեշտ հիմքերը հետևողականորեն ձևավորվում են, այնուհետև 7-9-րդ դասարաններում բովանդակային այդ բաղադրիչը հանրահաշվի դասընթացում ընդհատվում է և շարունակվում է միայն 10-12-րդ դասարաններում:

Միջին դպրոցում տրամաբանության տարրերի ուսուցման նկատմամբ ցուցաբերված այդ մոտեցումը ամենևին չի համապատասխանում Հանրակրթության պետական չափորոշչում ամրագրված պահանջներին: Հիմնարար նշանակություն ունեցող այդ նորմատիվ փաստաթղթում միջին դպրոցի համար որպես կրթության հիմնական նպատակ է նշվում *սովորողների բարձրակարգ, քննադատական մտածողության զարգացումը, լեզվամտածողության և մաթեմատիկական տրամաբանության հիմքերի ամրապնդումը* [44, կետ 27]: Դրան համապատասխան, ըստ այդ նույն փաստաթղթի, միջին դպրոցում «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառը պետք է նպատակաուղղված լինի սովորողների կողմից ինքնուրույն կշռադատություններ անելու, մտքի ճշգրտությունը կարևորելու ունակությունների, հիմնավոր դատողություններ կատարելու համար անհրաժեշտ գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների զարգացմանը [44, կետ 32]: Ներկայացված այդ պահանջների բավարարման արդյունավետ ուղին միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում տրամաբանական բաղադրիչի վերականգնումն է, հաշվի առնելով այդ բնագավառում վերջին տարիներին արդեն կուտակված բավականաչափ հարուստ հայրենական փորձը:

1.2.2. Հանրակրթական ծրագրերում տրամաբանության տարրերի ներառման ուսումնական և դաստիարակչական նշանակությունը

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տրամաբանության տարրերի ներառումը պայմանավորված է ոչ միայն մաթեմատիկական մտքերի տրամաբանական կառուցվածքով: Տրամաբանության տարրերը, նրանում օգտագործվող հասկացություններն ու գործողությունները, իրենց հերթին, արտահայտվում են հանրահաշվական բանաձևերի տեսքով: Իռլանդացի մաթեմատիկոս և փիլիսոփա Ջ. Բուլի (1815-1864) ստեղծած և նրա անունը կրող հանրահաշիվը նման արտահայտության բնական, պատմականորեն առաջին և փայլուն դրսևորումն է: Այդ պատճառով բնական էր, ինչպես որ պատմականորեն ձևավորվել է գիտության մեջ, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ևս տրամաբանության տարրերը դիտարկել նախ և առաջ հանրահաշվի դասընթացում: Այդ ուղղությամբ մեզանում, ինչպես ներկայացվեց 1-ին կետում, արդեն առկա է հարուստ փորձ: Դրա վկայություններն են, մասնավորապես, [63] և [21] դասագրքերը, որոնցում ընդգրկված տրամաբանության տարրերը կազմում են «Տրամաբանության հանրահաշիվ» առանձին բովանդակային գիծ: Հանրահաշվի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման շնորհիվ նոր հնարավորություններ են ստեղծվում կրթության բովանդակության ճանաչողական և կիրառական գործառույթները միասնաբար իրականացնելու համար: Դրա արդյունքում, մի կողմից, արդյունավետ լուծում են ստանում ներառարկայական ուսումնական մի շարք խնդիրներ, որոնք կապված են բուն մաթեմատիկական նյութի հիմնավոր յուրացման՝ մինչ այդ հանդիպող դժվարությունների հաղթահարման հետ, մյուս կողմից, նպաստավոր պայմաններ են ստեղծվում նաև սովորողների արժեքային համակարգի և արժեքային կողմնորոշման ձևավորման ու զարգացման համար: Ուսուցման գործընթացում սովորողների դաստիարակության և արժեքային համակարգի ձևավորման հարցերը մեթոդամանկավարժական գրականության մեջ ընդհանուր կողմերով լուսաբանված են [144]: Սակայն մեթոդամանկավարժական այն հարցերը, որոնք վերաբերում են տրամաբանության տարրերի ուսուցման կրթադաստիարակչական նշանակությանը, կարիք ունեն լրացուցիչ լուսաբանման: Այստեղ մենք կանդրադառնանք այդ հարցերին՝ կարևորելով դրանց ինչպես ուսումնական (առարկայի արդյունավետ ուսուցման), այնպես էլ դաստիարակչական (սովորողների համակողմանի զարգացման) տեսանկյունները:

ա) Ուսումնական նշանակությունը: Գիտամանկավարժական և ուսումնական գրականության մեջ հանրահաշվի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման մեթոդիկայի առաջին մշակողն ու իրականացնողը եղել է Հ. Ս. Միքայելյանը: 1999 թ. հրատարակված և ԿԳ նախարարության կողմից գործածության երաշխավորված նրա [65], [66, [67] դասագրքերն ու [69] ուսուցչի ձեռնարկը, առավել ևս դրանց հետագա լրամշակված վերահրատարակումները [59], [60], [61], [62], [63], [64], [70] իրենց մեջ կրում էին ավանդականից տարբեր նոր մոտեցումներ, որոնց համակողմանի հետազոտությունը հնարավորություն կտա բացահայտել տրամաբանության տարրերը հանրահաշվական ուսումնական նյութի մեջ ներառվելու կրթական նշանակությունը:

Հանրահաշվի նշված դասընթացի կարևորագույն գիտամեթոդական առանձնահատկություններից մեկն այն էր, որ մեկնելով առարկայի նպատակային պահանջներից, տրամաբանական ապարատը ներըմբռնողական մակարդակից տեղափոխվել է տեսանելի բովանդակային հարթություն՝ «Տրամաբանության հանրահաշիվը» ամբողջական մի թեմայի ներմուծումով և ողջ դասընթացն ընդգրկող դեդուկտիվ մեթոդի առկայությամբ, ապացուցողական հստակ կառույցով: Մինչ այդ, նման գործառույթ իրականացվում էր միայն երկրաչափության դասընթացում: Սակայն հանրահաշվի նոր դասընթացի կառույցը ցույց է տալիս, որ նրանում գործող տրամաբանական ձևերը նույնիսկ ավելի պարզ, ընկալելի և զուլալ են, քան երկրաչափության մեջ: Ավելին՝ դասընթացի հիմքում ընկած տրամաբանական կառույցը հնարավորություն է տալիս նրա միջոցով իրականացնել սովորողների տրամաբանական մտածողության ձևավորման ու զարգացման ամբողջական գործառույթ [68, 22]: Է. Ի. Այվազյանը գրում է. «Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի կարևորագույն առանձնահատկություններից մեկը նրա հատուկ ուղղվածությունն է դեպի սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության ձևավորումը: Այդ խնդրի լուծմամբ զբաղվել են բոլոր ժամանակներում, սակայն խնդրո առարկա դասընթացում գտնվել է այդ հարցի խելամիտ լուծում. 7-9-րդ դասարանների սովորողներին ինքնանպատակ տրամաբանություն սովորեցնել պետք չէ, տրամաբանությունը պետք է եղած բովանդակային մաթեմատիկական (ոչ միայն) նյութը ավելի լավ յուրացնելու համար: «Տրամաբանության հանրահաշիվը» ոչ ավանդական թեման հենց կոչված է բացահայտելու հանրահաշվական բանաձևերի հիմքում ընկած տրամաբանական կառույցները և դրանով նպաստելու այդ բանաձևերի ուսուցման մակարդակի բարձրացմանը: Այն նվիրված է՝ 1) հանրահաշվական բանաձևերի լեզվի ճշգրտմանը. ի՞նչ է հավասարում, անհավասարում, հավասարման կամ անհավասարման լուծում, նույնություն, բանաձևերի համախումբ կամ տրամաբանական գումար, բանաձևերի համակարգ կամ տրամաբանական արտադրյալ, ոչ խիստ և կրկնակի անհավասարումներ, 2) հանրահաշվական բանաձևերի հետ կատարվող տրամաբանական գործողությունների (գումար, արտադրյալ, ժխտում) և այդ ընթացքում կիրառվող մտածողության այլ հնարքների և մաթեմատիկական ճաշակի ձևավորման հարցերը: Հետևաբար այն բանից, թե սովորողները ինչպես կյուրացնեն այս տեսական-հանրահաշվական նյութը, էապես կախված է ինչպես մաթեմատիկական, այնպես էլ հարակից առարկաների ուսուցման հաջողությունը»: Է. Ի. Այվազյանը վկայակոչում է նաև հոլանդացի հայտնի մանկավարժ գիտնական *Գ. Ֆրոյդենտալի* հետևյալ մտքերը, որոնք կարծես թե գրված են հանրահաշվի նոր դասընթացի համար. «Դպրոցականը պետք է սովորի ընկալել և գրառել հանրահաշվական բանաձևերն այնպես, ինչպես նա հասկանում է մայրենի լեզուն կամ՝ նոտաները երաժշտությունում: Այս նպատակին հասնելը, ինչպես հայտնի է ցանկացած ուսուցչի, շատ ջանքեր է պահանջում: Գոյություն ունեն դասագրքեր, որոնք լիովին գիտակցաբար խթանում են հանրահաշվական բանաձևերի ուսումնասիրման գործընթացը (կան նաև ուրիշները, որոնք կարծես չեն էլ նկատում այդ խնդիրը): Դրանք, առաջին հերթին, այն դասագրքերն են, որոնք ուսուցանում են կատարյալ մաթեմատիկական համակարգով: Դա բնական է, որովհետև նման համակարգի կառուցման համար պետք է օգտագործել ողջ դիդակտիկան, և եթե համակարգը մեկ անգամ սահմանված է, ապա դիդակտիկա արդեն պետք չէ» [8, 48-49]:

Նշենք ևս մեկ հանգամանք, որը կարևոր է կրթական ծրագրերում տրամաբանական նյութի ներառման «տեղը» որոշելու առումով: Խոսք վերաբերում է Վ. Ի. Ռիժիկի այն նկատառմանը, որ տրամաբանության տարրերի՝ մաթեմատիկական հենքից կտրված շարադրանքը չի ընկալվում սովորողների կողմից [141, 221-238]: Այդ տեսանկյունից էլ հանրահաշվի դասընթացում նշված նյութի շարադրանքը խարսխված է մաթեմատիկական նյութի վրա: Նման մոտեցումը մի կողմից իրականացնում է տրամաբանության տարրերի հստակ և խորը ընկալում, մյուս կողմից նպաստում է մաթեմատիկական մի շարք առանցքային հասկացությունների տիրապետմանը: Այս շարքում կարելի է առանձնացնել հավասարման և անհավասարման լուծման, անհավասարության, ± նշանի, միջակայքերի, համակարգերի և համախմբերի, հետևության և համարժեքության, ժխտման և այլ հասկացություններ:

Հանրահաշվի դասընթացում տրամաբանության որոշ թեմաների ներառումը հնարավորություն է տալիս հստակեցնելու սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության հիմքում ընկած մի շարք կարևոր հասկացություններ և ավելի խորացնելու հայոց լեզվի ու հանրահաշվի լեզվի միջև զուգահեռների անցկացումը: Ինչպես հայոց լեզվում, հանրահաշվում նույնպես պարզ նախադասություններից «և», «կամ», «ոչ» և այլ շաղկապների օգնությամբ ստացվում են բարդ նախադասությունները: Նույն կերպ է կատարվում հանրահաշվական նախադասությունների՝ բանաձևերի ստացումը պարզ նախադասություններից՝ տրամաբանական կապերի միջոցով» [48, 32]: Այդ կապակցությամբ Հ. Ս. Միքայելյանը կարևորում է առօրյա կյանքին վերաբերող օրինակների զուգորդումը մաթեմատիկական բնույթի օրինակների հետ, հավասարություն-հավասարում և անհավասարություն-անհավասարում զուգահեռների անցկացումը, տրամաբանական գումարին նվիրված դասը անցկացնելիս $\pm a$ գրության վրա հատուկ ուշադրություն դարձնելը (անհրաժեշտ է հաշվի առնել, որ մաթեմատիկայում մեծ տարածում ունեցող այս գրառումը սովորողների ճնշող մեծամասնությունը չի հասկանում: Մինչդեռ տրամաբանական գումարի գաղափարի դիտարկման շնորհիվ լիովին հասկանալի է դառնում այն) [68, 19]: Ասվածը վերաբերում է նաև ոչ խիստ անհավասարություններին և ոչ խիստ անհավասարումներին: $a \leq b$ կարևորագույն բանաձևի իմաստը շատ աշակերտներ չեն յուրացնում: Նախ անհրաժեշտ է սովորողին հասկացնել, որ նշված բանաձևը ներմուծվում է «մեծ չէ» հարաբերությունը հանրահաշվորեն գրառելու համար: Այնուհետև՝ պետք է կատարել բանաձևի ճշմարիտ լինելու խնդրի պարզաբանումը: Տրամաբանական գումարի գաղափարի առկայությունը հնարավորություն է տալիս հստակորեն իրականացնել այս խնդիրը: Հարկ է հիշել և հաշվի առնել նաև, որ այդ բանաձևի համար նախկինում գործածվող «անհավասարություն» անվանումն իր հերթին սովորողի մոտ առաջացնում է յուրացումն արգելակող հոգեբանական պատնեշ. ինչու՞, օրինակ, $1 \leq 1$ բանաձևը անվանենք անհավասարություն, երբ այն $1=1$ հավասարության և $1<1$ բանաձևի տրամաբանական գումարն է: Իսկ բանաձևերի տրամաբանական արտադրյալի գաղափարի դիտարկումն օգնում է հասնելու նրան, որ սովորողները հստակ յուրացնեն թվային միջակայքերը, որոնք անհրաժեշտ են հավասարումների և անհավասարումների համակարգերի ու համախմբերի լուծումները պատկերավոր արտահայտելու համար:

Տրամաբանական գումարի և արտադրյալի ներմուծումը հնարավորություն է տալիս լուծելու հետևյալ կարևոր մանկավարժամեթոդական խնդիրները, որոնք փոխպայմանավորված են իրարով և լուծվում են համալիր եղանակով:

ա. Նպաստում է մայրենի լեզվի իմացությանը:

բ. Թույլ է տալիս դիտարկելու և լուծելու կիրառական ոլորտի մի շարք խնդիրներ:

գ. Օգնում է ավանդական մաթեմատիկական հասկացությունների գիտակցական ըմբռնմանը:

Պետք է նկատել, որ սովորողները տրամաբանական արտադրյալին վերաբերող նյութը ավելի հեշտ են հասկանում, քան տրամաբանական գումարին նվիրված նյութը: Դրան մասնավորապես նպաստում է այն, որ նախկին դասընթացներում, որոնցով սովորել է մանկավարժների ներկա սերունդը, համախումբը բացակայում էր, իսկ տրամաբանական արտադրյալի հիմքը կազմող համակարգերը լայնորեն ներգրավվում էին հանրահաշվի դասընթացի մեջ: Տրամաբանական արտադրյալի յուրացման մատչելիությունը կապված է նաև նրա կիրառական ոլորտի բազմազանության մեջ: Հանրահաշվական դասընթացում ավանդաբար դիտարկվող տեքստային խնդիրները, կարելի է ասել՝ առանց բացառության, իրենցից ներկայացնում էին ինչ-որ պայմանների կոնյունկցիա, որոնց հանրահաշվական մոդելավորումը հանգում է բանաձևերի համակարգի:

Հայոց լեզվի և հանրահաշվի միջառարկայական կապերի խորացմանը, սովորողների լեզվական մտածողության զարգացմանը մեծապես նպաստում են լեզվական բովանդակությամբ վարժությունները, վարժություններ, որոնք չեն լուծվում մաթեմատիկայի ավանդական մեթոդներով: Նման վարժությունները, ըստ էության, պարզագույն իրադրությունների մաթեմատիկական մոդելավորումներ են, իրադրություններ, որոնց ձևակերպումը կատարվում է հանրահաշվական լեզվի և հայոց լեզվի միջև գոյություն ունեցող օրինաչափությունների համադրման հիման վրա: Դրանց յուրացումը հնարավորություն կտա հետագայում հասկանալու և իրագործելու ավելի բարդ իրադրությունների մաթեմատիկական մոդելավորումներ, մասնավորապես՝ լուծելու զանազան բնույթի տեքստային խնդիրներ [68, 37-38]:

Սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության հստակեցման մեջ շատ մեծ է տրամաբանական համարժեքության դերը: Միևնույն փոփոխականը պարունակող երկու բանաձևեր անվանում են համարժեք, եթե նրանք ունեն միևնույն լուծումները: Այս ընդհանուր ձևակերպման մեջ են մտնում ինչպես հավասարումների, այնպես էլ անհավասարումների ու դրանց համակարգերի և համախմբերի համարժեքության հասկացությունները: Համարժեքության անդրադարձելիության, համաչափության և փոխանցելիության հատկությունների կողքին մեծ նշանակություն ունի համակարգերի և համախմբերի համարժեքությունների դիտարկումը, որը մեծապես նպաստում է հանրահաշվական այդ կարևորագույն նյութի գիտակցական ըմբռնմանը: Ընդ որում՝ եթե նշված օրենքներն ունեն ինտուիտիվ ընկալման պարզություն և նրանց կիրառությունը շատ բնական է՝ անգամ առանց այդ օրենքների բացահայտ ձևակերպման, ապա նույնը չի կարելի ասել ճշմարիտ կամ կեղծ բաղադրիչներով համակարգերի և համախմբերի համար (սովորողների մեծ մասը գլուխ չի հանում նույնիսկ ($0<1$ և $x<2$), ($0>1$ և $x<2$) տիպի պարզագույն համակարգերից): Բանն այն է, որ բնական լեզվի միջոցները ոչ միշտ են բավարար մաթեմատիկական բանաձևերի բովանդակությունը ճշգրիտ արտահայտելու և միանշանակ ընկալելու համար: Բնական լեզվով արտահայտված մաթեմատիկական տեքստի ճշգրտությունն ապահովելու համար անհրաժեշտ է կատարել այդ տեքստի տրամաբանական կառուցվածքին համապատասխանող որոշակի ֆորմալացում: Դրա շնորհիվ տեքստն ստանում է, ինչպես ընդունված է ասել, հանրահաշվակերպ ձևակերպում, որի նկատմամբ արդեն կիրառելի են համարժեքության օրենքները, և այդ դեպքում խնդրի լուծումը հանգում է հիմնավոր և ճիշտ պատասխանի:

Ֆորմալացման միջոցով ոչ միայն պարզ և ընկալելի տեսք են ստանում «և», «կամ», «եթե…, ապա…» շաղկապներ պարունակող բարդ դատողությունների կառուցվածքները (դրանք ներկայացվում են p&q, pvq, $p \rightarrow q$ տեսքի բանաձևերով), այլև, որ ավելի կարևոր է, հեշտությամբ են կանխվում դրանց ժխտումները կատարելու և ստացված բանաձևերի միջև համարժեքություններ հաստատելու գործողություններում թույլ տրվող սխալները: Իսկ այդպիսի գործողություններ կատարելու անհրաժեշտություն առաջանում է հաճախ, ինչպես օրինակ՝ տրված պնդման համար հակադիր և հակադարձ պնդումներ ձևակերպելիս, հակասող ենթադրությամբ ապացուցումներ կատարելիս և այլն: Առանց տրամաբանական որոշակի գիտելիքների, այդ գործողություններում թույլ տրվող սխալներն անհամեմատ շատ կլինեին, եթե գործ ենք ունենում փոփոխականներ պարունակող դատողությունների հետ, որոնցում առկա են գոյության կամ ընդհանրության քվանտորներ, իսկ խնդրի կամ թեորեմի ձևակերպման մեջ մասնակցում են «այն և միայն այն դեպքում» կամ «անհրաժեշտ է և բավարար» բառակապակցությունները: Այդ և նմանատիպ բազմաթիվ այլ խնդիրներ զգալիորեն հեշտ են լուծվում, երբ նախ ձևայնացվում է դատողությունների կառուցվածքը, և այնուհետև նրա նկատմամբ կիրառվում այս կամ այն կանոնը:

Այսպիսով, տրամաբանության տարրերի ուսուցումը կարևորվում է մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի, ներառարկայական մանկավարժական խնդիրներին արդյունավետ լուծումներ տալու տեսանկյունից: Եվ դա ծառայում է ավելի ընդգրկուն նպատակի՝ սովորողների լեզվական-տրամաբանական կարողությունների զարգացմանը, որը կարելի է դիտել որպես մաթեմատիկատրամաբանական կրթական մշակույթի կարևոր և անբաժան բաղադրիչ:

բ) Դաստիարակչական նշանակությունը: Մաթեմատիկական կրթությունն ունի արժեքների ձևավորման մեծ ներուժ: Այդ ներուժը լայնորեն դրսևորվում է ինչպես մաթեմատիկայի համար ավանդական՝ ճշմարտական, հոգեկան և գեղագիտական, այնպես էլ ոչ ավանդական՝ բարոյական, ազգային, սոցիալական, համամարդկային արժեքների ձևավորման գործընթացներում: Մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառումը լրացուցիչ լիցք է հաղորդում մաթեմատիկայի դասավանդման միջոցով արժեքների ձևավորման գործընթացին և այն դարձնում ամբողջական:

Բարոյական արժեքներ: Մեծ է մաթեմատիկայի կրթական ներուժը բարոյական արժեքների ձևավորման հարցում [57]: Տրամաբանության տարրերի ներմուծումը ստեղծում է այդ արժեքների ձևավորման լրացուցիչ հնարավորություններ: Այդպիսիք են, առաջին հերթին, տրամաբանության տարրերին նվիրված տրամաբանա-մաթեմատիկական նյութը (այն [63]-ում ներկայացվում է որպես տրամաբանության հանրահաշիվ) ուղեկցող վարժությունները: Ցուցադրենք ասվածը կոնկրետ մեկ թեմայի դիտարկմամբ:

Հանրահայտ է, որ սովորողներին առանձնակի դժվարություն են հարուցում փոփոխական պարունակող դատողությունները: Դրանց հետ տրամաբանական գործողությունների՝ գումարման, բազմապատկման, ժխտման կատարումը հեշտությամբ չի ընկալվում աշակերտների մի զգալի մասի կողմից: Այդ դժվարությունները հաջողությամբ կարելի է հաղթահարել առօրեական օրինակների և վարժությունների ներգրավման միջոցով: [63]-ում նման վարժությունները, որոնք խմբավորվում են «Կիրառական» բաժնում, ներառում են բարոյական ամենատարբեր արժեքներ: *Սիրո* արժեքի վերաբերյալ, օրինակ, բերվում են այսպիսի վարժություններ:

551. Նշեք փոփոխականի արժեք, որի դեպքում դատողությունը ճշմարիտ է, և փոփոխականի արժեք, որի դեպքում դատողությունը կեղծ է.

գ. Աղջիկը սիրում է իր մայրիկին:

է. Նա սիրում է հայրենիքը:

ը. Նա իմ սիրելի գրողն է:

թ. Նա իմ սիրելի նկարիչն է:

Այստեղ գ և է խնդիրները պարունակում են մեկական փոփոխական. առաջինում փոփոխականը աղջիկն է, երկրորդում՝ նա-ն: Աշակերտները հեշտությամբ են բերում փոփոխականների այնպիսի օրինակներ, որոնց դեպքում դատողությունները ընդունում են ճշմարիտ արժեքներ: Մյուս երկու՝ ը և թ խնդիրները պարունակում են երկուական փոփոխականներ: Առաջինում, օրինակ, փոփոխականներն են նա-ն և գրողը: Բնականաբար, այստեղ այդ փոփոխականների արժեքները, որոնց դեպքում դատողությունը դառնում է ճշմարիտ կամ կեղծ, պայմանավորված են իրար հետ. աշակերտներից մեկը սիրում է գրողներից մեկին, մյուսը կարող է չսիրել և այլն:

Դիտարկենք հաջորդ վարժությունը, որն ավելի դժվար է. նրանում առաջադրված խնդիրները պարունակում են ընդհանրության և գոյության քվանտորներ:

555. Ճշմարի՞տ է, թե՞ կեղծ դատողությունը.

ա. Ցանկացած մարդ սիրում է իր ծնողներին,

ե. աշակերտը սիրում է իր ուսուցչին,

գ. կա աշակերտ, որը ատում է դպրոցը:

Այստեղ նշենք, որ ա և գ առաջադրանքներում քվանտորները մասնակցում են անմիջականորեն. առաջինում ընդհանրության քվանտորն է «ցանկացած» բառը, իսկ երկրորդում գոյության քվանտորն է «կա» բառը: Աշակերտներին պետք է սովորեցնել, որ նախադասության մեջ անորոշ ենթական ենթադրում է ընդհանրության քվանտորի առկայություն: Օրինակ, երբ մենք ասում ենք, թե «ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին», ապա նկատի ունենք, որ այդ փաստը տեղի ունի ցանկացած ուղղանկյուն եռանկյան համար: Այսինքն, տվյալ դատողության մեջ անբացահայտ կերպով պարունակում է ընդհանրության քվանտորը: Հետևաբար, նաև ե նախադասությունը պետք է հասկանալ հետևյալ կերպ. «ցանկացած աշակերտը սիրում է գիրքը»:

Հետևյալ վարժությունները, բացի արժեքային խնդիրներից, լուծում են նաև նորմատիվային հարցեր, որոնց ավանդաբար հանրակրթությունը ընդհանրապես չի անդրադառնում:

556. Որոշեք դատողության ճշմարտային արժեքը.

ա. եթե մեկին սիրես, ապա նա էլ քեզ կսիրի,

բ. եթե մեկին ատես, ապա նա էլ քեզ կատի:

613. Որոշեք դատողության ճշմարտային արժեքը.

ա. եթե մեկին չսիրես, ապա նա էլ քեզ չի սիրի:

Վարժությունների հաջորդ խումբը թույլ է տալիս գոյության և ընդհանրության քվանտորները փոխարինել մեկը մյուսով, ինչը միջին դպրոցի շրջանակներում շատ դժվար է իրականացնել զուտ մաթեմատիկական օրինակների վրա:

557. Դատողությունը գրառեք «ցանկացած» արտահայտության միջոցով և որոշեք նրա ճշմարտային արժեքը.

գ. կա մարդ, որը չի սիրում ավտոմեքենա վարել,

դ. գոյություն ունի մարդ, որը վախենում է վերելակ նստելուց:

558. Դատողությունը գրառեք «ցանկացած» արտահայտության միջոցով և որոշեք նրա ճշմարտային արժեքը.

ա. ամեն մարդ սիրում է ճանապարհորդել,

գ. ամեն մարդ սիրում է աշխատել:

Նմանատիպ վարժություններ են բերվում նաև բարու, հարգանքի և բարոյական այլ արժեքների վերաբերյալ: Եթե ծրագրային նյութի մաթեմատիկական բաժինը համեմատաբար դժվար է ընկալվում և անհետաքրքիր ու ձանձրալի կարող է լինել աշակերտների համար, ապա բերված և բարոյական այլ արժեքներին նվիրված վարժությունները և դրանց լուծումները աշխուժացնում են դասը, կենդանի հետաքրքրություն առաջացնում նրա նկատմամբ: Միաժամանակ, դրանք ուսուցչին հնարավորություն են տալիս խոսակցություն վարել բարու և չարի, սիրո և ատելության, հարգանքի և արժանապատվության, ինչպես նաև բարոյական այլ արժեքների մասին: Նման բարոյական խոսակցությունները և զրույցները, որ հենված են դասագրքային նյութի վրա, ունեն սովորողների կողմից բնական ընկալման առանձնահատկություն և չեն դիտվում որպես «իրենց գլխին կարդացվող քարոզներ»:

Ա. Ավագյանի [12] աշխատանքում դիտարկվում է մաթեմատիկական գործունեության կապը *հիշողության* զարգացման խնդրի հետ: Ցույց է տրվում, որ նման գործունեությունը մեծապես նպաստում է սովորողների հիշողության հետ կապված գործընթացների խնդրի արդյունավետ իրականացմանը: Նույն նպատակին հաջողությամբ ծառայում է նաև տրամաբանության տարրերի ուսուցումը: Սակայն վերջինս հնարավորություն է տալիս փաստերի հիշողությունը դարձնել ավելի արդյունավետ, որովհետև թույլ է տալիս դրանք դարձնել համակարգված, տրամաբանորեն մշակված, ինչը լրացուցիչ խթան է հիշողության համար: Այս տեսակետից կարևոր քայլ պետք է համարել տրամաբանական շաղկապների, առաջին հերթին տրամաբանական գումարի և արտադրյալի հասկացությունների ներմուծումը և դրանց մաթեմատիկական մեկնաբանությունները որպես համակարգ և համախումբ: Նման մոտեցումը նախ հնարավորություն է տալիս նորովի բացահայտել մաթեմատիկայի դասընթացի համար ավանդական և հիմնարար հասկացություններից մեկը՝ համակարգի հասկացությունը և ավելի ընկալելի դարձնել դասընթացում նրա բազմազան կիրառությունները: Այնուհետև, դա թույլ է տալիս ներմուծել նաև տրամաբանական գումարի, և նրա միջոցով՝ համախմբի հասկացությունը [62]: Այդ հասկացությունը պակաս նշանակություն չունի հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացի համար, քան համակարգի հասկացությունը: Ինչպես վերևում արդեն նշել ենք, առանց դրա իմացության հնարավոր չէ ըստ էության հասկանալ այնպիսի հիմնարար գաղափարներ, ինպիսիք են ոչ խիստ անհավասարությունները և անհավասարումները, $\pm$ նշանը և այն պարունակող արտահայտությունները, զանազան միջակայքերը և մաթեմատիկայի դասընթացի այլ առանցքային գաղափարներ: Այդ պատճառով նշված գաղափարների ուսուցումը այնպիսի դասագրքերով, որտեղ չի ներմուծվում համախմբի հասկացությունը, կրում է ձևական, սերտողական բնույթ [68, 166-167]: Հասկանալի է, որ սերտողական ուսուցմամբ ձեռք բերված գիտելիքը երկար չի մնում մարդու հիշողության մեջ և հեշտությամբ մոռացվում է: Ավելին, զուտ սերտողությամբ գիտելիքների ձեռքբերման դեպքում բացակայում են այն հիմքերը, որոնց միջոցով իմաստավորվում և արդարացվում են այդ գիտելիքների յուրացումը, իսկ այդ հանգամանքը չի կարող նպաստավոր ազդեցություն ունենալ սովորողի բարոյական նկարագրի ձևավորման վրա:

Քննարկենք նաև *երջանկության* բարոյական արժեքի ձևավորման և զարգացման գործում մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման նշանակությունը: Երջանկության բարոյական արժեքի վերաբերյալ ընդունված մոտեցումներից մեկում երջանկության հզոր բաղադրիչներից մեկը համարվում է *հոգեկան առողջությունը* [57, 151-170]: Վերջինս առաջին հերթին նշանակում է առողջ, տրամաբանական մտածողության, տրամաբանված, հիմնավորված և փաստարկված խոսքի առկայություն, ինչը տալիս է հենց տրամաբանության օրենքների ներգրավումը խոսքի մեջ: Նման մտածողությունը և խոսքը մարդուն թույլ է տալիս մտածել հստակ, տրամաբանորեն, անել ընդհանրացումներ, մասնավորեցումներ, համեմատություններ, մտահանգումներ, կիրառել մտքի ճշմարտության հաստատման և հերքման, մտածողության այլ հնարքներ, չվախենալ բանավեճից, հաջողությամբ պաշտպանել սեփական տեսակետը, համոզել դիմացինին, խուսափել սխալներից, չխորացնել և ընդունել սեփական սխալը, հայտնաբերել սխալ տեղեկությունը և դատողությունը: Անտրամաբանական մտածողությունը հանգեցնում է ավելորդ լարման և ներվային արգելակումների:

Գեղագիտական արժեքներ: Գեղագիտական արժեքներին և գեղագիտական դաստիարակությանը կարևոր տեղ են հատկացրել դեռևս անտիկ շրջանի հույները իրենց կրթական համակարգում: Հելլենիզմի շրջանում ուսումնական ոլորտի մեջ ներառվող առարկաները ընդհանրապես անվանվեցին յոթ ազատ արվեստներ: Ժամանակակից մանկավարժության հայրը՝ *Յա. Կոմենսկին* իր Մեծ Դիդակտիկայում, խոսելով ուսուցանելու ուղիների մասին, գրում է. *«Գիտություններից ավելի պետք է զբաղվել արվեստով»* [33, 274]:

Ժամանակակից ճանաչված ռուս նկարիչ և մանկավարժ *Մ. Բ. Նեմենսկին* գտնում է, որ գեղագիտական դաստիարակության համակարգը նախ և առաջ պետք է լինի միասնական, միավորի բոլոր առարկաները, արտադասարանական պարապմունքները, դպրոցականի հասարակական ողջ կյանքը, որտեղ պարապմունքի յուրաքանչյուր տեսակ գեղագիտական մշակույթի և անձնավորության ձևավորման գործում ունի իր խնդիրը [129]: Հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսումնական բնագավառի առարկաները կարևոր տեղ են զբաղեցնում ուսումնական առարկաների ցանկում և, միաժամանակ, այն ունի գեղագիտական արժեքների ձևավորման մեծ ներուժ:

Ընդհանրապես, մաթեմատիկայի գեղագիտական բնույթի հարցով զբաղվել են անցյալի և ներկայի խոշորագույն մաթեմատիկոսներ *Ժ. Ադամարը, Գ. Բիրգհոֆը, Գ. Վայլը, Ռ. Կուրանտը, Ա. Պուանկարեն* և ուրիշներ [104], [106], [111], [123], [135]: Որպես մեթոդական հետազոտության առարկա մաթեմատիկայի ուսուցման ընթացքում սովորողների գեղագիտական դաստիարակության խնդիրը համակողմանիորեն ուսումնասիրել են *Վ. Լ. Մինկովսկին, Ս. Ի. Շոխոր-Տրոցկին, Գ. Ի. Սարանցևը, Ն. Վ. Գուսևան, Մ. Ի. Ռոդիոնովը, Ն. Ի. Ֆիրստովան, Ե. Վ. Լիսկինան, Օ. Ա. Կոբալիան, Յու. Մ. Ռոմանենկոն* և ուրիշներ [128], [157], [143], [115], [136], [151], [125], [120], [137]: Հանգամանորեն ուսումնասիրվել է մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով սովորողների և ապագա ուսուցիչների գեղագիտական արժեքների ձևավորման հարցը, գրվել են բազմաթիվ դիսերտացիոն աշխատանքներ: Այսպես, *Ն. Վ. Գուսևան* համակողմանիորեն ուսումնասիրել և բացահայտել է դպրոցական մաթեմատիկայի գեղագիտական ներուժի տեսական և մեթոդական հիմունքները [115], *Ն. Ի. Ֆիրստովան* հետազոտել է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով սովորողների գեղագիտական դաստիարակության խնդիրը [151], *Ե. Վ. Լիսկինան* ուսումնասիրել է համանման հարցերի լուծման ճանապարհները մաթեմատիկայի ապագա ուսուցիչների պատրաստման համակարգում [125], *Յու. Մ. Ռոմանենկոն* զբաղվել է հարցի փիլիսոփայական ասպեկտներով [137]:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական արժեքների ձևավորման խնդրի լուծման համար հիմք են հանդիսանում մաթեմատիկայի և գեղագիտական արժեքների միջև առկա խորքային կապերը, որոնք արտաքին դրսևորում են ստանում երաժշտության, նկարչության, ճարտարապետության և արվեստի այլ բնագավառներում մաթեմատիկայի լայն կիրառություններով: Մյուս կողմից, մաթեմատիկան ավելի, քան գիտության որևէ այլ բնագավառ, բավարարում է գիտական գեղեցիկին ներկայացվող պահանջներին [115]: Ավելին, մարդկային խոսքի այնպիսի կարևորագույն տարրեր, ինչպիսիք հիմնավորվածությունն է, տրամաբանական խստությունը և ապացուցվածությունը, իրենց լիարժեք դրսևորումը ստանում են մաթեմատիկայում, ինչը որոշ գիտնականների թույլ է տվել մաթեմատիկան անվանել ապացուցումների արվեստ (Պոլ Լոկհարդ):

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտական տարրի բացահատումը ոչ միայն նպաստում է սովորողի գեղագիտական ունակությունների զարգացմանը, այլև թույլ է տալիս ավելի արդյունավետ դարձնել բուն մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը: Օրինակ, սովորողի կամային որակները, մասնավորապես՝ տոկունությունը, լավագույնս դրսևորվում է մաթեմատիկական նյութի գեղագիտական բաղադրիչի առկայության դեպքում [71], [74, 26-45]:

Մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառումը շոշափելիորեն մեծացնում է գեղագիտական արժեքների ձևավորմանը նպաստող մաթեմատիկայի կրթական ներուժը: Ընդ որում, խոսքը վերաբերում է ոչ միայն և ոչ այնքան բուն տրամաբանության հանրահաշվի միջոցով գեղագիտական արժեքներ ձևավորման լրացուցիչ հնարավորությունների ստեղծմանը, այլ տրամաբանության տարրերի ներգրավման միջոցով մաթեմատիկական ողջ նյութի շարադրման գեղագիտական գրավչության մեծացմանը:

Նախ կանգ առնենք տրամաբանության հանրահաշում ընդգրկված նյութի գեղագիտական գրավչության խնդրի վրա: Այստեղ տեսական նյութի շարադրման մեջ դրսևորվում են գիտական գեղեցիկի համարյա բոլոր օբյեկտիվ հատկանիշները, իսկ գործնական՝ վարժությունների և խնդիրների համակարգը հնարավորություն է տալիս ներգրավել նաև գիտական գեղեցիկի մի շարք սուբյեկտիվ հատկանիշներ:

Գիտական գեղեցիկի կարևորագույն օբյեկտիվ հատկանիշներից մեկը *տրամաբանական խստությունն* է: Եթե հաշվի առնենք, որ առանց տրամաբանության տարրերի ներգրավման գրեթե անհնար է ապահովել մաթեմատիկական նյութի շարադրման տրամաբանական խստությունը, ապա պարզ է դառնում տրամաբանության հանրահաշվի դերը գիտական գեղեցիկի այս հատկանիշի ձևավորման խնդրում: Ավելացնենք նաև, որ ամերիկյան հայտնի մաթեմատիկոս և մանկավարժ Պոլ Լոկհարդը մաթեմատիկան անվանում է ապացուցումների արվեստ: Իսկ մաթեմատիկական ապացուցումը չի կարող խստորեն իրագործվել առանց տրամաբանական հիմնավորվածության: Հետևաբար, տրամաբանական խստությունը մաթեմատիկայի գեղագիտական էությունը արտահայտող ամենակարևոր հատկանիշն է, և նրա լիարժեք դրսևորման գործում անգնահատելի է տրամաբանության տարրերի կիրառությունը և, ուրեմն, ներառումը մաթեմատիկայի դասընթացում:

Ընդհանրապես, տրամաբանական խստության գեղագիտական հատկանիշը մեծ դեր է խաղում տրամաբանության հանրահաշվի ողջ նյութի գեղագիտական գրավչության մեջ: Դա առանձնապես երևում է բանաձևերի ժխտմանը նվիրված նյութի շարադրանքում: Վերցնենք թեկուզ և այսպիսի պազագույն օրինակ: Աշակերտներին (թեկուզ և ավագ դպրոցում) ուղղեք հետևյալ հարցադրումը. ո՞րն է «Դասարանի բոլոր աշակերտները գերազանցիկ են» դատողության ժխտումը: Պատասխանը ըստ նրանց ակնհայտ է. աշակերտները «են» մասնիկը փոխարինում են «չեն»-ով. «Դասարանի բոլոր աշակերտները գերազանցիկ չեն»: Կենցաղային նման պարզագույն մակարդակով կատավող այս սխալը ցույց է տալիս խնդրի պարզաբանման կարևորությունը, ինչը անհնար է իրականացնել առանց տրամաբանական գիտելիքների կիրառության:

Գիտական գեղեցիկի տրամաբանական խստության հատկանիշը լայնորեն դրսևորվում է նաև ավագ դպրոցում ապացուցման մաթեմատիկական մեթոդների, մասնավորապես՝ ինդուկցիային և դեդուկցիային նվիրված նյութերի ուսուցման ընթացքում: Եթե միջին դպրոցում լայնորեն դրսևորվում է թերի ինդուկցիան՝ որպես հիմնավորման եղանակ, ապա ավագ դպրոցում աշակերտը հասնում է գեղագիտականի նոր ընկալման, շնորհիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի կիրառության: Այն հնարավորություն է տալիս բացահայտել գիտական գեղեցիկի տրամաբանական խստության հատկանիշի նոր հորիզոններ և, հետևաբար, կարելի է դիտել որպես որակապես նոր քայլ աշակերտի գեղագիտական ճաշակի բարձրացման խնդրում: Նույնը կարելի է ասել նաև ապացուցման դեդուկտիվ մեթոդի մասին:

Հանրահայտ է, որ գիտական գեղեցիկի այնպիսի օբյեկտիվ հատկանիշ, ինչպիսին *համաչափությունն* է, լանորեն դրսևորվում է բնության ամենատարբեր առարկաների և երևույթների, գիտության տարբեր բնագավառների, արվեստի և գրականության մեջ [57]: Պարզվում է, որ այդ հատկանիշով օժտված են նաև մտածողության, նրա հիմքը հանդիսացող տրամաբանության շատ օրինաչափություններ: Վերցնենք թեկուզ համարժեքության առնչությունը: Տրամաբանության հանրահաշվում բանաձևերի համարժեքության հասկացությունը խարսխված է մաթեմատիկական նյութի հենքի վրա, և այն սահմանվում է մեկ փոփոխականով բանաձևերի համար. միևնույն՝ մեկ փոփոխականով երկու բանաձևեր կոչվում են համարժեք, եթե նրանք ունեն միևնույն լուծումները: Պարզվում է, որ բանաձևերի համարժեքությունը, որ ընկած է հավասարումների և անհավասարումների լուծման հիմքում, օժտված է մի շարք հատկություններով, այդ թվում՝ համաչափության հատկությամբ: Հետևաբար, համաչափության հատկությունը ընկած է նաև տրամաբանական մտածողության հիմքում, իսկ տրամաբանության ուսուցումը մաթեմատիկայի շրջանակներում հնարավոր է դարձնում համաչափության հասկացության հետագա լիարժեք ուսումնասիրության համար:

Համարժեքության անդրադարձելիության, փոխանցականության, տեղափոխելիության, զուգորդականության և այլ հատկություններ թույլ են տալիս դրանց նկատմամբ կիրառել տրամաբանական քայլեր, որոնք աչքի են ընկնում տրամաբանական խստությամբ և որոնք չեն հիմնավորվում առանց տրամաբանության ներգրավման, և դրանց իրականացումը դառնում է թերի: Օրինակ, բանաձևերի համակարգերի և համախմբերի լուծման գործընթացում դասագրքերում և մեթոդական գրականության մեջ առանց հիմնավորման ազատորեն թույլ է տրվում բաղադրիչների տեղափոխություն: Դրա մեթոդական «հիմնավորումն» այն է, որ աշակերտները չեն գիտակցում նման հիմնավորման անհրաժեշտությունը: Բայց ճշմարտության բացահայտման անհաժեշտության չգիտակցելը դեռևս չի ազատում նրա բացահայտման անհրաժեշտությունից: Եվ այստեղ օգնության են գալիս համարժեքության այնպիսի հատկություններ, ինչպիսիք են՝ համարժեք բանաձևերի համակարգերի կամ համախմբերի համարժեքությունը և այլն: Այստեղ լրացուցիչ գործում է գիտական գեղեցիկի այնպիսի կարևոր օբյեկտիվ հատկանիշ, ինչպիսին տրամաբանական խստությունն է:

Մաթեմատիկական նյութի շարադրանքի մեջ տրամաբանության տարրերի ներառումը ընդգծում և մեծացնում է նաև գիտական գեղեցիկի այնպիսի օբյեկտիվ հատկանիշներ, ինչպիսիք են *հստակությունը, բազմազանությունների միասնությունը, ընդհանրականությունը* և այլն:

Ճշմարտական արժեք: Այստեղ առաջին հերթին խոսքը վերաբերում է բուն ճշմարիտի և նրա հետ կապված առարկաների և երևույթների ձևավորման և ըմբռնման խնդրին, ինչը անհնար է լիարժեք իրականացնել առանց տրամաբանության տարրերի կիրառության: Քսաներորդ դարի նշանավոր հոգեբան և իմաստասեր *Էրիխ Ֆրոմը,* հումանիստական արժեբանության շրջանակներում քննարկելով արժեքների և նորմերի փոխհարաբերության հարցը, արժեքների նկատմամբ երեք հիմնական նորմատիվային մոտեցումների շարքում, որոնք ընկած են բոլոր ժամանակների կրոնական և իմաստասիրական հումանիստական ուսմունքների հիմքում, նշում է *ճշմարտության որոնումը,* «ի տարբերություն փաստերի ոչ քննադատական իմացությունը», հատուկ ընդգծում է Ֆրոմը [152, 138]: Չինական ժողովրդական առածն ասում է. եթե դուք մարդուն տալիս եք մի ձուկ, ապա նա կարող է կշտանալ այդ օրը: Իսկ եթե դուք նրան սովորեցնում եք ձուկ բռնել, ապա նա կարող է կուշտ լինել ողջ կյանքում: Այսինքն՝ ճշմարտության որոնումը արժեբանական տեսակետից ավելի բարձր է, քան բուն ճշմարտությունը:

Ճշմարտության որոնման ճանապարհը լուսավորվում է տրամաբանական մտածողությամբ, մտածողության գործընթացում տրամաբանության օրենքների, կանոնների, մոտեցումների ներգրավմամբ: Նման գործընթացը այսօր մաթեմատիկայում իրականացվում է մաթեմատիկական տրամաբանության օգնությամբ, իսկ հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում այն կարելի է իրականացնել նրանում տրամաբանության տարրերի ներառման միջոցով:

Տրամաբանության տարրերի ներմուծումը հնարավորություն է տալիս դիտարկել նաև տրամաբանական և գեղագիտական-պատկերային մտածողության տարբերությունները: Ի տարբերություն առաջինի, վերջինս չի կարելի գնահատել տրամաբանական ճշմարտության չափանիշներով: Այստեղ առաջին պլան են մղվում արժեքները, և կախված նրանից, թե արժեքների որ խմբին է ուղղված դատողությունը, մտահանգումը, միտքը, խոսքը, նրա գնահատումը պետք է կատարել այդ արժեքի չափանիշներով: Տրամաբանության հանրահաշվի նյութը տալիս է նման դիտարկումների հնարավորություններ: Որպես օրինակ բերենք հետևյալ վարժությունը. [63, 127]:

Կարո՞ղ եք որոշել դատողության ճշմարտային արժեքը.

ա. Արարատի ծեր կատարին դար է եկել վայրկյանի պես ու անցել:

բ. Ես էլ դու եմ, ես չկամ, և այլն:

Ճշմարտության, նրա որոնման տեսակետից հարկ ենք համարում կարևորել նաև տրամաբանական խնդիրների դերը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Դրանք և դրանց լուծումները զարգացնում են սովորողի մտքի սրությունը, ճկունությունը, հնարամտությունը, հնարավորություն են տալիս մտածել ոչ ստանդարտ, անսովոր իրավիճակներում և գտնել համապատասխան լուծումներ: Այդ խնդիրների նշանակությունը մեծացնում է նաև այն, որ լուծման համար պահանջելով առողջ տրամաբանական մտածողություն, դրանք չեն պահանջում զուտ մաթեմատիկական գիտելիքներ: Այս հանգամանքը թույլ է տալիս ուսուցչին այդ խնդիրների միջոցով ժամանակ առ ժամանակ, ինչպես դասի, այնպես էլ արտադասարանական միջոցառումների ընթացքում ստուգել իր աշակերտների ունակությունները, հայտնաբերել ընդունակներին և, հարկ եղած դեպքում, ընդունակ, բայց մաթեմատիկայով չզբաղվող ու այդ պատճառով մաթեմատիկայից չառաջադիմող երեխաներին նույնպես ներքաշել ուսուցման գործընթացի մեջ: Այդ նպատակին կարող են ծառայել, օրինակ, դպրոցական դասագրքերում ընդգրկված հետաքրքրաշարժ խնդիրները, «Կենգուրու» մրցույթի նախորդ տարիների առաջադրանքները [32], ինչպես նաև էլեկտրոնային տարբեր կայքերից քաղված նյութերը:

Զուտ տրամաբանական նյութի և գիտելիքի տեսակետից նույնպես տրամաբանական խնդիրներն ունեն կարևոր նշանակություն, քանի որ այդպիսի խնդիրը հետաքրքրում են բոլոր աշակերտներին: Եվ չկա աշակերտ, որ չուզի հասկանալ դրանց լուծումները: Իսկ լուծման արդյունքում կարևորվում են ճշմարտային արժեքը և դրան նպաստող տրամաբանական կրթվածությունը:

Այլ արժեքներ: Տրամաբանության տարրերի ներմուծումը մաթեմատիկայի դասընթաց մեծապես նպաստում է նաև *սոցիալական արժեքների* ձևավորմանը: Սոցիալական կարևոր արժեք է հասարակության անդամների տրամաբանական պատշաճ մշակույթի տիրապետումը: Դա մարդու զուտ բնածին որակը չէ, այլ ձեռք է բերվում իմացության գործընթացում, մտածողության, առանձնապես՝ դատողությունների ապացուցման հնարքների և մեթոդների յուրացման ընթացքում:

Տրամաբանության ուսուցումը, տրամաբանական գիտելիքների իմացությունը նպաստում են սովորողի աշխարահայցքի ձևավորմանը, հասարակական կյանքի օրինաչափությունների մեջ կողմնորոշվելուն, շփման և հաղորդակցության համար անհրաժեշտ հստակ խոսքի շարադրմանը, փաստարկված խոսքի կառուցմանը, իր տեսակետի արտահայտմանն ու պաշտպանությանը: Տրամաբանական մշակույթը նպաստում է մարդկանց փոխըմբռնմանը, համաձայնության գալուն: Ճշմարիտ դատելու ունակությունը անհրաժեշտ է մարդկային գործունեության բոլոր ոլորտներում, լինի դա գիտություն թե տեխնիկա, իրավաբանություն թե քաղաքանություն, սպորտ կամ արտադրություն: Տրամաբանական գիտելիքները մեծ կիրառություն ունեն էլեկտրոնային-հաշվողական տեխնիկայում:

Տրամաբանության տարրերի ներմուծումը կարող է նպաստել նաև *ազգային արժեքների* ձևավորմանը: Թեև բուն մաթեմատիկատրամաբանական բանաձևերը, օրենքները, սկզբունքները և այլն որևէ ազգային արժեքի հետ անմիջական կապ չունեն, սակայն ուսուցման ընթացքում դրանց պարզաբանման ու կիրառության նպատակով բերված օրինակները, խնդիրները կամ առաջադրանքները կարող են վերաբերել այնպիսի իրադրությունների, որոնց շարադրանքում անուղղակի ձևով արտացոլվում են ազգային կյանքին և մշակույթին վերաբերող փաստեր, երևույթներ, իրադարձություններ: Բերենք [63, 126] դասագրքից այդ արժեքներին միտված վարժությունների օրինակներ:

550. Առանձնացրեք ասույթները և փոփոխական պարունակող դատողությունները.

ա. Տիգրան Պետրոսյանը եղել է աշխարհի չեմպիոն:

բ. Նա սիրում է Արամ Խաչատրյանի ջութակի կոնցերտը:

գ. Կոմիտասը իմ սիրած երգահանն է:

դ. Հայկը հաղթել է Բելին:

551. Նշեք փոփոխականի արժեք, որի դեպքում «Նա սիրում է հայրենիքը» դատողությունը ճշմարիտ է, և արժեք, որի դեպքում այն կեղծ է:

552. Կազմեք դատողության ժխտումը և որոշեք նրա ճշմարտային արժեքը.

գ. Ջորջ Բայրոնը սովորել է հայերեն:

դ. Վրացական այբուբենը ստեղծել է Մեսրոպ Մաշտոցը:

Ազգային արժեքների և ազգային արժանապատվության դերի գիտակցմանը նպաստող կարևոր գործոններից մեկն էլ այն է, որ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում, ուսումնական նյութի շրջանակներում անդրադարձ է արվում նաև հայ տրամաբանական մտքի զարգացման պատմության այս կամ այն դրվագին, լուսաբանվում հայ ժողովրդի ավանդը գիտակրթական մշակույթի ասպարեզում:

Առաջին գլխում կատարված վերլուծությունները հանգեցնում են հետնյալ հետևություններին

Տրամաբանության ուսուցման անցյալի և արդի համաշխարհային և հայրենական փորձի վրա հենված մեր ուսումնասիրությունները և վերլուծությունները ցույց են տալիս, որ առանց տրամաբանության տարրերի ուսուցման անհնար է լիարժեք ապահովել համակողմանիորեն զարգացած և ժամանակակից տեղեկատվական հասարակության պայմաններում ազատ գործելու ունակ անձի ձևավորումը: Սակայն տրամաբանության տարրերի ուսուցման արդյունավետությունը ստանում է լիարժեք դրսևորում, եթե այն ներառվում է մաթեմատիկայի ուսուցման ընդհանուր ծրագրի մեջ: Այդ դեպքում բավարար լուծում են ստանում հետնյալ մանկավարժամեթոդական հիմնահարցերը:

ա. Համակողմանիորեն լուծվում է սովորողների տրամաբանական մտածողության ձևավորման և զարգացման խնդիրը: Մտածողության հիմնական հնարքները՝ վերլուծությունը և համադրությունը, ընդհանրացումը, կոնկրետացումը և մասնավորեցումը, համեմատումը և անալոգիան՝ ի դեմս մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման, ստանում են դրսևորման լիարժեք հենք և հող:

բ. Ամբողջանում է մաթեմատիկայի, նրա լեզվի ներգրավման միջոցով սովորողների լեզվամտածողության ճշգրտման հիմնահարցը: Հարցի լուծմանը առանձնապես նպաստում է տրամաբանական գումարի, արտադրյալի, հետևության, համարժեքության շաղկապների, ընդհանրության և գոյության քվանտորների ներմուծումը:

գ. Ավելի արդյունավետ է դառնում բուն մաթեմատիկական նյութի ուսուցումը: Առանց տրամաբանության տարրերի ներգրավման մաթեմատիկական շատ հարցերի ուսուցումը հնարավոր չէ ձերբազատել սերտողական ընթացքից:

դ. Ընդլայնվում է մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով սովորողների արժեքային համակարգի ձևավորման գործառույթը: Տրամաբանության տարրերի ներառումը ավելացնում է մաթեմատիկայի կրթական ներուժը հատկապես ճշմարտական արժեքների ձևավորման գործընթացում: Սակայն այդ գործընթացը որոշակի նշանակություն ունի նաև գեղագիտական, բարոյական, սոցիալական և անգամ՝ ազգային արժեքների ձևավորման խնդիրների լուծման գործում:

ե. Հայ իրականության մեջ տրամաբանության գիտական հետազոտությունների և կրթության կազմակերպման միտումները, սկսած դեռևս վաղ միջնադարից, միշտ էլ համահունչ են եղել ժամանակի համաշխարհային փորձին, իսկ վերջին տասնամյակներում հանրակրթական դպրոցների համար ՀՀ-ում մշակվել են տրամաբանության ուսուցմանը նվիրված նոր մեթոդիկաներ, սակայն այդ դրական փորձը պատշաճ ձևով չի լուսաբանվել միջազգային հանրությանը մատուցելու համար:

զ. ՀՀ նորանկախ հանրապետության կրթական համակարգում բավարար հիմքեր են ստեղծվել տրամաբանության տարրերի, դրանք մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ներգրավելու ուղղությամբ: Այս տեսակետից առանձնակի ուշադրության են արժանի 2004-2005 թ.թ. ստեղծված Հանրակրթության պետական կրթակարգը, միջնակարգ կրթության պետական չափորոշիչը, մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչները և ծրագրերը: Հետագայում սակայն, 2011 թ. վերանայված ծրագրերում այս ուղղությամբ արձանագրվում է որոշակի նահանջ, և դա վերաբերում է միջին դպրոցի հանրահաշվի ծրագրին, որում թերի են արտացոլվել Հանրակրթության պետական չափորոշչում ամփոփված պահանջները:

է. Հայրենական հեղինակների կողմից ստեղծված դասագրքերը հիմնականում արտահայտում են տրամաբանության տարրերի ուսուցման չափորոշչային և ծրագրային պահանջները, ինչը չի կարելի ասել 2011 թվականից ՀՀ կրթական համակարգ մտած միջին դպրոցի հանրահաշվի ռուսերենից թարգմանված, սակայն նույնիսկ ՌԴ-ում գործածությունից արդեն դուրս եկած դասագրքերի [89] մասին;

ԳԼՈՒԽ 2

ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԻ ՆԵՐԱՌՄԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆԱՎԵՏՈՒԹՅԱՆ ԲԱՐՁՐԱՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՈՒՂԻՆԵՐԸ

2.1. Տրամանանության և բազմությունների տեսության տարրերի միջև կապերի բացահայտման մեթոդական նշանակությունը

2.1.1. Հասկացությունների և դատողությունների արտահայտումը բազմությունների միջոցով

Մաթեմատիկայում բազմությունների տեսությունը և մաթեմատիկական տրամաբանությունը ունեն առանձնահատուկ նշանակություն, քանի որ դրանք կիրառվում և օգտագործվում են մաթեմատիկական մյուս բոլոր տեսություններում: Համանման նշանակություն ունեն նաև տրամաբանության և բազմությունների տեսության տարրերը մաթեմատիկայի դասընթացում, երբ տարբեր թեմաների ուսումնասիրության ընթացքում գործածվում են մի կողմից՝ բազմություններն ու դրանց գործողությունները, իսկ մյուս կողմից՝ տրամաբանության օրենքներն ու սկզբունքները: Տարբեր դասընթացներ ուսումնասիրելիս նկատվում է, որ տրամաբանության օրենքները և բանաձևերը ձևակերպելիս հաճախ օգտագործվում են բազմությունները և դրանց միջև ներմուծված գործողությունները: Ուստի ծագում է բնական հարց՝ թվացյա՞լ են այդ նմանություններն ու անալոգիաները, թե՞ գոյություն ունեն խորքային միջառարկայական կապեր: Այս հիմնական հարցի լուսաբանումը մեր հետազոտած թեմայի կապակցությամբ կարևոր է նախ և առաջ այն առումով, որ բազմություններն ու նրանց միջև ներմուծվող գործողությունները ակնառու ձևով պատկերվում են էյլերյան շրջանակներով, և եթե մենք ցույց տանք, որ տրամաբանական կառուցվածքային ձևերը խորքային կապեր ունեն բազմությունների և դրանց գործողությունների հետ, ապա դա լուրջ մեթոդական հնարավորություններ կընձեռի տրամաբանական կառուցվածքային ձևերը ևս շրջանակներով պատկերելու և այդ միջոցով դրանք դիտողական և ընկալելի դարձնելու համար: Այդ հարցի լուսաբանումը կարևոր է նաև այն առումով, որ մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի և բազմությունների տեսության տարրերի ներառման վերաբերյալ երբեմն ցուցաբերվում են միմյանցից զգալիորեն տարբեր մոտեցումներ: Եթե բազմության հասկացության և բազմությունների միջև գործողությունների ուսուցման հարցի նկատմամբ տարաձայնություններն արդեն գրեթե բացակայում են, և այդ պատճառով բազմությունների տեսության տարրերին վերաբերող թեմաները բացորոշ ձևով ներառվում են մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացներում, ապա նույնը չի կարելի ասել տրամաբանության տարրերի ուսուցման վերաբերյալ, ինչը դրսևորվել է նաև ՀՀ հանրակրթական միջին դպրոցի հանրահաշվի ծրագրում [46]: Ուրեմն, հարկավոր է պարզաբանել, թե ինչքանով են հիմնավոր մոտեցումների այդ տարբերությունները:

Բազմությունների տեսության և տրամաբանության տարրերի միջև կապերի բացահայտումը հնարավորություն կտա լուսաբանելու նաև այն հարցը, թե ելակետային ինչպիսի սկզբունքներով պետք է առաջնորդվել դրանց ուսուցման մեթոդիկաները մշակելիս: Իսկ այդ հարցը հրատապ է այն առումով, որ ավագ դպրոցի ընտրողական առարկայացանկում ընդգրկված է նաև «Տրամաբանություն» առարկան, որի ծրագրում ամփոփված թեմաներից շատերը առնչություն ունեն բազմությունների և նրանց միջև գործողությունների հետ [102]:

Այսպիսով, միջառարկայական կապերի բացահայտման վերոհիշյալ հարցն ունի ինչպես տեսական, այնպես էլ գործնական նշանակություն: Տեսական հարցադրումը հետևյալն է. քանի որ տրամաբանությունն ունի կառուցվածքային հիմնական երեք միավորներ՝ հասկացությունը, դատողությունը և մտահանգումը, ուստի անհրաժեշտ է դիտարկել դրանցից յուրաքանչյուրը և ցույց տալ, թե ինչպես են դրանք արտահայտվում բազմությունների և նրանց գործողությունների միջոցով: Իսկ հարցի կիրառական կողմը կապված է կրթական խնդիրների և առաջին հերթին, մաթեմատիկական դասընթացներում դրանց առնչություններին վերաբերող թեմաների լուսաբանման հարցերի հետ: Ընդ որում՝ ամբողջական պատկեր ունենալու համար այստեղ մենք հանգամանորեն կանդրադառնանք տրամաբանական կառուցվածքային ձևերից յուրաքանչյուրին և ցույց կտանք դրանց անմիջական կապը բազմությունների և նրանց համապատասխան գործողությունների հետ: Նշենք, որ դրանք հիմնականում հայտնի փաստեր են, սակայն ուսումնամեթոդական գրականության մեջ դիտարկվում են կա՛մ զուտ տրամաբանության տեսակետից, ինչպես օրինակ [18], [25], [112], [117], [118], [130] և այլ աշխատանքներում, կա՛մ զուտ բազմությունների տեսության տեսակետից, ինչպես օրինակ [105], [146], [138], [153] և այլ աշխատանքներում: Ուստի անհրաժեշտ է այդ երկուսը համադրել և ներկայացնել միասնաբար:

Ինչպես ասվեց՝ տրամաբանական կառուցվածքային հիմնական ձևերը երեքն են. հասկացությունը, դատողությունը, մտահանգումը: Նախ դիտարկենք հասկացությունը, որն ընդգրկվում է և՛ դատողության, և՛ մտահանգման կազմության մեջ:

Յուրաքանչյուր հասկացություն որոշվում է *ծավալով և բովանդակությամբ:* Հասկացության ծավալն այն առարկաների բազմությունն է, որոնք օժտված են տվյալ հասկացության բովանդակությունը ներկայացնող հատկանիշներով:

Այս սահմանումից արդեն իսկ պարզ է, որ հասկացությունները կարող ենք ներկայացնել բազմությունների տեսքով, և հետևաբար հասկացությունների ծավալների միջև առնչությունները արտահայտել բազմությունների գործողությունների միջոցով: Եվ դա վերաբերում է հասկացությունների ծավալների միջև առնչությունների հնարավոր բոլոր չորս դեպքերին: Դրանք են.

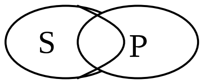
1. *Արտաքայություն*, այսինքն՝ երկու այնպիսի S և P հասկացությունների հարաբերությունը, որոնց ծավալները հատում չունեն:

Օրինակ: S={եռանկյուն} և P={շրջանագիծ} հասկացությունների ծավալները չեն հատվում: Այս երկու հասկացությունների հարաբերությունը բազմությունների գործողությունների միջոցով արտահայտվում է $S \cap P = \varnothing$ բանաձևով և պատկերվում է այսպես (տես նկ.1)՝

նկ. 1

2. *Խաչավորում,* այսինքն՝ երկու այնպիսի S և P հասկացությունների հարաբերությունը, որոնց ծավալներն ունեն ընդհանուր տարր և մեկի ծավալը չի ներառվում մյուսի մեջ:

Օրինակ: S={եռանիշ թիվ}, P={զույգ թիվ}: Այս հասկացությունների ծավալները չեն ներառվում մեկը մյուսի մեջ: Սրանք որպես բազմություններ պատկերվում են այսպես (տես նկ.2).

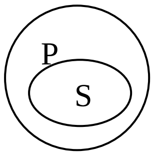


նկ. 2

բազմությունների տեսության բանաձևային տեսքով գրառվում է այսպես. $S \cap P \neq \varnothing$, ընդ որում՝ $S \not\subset P$ և $P \not\subset S$: Սա մի M բազմություն է, որը ներկայացնում է հետևյալ հասկացությունը՝ M={եռանիշ զույգ թիվ}:

3. *Ներառում,* այսինքն՝ երկու այնպիսի S և P հասկացությունների հարաբերությունը, որոնցից մեկի ծավալն ընդգրկվում է մյուսի ծավալի մեջ:

Օրինակ: S={ուղղանկյուն}, P={զուգահեռագիծ}: Այս դեպքում S-ը ներառվում է P-ի մեջ: Այս հասկացությունները որպես բազմություններ իրենցից ներկայացնում են հետևյալը (տես նկ.3).

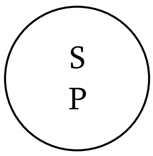


նկ. 3

Այսինքն՝ P բազմությունը իր մեջ պարունակում, ընդգրկում է S բազմությունը, որը նույնն է, թե S-ը P-ի ենթաբազմությունն է՝ $S \subset P$:

4. *Համարժեքություն,* այսինքն՝ երկու այնպիսի հասկացությունների առնչություն, որոնց ծավալները համընկնում են:

Օրինակ: S={բնական թիվ}, P={դրական ամբողջ թիվ}: S և P բազմությունները պատկերվում են այսպես (տես նկ.4).



նկ.4

Նման հարաբերությունը բազմությունների գործողությունների միջոցով արտահայտվում է հավասարության առնչությամբ՝ S=P:

Այսպիսով, երկու հասկացությունների՝ ըստ ծավալների հարաբերությունների բոլոր չորս դեպքերն էլ արտահայտվում են բազմությունների ու նրանց գործողությունների միջոցով: Այդ հարաբերությունները դրսևորվում են տրամաբանական բոլոր կառուցվածքային ձևերում, նաև այն դեպքերում, երբ հարաբերվում են երկուսից ավելի հասկացություններ: Դրանք արտահայտվում են հնարավոր բոլոր զույգերի հարաբերություններով, այսինքն՝ ի վերջո հիմքում ընկած են այն հարաբերությունները, որոնք մենք դիտարկեցինք:

Տրամաբանական մյուս կառուցվածքային միավորը դատողությունն է, որի էական հատկանիշը ճշմարտային արժեքներ ընդունելն է, (նշանակում են՝ ճշմարիտը ճ(1) և կեղծը կ(0)) և կազմված է սուբյեկտից՝ (S), պրեդիկատից՝ (P) ու կապից:

Դատողություններն ըստ որակի լինում են՝ *հաստատական* և *ժխտական,* իսկ ըստ քանակի՝ *եզակի, ընդհանուր* և *մասնավոր:* Սակայն ընդունված է այս տեսակները միավորել և դատողությունները դասակարգել ըստ որակի և քանակի, ընդ որում եզակի դատողությունները, որպես մասնավոր դեպք, ներառել ընդհանուրի մեջ, քանի որ և՛ մեկում, և՛ մյուսում պնդումը վերաբերում է սուբյեկտի ամբողջ ծավալին [18, 122-123]: Այդպիսով դատողությունները դասակարգվում են չորս տեսակի.

1. Ընդհանուր հաստատական - *բոլոր S-երը P են:*

2. Մասնավոր հաստատական - *որոշ S-եր P են:*

3. Ընդհանուր ժխտական - *բոլոր S-եր P չեն:*

4. Մասնավոր ժխտական - *որոշ S-եր P չեն:*

Այս դատողությունների կառուցվածքներում կապերն ու առնչությունները բազմությունների ու նրանց գործողությունների հետ ներկայացվում են հետևյալ կերպ:

1. *Ընդհանուր հաստատական* - բոլոր S-երը P են: Սա նշանակում է, որ եթե ունենք S և P բազմություններ, ապա S բազմության բոլոր տարրերը միաժամանակ տարր են նաև P բազմության համար, այսինքն՝ պատկանում են P-ին: Հակառակը պնդել չենք կարող: S-ի և P-ի՝ որպես բազմությունների առնչությունը գրվում է հետևյալ տեսքով $S \subset P$, կամ որ նույնն է $\forall x((x \in S) \rightarrow (x \in P))$, և այն պատկերվում է ինչպես նկ.3-ում:

2. *Մասնավոր հաստատական* - որոշ S-եր P են: Այս դատողությունը ըստ բազմությունների տեսության նշանակում է, որ գոյություն ունեն S բազմության տարրեր, որոնք պատկանում են P-ին: Այս դատողության սուբյեկտի և պրեդիկատի հարաբերությունը՝ որպես բազմությունների հարաբերություն գրվում է այսպես՝ $S \cap P \neq \varnothing$, այսինքն՝ $\exists x (x \in S) \& (x \in P)$, և այն պատկերվում է ինչպես նկ.2-ում:

3. *Ընդհանուր ժխտական* - բոլոր S-եր P չեն: Այս հարաբերությունը՝ որպես բազմությունների միջև առնչություն արտահայտվում է հետևյալ կապով. $S \cap P = \varnothing$: Այլ կերպ կարող ենք գրել՝ $\forall x(x \in S)\&(x \notin P)$, և այն պատկերվում է ինչպես նկ. 1-ում:

4. *Մասնավոր ժխտական* - որոշ S-եր P չեն: Այս դատողությունը բազմությունների լեզվով գրվում է հետևյալ տեսքով. $S \setminus P \neq \varnothing$, այսինքն՝ $\exists\, x\,(x \in S)\&(x \notin P)$, և պատկերվում է, ասենք, ինչպես նկ.2-ում, սակայն ընդգծելով S-ի այն մասը, որն ընկած է P-ից դուրս:

Այստեղ բազմությունների և նրանց գործողությունների միջոցով արտահայտելու հարցը դիտարկեցինք միայն պարզ դատողությունների համար: Քննարկման հարց է նաև տրամաբանական շաղկապների միջոցով առաջացող բարդ դատողությունների արտահայտումը բազմությունների միջոցով: Այդ հարցին մենք կանդրադառնանք 1.3. կետում՝ կապված հանրահաշվական բանաձևերում բազմությունների և տրամաբանական կառուցվածքային ձևերի միջև առկա կապերի պարզաբանման հետ:

2.1.2. Մտահանգումների արտահայտումը բազմությունների միջոցով

Բազմությունների և նրանց միջև գործողությունների միջոցով դատողությունների կառուցվածքի ներկայացումը հնարավորություն է ընձեռում բազմությունների տեսության լեզվով արտահայտել նաև մտահանգումները, երբ տրված մեկ կամ մի քանի դատողություններից բխեցվում է մի նոր դատողություն: Դա զգալիորեն պարզ տեսք ունի *անմիջական* մտահանգման դեպքում, երբ եզրակացությունը բխեցվում է այնպիսի նախադրյալից, որը կազմված է մեկ պարզ դատողությունից, ի տարբերություն *միջնորդավորված* մտահանգման, որի նախադրյալում պարունակվում է երկու և ավելի դատողություններ:

Նախ ներկայացնենք անմիջական մտահանգման այն տեսակը, որը հայտնի է «շրջում» անունով և նրա համար հատկանշականն այն է, որ եզրակացության սուբյեկտը նախադրյալի պրեդիկատն է, իսկ պրեդիկատը՝ նախադրյալի սուբյեկտը:

Շրջումը ընդհանուր-հաստատական դատողության դեպքում ունի հետևյալ տեսքը.

Բոլոր S-երը P են, հետևաբար, որոշ P-եր S են:

Օրինակ: Բոլոր զուգահեռագծերը քառանկյուն են. սա նախադրյալն է, որը շրջելիս ստացվում է. որոշ քառանկյուններ զուգահեռագիծ են: Այն ներկայացնենք բազմությունների հարաբերության տեսքով. S={զուգահեռագիծ}, P={քառանկյուն}, և դրանց համապատասխանող բազմությունները կպատկերվեն ինչպես նկ.3-ում:

Այս հարաբերությունը գրառվում է հետևյալ առնչությամբ՝ $S\subset P$, $\forall x((x\in S)\rightarrow(x\in P))$:

Այստեղից էլ հետևում է, որ $S\cap P=S\neq\varnothing$, այսինքն՝ $P\bigcap S\neq\varnothing$, կամ որ նույնն է՝ $\exists x((x\in P)\&(x\in S))$, այսինքն՝ որոշ P-եր S են:

Համանման ձևով է ներկայացվում մասնավոր-հաստատական դատողության շրջումը.

Որոշ S-եր P են, հետևաբար որոշ P-եր S են:

Այդ մտահանգումը բազմությունների միջոցով կարող է գրառվել հետևյալ բանաձևի տեսքով՝ $S\cap P=\varnothing$, այսինքն՝ $\exists x((x\in S)\&(x\in P))$, հետևաբար, $P\bigcap S\neq\varnothing$, այսինքն՝ $\exists x((x\in P)\&(x\in S))$:

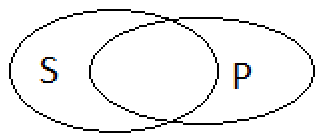
Ավելի պարզ տեսք ունի ընդհանուր-ժխտական դատողության շրջումը.

Բոլոր S-երը P չեն, հետևաբար բոլոր P-երը S չեն:

Բազմությունների տեսության այբուբենով այդ առնչությունը գրվում է այսպես. $S\cap P=\varnothing$, $\forall x((x\in P)\rightarrow(x\notin S))$, որից բխում է, որ $P\cap S=\varnothing$, այսինքն՝ $\forall x((x\in S)\rightarrow(x\notin P))$:

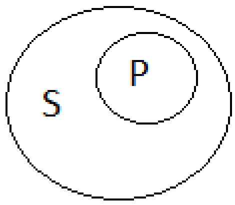
Հատուկ ուշադրության է արժանի մասնավոր-ժխտական դատողության (որոշ S-եր P չեն) շրջման հարցը: Պարզվում է, որ այդ դեպքում որոշակի եզրակացություն անելու հիմքեր չկան, քանի որ S-ի և P-ի հարաբերությունները կարող են տարբեր լինել.

Ասվածը առավել պարզ կլինի, երբ քննարկենք այս դատողությունը բազմությունների լեզվով: «Որոշ S-եր P չեն» դատողությունը կարող է պատկերվել այսպես (տես նկ.5).



նկ.5

որտեղից P-ի համար կարող է եզրակացվել, որ «Որոշ P-եր S չեն»: Բայց երբ S և P բազմությունների առնչությունը ունենար հետևյալ տեսքը (տես նկ.6).



նկ.6

ապա P-ի համար կստացվեր եզրակացություն, ըստ որի՝ «Բոլոր P-երը S են», իսկ դա նշանակում է, որ եզրակացությունը P-ի մասին միանշանակ չէ, և ուրեմն, մասնավոր ժխտական նախադրյալից եզրակացություն բխեցնելու հիմքեր չկան: Նկատենք, որ այսպիսի վերլուծությունը միանգամայն դժվար կլիներ, եթե չդիմեինք տվյալ մտահանգումը բազմությունների միջոցով արտահայտելու մեթոդական հնարին:

Դիտարկվում է անմիջական մտահանգման ևս մեկ տեսակ՝ *նվազեցումը,* որի դեպքում ընդհանուր դատողություն հանդիսացող նախադրյալից բխեցվում է նույն որակով մասնավոր դատողություն: Նվազեցումը դիտարկվում է միայն երկու տեսակի դատողությունների համար:

ա) Ընդհանուր-հաստատական՝ բոլոր S-երը P են դատողության նվազեցված դատողությունն է որոշ S-եր P են: Եզրակացությունն ակնհայտ է. եթե $\forall x\,((x\in S)\rightarrow(x\in P))$, հետևաբար $\exists x\,((x\in S)\rightarrow(x\in P))$: Ի դեպ՝ այս տեսակի արտածումը որպես ճշմարիտ բանաձև ներառված է պրեդիկատների հաշվի աքսիոմների ցանկում, և դրա հիմքում ընկած է դեռևս Արիստոտելի կողմից ձևակերպված աքսիոմը, ըստ որի՝ *այն, ինչ պնդում ենք որևէ դասի նկատմամբ, տարածվում է նաև նրա յուրաքանչյուր ենթադասի նկատմամբ* [35, 113]:

Սրան անալոգ է նաև մյուս դեպքը՝ ընդհանուր-ժխտական դատողության նվազեցումը:

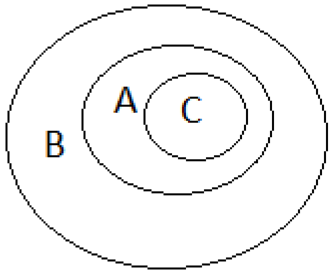
Այժմ դիտարկենք համեմատաբար ավելի բարդ կառուցվածք ունեցող մտահանգումներ, որոնց ամենատարածված տեսակը *սիլլոգիզմն* է: Սիլլոգիզմը միջնորդավորված, դեդուկտիվ մտահանգում է, որի նախադրյալը կազմված է ընդհանուր տերմին ունեցող երկու պարզ դատողություններից:

Օրինակ 1: Բոլոր շեղանկյունները զուգահեռագիծ են:

Բոլոր քառակուսիները շեղանկյուն են:

Բոլոր քառակուսիները զուգահեռագիծ են:

Այս դատողությունների համակարգը կարող ենք ներկայացնել բազմությունների և նրանց գործողությունների միջոցով. A={շեղանկյուն}, B={զուգահեռագիծ}, C={քառակուսի}: Առաջին նախադրյալը՝ որպես բազմությունների առնչություն, ներկայացվում է A-ի ներառումը B-ի մեջ, իսկ երկրորդ նախադրյալը՝ C-ի ներառումը A-ի մեջ: Դրանց գծապատկերը շատ ակնառու է դարձնում եզրակացությունը (տես նկ.7):



նկ.7

Ասվածը կարող ենք արտահայտել բազմությունների տեսության գործողությունների միջոցով:

$$\frac{\begin{array}{c} A \subset B \\ C \subset A \end{array}}{C \subset B}$$

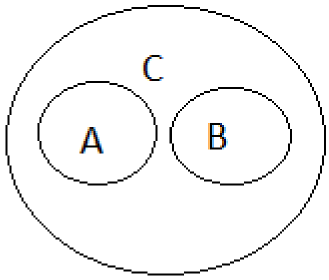
Այստեղ նույնպես պարզորոշ երևում է, որ բազմությունների օգնությամբ մտահանգումն ստանում է ավելի ընկալելի տեսք:

Օրինակ 2: Բոլոր շեղանկյունները (A) սեղան (B) չեն:

Որոշ քառանկյուններ (C) սեղան (B) են:

Որոշ քառանկյուններ (C) շեղանկյուն (A) չեն:

Այս պնդումները վերլուծենք՝ համեմատելով բազմությունների տեսության տարրերի հետ: Փոխադրելով բազմությունների տեսության լեզվին՝ ստացվում է հետևյալ պատկերը (տես նկ.8).



նկ.8

Այս գծապատկերը համապատասխանում է տվյալ մտահանգմանը, որը բազմությունների հարաբերություններով կարող է ներկայացվել բանաձևային հետևյալ գրառմամբ.

$$A \cap B = \varnothing:$$

$$C \cap B \neq \varnothing:$$

$$\overline{}$$

$$C \setminus A \neq \varnothing:$$

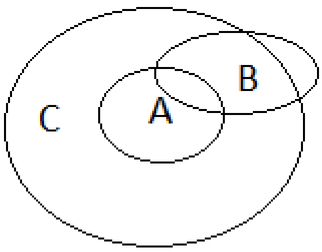
Օրինակ 2-ի եզրակացությունը համապատասխանում է բանաձևային տեսքին:

Օրինակ 3: Որոշ հավասարումներ (A) լուծում ունեն (B):

Բոլոր հավասարումները (A) բանաձև (C) են:

Որոշ բանաձևեր (C) լուծում ունեն (B):

Բազմությունների գծապատկերի միջոցով նախադրյալների միջև եղած կապերը և դրանց ու եզրակացության առնչությունները կարտահայտվեն այսպես (տես նկ.9).



նկ.9

Իսկ այդ գծապատկերին համապատասխանող բանաձևային տեսքը հետևյալն է.

$$A \cap B \neq \varnothing:$$

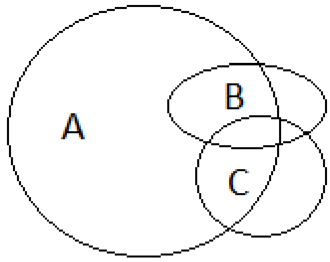
$$A \subset C:$$

$$\overline{}$$

$$C \cap B \neq \varnothing:$$

Նույն եղանակով կարող ենք դիտարկել սիլլոգիզմի մյուս բոլոր դեպքերը (ֆիգուրները և մոդուսները) ևս: Դիտարկումները ցույց են տալիս, որ սիլլոգիզմ հանդիսացող յուրաքանչյուր մտահանգում կարելի է արտահայտել բազմությունների և նրանց հարաբերությունների միջոցով: Մյուս կողմից՝ ունենալով բազմությունների որոշակի հարաբերություն՝ կարող ենք որոշել, թե կա՞ արդյոք դրան համապատասխանող սիլլոգիզմ: Հասկանալի է, որ դրա համար պետք է դիտարկել երեք բազմությունների հարաբերություն, քանի որ սիլլոգիզմն ունի ճիշտ երեք տերմին:

Օրինակ 4: Դիցուք տրված են A, B, C բազմություններ, որոնց հարաբերությունները արտահայտվում է հետևյալ գծապատկերով (տես նկ.10)՝



նկ.10

այսինքն՝ $A \cap B \neq \varnothing$, $B \cap C \neq \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$, $A \backslash B \neq \varnothing$, $B \backslash A \neq \varnothing$, $B \backslash C \neq \varnothing$, $C \backslash B \neq \varnothing$, $A \backslash C \neq \varnothing$, $C \backslash A \neq \varnothing$;

Դիտարկելով A, B, C բազմությունների բոլոր զույգերի բոլոր հնարավոր հարաբերությունները՝ տեսնում ենք, որ հնարավոր է կազմել միայն մասնավոր դատողություններ (հաստատական կամ ժխտական).

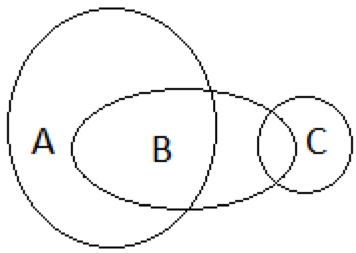
որոշ A-եր B են (չեն),

որոշ A-եր C են (չեն),

որոշ B-եր C են (չեն) և այլն:

Այդ դատողություններից ցանկացած երկուսի՝ որպես նախադրյալի վերցնելու դեպքում եզրակացություն չի բխում (հիշենք, որ ըստ սիլլոգիզմի կանոնների՝ ա) երկու մասնավոր նախադրյալներից եզրակացություն չի բխում, բ) երկու ժխտական նախադրյալներից եզրակացություն չի բխում [27, 124-125]): Ուրեմն օրինակ 4-ում ներկայացված բազմություններին համապատասխանող ճիշտ սիլլոգիզմ գոյություն չունի:

Օրինակ 5: Դիցուք՝ տրված A, B, C բազմություններն արտահայտվում են հետևյալ գծապատկերով (տես նկ.11).



նկ.11

Այսինքն՝ $A \cap C = \varnothing$, $A \cap B \neq \varnothing$, $B \cap C \neq \varnothing$: Որպեսզի պարզենք, թե արդյոք հնարավո՞ր է կազմել այդ բազմություններին համապատասխանող սիլլոգիզմ, թե՞ ոչ, վարվում ենք հետևյալ կերպ: B բազմությանը համապատասխանող հասկացությունը չի կարող լինել միջին տերմին, քանի որ այդ դեպքում և՛ մի նախադրյալը (B-ի և A-ի հարաբերությունը), և՛ մյուս նախադրյալը (B-ի և C-ի հարաբերությունը) կլինեին մասնավոր դատողություններ, իսկ երկու մասնավոր նախադրյալներից եզրակացություն չի բխում: Ուրեմն միջին տերմին կարող են լինել A-ն և C-ն: Դիտարկենք այդ դեպքերից մեկը (մյուս դեպքը դրան համանման է, քանի որ A-ն և C-ն «համաչափ են»):

Ընդունենք, որ A-ին համապատասխանում է միջին տերմինը: Այդ դեպքում A և C բազմությունների հարաբերությունը արտահայտում է ընդհանուր-ժխտական դատողություն. բոլոր A-երը C չեն (1) :

Մյուս նախադրյալը B-ի A-ի հարաբերությունն արտահայտող դատողությունն է՝

որոշ B-եր A են (2):

(1) և (2) նախադրյալներից բխում է եզրակացությունը՝ որոշ B-եր C չեն:

Նկատենք, որ որպես 2-րդ նախադրյալ չէինք կարող վերցնել «Որոշ B-եր A չեն» դատողությունը (չնայած դա ևս համամպատասխանում էր B և A բազմությունների հարաբերությանը): Բանն այն է, որ 1-ին նախադրյալը արդեն ժխտական դատողություն էր, ուրեմն՝ որպեսզի եզրակացություն բխեր, այսինքն՝ սիլլոգիզմը ճիշտ լիներ, անհրաժեշտ էր, որ 2-րդ նախադրյալը լիներ հաստատական:

Ընդհանրացնելով դիտարկված օրինակները՝ կարող ենք կատարել այսպիսի հետևություն. մտահանգումները բազմությունների միջոցով արտահայտելիս միանգամից տեսանելի է դառնում, թե արդյո՞ք ճիշտ է կատարված մտահանգումը, իսկ սխալ լինելու դեպքում որոշվում է, թե ո՞ր քայլում և ինչի՞ հետևանքով է թույլ տրվել այդ սխալը: Իսկ դրա անհրաժեշտությունը առաջանում է շատ հաճախ, հատկապես ապացուցումների ընթացքում, քանի որ այն ներկայացնում է բազմաթիվ մտահանգումների շղթա:

2.1.3. Տրամաբանական շաղկապների և բազմությունների միջև առնչությունները մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում

Ինչպես նշել ենք, տրամաբանության և բազմությունների տեսության հիմունքներին վերաբերող հարցերը մաթեմատիկայի դպրոցական ծրագրերում մինչև վերջին տասնամյակները չէին ընդգրկված: Նման հարցերը հարևանցիորեն շոշափվում էին միայն որոշ վարժությունների լուծման ընթացքում, և դա արվում էր հիմնականում տարերայնորեն, առանց համակարգված գիտելիքների: Այդպիսի մոտեցումը ժամանակին խստորեն քննադատվել է հեղինակներից շատերի կողմից [18], [148]: Մաթեմատիկական յուրաքանչյուր դրույթի ձևակերպման մեջ զուտ մաթեմատիկական տերմինների հետ մեկտեղ հանդիպում են «կամ», «և», «եթե, ապա», «ոչ» բառերը, որոնց էության ըմբռնումն անհրաժեշտ է ոչ միայն այս կամ այն տեքստը, այլև ընդհանրապես մաթեմատիկական դրույթները հասկանալու համար: Ա. Ա. Ստոլյարը տարօրինակ է համարում այն փաստը, որ միևնույն նախադասության մեջ որոշ տերմինների (մաթեմատիկական) իմաստը աշակերտներին պարզաբանվում է, իսկ այլ տերմինների (տրամաբանական) իմաստը չի պարզաբանվում, չնայած այդ նախադասությամբ արտահայտված փաստի էությունը հասկանալու համար վերջիններս ոչ պակաս կարևոր նշանակություն ունեն [148, 20]: Ուսուցման նման մեթոդը, ինչպես պնդում է Ա. Ա. Ստոլյարը, դանդաղեցնում է դասընթացի յուրացումը և աշակերտների զարգացումը: «Ակնհայտ է, որ աշակերտների «աչքերը բացել», այսինքն լուսաբանել նրանց կողմից կատարվող տրամաբանական գործողությունների էությունը, նշանակում է նրանց հնարավորություն ընձեռել հաղթահարելու մաթեմատիկական գիտելիքների յուրացման ճանապարհին շատ դժվարություններ» [148, 21]:

Ինչպես նշել ենք, այս հանգամանքը հաշվի առնելով՝ վերջին երկու տասնամյակներում հանրակրթական դպրոցի «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառի չափորոշիչներում և ծրագրերում նախատեսվել են որոշակի գիտելիքներ տրամաբանության, մասնավորապես «կամ», «և», «եթե…, ապա…» և այլ շաղկապներով արտահայտվող տրամաբանակն ձևերի վերաբերյալ [44], [47], [53]: Ուշագրավ է այն փաստը, որ տրամաբանական շաղկապների էության պարզաբանումը և դրանց ներառումը մաթեմատիկական տեքստերի մեջ անմիջականորեն ուղեկցվում են բազմությունների միջև ներմուծված գործողություններով, ընդ որում՝ դա շատ հստակ է ներկայացվում հատկապես հանրահաշվի դասընթացում [63]:

Չխորանալով բոլոր մանրամասների մեջ՝ այստեղ դիտարկենք այն հարցը, թե հանրահաշվի դասընթացում ինչպես է գործածվում տրամաբանության հանրահաշվի բանաձևերի կապը բազմությունների գործողությունների հետ:

Նախ նկատենք, որ տրամաբանության հանրահաշվի բանաձևերի *համարժեքությունը* սահմանվում է դրանց լուծումների բազմությունների հավասարության միջոցով. միևնույն փոփոխականը պարունակող երկու բանաձևերը կոչվում են համարժեք, եթե նրանք ունեն միևնույն լուծումները (այսինքն՝ նրանց լուծումների բազմությունները համընկնում են):

Մեր դիտարկած հարցի տեսակետից առավել ուշագրավ է համախմբերի և համակարգերի լուծումների բազմությունների հատկությունը, որը ձևակերպվում է այսպես [63, 73], [63, 83]:

Եթե x փոփոխականով Ա բանաձևի լուծումների բազմությունը A-ն է, իսկ նույն փոփոխականով Բ բանաձևի լուծումների բազմությունը՝ B-ն, ապա.

$$\left[\begin{array}{l} Ա \\ Բ \end{array}\right. \Leftrightarrow A \cup B, \quad \left\{\begin{array}{l} Ա \\ Բ \end{array}\right. \Leftrightarrow A \cap B:$$

Նշենք, որ դասընթացում բանաձևերի համախումբ անվանվում է այդ բանաձևերի տրամաբանական գումարը, որն արտահայտվում է «կամ» շաղկապով (դա հենց դիզյունկցիան է), իսկ բանաձևերի համակարգ՝ այդ բանաձևերի տրամաբանական արտադրյալը, որն արտահայտվում է «և» շաղկապով (դա կոնյունկցիան է):

Դասընթացում տրամաբանական շաղկապների կապը բազմությունների գործողությունների հետ դիտարկվում է ոչ միայն տեսական ձևակերպումների մակարդակով, այլև խնդիրների ու վարժությունների՝ հետևողականորեն մշակված համակարգով:

Բերենք հանրահաշվի դասագրքից ընտրված մի քանի տիպական վարժություններ.

1. Լուծել համախումբը.

ա. $\left[\begin{array}{c} x \in (-1;1) \cup (1;2) \\ x \in \{-1;2\} \\ x = 1 \end{array}\right.$, բ. $\left[\begin{array}{c} x \in [2;3) \\ x \in (3;4] \\ x = 3 \end{array}\right.$:

2. Լուծել համակարգը.

ա. $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} x > 1 \\ x \in \{-2;\} \end{array}\right. \\ x \in \{-2;1;2\} \end{array}\right.$, բ. $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} x \neq 1 \\ x \in \{3\} \end{array}\right. \\ x \in \{0;1;3\} \end{array}\right.$:

3. Արդյո՞ք ճշմարիտ է.

ա. ($x \in (1;2)$ և $x \in Z$) $\Leftrightarrow x \in \varnothing$,

բ. ($x \in (0;4]$ և $x \in Z$) $\Leftrightarrow$ ($x \in (0;4]$ և $x \in N$),

գ. ($x \in [2;7)$ և $x \in Z$) $\Leftrightarrow x \in \{2;3;4\}$,

դ. $x \in [1;2) \Leftrightarrow$ ($x \geq 1$ և x <2) $\Leftrightarrow 1 \leq x < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 2 \end{cases}$,

Սրանք ավանդականից տարբեր, որակապես նոր տիպի առաջադրանքներ են, որոնց շնորհիվ ընդլայնվում է սովորողների մաթեմատիկական մտահորիզոնը, զարգանում է նրանց տրամաբանական մտածողությունը, և ուսումնական նյութը դառնում է ավելի հետաքրքիր:

Մեր քննարկած հարցերի տեսանկյունից այդպիսի թեմաները դասընթացում ընդգրկելը արժեքավոր է նաև նրանով, որ տեսանելի ձևով ուղղակի կապ է հաստատվում տրամաբանության հանրահաշվի բանաձևերի համախմբի և բազմությունների միավորման գործողության, ինչպես նաև բանաձևերի համակարգի և բազմությունների հատման գործողության միջև: Իսկ դա ասում է այն մասին, որ հանրահաշվի դասընթացում միասնաբար են հանդես գալիս մաթեմատիկայի երկու բնագավառների՝ տրամաբանության և բազմությունների տեսության տարրերի հիմնական հասկացություններն ու գործողությունները: Այսինքն՝ հանրահաշվի դասընթացում *ինտեգրվում են* մաթեմատիկայի երկու հիմնարար տեսությունների՝ մաթեմատիկական տրամաբանության և բազմությունների տեսության տարրերին վերաբերող գիտելիքները: Իսկ դա ավելին է, քան միջառարկայական կապերի ապահովումը, հատկապես եթե նկատի ունենանք, որ բազմառարկայական ինտեգրումը ժամանակակից մանկավարժական հայեցակետից դիտվում է որպես ուսումնառության իրականացման առավել հեռանկարային մոտեցում [9]:

Այսպիսով, անդրադառնալով կետի սկզբում կատարված հարցադրումներին, կարևոր ենք համարում ընդգծել, որ տրամաբանության տարրերի և բազմությունների տեսության տարրերի միջև առկա կապերը շատ խորքային են և էական: Դրանց վերաբերող գիտելիքները հեշտությամբ թարգմանելի են մեկը մյուսով, պատկերավոր կարելի է ասել, որ դրանք կազմում են «երկվորյակ» գիտելիքների համակարգեր, որոնց վրա խարսխվում է մաթեմատիկական կրթության բովանդակությունը: Հետևաբար՝ բավարար հիմքեր չկան ուսուցման գործընթացում դրանց նկատմամբ էապես տարբեր մոտեցումներ ցուցաբերելու, ինչպես նաև միմյանցից անջատ ուսուցում իրականացնելու համար: Վերոհիշյալ դիտարկումները փաստարկներ են այն բանի օգտին, որ տրամաբանության տարրերի ուսուցումն առավել արդյունավետ կլինի, եթե այն զուգակցվում ու միասնականացվում է բազմությունների տեսության տարրերի ուսուցման հետ, և այդպիսով փոխադրվում է ինտեգրված ուսուցման հարթակի վրա:

2.2. Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ապացուցումների համակարգի զարգացումը

2.2.1. Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ապացուցման կարողությունների ձևավորման հիմնախնդիրը

Հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ուսուցման կարևոր բաղադրամաս է համարվում տրամաբանական արտածման կամ ապացույցի իրականացումը և նրա ներկայացումը:

Ապացուցման հիմնախնդիրը վերաբերում է ճանաչողության հիմնական՝ «ինչու՞» հարցադրմանը: Այս հարցադրումը հավանաբար ծագել է մարդկության պատմության վաղնջական շրջաններից, բայց իր բուռն զարգացումն է ստացել միայն անտիկ Հունաստանում, հասարակական կյանքի կազմակերպման յուրահատուկ պայմաններում: Հունական պոլիսների կառավարման ժողովրդավարական ձևը ենթադրում էր առաջադրվող հարցերի հրապարակային քննարկում, որտեղ բանախոսին անհրաժեշտ էր մարդկանց համոզել, ցույց տալ իր տեսակետի ճշմարտացիությունը: Ճարտասանությունը համարվում էր կարևոր առաքինություն, այն հունական կրթության կարևոր բաղադրիչ էր՝ կրթությունը կազմող յոթ ազատ արվեստներից մեկը: Եվ, բնականաբար, հարցադրման պատասխանի, համոզիչ խոսքի հիմնական արժանիքներից մեկը, թերևս՝ գլխավորը, դրա փաստարկվածությունն էր, հիմնավորվածությունը, ապացուցելիությունը: Նման խոսքի կառուցման առաջին գիտական օրինակները տվեց մաթեմատիկան, որին էլ հաջորդեց Արիստոտելի կողմից տրամաբանության ստեղծումը, որը փաստորեն նաև գիտություն էր ապացուցման մասին: Անշուշտ, տարբեր գիտություններ, իրականացնելով ճանաչողության իրենց գործառույթները, օգտվում էին ապացուցման իրենց զինանոցից, բայց բոլորի համար տրամաբանությունը տալիս էր ապացուցման համընդհանուր կաղապարներ, որոնց պետք է ենթարկվեին մնացած գիտություններում (և ոչ միայն գիտություններում) առաջադրվող ապացուցումները:

Նախ հստակեցնենք, թե ինչ է ապացուցումը:

Ապացուցումը տրամաբանական գործողություն է, որի միջոցով ցույց է տրվում որևէ դատողության ճշմարիտ լինելը՝ այն բխեցնելով ուրիշ այնպիսի դատողություններից, որոնց ճշմարտությունն արդեն ընդունված է (ապացուցված է, հայտնի է, տրված է, գիտենք) [27, 181]:

Ապացուցումը կազմված է երեք մասից՝ *ապացուցման թեզիս, ապացուցման հիմքեր, ապացուցման եղանակ:*

1. *Ապացուցման թեզիսը* այն դատողությունն է, որի ճշմարտությունը ցույց է տրվում տվյալ ապացուցման մեջ:

2. *Ապացուցման հիմքերը* (փաստարկները, ապացույցները) այն դատողություններն են, որոնց ճշմարիտ լինելն արդեն ընդունված է և որոնց կապակցությունից բխեցվում է (արտածվում է) ապացուցվող թեզիսը:

3. *Ապացուցման եղանակը*, որը կոչվում է նաև փաստարկում կամ դեմոնստրացիա, բուն բխեցումն է, որը կատարվում է մտահանգման կամ մի քանի մտահանգումների կապակցված շարքի միջոցով: Ապացուցման թեզիսը դրանց վերջնական եզրակացությունն է դառնում:

Ապացուցումը լինում է երկու տեսակի ՝*ուղղակի և անուղղակի*: *Ուղղակի* կոչվում է այն ապացուցումը, որի մեջ թեզիսի ճշմարիտ լինելը ցույց տալու համար այն բխեցվում է փաստարկներից անմիջականորեն: Բայց երբեմն դժվար է գտնել փաստարկներ, որոնցից թեզիսը բխեր անմիջականորեն, և այդ դեպքում դիմում են անուղղակի ապացուցմանը: *Անուղղակի* ապացուցման դեպքում օգտագործվում են թեզիսի նկատմամբ այլընտրական դրույթ կամ դրույթներ, որոնց կեղծ լինելը ցույց տալու միջոցով բխեցվում է թեզիսի ճշմարիտ լինելը: Անուղղակի ապացուցման մի տեսակը, որ կոչվում է *ապացուցում հակառակից* կամ *հանգեցում անհեթեթության,* դպրոցական դասընթացներում հայտնի է *հակասող ենթադրության մեթոդով ապացուցում* անվանումով:

Իսկ ի՞նչ հասկանալ *ապացուցման ուսուցման* տակ: Հարցն այն է, թե ինչպե՞ս ենք մենք ապացուցում, ինչպե՞ս է ապացուցվող թեզիսը ստացվում տրված տեսության արդեն հայտնի ճշմարիտ պնդումներից, ուսուցման պրակտիկայում մնում է ոչ լիարժեք պարզաբանված: Հաճախ է հանդիպում պատասխան՝ «ակնհայտ է», որը ոչինչ չի պարզաբանում:

Պարզվում է, որ մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդիկայի տարբեր շրջաններում ապացուցման ուսուցմանը վերագրվել են տարբեր իմաստներ: Մոտավորապես 20-րդ դարի 60-ական թվականներին այն նույնացվում էր պատրաստի ապացույցների ուսուցման հետ: Քանի որ սովորողները չէին տիրապետում արտածման կանոններին, ապա ապացուցման ուսուցման տակ կարելի էր հասկանալ միայն մաթեմատիկայի դասագրքերում տեղադրված ապացուցումները անգիր սովորելը և վերարտադրելը: Այդ միտքը շատ վառ արտահայտված էր այդ ժամանակների աշխատանքներում [114]:

Զ. Ի. Սլեպկանը նշում էր. «Ապացույցի ուսուցման տակ անհրաժեշտ է հասկանալ սովորողներին պատրաստի ապացույցների ուսուցումը, որը առաջարկվում է ուսուցչի կամ դասագրքի կողմից, և ապացուցման ինքնուրույն որոնման ուսուցումը» [142, 87]: Պատրաստի ապացույցները, ընդգծում է Զ. Ի. Սլեպկանը, պետք է որպես մոդել հանդես գան, որոնց վրա աշակերտները սովորում են մտավոր գործունեության այնպիսի գործողություններ, որոնք ընկած են ապացուցելու կարողությունների հիմքում (ապացույցների տարբեր մեթոդների կիրառումը, ապացուցման ինքնուրույն փնտրտուք և այլն) [145]: Սակայն այս մտքերը պրակտիկայում չիրականացվեցին:

Զարմանալի է, որ շատ տարիներ մնում էր և, հավանաբար, կմնա աննկատ Ի. Լակատոսի «Ապացուցում և հերքում» գիրքը, որում արտահայտվում են կարևոր դրույթներ ապացուցման ուսուցման վերաբերյալ [124]: Մասնավորապես, հեղինակը առանձնացնում էր ապացուցման տիրապետման հետևյալ մակարդակները.

1. պատրաստի ապացույցների հասկացում և վերարտադրություն,
2. պատրաստի ապացույցների ինքնուրույն վերլուծություն,
3. ապացույցների ինքնուրույն իրականացում,
4. առաջարկված թվացյալ ապացույցների հերքումը:

Պետք է նշել, որ 20-րդ դարի 40-60-ական թվականներին ի հայտ եկավ աշխատանքների մի շարք, որոնցում դիտարկվում էր դպրոցականներին պատրաստի ապացույցների հերքում սովորեցնելու խնդիրը (Վ. Մ. Բրադիս, Յա. Ս. Դուբնով, Վ. Լ. Մինկովսկի և այլն) [110], [116], [128]: Հիմնականում նրանցում բովանդակվում էին հետևյալ տիպի զանազան սոփեստություններ. «Ուղղանկյան մակերեսը հավասար է 0-ի», «Բոլոր եռանկյունները հավասարամեծ են» և այլն: Դրանցում ապացուցվող պնդման անհեթեթությունը դիտարկվում է արդեն ձևակերպման մեջ, որը ստիպում է մասնակցին փնտրել «խարդախությունը»: Սոփեստությունների ապացուցումներում օգտագործվում են այնպիսի հնարքներ, ինչպիսիք են՝ ուղիղ թեորեմի փոխարեն հակադարձի կիրառումը, մասնավոր դեպքի դիտարկումը, դեռ չապացուցված պնդման օգտագործումը, թեզիսի զաղտնափոխումը և այլն: Սակայն մաթեմատիկական դատողություններում սխալների դիտարկումը, որը դուրս էր հանած դպրոցականներին ապացուցել սովորեցնելու ընդհանուր համատեքստից, չառաջացրեց բավարար հետաքրքրություն այդ աշխատանքների հանդեպ:

Թեզիսի հերքման առավել տարածված տեսակը հակաօրինակի կառուցման կամ վկայակոչման գործողությունն է: Հակաօրինակի տակ հասկանում են այնպիսի օբյեկտը, որի համար պնդման պայմանը ճշմարիտ է, իսկ եզրակացությունը՝ կեղծ:

Պարզ է, որ ապացուցման կարողության նշված մակարդակին հասնելը անհնար է առանց տրամաբանական գործողությունների իմացության: Հատուկ նշենք Ա. Ա. Ստոլյարի աշխատանքները ապացույցի տրամաբանական կազմակերպման իրականացման վերաբերյալ [149,150]:

Ժ. Պիաժեն համարում էր, որ դպրոցականների մաթեմատիկական մտածողության զարգացման պայման է հանդիսանում մաթեմատիկայի այնպիսի դասընթացը, որը կառուցված է ավելի ընդհանուր և վերացական հասկացությունների վրա, որոնց առաջին հերթին վերաբերում են բազմությունների տեսության և մաթեմատիկական տրամաբանության տարրերը [132]:

Սակայն, չնայած հետազոտողների մեծ ջանքերին, դպրոցականներին տրամաբանական գործողություններ ուսուցանելու խնդիրը չէր ստանում բավարար լուծում: Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացը ներառում էր որոշ մաթեմատիկական տեսությունների (հանրահաշվի, երկրաչափության, մաթ. անալիզի) սկզբնական հատվածներ՝ բովանդակային շարադրանքով: Այդ պատճառով մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ապացուցումը հիմնականում կառուցվում է որպես բովանդակային ապացույց, որում օգտագործվում են սովորական դատողությունները, իսկ տրամաբանական հետևության կանոնները չեն ֆիքսվում: Ապացուցման գործընթացը հիմնվում է ոչ միայն մաթեմատիկական օբյեկտների վրա. նրանում օգտագործվում են և սովորական, բնական լեզվի հասկացությունները: Ինտուիտիվ պահերից հրաժարվելը կպահանջեր բարձրացնել ապացուցման մակարդակը, որը շատ գիտնականների կարծիքով հնարավոր չէ դպրոցականների տարիքային առանձնահատկությունների պատճառով: Նախքան ապացուցման ուսուցման ընդհանրացված ըմբռնման ձևակերպումը, առանձնացնենք մի շարք հոգեբանական դրույթներ, որոնք դրա հետ անմիջական կապ ունեն: Գիտնականների կարծիքով ուղեղի կառուցվածքը, որը ղեկավարում է վերլուծական գործունեությունը, ձևավորվում է 13-14 տարեկան հասակում, իսկ ապացուցողական մտածողության զարգացումը անցնում է երկու փուլ: Դեռահասության տարիքում աշակերտը ավելի շուտ յուրացնում է ապացույցները, քան ինքնուրույն օգտվում է դրանցից: Իսկ պատանեկության տարիքում արդեն երևան են գալիս պատրաստի ապացույցների նկատմամբ քննադատական վերաբերմունք [142, 87]:

Ապացուցման ուսուցման մեջ առանձնացնենք երկու հիմնական մակարդակներ: Առաջին մակարդակում (4-7-րդ դասարաններ) ապացուցումների մեջ օգտագործվող տրամաբանական արտածումները երևան չեն բերվում, չեն բացատրվում, հիմնական ուշադրությունը դարձվում է այն բանի պարզաբանմանը, թե «ի՞նչ է ապացուցվում», «ինչի՞ց է այդ բանը բխում», բայց ոչ՝ «ինչպե՞ս է դա հետևում»: Այդ մակարդակում ապացուցումը դիտարկվում է ընդհանրապես որպես դատողություն, որի միջոցով մի պնդման ճշմարտությունը հաստատվում է այլ պնդումների ճշմարտության հիման վրա:

Երկրորդ մակարդակում (բարձր դասարաններում, նախասիրական պարապմունքների ժամանակ, կամ դպրոցներում, որտեղ մաթեմատիկան ուսուցանվում է խորացված կերպով) սովորողներին կարելի է բացատրել պարզագույն արտածման կանոնները և դրա հիման վրա ճշգրտել ապացուցման հասկացությունը: Այս մակարդակում սովորողներին հասանելի է դառնում ապացուցման վերլուծությունը, նրա տրամաբանական կառուցվածքի հայտնաբերումը, նրանում օգտագործվող արտածման կանոնները, բովանդակային ապացուցման գրառումը տրամաբանական ձևերով, այսինքն՝ նրա ֆորմալացումը:

70-ականների սկզբից, Դ. Պոյայի, Յու. Մ. Կոլյագինի, Զ. Կրիգովսկու, Պ. Մ. Էրդնիևի և այլոց աշխատանքների ազդեցության ներքո, փոխվում է ապացույցի ուսուցման մասին պատկերացումները [121], [122], [133]: Շեշտը դրվում է ապացույցի էվրիստիկական բաղադրիչի վրա: Ա. Ա. Ստոլյարը հետևյալ կերպ է արտահայտում այդ միտքը. «Ապացուցման ուսուցման տակ մենք հասկանում ենք փնտրման մտավոր գործընթացների սովորեցում, ապացույցի հայտնագործում և կառուցում, այլ ոչ թե սովորեցնել վերարտադրել և անգիր անել պատրաստի ապացույցները» [142, 87]:

Ապացուցման ուսուցման սկզբնական մակարդակը բնութագրվում է սովորողների կողմից տրամաբանական հիմնավորումների հասկացման անհրաժեշտությամբ, որը պահանջում է ընդամենը պարզագույն արտածումների իրականցման հմտություններ, այն բանի հասկացում, որ մի շարք պնդումներից տրամաբանական գործողություններով կարելի է դուրս բերել նոր պնդումներ:

Իսկ հաջորդ մակարդակը ներառում է դպրոցականների կողմից դեդուկտիվ մտահանգումների շղթաներ իրականացնելու կարողությունը, ինչպես նաև հետևության արտածման գործողությունների տիրապետումը, խնդրի պահանջների վերարտադրումը նորի մեջ, օգնող խնդիրների կազմումը: Այդ գործողությունները առաջացնում են խնդրի լուծման մեթոդի որոնման հիմք, ինչպես նաև գիտական ճանաչողության մեթոդների (անալոգիա, վերլուծում, ընդհանրացում և այլն) կիրառում տարբեր իրադրություններում, և այդ իմաստով ունեն էվրիստիկական բնույթ: Այդ մակարդակն իր բովանդակությամբ վերաբերում է երկրաչափության և հանրահաշվի առաջին բաժինների համակարգված շարադրանքներին:

Ապացուցման մեջ տրամաբանական քայլերի շղթա կազմելու կարողությունների ուսուցումը և նշված էվրիստիկական գործողությունների կիրառումը կազմում է ուսուցման բովանդակությունը ապացուցման դիտարկվող մակարդակի մեջ: Իսկ ապացուցման վերլուծությունը՝ տրամաբանական քայլերի առանձնացումը, տրամաբանական բացթողումների փնտրտուքը և վերացումը, ապացուցման գաղափարների առանձնացումը և նրա վերարտադրումը կազմում են ըմբռնման բովանդակությունը: Դասագրքերի, հատկապես երկրաչափության դասագրքերի, հնարավորությունները նշված էվրիստիկական եղանակների ձևավորման համար բավականին շատ են: Երկրաչափության դասընթացի առաջին թեորեմների ուսուցումը, օրինակ, եռանկյունների հավասարության հայտանիշները, նպաստում են սովորողների մոտ անալոգիայի, իսկ խնդրի հետ աշխատելու վերջնական փուլը՝ ընդհանրացման և կոնկրետացման մեթոդների կիրառման կարողությունների ձևավորմանը:

Փաստերի ինքնուրույն բացահայտման, ձևակերպումների, ապացույցների կառուցման մեջ աշակերտների մասնակցությունը, բնականաբար, առաջացնում է տարբեր բնույթի սխալներ, այդ պատճառով կարևոր է սեփական աշխատանքի և իր ընկերների աշխատանքների արդյունքները քննադատաբար գնահատելու կարողությունը, որոնք և ձևավորվում են առաջարկվող պնդումների ժխտման և ապացուցման գործընթացի մեջ: Ապացուցելու այդ առավել բարձր ուսուցման մակարդակը հիմնավորված է նաև հոգեբանական հետազոտությունների արդյունքներով: Հիշենք, օրինակ, Պ. Պ. Բլոնսկու աշխատանքները, որոնցում նշվում է դեռահասության տարիքում շրջապատի և ուսուցանվող նյութի հանդեպ քննադատական կարողությունների առկայություն, որոնց զարգացումը նպաստում է պատրաստի ապացույցների հերքման գործունեությունը: Ապացույցի ուսուցման այդ մակարդակը կարելի է իրականացնել 8-9-րդ դասարաններում [107], [108]:

Ուսուցչի աշխատանքի մեջ կարևոր է տրամաբանական հիմնավորումների ձևավորման պահանջների իրականացումը: Կարևոր խնդիր է դպրոցականներին սովորեցնել տրամաբանորեն դատելու ունակություն: Լավ կազմակերպված դասավանդման պայմաններում սովորողները արդեն 7-րդ դասարանում առաջին դասերից տիրապետում են այնպիսի դատողությունների, որոնց հիմքը կազմում են հետևության և ժխտման կանոնները, և հետագայում օգտագործում են այդ կանոնները որպես ճանաչողության գործողություններ կատարելու կողմնորոշիչ հիմք:

Հիմնական դպրոցում հարկավոր է իրականացնել ապացույցի վերլուծություն՝ առանձնացնել նրանում տրամաբանական քայլեր, դիտարկել տարբեր դեպքեր և այլն:

Ապացուցման խնդրի լուծման վերաբերյալ Դ. Պոյան խորհուրդ է տալիս վարվել այսպես՝ լուծման պլան իրականացնելով՝ կոնկրետացրեք սեփական ամեն մի քայլ [133]: Իսկ դրա համար օգտակար են հետևյալ հարցերը՝ ձեզ պա՞րզ է, որ ձեր կողմից ձեռնարկվող քայլը ճիշտ է, կարո՞ղ եք ապացուցել, որ դա ճիշտ է: Պարզ է, որ այդ հարցերի պատասխանը ենթադրում է տրամաբանական գործողությունների և առաջին հերթին արտածման կանոնների տիրապետում:

Անդրադառնալով ապացուցումների և արտածումների ուսուցման խնդրին՝ նշենք, որ արտածման պարզագույն կանոնների յուրացումը դեռևս չի նշանակում, որ դրանք յուրացնողը անհրաժեշտության դեպքում կարող է եզրակացությունը արտածել տրված նախադրյալներից, մտածել համապատասխան արտածման կանոնի մասին, այնպես, ինչպես քերականական կանոնների յուրացումը դեռևս չի նշանակում, թե այն իմացողը կարող է յուրաքանչյուր անգամ որոշել, թե իր մտքերը շարադրելու համար ի՛նչ կանոն պետք է կիրառել:

Ինտուիցիան և առողջ բանականությունը երբեմն բավարար չեն լինում ճիշտ դատելու համար, այնպես, ինչպես իր մտքերը լեզվի միջոցներով ճիշտ շարադրելու համար: Բայց ինտուիցիան՝ ինքը, կարող է մշակվել ու ձեռք բերվել որոշակի կանոններով կատարվող բազմակի փորձերի արդյունքում: Մանկավարժական փորձը ցույց է տալիս, որ արտածման պարզագույն կանոնների ուսուցումը և դրանց կիարառման ուղղությամբ մշակված խնդիրների համակարգը հանգեցնում են ճիշտ կառուցված դատողությունների կազման ուղղությամբ ինտուիցիայի զարգացմանը: Եվ դրա շնորհիվ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում սովորողների մոտ ձևավորվում ու զարգանում են այնպիսի կարողություններ, որոնք օգնում են կշռադատություններ կատարելիս հանգել հիմնավոր եզրակացությունների ինչպես մաթեմատիկայի և մյուս առարկաների ուսումնառության ընթացքում, այպես էլ առօրյա կյանքում:

Կարևոր է նշել նաև այն հանգամանքը, որ մինչև վերջին տասնամյակները տարածում էր գտել այն տեսակետը, համաձայն որի ապացուցողական կարողությունների զարգացման գործառույթը իրականացվում էր առավելապես երկրաչափության դասընթացում: Սակայն անբացատրելի էր մնում այն հարցը, թե տրամաբանական կառուցվածքի տեսակետից ինչու՞ պետք է էական տարբերություններ լինեն զուգահեռաբար ուսուցանվող մաթեմատիկական երկու առարկաների՝ հանրահաշվի և երկրաչափության միջև, մի՞թե դա չի հակասում մաթեմատիկայի ամբողջական ընկալմանը: Ինչպես արդեն նշել ենք, նախորդ դարի վերջին այդ հիմնահարցի հաղթահարման ուղղությամբ մեզանում կատարվեցին լուրջ աշխատանքներ, որոնց արդյունքում ստեղծվեցին հանրահաշվի ուսումնական նոր ձեռնարկներ [65], [66], [67]: Եվ ուշագրավ է այն փաստը, որ, ինչպես ցույց են տալիս վերլուծությունները, նոր հայեցակարգի հիման վրա մշակված հանրահաշվի դասընթացի կառույցն ու նրանում գործող տրամաբանական ձևերը նույնիսկ ավելի պարզ և ընկալելի են, քան երկրաչափության մեջ: Ավելին, հանրահաշվի դասընթացի հիմքում ընկած տրամաբանական կառույցը հնարավորություն է տալիս նրա միջոցով իրականացնել սովորողների տրամաբանական մտածողության ձևավորման ու զարգացման ամբողջական ու բացառիկ մի գործառույթ: Ինչպես նշում է Հ. Ս. Միքայելյանը. «Մինչ այդ գործող դասընթացներում կարևորագույն ու նպատակային այս պահանջը ամբողջությամբ մղված էր երկրորդական պլան: Դրանք, ըստ էության, զուրկ էին համակարգված ապացուցողական կառույցից: Չնչին բացառություններով, հանրահաշվական կարևորագույն փաստերը տրվում էին առանց ապացույցի: Մինչդեռ երկրորդական նշանակություն կամ արժեք ունեցող, մեծ մասամբ՝ զանազան վարժություններ, հանգամանորեն լուծվում էին: Այսինքն՝ շեշտը դրվում էր ոչ թե գաղափարական-բովանդակային հիմնավորումների, այլ տեխնիկական-վարժանքային հարցերի վրա, որոնք որևէ կապ չունեին սովորողների տրամաբանական զարգացման խնդրի հետ» [68, 22]:

Նշված դասընթացում հանրահաշվի տեսական նյութի շարադրանքը, ինչպես որ երկրաչափության պարագայում, կրում է դեդուկտիվ բնույթ: Առկա են հիմնական հանրահաշվական հասկացությունները, որոնց միջոցով կառուցվում է հանրահաշվի լեզուն: Առկա են աքսիոմները, որոնցից հետևում են թեորեմները (դրանք դասընթացում կոչվում են հատկություններ)՝ յուրաքանչյուրն իր ապացուցումով [78, 23-43]: Առկա են նաև արտածման կանոնները: Ընդ որում՝ ապացուցումների ներկայացման մեջ կիրառվում են նոր մոտեցումներ, որոնց հետ կապված մեթոդական հարցերը արժանի են հատուկ քննարկման:

2.2.2. Հանրակրթական դպրոցում մաթեմատիկական ապացուցումների ներկայացման մի նոր եղանակի մասին

Գիտելիքների հիմնավորման մասին Արիստոտելի ուսմունքը, համաձայն որի «Գիտենալ՝ նշանակում է ապացուցել», նախ և առաջ վերաբերում է մաթեմատիկային, որում ասելիքի բովանդակությունը նույնացվում է նրա ապացուցվածության հետ: Սակայն, պատմական զարգացման ընթացքում գիտությունն առհասարակ, այդ թվում և մաթեմատիկան պարբերաբար բախվում էր ճանաչողական դժվարին խնդիրների, որոնց լուծումը պահանջում էր վերակառուցել նրա հիմքերը, իսկ երբեմն կատարել նաև արմատական և սկզբունքային փոփոխություններ: Մաթեմատիկայի պարագայում այդպիսի դժվարությունները առավելապես կապվում էին ապացուցման եղանակների հետ, ինչը հարկադրում էր նախ և առաջ ճշգրտումներ կատարել «ապացուցում» հասկացության բովանդակության մեջ:

Քսաներորդ դարի սկզբին, փորձելով հաղթահարել մաթեմատիկայում և փիլիսոփայության մեջ ծագած մի շարք լուրջ դժվարություններ, գերմանացիականավոր մաթեմատիկոս *Դ. Հիլբերտը* (1862-1943) տվեց մաթեմատիկական ապացուցման հետևյալ սահմանումը, որը կարելի էր հեշտությամբ մոդիֆիկացնել նաև այլ գիտությունների համար:

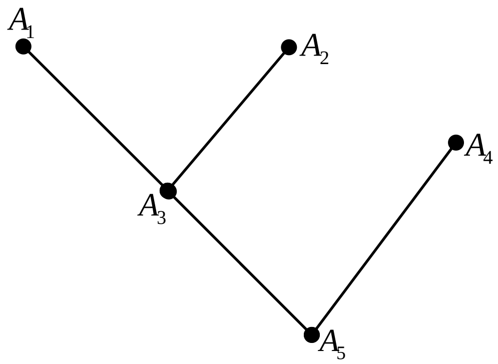
A բանաձևի ապացուցումը բանաձևերի այնպիսի $A_1, A_2, \ldots, A_n$ հաջորդականությունն է, որի յուրաքանչյուր անդամ կա՛մ աքսիոմ է, կա՛մ էլ ստացվում է իր նախորդներից՝ արտածման ինչ-որ կանոնով, իսկ վերջին անդամն էլ հենց A-ն է:

Թվում է, թե առանձին բացատրության կարիք չունի այս սահմանամն մեջ կիրառվող «աքսիոմ» եզրույթը. յուրաքանչյուր գիտություն կամ տեսություն ունի աքսիոմների կամ անառարկելի դրույթների իր համակարգը, որոնք որպես ճշմարտություններ ընդունվում են այդ գիտության կամ տեսության շրջանակներում: Ինչ վերաբերում է արտածման կանոններին, ապա դրանք էլ կարող են լինել այդ տեսության արդեն ապացուցված դրույթներ կամ մտահանգումների ձևեր, որոնք դարձյալ ճշմարիտ են համարվում տվյալ գիտության կամ տեսության շրջանակներում: Օրինակ, իրավունքի տեսության մեջ կիրառվում է այսպիսի արտածում. ՀՀ բոլոր չափահաս քաղաքացիները ունեն ընտրելու իրավունք, Ա –ն ՀՀ չափահաս քաղաքացի է, ուրեմն՝ Ա-ն ունի ընտրելու իրավունք: Հանրահաշվի դասընթացում կիրառվում է, օրինակ, եթե A-ից հետևում է B, իսկ B-ից՝ C, ապա A-ից հետևում է C տեսքի արտածման կանոն:

Առօրեական խոսքում և հասարակական գիտությունների մեջ միշտ չէ, որ հնարավոր է լինում հետևել ապացուցման այս ընթացքին, իսկ երբեմն էլ անհնար է լինում նման ապացուցումներ կատարել. այստեղ վիճարկելի են լինում ինչպես որպես աքսիոմ կամ ճշմարտություն ներկայացվող դրույթները, այնպես էլ արտածման կանոնները: Այլ է պատկերը մաթեմատիկայում, որտեղ հստակ են թե՛ աքսիոմները, թե՛ արտածման կանոնները: Այդ պատճառով մաթեմատիկական ապացուցումը հավաստի է և դրա արդյունքում ստացված բանաձևի, այսինքն՝ ապացուցված թեորեմի կամ պնդման ճշմարտացիության հարցը կասկածի տակ չի առնվում:

Ապացուցմանը տրված Հիլբերտի վերոհիշյալ սահմանման ուսուցումը, սակայն, հարուցում է լուրջ դժվարություններ: Ապացուցման յուրաքանչյուր քայլից, այսինքն՝ հաջորդականության մեկ բանաձևից հաջորդին անցման ընթացքը պահանջում է հիմնավորում. անհրաժեշտ է նշել, թե այդ հաջորդ բանաձևը արդյո՞ք աքսիոմ է, թե՞ ստացվել է իր նախորդներից արտածման ինչ-որ կանոնով: Առաջին դեպքում պետք է նշել համապատասխան աքսիոմը, իսկ երկրորդ դեպքում՝ արտածման կանոնը և այն բանաձևերը, որոնցից ստացվել է տվյալ բանաձևը՝ արտածման այդ կանոնով: Այս արարողությունների ձևակերպումը և ներկայացումը ուսուցչից պահանջում են մեծ հմտություն, մանավանդ, երբ ապացուցումը բավականին երկար է լինում: Ահա այս դժվարությունը հաղթահարելու համար նպատակահարմար է ներմուծել ապացույցի *փաստարկման* հասկացությունը. ապացուցմանը զուգահեռ նշվող այն աքսիոմների և արտածման կանոնների անվանումների հաջորդականությունը, որոնք կիրառվում են ապացուցման համապատասխան քայլը հիմնավորելու համար: Փաստարկման այս հասկացությունը նոր չէ. մաթեմատիկայի արևմտյան շատ դասագրքերում թեորեմի ապացուցման քայլերին զուգահեռ բերվում են նաև դրանց փաստարկումները: Սակայն պետք է խոստովանել, որ հաջորդականության տեսքով տրված ապացուցումներում կատարվող փաստարկումներում տեխնիկապես դժվար է նշել, թե ապացուցման քայլը կատարելիս հատկապես ո՞ր բանաձևերի նկատմամբ է կիրառվում այս կամ այն արտածման կանոնը: Իսկ եթե նման հստակեցում մտցվի էլ, ապա այն ապացույցին տալիս է շատ ծավալուն տեսք, և պատկերման տեխնիկական բարդությունները հանգեցնում են ապացույցի նկատմամբ հետաքրքրության կտրուկ թուլացման: Ահա այստեղ մեզ օգնում է ապացուցման մեկ այլ եղանակ, որ տվել է Հիլբերտի աշակերտ Հենցենը՝ *ապացուցումը ներկայացնելով ծառի տեսքով* [113]: Ներկայացնենք Հենցենի մտահղացումը կոնկրետ օրինակի վրա:

Դիցուք ունենք բանաձևի A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ապացուցումը և ուզում ենք այն սովորեցնել աշակերտին: Այստեղ մենք պետք է նշենք նախ կիառվող աքսիոմները, ապա և արտածման կանոնները: Ընդունենք, որ, ասենք, առաջին, երկրորդ և չորրորդ բանաձևերը աքսիոմներ են կամ տրված պայմաններ, իսկ երրորդ և հինգերորդ բանաձևերը՝ ստացվում են այդ բանաձևերից՝ արտածման կանոններով, ընդ որում, երրորդը՝ առաջին երկուսից, իսկ հինգերորդը՝ երրորդից և չորրորդից: Մենք պարտավոր ենք դրանք հերթականությամբ նշել մեր ապացուցման ընթացքում և հանգել բանաձևի ապացուցման: Նման գործընթացը սովորաբար ձգձգվում է, և նրա պատկերումը ամբողջական տեսք չի ստանում: Այժմ հետևենք Հենցենին: Նա այդ ապացուցումը ներկայացնում է հետևյալ «ծառի» տեսքով, նախապես պայմանավորվելով, որ ծառի գագաթներում գրված բանաձևերը աքսիոմներ են, իսկ երկու կամ մի քանի ծառերից ներքև և այդ ծառերին գծերով (ճյուղերով) միացված բանաձևը ստացվում է այդ բանաձևերից արտածման համապատասխան կանոնով, ինչը որպես փաստարկ մենք գրում ենք ապացուցման կողքին բերված փաստարկումների բաժնում՝ որպես այդ քայլի փաստարկում (հիմնավորում): Ապացուցումը և փաստարկումը ստանում են հետևյալ վերջնական տեսքը (տես գծ.1) [73, 113-122]:

Ապացուցումը	Փաստարկները
	աքսիոմներ աքսիոմ հետևում է A_1 -ից A_2 -ից արտածման կանոնով հետևում է A_3 -ից և A_4 -ից արտածման կանոնով

գծ.1

Այստեղ հստակ երևում է, որ A_3 բանաձևը ստացվել է A_1 և A_2 բանձևերից, իսկ A_5 -ը՝ A_3 և A_4 բանաձևերից:

Գեղեցի՞կ է: Խոսքը իհարկե գծագրի մասին չէ (ինչը նույնպես ունի գեղագիտական իր գրավչությունը): Այն հնարավորություն է տալիս աշակերտին տեսնելու թեորեմի ապացուցման հիմքում ընկած դատողությունների և մտահանգումների ողջ մեխանիզմը և հստակ պատկերացնելու փաստարկումների ողջ համակարգը: Նշենք, որ այդպես է կատարվում ու ներկայացվում ապացուցումը հանրահաշվի 7-9 դասարանների դասագրքերում [62], [63], [64]: Բերենք նման ապացուցուման լուսաբանող օրինակ դասագրքերից [63, 263]:

Քառակուսի արմատների արտադրյալը

Ոչ բացասական թվերի քառակուսի արմատների արտադրյալը հավասար է այդ թվերի արտադրյալի քառակուսի արմատին: Այսինքն կամայական a և b ոչ բացասական թվերի համար $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ (տես գծ.2):

Ապացուցումը	Փաստարկները
a , b	ոչ բացասական իրական թվեր
$\sqrt{a} \geq 0 \quad \sqrt{b} \geq 0$	արմատի սահմանումը
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$	ոչ բացասական թվերի արտադրյալի հատկությունը
$(\sqrt{a}\ .\sqrt{b}\,)^2 = a \cdot \mathrm{b}$	աստիճանի և արմատի հատկությունները
$\sqrt{a}\ .\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$	արմատի սահմանումը

գծ.2

Այստեղ, փաստարկումների բաժնում նշված են նաև արտածման այն կանոնները, որոնց միջոցով կատարված են արտածումները:

Մոսկովյան համալսարաններից մեկի մաթեմատիկայի ամբիոնի վարիչ, պրոֆեսոր Լ. Տիմոֆեևան ապացուցումների նման ներկայացումը կարևորում է որպես ուսուցիչների պատրաստման լավագույն միջոց, իսկ աշակերտի համար համապատասխան խնդրի իրագործումը համարում է մեթոդական լուրջ հիմնախնդիր, որ կարոտ է լուծման [150]: Հարգարժան պրոֆեսորը հավանաբար ծանոթ չի եղել իր աշխատանքից տարիներ առաջ իրականացված հայաստանյան փորձին, որտեղ մեթոդական այդ «լուրջ հիմնախնդիրը» լուծվել, իրականացվել է դասագրքերի մակարդակով և արդյունքները մտցվել են հանրակրթություն:

Նշենք նաև, որ այստեղ խոսքը ամենևին էլ ավանդական և ոչ ավանդական ապացուցումների մասին չէ, ինչպես նշվում է Է. Այվազյանի [7] աշխատանքում: Այդ աշխատանքում որպես ապացուցման ոչ ավանդական եղանակ է ներկայացվում արևմտյան դասագրքերում մեծ տարածում գտած փաստարկումները ապացուցումից առանձնացնելու եղանակը, ինչին հեղինակը նույնպես հետևել է երկրաչափական առանձին թեորեմների ապացուցումներ ներկայացնելիս: Իհարկե, ապացուցումից նրա փաստարկումների առանձնացումը մեթոդական կարևոր քայլ է թեորեմի մտահանգումների հիմնավորումները հասկանալու, փաստարկման մշակույթի ձևավորման համար: Բայց հեղինակը չի կարևորում այն պահը, որ բոլոր այդ և իր կատարած ապացուցումները ներկայացված են իրար տակ գրված դատողությունների հաջորդականության տեսքով, և դրանցում խոսք անգամ չկա հենցենյան ապացուցումների մասին: Իսկ [62]-[67] դասագրքերում կատարվածը հենց այդ ապացուցումների մասին է և որակապես նոր մեթոդական քայլ է այլ հարցի լուծման համար:

Հանրահաշվի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներմուծումը և աքսիոմատիկ մեթոդը լայնորեն կիրառելու միջոցով նրա բովանդակային կառույցին ապացուցողական տեսք տալու անհրաժեշտությունը պայմանավորված է նաև հենցենյան սխեմաների կիրառմամբ: Մենք ժամանակին նշել ենք, որ նախ միանգամայն բնական է մաթեմատիկայի ապացուցողական կառույցի աքսիոմատիկ տեսքը ներգրավել ոչ միայն երկրաչափության, այլև հանրահաշվի դասընթացում: Միաժամանակ, նշենք նաև, որ հանրահաշվական թեորեմները և, մանավանդ, դրանց ապացուցումները հաճախ ավելի պարզ տեսք ունեն, քան երկրաչափական մի շարք թեորեմներ՝ իրենց ապացուցումներով: Երկրաչափական օբյեկտները՝ կետը, ուղիղը, հարթությունը, տարածությունը և այլն, չնայած իրենց դիտողական հնարավորություններին, ունեն նաև ընկալման որոշակի բարդություններ՝ կապված անընդհատության և անվերջության հետ: Մաթեմատիկական և փիլիսոփայական խորը արմատներ ունեցող այդ վերջին կատեգորիաները, որ քողարկված ձևով ուղեկցում են երկրաչափական բոլոր հասկացություններին, ուսուցանվող նյութին հաղորդում են առաջին հայացքից չերևացող դժվարություններ, որոնք ի վերջո անդրադառնում են ուսուցման մատչելիության վրա: Այնինչ, հանրահաշվական նյութը հնարավորություն ունի մի զգալի մասով զերծ մնալու նման խոչընդոտներից: Հենցենյան ապացուցումների սխեման, որ հեշտությամբ և մեծ արդյունավետությամբ կիրառվում է հանրահաշվական թեորեմների և վարժությունների ապացուցումներում, նոր հեռանկար է ստեղծում նաև երկրաչափության և մաթեմատիկական մյուս բնագավառների՝ դասընթացներում ուսումնասիրվող պնդումների ապացուցումները պատկերավոր և ընկալելի ներկայացնելու գործում:

Անդրադառնանք նաև հանրահաշվի դասընթացում տրամաբանության տարրերի, մասնավորապես՝ ապացուցումների կիրառման նպատակահարմարության հարցին՝

կապված աշակերտների տարիքային առանձնահատկությունների հետ: Չնայած երկրաչափության դասընթացի շարադրման փորձը ըստ էության հերքում է դեռևս հանդիպող առարկությունը, բայց ընդդիմախոսներն այստեղ նշում են ավանդույթի ուժը, վկայակոչելով, որ դարեր շարունակ երկրաչափությունը շարադրվել է աքսիոմատիկ մեթոդով, իսկ հանրահաշիվը՝ ոչ: Սակայն դա բավարար փաստարկ չէ զուգահեռաբար և միաժամանակ ուսուցանվող երկու դասընթացներում բոլորովին տարբեր մոտեցումներ ցուցաբերելու համար, հատկապես եթե նկատի ունենանք, որ բազմաթիվ երկրներում (օրինակ Վրաստանում) այդ երկու առարկաները ինտեգրված են մեկ առարկայի տեսքով: Ապացուցումների ուսուցման խնդիրները կապված են ոչ այնքան այն բանի հետ, թե ապացուցվող պնդումը վերաբերում է տարածակա՞ն, թե՞ քանակական առնչություններին, այլ այն բանի հետ, թե ապացուցման տվյալ մեթոդը որքանով է համապատասխանում սովորողների ընկալումներին: Հայտնի մեթոդիստ Գ. Ի. Սարանցևը հետևյալ կերպ է ներկայացնում աշակերտների կողմից ապացուցման ուսուցման մակարդակների ընկալունակությունը՝ ելնելով նրանց տարիքային առանձնահատկություններից [142].

5-6-րդ դասարաններ.

- տրամաբանական ապացուցումների իրականացման պահանջմունքների ձևավորում,
- տրամաբանական արտածումների իրականացման ունակությունների ձևավորում:

6-7-րդ դասարաններ

- էվրիստիկական հնարքների և նրանց կիրառության ուսուցում,
- տրամաբանական քայլերի շղթայի կատարման ուսուցում:

7-րդ դասարան

- պատրաստի ապացուցման ինքնուրույն վերլուծության/ռազբոռի ուսուցում,
- ապացուցման գաղափարի առանձնացման ունակության ձևավորում:

7-8-րդ դասարաններ

- ապացուցման գիտական մեթոդի օգտագործման ուսուցում,
- ճանաչողության գիտական մեթոդների օգտագործման ուսուցում:

9-րդ դասարան

- ապացուցման ենթակա դրույթի հերքման ձևավորում և զարգացում:

Ինչպես տեսնում ենք, միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներմուծումը, այդ ընթացքում նաև աքսիոմատիկ մեթոդի ուղեկցությամբ դասընթացի առանձին հատվածների շարադրանքը լիովին տեղավորվում են Սարանցևի մոտեցումների շրջանակներում: Ավելին, ապացուցման Հենցենյան սխեմաների կիրառումը թույլ է տալիս սովորողին հստակորեն պատկերացնել ապացույցի սխեման, դրանով հնարավորություն ստեղծելով կատարելու դրա կառուցվածքի վերլուծություն՝ ունակություն, ինչին, Սարանցևի տեսակետով, պետք է տիրապետեն արդեն վեցերորդ դասարանի աշակերտները:

Ապացուցումների ներկայացման հենցենյան սխեմաները ուսուցման ընթացքում կարող են կատարել բազմաթիվ դիդակտիկական գործառույթներ կամ էլ օգնել մանկավարժական այլ գործառույթների իրականացմանը: Օրինակ, դասավանդվող նյութի կրկնությունների կազմակերպման գործառույթի մեջ դրանք կարող են խաղալ շատ կարևոր և օգտակար դեր, քանի որ ապացուցման «ծառի ճյուղերի» համար փաստարկներ նշելիս շարունակ ակտիվորեն վերարտադրվում է այն ողջ գիտելիքների համակարգը, որը ներառում է նախկինում ուսումնասիրված օրենքները, հատկությունները, բանաձևերը, և միաժամանակ նպաստավոր պայմաններ են ստեղծում դրանց միջև կապերի բացահայտման համար:

Այսպիսով, երբ ապացուցումների ուսուցումը կազմակերպվում է հենցենյան ծառի տեսքով, ապա դրանք, մի կողմից աշակերտներին հնարավորություն էին տալիս նորովի մոտենալ ապացուցումներին, ընկալել դրանց հիմքում ընկած մեխանիզմը: Մյուս կողմից, ապացուցմանը զուգահեռ տրված փաստարկումների համակարգը թույլ է տալիս նշել ապացուցման մեջ կիրառվող հատկությունները կամ թեորեմները՝ հնարավորություն տալով վերհիշել դրանք, իսկ հաճախակի կիրառությունը ամրապնդում է դրանց իմացությունը՝ դրանք դարձնելով աշակերտների սեփականությունը: Ընդ որում, ապացուցումների նման ուսուցումը հաճախ հնարավոր է իրականացնել խաղերի միջոցով, ինչը էականորեն բարձրացնում է սովորողների ակտիվությունը, դասին հաղորդում առանձին դինամիկա [58]: Պարզվում է, որ վարժվելով ապացուցման նման ընթացքին, որոշ ժամանակ անց աշակերտները սկսում են չկարևորել նույնիսկ «ծառի» գծագրի արտաքին գրավչությունը, որը սկզբնական փուլում կարևոր է համարվում, որովհետև հասնում են ավելի խորը՝ հասկացությունների, նրանց հատկությունների միջև առկա կապերի բացահայտման և, ուրեմն, ավելի խորքային գեղագիտական գրավչության ըմբռնման:

Հենցենյան ծառի տեսքով ներկայացվող ապացուցումների ուսուցման վերաբերյալ մեր կողմից կատարվել է գիտափորձ, որի նկարագրությունն ու վերլուծությունը կներկայացնենք առանձին պարագրաֆով:

2.3. Կրթության բովանդակության բարեփոխումը և ուսուցման մեթոդների կատարելագործումը

2.3.1. Տրամաբանության հիմունքները որպես մաթեմատիկական կրթության բովանդակային բաղադրիչ

Աշխարհում տեղի ունեցող արդի զարգացումներն իրենց անմիջական ներգործություններն են ունենում կրթական համակարգի վրա՝ առաջադրելով գիտելիքահեն տնտեսության և տեղեկատվական հասարակության պայմաններում գործող մարդու ձևավորման նոր խնդիր: Այդ խնդրի լուծումը ենթադրում է բովանդակային և մեթոդական բարեփոխումներ ինչպես հանրակրթության, այնպես էլ բուհական և հետբուհական կրթության բնագավառներում: Առաջ են գալիս իրենց լուծումը պահանջող մի շարք հրատապ հարցեր:

Ինչպես բազմիցս նշվել է, ժամանակակից կրթական հայեցակարգերում ավելի է կարևորվում սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման խնդիրը [44]: Այդ առումով Հայաստանում, ինչպես նաև բազմաթիվ այլ երկրներում, հանրակրթական դպրոցների մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչներում և ծրագրերում ընդգրկվել են տրամաբանության հիմունքներին վերաբերող ամբողջական թեմաներ, որոնք նախկինում համակարգված ձևով չէին ուսումնասիրվում [53]: ՀՀ-ում հանրակրթության պետական չափորոշչին համապատասխան. սկսած տարրական դպրոցի և այնուհետև միջին և ավագ դպրոցների մաթեմատիկայի դասընթացներում մատչելի ձևով արդեն դիտարկվում են մաթեմատիկական տրամաբանության տարրերին վերաբերող մի շարք կարևորագույն հարցեր, ինչպիսիք են, օրինակ, ասույթ, ասույթի ճշմարտային արժեքները, ասույթների տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը, հետևությունը, համարժեքությունը, համարժեքության կանոնները, ինչպես նաև փոփոխական պարունակող ասույթներ, «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևեր ունեցող դատողություններ և այլն [63], [68]:

Հանրակրթական դպրոցների մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշիչներում և ծրագրերում կատարված այդ փոփոխությունները անհրաժեշտաբար առաջ են բերում համարժեք փոփոխություններ մաթեմատիկայի ուսուցիչների պատրաստման համակարգում. մասնավորապես բուհական մասնագիտական չափորոշիչներում և ուսումնական ծրագրերում անհրաժեշտ է ուժեղացնել տրամաբանությանը վերաբերող բաղադրիչի կշիռը: Այսինքն՝ մաթեմատիկայի ուսուցիչների պատրաստման համար անհրաժեշտ է մանկավարժական բուհերի կրթական ծրագրերում ընդգրկել այնպիսի դասընթացներ, որոնք կապահովեն հանրակարթական ծրագրերում ներմուծված նոր թեմաների գիտատեսական հիմունքների խորքային ուսումնասիրությունը:

Մյուս հարցադրումը հետևյալն է. մաթեմատիկայի հանրակրթական ծրագրերում տրամաբանության հիմունքներին վերաբերող՝ արդեն կատարված բովանդակային փոփոխություններն արդյոք բավարա՞ր են սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման խնդիրը լիարժեք լուծելու համար, թե՞ անհրաժեշտ է կատարել բովանդակային այլ փոփոխություններ ևս: Այս առումով կարևոր է նշել, որ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման խնդիրը իրականացվում է հիմնականաում երկու եղանակով՝

ա) տրամաբանության հիմունքներին վերաբերող որոշակի գիտելիքների համակարգված ուսուցման և

բ) մաթեմատիկական այս կամ այն տեսության (թվաբանության, հանրահաշվի, երկրաչափության, մաթ. անալիզի տարրերի, կոմբինատորիկայի և հավանականությունների տեսության տարրերի և այլն) ուսումնասիրման, դրանց վերաբերյալ խնդիրների և առաջադրանքների լուծման ընթացքում տրամաբանության կիրառման և տրամաբանական կարողությունների խթանման միջոցով:

Ընդ որում նկատենք, որ նշված երկրորդ եղանակը տրամաբանության հիմունքների ուսուցման առումով կրում է հիմնականում միջնորդավորված և տարերային բնույթ: Այսպես, օրինակ՝ դիտումները ցույց են տալիս, որ սովորողները բազմիցս գործ են ունենում սահմանման հետ, ընդ որում կարողանում են վերարտադրել բազմազան հասկացությունների սահմանումները: Մինչդեռ ինքնուրույն կերպով սահմանում ձևակերպելիս, սովորաբար, թույլ են տալիս բազմաթիվ սխալներ, և հիմնականում այն պատճառով, որ նրանք երբեք չեն ուսումնասիրել, թե ինչ է սահմանումը, կամ որոնք են սահմանման կանոնները և ինչպես է պետք կատարել այդ գործողությունը: Նույնը վերաբերում է տրամաբանական մյուս գործողություններին՝ դասակարգմանը, ապացուցմանը, հերքմանը և այլն: Դրանց վերաբերյալ սովորողները՝ ինչպես աշակերտները, այնպես էլ մանկավարժական բուհերի ուսանողները, այդ մասին ունեն սոսկ ընդհանուր, կցկտուր պատկերացումներ, բայց դրանք երբեք չեն եղել հատուկ ուսուցման առարկա: Այսինքն՝ մտածողության ընդհանուր օրենքներին վերաբերող հիմնարար գիտությունը՝ տրամաբանությունը, լիարժեք չի ընդգրկվել ուսումնական ծրագրերում, և այդ պատճառով այսօր դեռևս առկա է տրամաբանական թերկրթվածության իրավիճակ: Տրամաբանական կրթվածության հիմնախնդիրը լուրջ հետազոտությունների առարկա է դարձել տարբեր մասնագետների կողմից: Անդրադառնալով այդ հետազոտություններին՝ Գ. Ա. Բրուտյանը հաստատում է. «Միանգամայն իրավացի են այն մասնագետները, ովքեր գտնում են, թե ուսումնասիրվող կոնկրետ առարկաների դասավանդման մակարդակի բարձրացումը հրամայաբար պահանջում է ուսուցչի մասնագիտական, մեթոդական պատրաստվածության հետ միասին արմատապես բարելավել *նրա տրամաբանական պատրաստվածությունը*» (ընդգծումը մերն է Ա. Մ.) [18, 44]:

Ուսուցչի տրամաբանական պատրաստվածության կարևոր ցուցանիշներից մեկը սովորողների պատրաստվածության մակարդակն է: Տրամաբանական կրթվածության վիճակի բացահայտման նպատակով մենք անցկացրել ենք հարցումներ ինչպես աշակերտների, այնպես էլ ուսանողների շրջանում: Պարզվում է, որ ուսանողների մոտ նույնպես հաճախ են հանդիպում այն տիպի սխալները, որոնք հանդիպում էին աշակերտների մոտ, ինչի մասին արդեն նշել ենք 1-ին գլխում: Դա ասում է այն մասին, որ սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման և տրամաբանական գրագիտության մակարդակի բարձրացման նպատակով անհրաժեշտ է կրթական ծրագրերում ավելի ուժեղացնել «Տրամաբանության հիմունքներ» բաղադրիչի դերը, քան արվում է ներկայումս: Եվ դա առաջին հերթին վերաբերում է մաթեմատիկական կրթության ծրագրերին, քանի որ մտածողության տրամաբանական կառուցվածքային ձևերը առավել հստակ և զտված կերպով են դրսևորվում մաթեմատիկայում: Եվ պատահական չէ, որ մաթեմատիկան և տրամաբանությունը հաճախ համեմատվում է մի շինության հետ, որտեղ մաթեմատիկայի հասկացություններն ու դրանց առնչությունները աղյուսների դեր են կատարում, իսկ տրամաբանությունը՝ դրանք միացնող ու ամրացնող շինանյութի՝ ցեմենտի շաղախի դեր [18, 45]: Ուրեմն, տրամաբանական գրագիտությունը պետք է դիտել որպես մաթեմատիկական մտածելակերպի և մաթեմատիկական կուլտուրայի անբաժան բաղադրիչ:

Կարևոր է մեկ անգամ ևս ուշադրություն դարձնել նաև հետևյալ հանգամանքի վրա: Տրամաբանությունը` որպես համընդհանուր կիրառություն ունեցող գիտություն, սերտորեն կապված է մեկ այլ հիմնարար գիտության` բազմությունների տեսության հետ [146]: Այդ երկու տեսությունների հիմնական դրույթները հեշտությամբ արտահայտվում, կամ «թարգմանվում» են մեկը մյուսով, տեսություններից մեկը մեկնաբանվում է մյուսով: Ինչպես ցույց ենք տվել վերևում, կան բազմաթիվ միջառարկայական խորքային կապեր բազմությունների տեսության և տրամաբանության միջև, իսկ այդ կապերի բացահայտումն ու լուսաբանումն ունեն կրթական մեծ նշանակություն [134]:

Այսպիսով, սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման խնդիրը սերտորեն կապված է, մի կողմից, լեզվական-արտահայտչական ձևերի (նախ և առաջ բնական լեզվի), իսկ մյուս կողմից` մաթեմատիկայի հիմնարար տեսություններից մեկի` բազմությունների տեսության հիմունքների զուգորդված ուսուցման խնդիրների հետ: Ավելին, տրամաբանությունը և բազմությունների տեսության միջոցով նրա մեկնաբանումը հնարավորություն է ընձեռում բացահայտելու ոչ միայն ներառարկայական կապեր բուն մաթեմատիկայում, այլև խորքային միջառարկայական կապեր ինչպես բնագիտական, այնպես էլ հումանիտար առարկաների միջև: Չէ՞ որ տրամաբանությունը հավասարապես գործում է ճանաչողության բոլոր բնագավառներում, ուրեմն և բոլոր ուսումնական առարկաների բովանդակության մեջ:

Տրամաբանության և բազմությունների տեսության հիմունքները համընդհանուր կիրառություններ ունեն նաև մաթեմատիկայի ուսուցիչների պատրաստման՝ մասնագիտական կրթության բնագավառի, կարելի է ասել, բոլոր առարկաների դասընթացներում: Այդ դասընթացների ուսումնասիրությունը արդյունավետ կլինի, եթե դեռևս առաջին կուրսում գործարկվի մի այնպիսի *ներածական դասընթաց,* որի հիմնական նպատակն է լինելու համակարգել ու խորացնել ուսանողների՝ տրամաբանության վերաբերյալ արդեն ունեցած գիտելիքները, և այնուհետև զարգացնել դրանց կիրառության համար անհրաժեշտ կարողությունները [42]: Ներածական դասընթացում պետք է դիտարկել տրամաբանության հիմնական օրենքները, մտածողության կառուցվածքային ձևերը՝ հասկացությունը, դատողությունը, մտահանգումը, տրամաբանական հիմնական գործողությունները՝ սահմանումը, դասակարգումը, ապացուցումը, հերքումը: Միաժամանակ պետք է ծանոթություն տալ նաև բազմությունների տեսության տարրերի և տրամաբանության հետ նրա փոխադարձ կապի մասին: Այդպիսի ներածական դասընթացը կնպաստի դասավանդվող մյուս առարկաների հիմնավոր յուրացմանը և հիմք կհանդիսանա մասնագիտական պատրաստվածության բարձրացման համար: Իսկ այդ պատրաստվածությունը պետք է ունենա շարունակական զարգացում նախ «Մաթեմատիկական տրամաբանություն» և «Բազմությունների տեսություն» դասընթացներով (2-րդ, 3-րդ կուրսեր), այնուհետև հատուկ դասընթացներով, ինչպես նաև կուրսային, դիպլոմային աշխատանքներով (4-րդ կուրս):

Վերոհիշյալ հարցադրումների տեսանկյունից նորովի մոտեցումներ են անհրաժեշտ մաթեմատիկայի ուսուցիչների պատրաստման բուհական կրթական ծրագրերը վերամշակելու գործընթացում: Մասնավորապես, մեր կողմից կատարված հետազոտությունների հիման վրա առաջարկվում է «Մաթեմատիկական տրամաբանություն» դասընթացի ծրագրում ներառել լրացուցիչ նոր թեմաներ, որոնք ուսանողների համար հնարավորություն կընձեռեն զարգացնել այնպիսի գիտելիքներ և կարողություններ, որոնք հիմք կհանդիսանան ոչ միայն մաթեմատիկական տրամաբանության ձևայնացված տեսությունները խորությամբ ընկալելու, այլև մաթեմատիկական մյուս տեսությունները հիմնավոր ուսումնասիրելու համար [84, 19-25]: Այսինքն, մաթեմատիկական տրամաբանության դասընթացը պետք է բաղկացած լինի երկու հիմնական բաժիններից: Առաջին բաժինը (դա հենց ծրագրում ավելացվող նոր նյութ է) նվիրվելու է դասական տրամաբանության հիմունքներին, որում ուսումնասիրվում են մաթեմատիկայի բոլոր բնագավառներում լայնորեն կիրառվող տրամաբանական գործողությունները, այդ թվում՝ սահմանումը, դասակարգումը, ապացուցումը և դրանց կանոնները: Այս բաժնի իմացությունը թույլ կտա, մի կողմից, բարձրացնել ուսանողների ընդհանուր տրամաբանական պատրաստության մակարդակը և մյուս կողմից՝ հիմք կհանդիսանա դասընթացի երկրորդ բաժնի յուրացման համար: Երկրորդ բաժինը նվիրված է ներկայումս գործող դասընթացի բովանդակությունը կազմող ասույթների և պրեդիկատների հաշիվներին, որոնք ներկայացվում են որպես աքսիոմակարգերով կառուցված տեսություններ:

Ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների համար մաթեմատիկական տրամաբանության դասընթացում կատարվող փոփոխությունը հնարավորություն է ընձեռում լուծելու հետևյալ խնդիրները.

ա) բարձրացնել մաթեմատիկական-մասնագիտական պատրաստության մակարդակը, հասուն լինել մաթեմատիկայի հիմունքների հետազոտության համար,

բ) խորացնել գիտելիքները ուսումնական առարկաների համակարգում միջառարկայական կապերի, դրանց հիմքերում ընկած տրամաբանական առնչությունների վերաբերյալ,

գ) զարգացնել տրամաբանական մտածողությունը, լեզվական արտահայտչական ունակությունները, մտածողական գործողություններում դրանց կիրառելու կարողությունը:

դ) ընդլայնել մտահորիզոնը, խթանել ստեղծագործական աշխատանքը, ձեռք բերել ինքնուրույն մտագործունեության փորձ:

Մաթեմատիկական տրամաբանության նորացված դասընթացը ուսանողների համար լուծելու է ևս մի կարևոր խնդիր. նրանք ձեռք են բերելու այնպիսի գիտելիքներ և կարողություններ, որոնք բավարար կլինեն հանրակրթական ավագ դպրոցներում դասավանդելու տրամաբանություն առարկան, որն ընդգրկված է դպրոցական ընտրողական առարկայացանկում: Այդ հանգամանքը ևս հաշվի է առնված մեր կողմից առաջարկվող ծրագրի բովանդակությունն ընտրելիս (առաջարկվող ծրագրի ամբողջական բովանդակությունը ներկայացված է հավելված 2-Գ-ում):

Մաթեմատիկայի ուսուցիչներ պատրաստող բուհերի դասընթացներում ծրագրային նոր նյութը ներառելու դեպքում շրջանավարտները լիովին պատրաստ կլինեն հանրակրթական ծրագրերում կատարվող փոփոխությունները խորությամբ ընկալելու և արդյունավետ ուսուցում իրականացնելու գործում: Սակայն այդ եղանակով հիմնահարցը դեռևս համալիր լուծում չի ստանում, քանի որ հանրակրթական դպրոցներում մաթեմատիկա դասավանդող ուսուցիչների հիմնական մասը բուհական կրթություն ստացել են տասնամյակներ առաջ, երբ տրամաբանության հիմունքները դասընթացներում բավարար ընդգրկվածություն չեն ունեցել: Ուստի առաջնահերթ կարևորության խնդիր է դառնում *ուսուցիչների վերապատրաստման համակարգի* բարելավումը: Նշենք, որ այդ ուղղությամբ ՀՀ կրթական համակարգում մեծ ծավալի աշխատանքներ են կատարվել. մշակվել են վերապատրաստման դասընթացների հայեցակարգեր [11], պատրաստվել անհրաժեշտ ուղեցույցներ ու ձեռնարկներ, որոնց ստեղծման գործում լուրջ համագործակցություն է իրականացվել նաև միջազգային կազմակերպությունների հետ [10], [31], [50]:

Այսպիսով, տրամաբանական պատրաստվածության վիճակի բարելավման մյուս, թերևս առավել գործնական նշանակություն ունեցող ուղին *ուսուցիչների վերապատրաստման գործընթացում տրամաբանության հիմունքներին վերաբերող բաղադրիչի ուժեղացումն է:* Վերջին տասնամյակում մշակվել են ձեռնարկներ և ուղեցույցներ, որոնք ծառայում են այդ նպատակին [7], [19], [26], [41]: Մաթեմատիկայի ուսուցիչների մասնագիտական զարգացման և վերապատրաստման դասընթացների՝

ներկայումս գործող ծրագրերում, որը հաստատվել է ՀՀ ԿԳ նախարարի 2011 թ. օգոստոսի 29-ի N 997-Ա/Ք հրամանով, նախատեսվում են այդ նպատակին ծառայող որոշակի թեմաներ [50, 9-11]: Մասնավորապես, այդ ծրագրում ընդգրկված թեմա 6-ը՝ «Առարկայի բովանդակության ներկայացման հիմունքները» և թեմա 7-ի՝ «Բովանդակային փոփոխությունները մաթեմատիկայի դասընթացում. առանձին թեմաների ուսուցման հարցեր» թեմայի երկրորդ կետը՝ «Բազմությունների տեսության և տրամաբանության տարրեր» ենթաթեման, անմիջականորեն շոշափում են ուսուցչի տրամաբանական պատրաստվածության մակարդակի բարձրացմանը նպաստող հարցեր: Ծրագրի այդ հատվածն ունի հետևյալ բովանդակությունը. *հասկացություն, սահմանում, աքսիոմ, թեորեմ, ուղիղ և հակադարձ թեորեմներ, ապացուցում և հերքում* (թեմա 6), ինչպես նաև՝ *ասույթ, ասույթի ժխտումը, ասույթների տրամաբանական գումարը և արտադրյալը, հետևություն (իմպլիկացիա), ասույթների համարժեքությունը, փոփոխական պարունակող դատողություններ (պրեդիկատներ), կապված և ազատ փոփոխականներ, ընդհանրության և գոյության քվանտորներ, գաղափար ինդուկտիվ և դեդուկտիվ մտահանգումների մասին* (թեմա 7-ի 2-րդ ենթամաս) [50, 80-88]:

Ուսուցիչների վերապատրաստման դասընթացներում այսպիսի թեմաների դիտարկումն, անշուշտ, առաջընթաց քայլ է, որի շնորհիվ այս կամ այն չափով լրացվում է այն պակասը, որը ժամանակին առաջացել է բուհական դասընթացներում տեղ գտած բացթողումների հետևանքով: Սակայն, դրանով հանդերձ, պետք է նկատել, որ վերոհիշյալ թեմաների բովանդակությունը զգալիորեն տարողունակ է, մինչդեռ վերապատրաստման ծրագրով դրան հատկացված է ընդամենը 5 ժամ (ըստ թեմաների համապատասխանաբար 3 ժամ և 2 ժամ), որը կազմում է դասընթացի ընդհանուր ժամաքանակի մոտ 6%-ը: Հատկացվող ժամաքանակի ավելացման հարցը թերևս կապված է կազմակերպական և այլ խնդիրների հետ, սակայն ուսուցիչների տրամաբանական պատրաստվածության մակարդակի բարձրացման կարևորությունը թելադրում է գտնել հիմնահարցի լուծման այլընտրական ուղիներ: Կարծում ենք, որպես այդպիսի ուղի կարող է ծառայել՝

ա) տրամաբանությանը նվիրված թեմաներով սեմինարների անցկացումը ԿԱԻ-ի մասնաճյուղերում, դպրոց-կենտրոններում, մանկավարժական բուհերում, բ) տրամաբանության վերաբերյալ գիտամեթոդական և ուսումնաօժանդակ ձեռնարկների հրատարակումը, տրամաբանությանն առնչվող հարցերի լուսաբանումը մանկավարժական մամուլում, օգտագործելով նաև ՏՀՏ ընձեռած հնարավորությունները:

2.3.2. Ուսուցման մեթոդների կատարելագործումը որպես տրամաբանական մտածողության զարգացման միջոց

Սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման նպատակին վերաբերող կարևորագույն խնդիրներից մեկը ուսուցչի մեթոդական պատրաստվածության բարձրացումն է: Դասավանդման ընթացքում մեթոդ ընտրելիս ուսուցիչը, ի թիվս այլ գործոնների, նախ և առաջ հաշվի է առնելու ուսուցման նպատակները, կրթական խնդիրները և ուսումնական նյութի բովանդակությունը: Հետևաբար, մաթեմատիկական կրթության բովանդակության մեջ տրամաբանության տարրերը որպես բաղադրիչ ներառելուն զուգընթաց ծագում է նաև ուսուցման մեթոդների և մեթոդական հնարների կատարելագործման հիմնահարց: Այդ առումով պահանջվում է հստակեցնել և պարզաբանել հատկապես այն մեթոդներն ու մեթոդական հնարները, որոնց կիրառությունն առավել արդյունավետ կլինի տրամաբանության տարրերի ուսուցման համար:

Տրամաբանական մտածողության կառուցվածքային ձևերն ունեն վերացական բնույթ, ուրեմն դրանց ուսուցման արդյունավետության բարձրացմանը էապես կնպաստի այնպիսի միջոցների գործածումը, որոնք հնարավորություն կընձեռեն ակնառու և առավել տեսանելի դարձնել մտածողության ընթացքը, հասկացություններն ու դրանց կապերը, դատողությունների կառուցվածքն ու դրանց հետ կատարվող գործողությունները: Ժամանակակից մանկավարժական գրականության մեջ առաջարկվում են այդ նպատակին ծառայող բազմաթիվ «գործիքներ», որոնց միջոցով սովորողներին տրվում են իրենց մտքերն ու գիտելիքները գրանցելու, համակարգելու և դասակարգելու հնարներ ու ձևեր [17]: Մեթոդական հստակ կառուցվածք ունեցող այդպիսի մի շարք հնարներ կրում են *«գրաֆիկական կազմակերպիչներ»* անվանումը, որոնք իրենց պարզության շնորհիվ հեշտ են յուրացվում ու կիրառվում տարբեր տարիքի սովորողների կողմից: Ներկայացնենք այդպիսի մի քանի մեթոդական հնարներ, որոնց հաճախակի կիրառության արդյունքում սովորողները հնարավորություն են ստանում զարգացնելու տրամաբանված մտածելու (համեմատելու, վերլուծելու, համադրելու, դասակարգելու, համակարգելու և այլ) կարողություններն ու հմտությունները [17, 31-42]:

ա) ***Հասկացությունների աղյուսակ.*** այն արդյունավետ միջոց է հասկացությունների համեմատման ու համակարգման համար և հատկապես օգտակար է, երբ համեմատվում են երեք կամ ավելի հասկացություններ (առարկաներ): Աղյուսակը կազմվում է համեմատվող հասկացություններից յուրաքանչյուրին մեկ տող, իսկ դրանց համեմատվող հատկանիշներին մեկական սյունակ հատկացնելու միջոցով, ընդ որում սյունակների քանակը պայմանավորված է այն հանգամանքով, թե հասկացություններն ինչ խորությամբ և ծավալով են համեմատվում:

Աղյուսակն ունի հետևյալ տեսքը (տես աղյուսակ 1).

Աղյուսակ 1

Հատկանիշներ / Հասկացություններ	Հատկանիշ Ա	Հատկանիշ Բ	Հատկանիշ Գ	…
Հասկացություն 1				
Հասկացություն 2				
Հասկացություն 3				
Հասկացություն 4				

Հասկացությունների աղյուսակով կարելի է միմյանց հետ համեմատել, օրինակ, ֆունկցիաները՝ ըստ զույգության, պարբերականության, մոնոտոնության և այլ հատկանիշների, բազմանիստերը՝ ըստ նիստերի, կողերի, գագաթների թվերի և այլ հատկանիշների, դատողությունները՝ ըստ քանակի, որակի, ճշմարտային արժեքի և այլն: Այս հնարը ուսուցման ընթացքում կարող է օգտագործվել ինչպես անհատական, այնպես էլ համագործակցային փոքր խմբերով աշխատանքներ կազմակերպելու համար:

Հասկացությունների (առարկաների, խնդիրների) համեմատման արդյունքը պատկերավոր կարելի է արտահայտել նաև ***T-աձև*** և ***m-աձև*** աղյուսակներով, որոնք ավելի պարզ կառուցվածք ունեն և հիմնականում օգտագործվում են ինչպես հասկացություններն ու առարկաները համեմատելու, այնպես էլ նույն առարկայի տարբեր կողմերը ներկայացնելու նպատակով: Իր ձևով T տառը հիշեցնող աղյուսակը կազմված է երկու բաժնից (սյունակից), որտեղ գրանցվում են երկու համեմատվող հասկացությունների հատկանիշները, կամ նույն առարկայի հակադիր (միմյանցից տարբեր) հատկանիշները (որակները, կողմերը): Համանման կերպով m-աձև աղյուսակը կազմված է երեք բաժնից (սյունակից), որը T-աձև աղյուսակի համեմատությամբ լրացուցիչ հնարավորություններ է ընձեռում համեմատությունն ավելի բազմակողմանի ներկայացնելու համար: Օրինակ, երկրաչափության դասին ուղղանկյան և շեղանկյան հատկությունների համեմատությունը կարելի է ներկայացնել T-աձև աղյուսակով (տես աղյուսակ 2), իսկ ուղղանկյան, շեղանկյան և քառակուսու հատկությունների համեմատությունը՝ m-աձև աղյուսակով (տես աղյուսակ 3).

Աղյուսակ 2

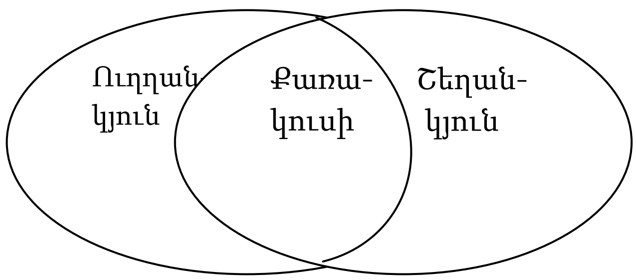
Ուղղանկյուն	Շեղանկյուն

Աղյուսակ 3

Ուղղանկյուն	Քառակուսի	Շեղանկյուն

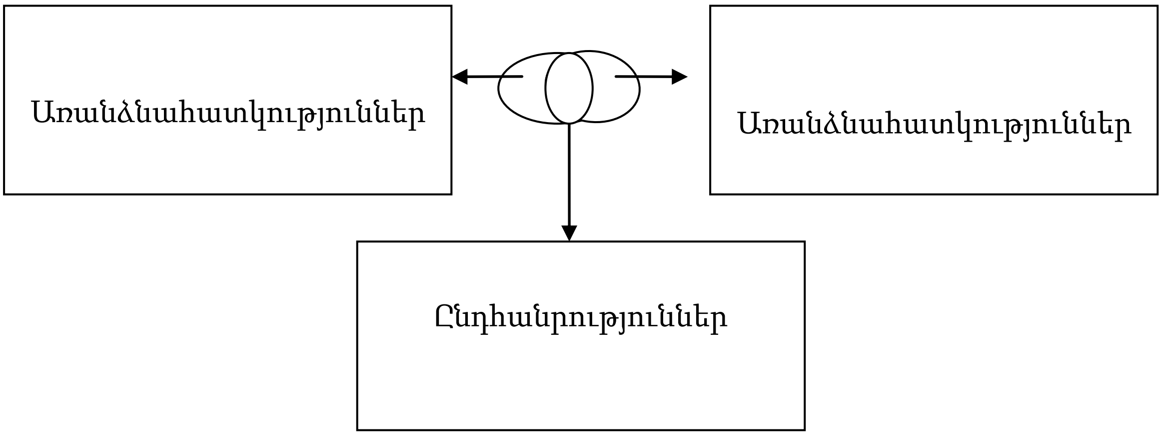
Վերոհիշյալ աղյուսակների գործածումը ոչ միայն օժանդակում է տեղեկատվական նյութը մատչելի և ընկալելի ներկայացնելուն, այլև աղյուսակ կազմելու բուն գործողությանը նպաստում է սովորողների գիտելիքների համակարգմանն ու ամրապնդմանը և, որ առավել կարևոր է, ձևավորում և զարգացնում է վերլուծություններ և ընդհանրացումներ կատարելու նրանց կարողություններն ու հմտությունները: Ընդ որում՝ T-աձև և m-աձև աղյուսակները արդյունավետ կերպով կարող են կիրառվել նաև ուսուցման գործընթացում քննարկումներ կատարելիս: Այսպես, T-աձև աղյուսակով հարմար է ներկայացնել «ճշմարիտ-կեղծ» ասույթներ, «այո-ոչ» պատասխաններ, «դրական-բացասական» վերաբերմունք, իսկ m-աձև աղյուսակով՝ «ճիշտ-սխալ-անորոշ» պնդումներ, «այո-ոչ-չգիտեմ» պատասխաններ, «կողմ-դեմ-ձեռնպահ» դիրքորոշում ենթադրող կամ նմանատիպ այլ խնդիրներ և իրադրություններ:

բ) ***Վենի դիագրամ.*** այն կառացվում է երկու կամ ավելի շրջանաձև պատկերների միջոցով և օգտագործվում է հասկացությունները, առարկաները, գաղափարները համեմատելու, դրանց տարբերություններն ու ընդհանրությունները ցույց տալու նպատակով: Համեմատվող օբյեկտների հատկությունները (տվյալները, բնութագրերը և այլն) գրառվում են շրջանակներում, ընդ որում նրանց ընդհանրություններն առանձնացվում և գրառվում են շրջանակների հատվող մասում: Վենի դիագրամը T-աձև և m-աձև աղյուսակների հետ համեմատելիս նկատում ենք, որ նրանում առավել հստակ և տեսանելի են ներկայացվում համեմատվող օբյեկտների առանձնահատկություններն ու ընդհանրությունները: Օրինակ, ուղղանկյան, շեղանկյան և քառակուսու համեմատությունը Վենի դիագրամով ներկայացվում է հետևյալ կերպ (տես գծ. 3).



գծ.3

Վենի դիագրամը կարող է ունենալ ինչպես պարզ կառուցվածք (երկու շրջանակների դեպքում), այնպես էլ բարդ (երեք և ավելի շրջանակների դեպքում): Եթե դիագրամի շրջանակների կամ ընդհանրությունների համար նախատեսված հատման մասի մակերեսները չեն բավականացնում տեղեկատվական նյութը լիարժեք գրառելու համար, ապա դա զուտ տեխնիկական խնդիր է, և այն կարելի է հաղթահարել, ասենք, հավելումներ տալով գծապատկերին՝ հետևյալ ձևով (տես գծ. 4).

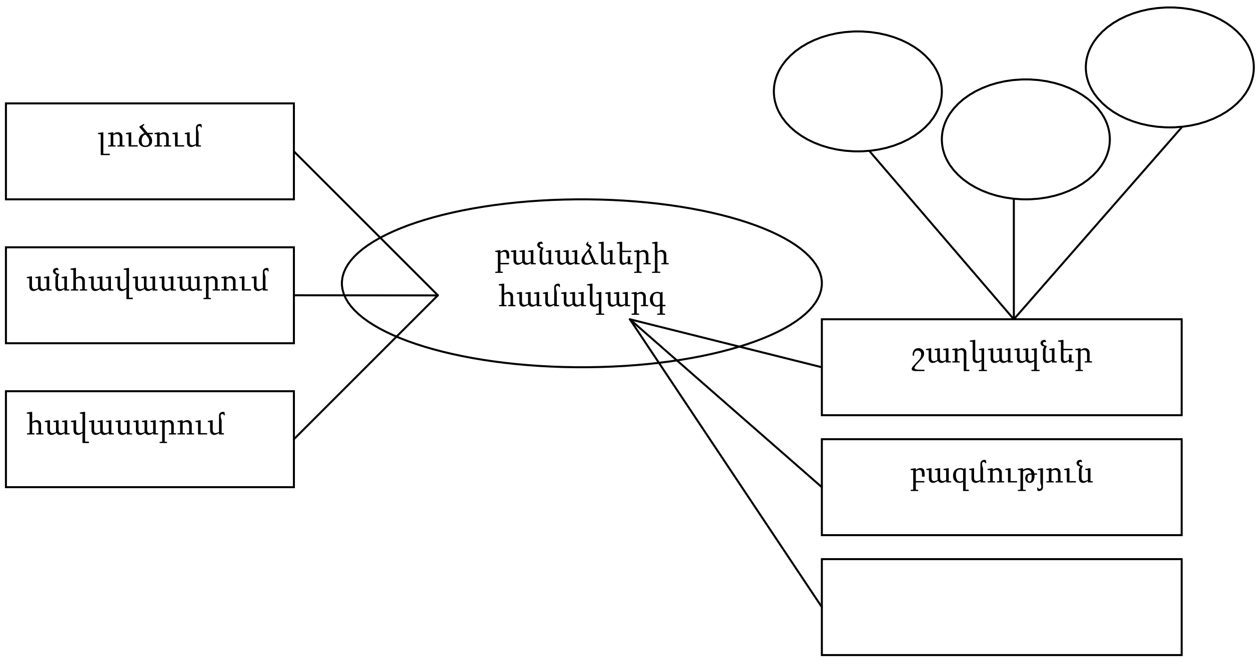


գծ.4

Վենի դիագրամի կապակցությամբ կարևոր են հետևյալ նկատառումները: Վերևում (կետ 1-ում) մենք հանգամանորեն ներկայացրել ենք տրամաբանական կառուցվածքային ձևերը (հասկացություն, դատողություն, մտահանգում) բազմությունների միջոցով արտահայտելու խնդիրը և ցույց տվել, որ այդ վերացական ձևերի առնչությունները կարելի է փոխադրել պատկերային ընկալումների մակարդակ՝ արտահայտելով էյլերյան շրջանակների միջոցով: Տրամաբանական կառուցվածքային ձևերի էյլերյան շրջանակով պատկերումը նմանություններ ունի հասկացությունների համեմատման Վենի դիագրամի հետ, սակայն այդ նմանությունը լրացուցիչ պարզաբանումների կարիք ունի:

Նկատենք, որ հասկացությունները, դատողությունները և մտահանգումները էյլերյան շրջանակներով արտահայտելու հիմքում, ի վերջո, ընկած են դիտարկվող հասկացությունների ծավալները ներկայացնող բազմություններն ու դրանց միջև կատարվող գործողությունները: Այսինքն՝ էյլերյան շրջանակներով պատկերվում են հասկացությունների միջև առնչություններն ըստ ծավալի: Մինչդեռ Վենի դիագրամը հնարավորություն է տալիս պատկերելու հասկացությունների միջև առնչությունները նաև ըստ բովանդակությունների: Իսկ երկու հասկացությունների՝ ըստ ծավալների և ըստ բովանդակությունների առնչությունները նույնական չեն: Բերենք ակնառու օրինակ. «զուգահեռագիծ» և «սեղան» հասկացությունների ծավալները հատում չունեն, մինչդեռ այդ հասկացությունների բովանդակություններն ունեն նաև ընդհանրություններ (ուռուցիկ պատկեր են, քառանկյուն են, ունեն զուգահեռ կողմեր և այլն): Այսպիսով, հասկացությունների համեմատության առումով էյլերյան շրջանակներն ու Վենի դիագրամը, թեև արտաքուստ նման են, սակայն ունեն տարբեր գործառույթներ: Ավելին, Վենի դիագրամը հնարավորություն է տալիս պատկերավոր ներկայացնելու ոչ միայն տարբեր հասկացությունների, այլև տարբեր առարկաների, իրադրությունների, խնդիրների, գաղափարների, տեղեկատվությունների համեմատությունները: Վենի դիագրամը կարևոր համակարգող դեր ունի, և ուսուցման գործընթացում այն կարող է ունենալ բազմազան կիրառություններ:

գ) *Հասկացությունների քարտեզ.* մասնագիտական գրականության մեջ այն հաճախ հանդիպում է նաև *գաղափարների քարտեզ* անվանումով և գործածվում է հետազոտության օբյեկտին վերաբերող հասկացությունները, գաղափարները և դրանց կապերն ու առնչությունները պատկերավոր արտահայտելու համար: Քարտեզագրումն սկսվում է հետևյալ կերպ. նախ շրջանակի մեջ նշվում է հետազոտության օբյեկտը՝ հասկացությունը, գաղափարը կամ թեման, օրինակ՝ «բանձևերի համակարգ»: Այնուհետև առանձին հասկացության (մեր օրինակում՝ «բանաձևեր») շուրջ գրի են առնվում ուղեկից բառեր, ասենք՝ «հավասարում», «անհավասարում», «լուծում» և այլն: Ապա նույն կերպ գրառվում են մյուս հասկացությանը (մեր օրինակում՝ «համակարգ») առնչվող բառերն ու գաղափարները (ասենք՝ «տրամաբանական շաղկապ», «բազմությունների հատում» և այլն) (տես գծ. 5).



գծ.5

Քարտեզի «ճյուղերը» տարածվում են նաև ցանկացած ուղեկից բառից բխելով, իսկ ճյուղավորումների քանակն ու բազմազանությունը կախված են նյութի ուսումնասիրման նպատակից, խորությունից, հետազոտության շրջանակից: Յուրաքանչյուր բառ գծիկով միանում է «ծնող բառի» հետ, և նույն «ծնողն» ունեցող բառերը միացվում են նույն շրջանակի հետ՝ կազմելով ուսումնասիրության մի ոլորտ (ինչպես մեր օրինակում նշված է «շաղկապների» ճյուղում):

Քարտեզագրման ընթացքում բազմաճյուղ պատկեր ստանալիս, ինչպես ընդունված է քարտեզագրության մեջ, կարող են օգտագործվել նաև պայմանական նշաններ, որոնցով առանձնացվում են հիմնական և ածանցյալ, առաջնային և երկրորդային, ավարտուն և անավարտ, ինչպես նաև հստակ և անորոշ, հասկանալի և անհասկանալի գաղափարները: Պայմանանշաններ օգտագործելիս, անշուշտ, կարելի է ինքնատիպ և ստեղծագործական մոտեցում ցուցաբերել, կարևորն այն է, որ արդյունքում ստացվի մի այնպիսի ընկալելի պատկեր, որը կօգնի նպատակային դարձնել ուսումնասիրության հաջորդ քայլերը:

Քարտեզագրման ինքնատիպ և զտված օրինակներ են ուսումնական գրականության մեջ օգտագործվող դասակարգումների և ապացուցումների ներկայացումները ծառերի տեսքով [36], [62] (դրանց պայմանականորեն կանվանենք *տրամաբանական ծառեր*): Վերջիններիս էական առանձնահատկությունն այն է, որ դրանցում խստորեն պահպանվում է դեդուկտիվ կանոնակարգվածությունը, այսինքն հետևողականորեն պահպանվում են դասակարգման և ապացուցման համապատասխան կանոնները: Մինչդեռ հասկացությունների և գաղափարների քարտեզագրման պարագայում, ընդհանուր առմամբ, դեդուկտիվ կանոնակարգվածության պահանջ չի դրվում: Քարտեզը կազմելիս ճյուղավորումների համար հարակից բառերի ընտրության ընթացքը թեև ծավալվում է տրամաբանական որոշակի շղթայով, սակայն ստեղծագործական ազատությունը կաշկանդված չէ ճշգրիտ և միարժեք սահմանված ընթացակարգով: Այդ առումով հասկացությունների և գաղափարների քարտեզները կարելի է դիտել որպես ուսումնասիրության և հետազոտության որոնողական գործընթացի ներկայացման միջոցներ, իսկ տրամաբանական ծառերը՝ որպես գործընթացի արդյունքների ներկայացման միջոցներ:

Հիրավի, ուսումնասիրության ընթացքում, մասնավորապես, դասակարգման և ապացուցման ծառերը միանգամից չեն ստեղծվում, դրանք ձևավորվում են հետազոտական և որոնողական աշխատանքների արդյունքում: Իսկ դրանց ընթացքը պատկերավոր և ընկալելի ներկայացնելու համար արդյունավետ միջոցներ են հասկացությունների և գաղափարների քարտեզները:

Մեթոդական գրականության մեջ հիշատակվում են մտածողության ընթացքը պատկերավոր դարձնելու այլ հնարներ ևս, ինչպես օրինակ *«Պրիզման»* (որի հիմնական նպատակը ուսումնասիրվող հասկացության կամ գաղափարի վերաբերյալ ենթագիտակցական ոլորտում եղած ասոցիատիվ կապերի վերհանումն ու արձանագրումն է), *«Խորանարդը»* (որի հիմնական նպատակն է ուղղորդել ուսումնական նյութի քննարկման ընթացքը՝ ըստ խորանարդի նիստերի վրա գրված հետևյալ կողմնորոշիչների՝ նկարագրել (1), համեմատել (2), զուգորդել (3), վերլուծել (4), կիրառել (5), փաստարկել (6)): Ինչպես այդ, այնպես էլ վերևում առավել հանգամանորեն ներկայացված մեթոդական հնարները համընդգրկուն կիրառություններ ունեն և կարող են գործածվել տարբեր թեմաների դասավանդման ընթացքում, դասի տարբեր փուլերում [51, 100-112]: Մեթոդական առումով դրանց արդյունավետությունը պայմանավորված է նրանով, որ մի կողմից՝ նպատակահարմար են տրամաբանության տարրերին վերաբերող թեմաների ուսուցման ընթացքում գործածելու համար և, մյուս կողմից, ցանկացած այլ թեմայի ուսուցման ընթացքում գործածելիս նպաստում են սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացմանը:

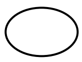
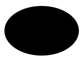
Տրամաբանության տարրերին նվիրված թեմաների ուսուցումը արդյունավետ դարձնելու համար հարկավոր է գործածության առումով արդեն հայտնի մեթոդական համակարգը համալրել այնպիսի նոր մեթոդներով, որոնք առավել նպատակահարմար են այդ թեմաների ուսուցման համար: Մասնավորապես, ասույթների, տրամաբանական շաղկապների, փոփոխական պարունակող դատողությունների, իրենց կառուցվածքով «ցանկացած», «գոյություն ունի», «այն և միայն այն» տրամաբանական ձևերն ունեցող դատողությունների վերաբերյալ թեմաները, որոնք մաթեմատիկայի առարկայական ծրագրերում ընդգրկվել են վերջին տասնամյակում, կարիք ունեն մեթոդական նոր հնարների գործածության: Ստորև մենք կներկայացնենք այդպիսի մի հնար, որի հիմքում ընկած են գրական և գիտական մի շարք հանրահայտ ստեղծագործությունների հեղինակ Լուիս Քերոլի գաղափարները [72, 3-17], [77, 30-37], [103, 48-63]: Եվ քանի որ առաջարկվող մեթոդական հնարն ուղղակիորեն վերաբերում է մեր խնդրո առարկա տրամաբանության տարրերի ուսուցմանը, այն կներկայացնենք առավել մանրամասնությամբ՝ նկարագրելով նաև գործածության ընթացքը:

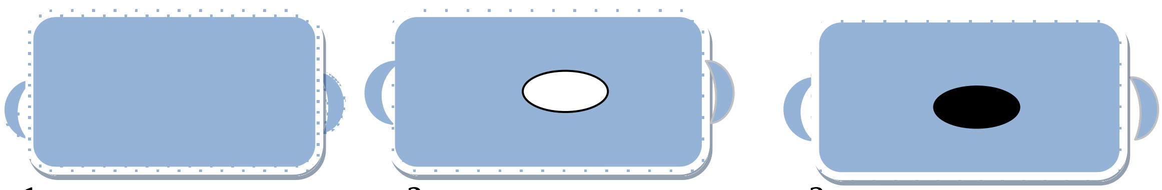
Քերոլի սկուտեղը

Այս մեթոդական հնարի էությունն այն է, որ սովորողներին առաջարկվում է կյանքից վերցրած, առաջին հայացքից մաթեմատիկայի հետ կապ չունեցող մի հետաքրքիր խնդիր՝ սկուտեղով կարկանդակներ մատուցելու մասին, այնուհետև դիտարկելով կարկանդակների հատկանիշները նկարով պատկերելու հարցը՝ սովորողներին ներքաշվում է տրամաբանական արտահայտչաձևերի բացահայտման ոլորտ, ընդ որում ուսուցումն ընթանում է երկխոսության և քննարկումների միջոցով:

ա) Քերոլի սկուտեղի օգտագործման քայլերը

Ուսուցման ընթացքում Քերոլի սկուտեղն օգտագործելու համար անհրաժեշտ են հետևյալ քայլերը: Նախ պետք է լուծել կարկանդակներով սկուտեղ պատկերելու հարցը: Այդ կապակցությամբ ուսուցչի կողմից տրվող առաջին հիմնական հարցը հետևյալն է. ինչպե՞ս կարելի է պարզել, թե մեր կողմից նկարով պատկերված սկուտեղի մեջ կարկանդակներ կա՞ն, թե՞ չկան:

Այս հարցի քննարկման արդյունքը հանգեցնելու է այսպիսի պայմանավորվածության. եթե սկուտեղի մեջ կարկանդակ կա, ապա նրա մեջ կդնենք մի որոշակի նշան, ասենք՝ սպիտակ գույնի  նշանը, իսկ եթե դատարկ է, ապա սև գույնի  նշանը: Այսպիսով մենք կունենանք սկուտեղի համար երեք պատկերում (տես նկ. 12).



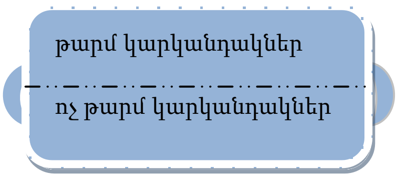
1. 2. 3.

նկ.12

Առաջին նկարում մենք ոչինչ չենք կարող ասել սկուտեղի պարունակության մասին: Երկրորդ նկարում պատկերվածում կան կարկանդակներ, իսկ երրորդում՝ կարկանդակներ չկան:

Այնուհետև խնդիր է դրվում սկուտեղն այնպես պատկերել, որ որոշակի տեղեկություն տրվի նրանում պարունակվող կարկանդակների հատկանիշների մասին, ընդ որում սկզբում պետք է բավարարվել միայն մեկ հատկանիշով, ասենք՝ թարմությամբ: Այդ կապակցությամբ ուսուցչի կողմից հարց է առաջարկվում՝ ինչպե՞ս կարելի է պարզել՝ սկուտեղի վրա արդյոք կա՞ն թարմ կարկանդակներ, թե՞ ոչ, ինչպե՞ս կարելի է անել այնպես, որ մեր պատկերած սկուտեղի վրա երևան ինչպես թարմ, այնպես էլ ոչ թարմ կարկանդակները:

Այդ հարցին ուսուցիչը աշակերտների միջոցով ձևավորում է հետևյալ պատասխանը. թարմ կարկանդակները դնենք սկուտեղի մի մասում, իսկ ոչ թարմերը՝ մյուս մասում, օրինակ՝ թարմերը՝ վերին մասում, իսկ ոչ թարմերը՝ ստորին, և որպեսզի դրանք իրար հետ չխառնվեն, սկուտեղի մեջտեղում տանենք բաժանման գիծ (տես նկ. 13).



նկ.13

Այս դեպքում բնականաբար ծագում է հաջորդ հարցը. իսկ ինչպե՞ս պատկերենք սկուտեղի վրա թարմ կամ ոչ թարմ կարկանդակներ լինել-չլինելու իրողությունը, արդյո՞ք դրա համար սկուտեղի համապատասխան հատվածներում պետք է կարկանդակներ նկարենք:

Այս հարցին պատասխանելու համար, հիշեցնելով, որ սկուտեղի մեջ կարկանդակներ լինել-չլինելու պատկերման հարցը լուծել ենք սպիտակ և սև շրջանակների միջոցով, ուսուցիչն առաջարկում է պատկերել սկուտեղներ՝ հետևյալ պարունակությամբ.

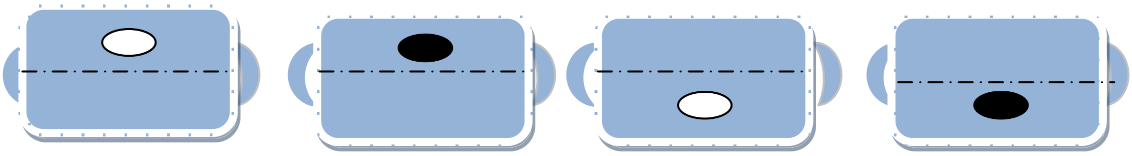
ա) սկուտեղ, որի մեջ կա թարմ կարկանդակ,

բ) սկուտեղ,որի մեջ չկա թարմ կարկանդակ,

գ) սկուտեղ, որի մեջ կա ոչ թարմ կարկանդակ,

դ) սկուտեղ, որի մեջ չկա ոչ թարմ կարկանդակ:

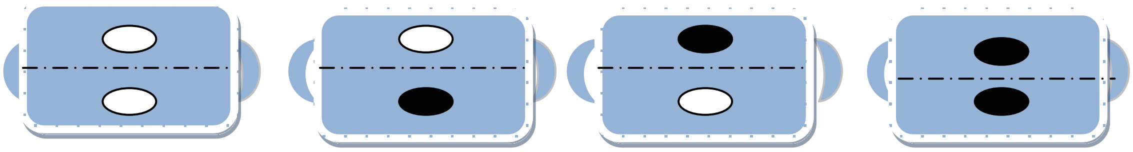
Սրանց համապատասխան՝ գրատախտակի վրա նկարվում կամ էկրանին ցուցադրվում են հետևյալ պատկերները (տես նկ. 14).



ա. բ. գ. դ.

նկ.14

Այժմ արդեն կարելի է լուծել հակադարձ խնդիր ևս, այսինքն առաջարկել, որ հայերենով լեզվական ձևակերպում տալ հետևյալ պատկերներով ներկայացվող իրավիճակներին (տես նկ. 15).



ա. բ. գ. դ.

նկ.15

Ակնկալվում են հետևյալ պատասխանները.

ա) սկուտեղում կա և թարմ, և ոչ թարմ կարկանդակ,

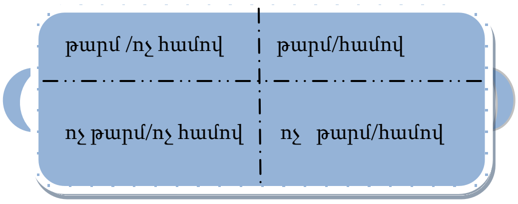
բ) սկուտեղում կա թարմ կարկանդակ, բայց ոչ թարմ կարկանդակ չկա,

գ) սկուտեղում թարմ կարկանդակ չկա, բայց կա ոչ թարմ կարկանդակ,

դ) սկուտեղում չկա ինչպես թարմ, այնպես էլ ոչ թարմ կարկանդակ:

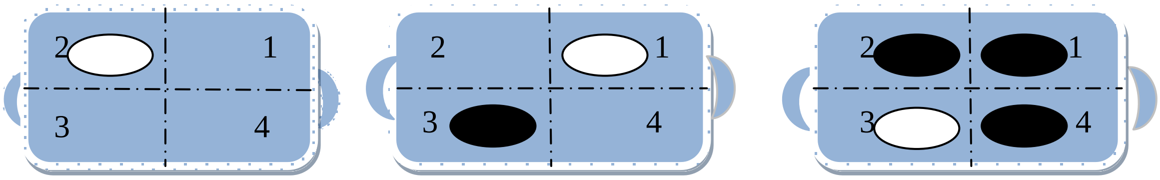
Հաջորդ քայլում դիտարկումն ավելի է ընդլայնվում, և խնդիր է դրվում սկուտեղն այնպես պատկերել, որ տեղեկություն տրվի նրանում պարունակվող կարկանդակների ևս մեկ հատկանիշի, ասենք՝ համով և ոչ համով լինելու մասին: Քննարկման ընթացքում կարևոր է այն հանգամանքի պարզաբանումը, որ նախորդ քայլում սկուտեղը բաժանեցինք երկու մասի, որոնցից հետև գործ ունեինք մեկ հատկանիշի՝ թարմ լինելու և դրա ժխտման՝ ոչ թարմ լինելու հետ, իսկ այժմ տրված են երկու հատկանիշ և դրանց երկու ժխտումները՝ թարմ, ոչ թարմ և համով, ոչ համով: Ինչպե՞ս վարվենք այս դեպքում:

Խնդրի վերոհիշյալ պարզաբանումը հուշում է սկուտեղի ձախ մասում տեղավորել ոչ համով, իսկ աջ մասում՝ համով կարկանդակները: Այսինքն՝ բոլոր տեսակների կարկանդակների տեղավորման համար հարկավոր է վերակառուցել սկուտեղը՝ այն դարձնելով քառաբաժան (տես նկ. 16).



նկ.16

Սկուտեղի և կարկանդակների մասին ասելիքն ավելի դյուրին դարձնելու համար օգտակար է համարակալել սկուտեղի վանդակները, և դրա օգնությամբ դիտարկել մի քանի օրինակներ (տես նկ. 17):



նկ.17

Այստեղ ա նկարում պատկերված սկուտեղի երկրորդ վանդակը դատարկ չէ, այսինքն սկուտեղում կան թարմ և ոչ համով կարկանդակներ: Իսկ մնացած վանդակների մասին ոչինչ ասել չենք կարող, դրանցում կարող են լինել, բայց կարող են և չլինել կարկանդակներ: բ նկարում առաջին վանդակը դատարկ չէ, իսկ երրորդը դատարկ է: Այսինքն՝ սկուտեղում կան համով և թարմ կարկանդակներ, և չկան ոչ թարմ և ոչ համով կարկանդակներ: Մնացած վանդակների մասին դարձյալ ոչինչ ասել չենք կարող: Վերջին՝ գ սկուտեղում երրորդ վանդակը դատարկ չէ, իսկ մնացած երեքը դատարկ են: Հետևապես, այս սկուտեղում կան միայն ոչ թարմ և ոչ համով կարկանդակներ: Համանման ձևով կարելի է պատասխանել հետևյալ տիպի հարցերին.

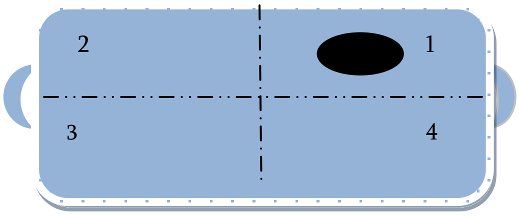
Ինչպե՞ս պատկերել չորս վանդակ ունեցող սկուտեղը, եթե նրանում.

1. կարկանդակներ չկան,
2. թարմ կարկանդակներ չկան,

3. ոչ թարմ կարկանդակներ չկան,
4. համով կարկանդակներ չկան,
5. ոչ համով կարկանդակներ չկան,
6. կան թարմ և համով կարկանդակներ,
7. չկան թարմ և համով կարկաղակներ,
8. կան թարմ և ոչ համով կարկանդակներ,
9. չկան թարմ և ոչ համով կարկանդակներ,
10. կան ոչ թարմ և ոչ համով կարկանդակներ
11. չկան ոչ թարմ և ոչ համով կարկանդակներ,
12. կան ոչ թարմ և համով կարկանդակներ,
13. չկան ոչ թարմ և համով կարկանդակներ:

բ) Դատողություններ Քերոլի սկուտեղի օգնությամբ

Այժմ կտեսնենք, որ չորս վանդականոց սկուտեղի վրա պատկերված սև և սպիտակ շրջանակների միջոցով մենք կարող ենք պատկերել և դիտողական դարձնել կարկանդակների մասին մեր առանձին դատողություններ: Դիտարկենք հետևյալ սկուտեղը, որի 1-ին վանդակում դրված է սև շրջանակ, իսկ մնացած վանդակներում որևէ շրջանակ դրված չէ (տես նկ. 18):



նկ.18

Ուսուցիչը կարող է առաջարկել աշակերտներին ձևակերպելու այս սկուտեղին համապատասխանող դատողությունները: Նախորդ կետի վերջում բերված վարժությունները կօգնեն գտնելու որոշ լուծումներ: Մասնավորապես, ակնկալվում է, որ կինչեն այսպիսի պատասխաններ.

Սկուտեղի մեջ չկա թարմ և համով կարկանդակ: (1)

Սկուտեղի մեջ չկա համով և թարմ կարկանդակ: (2)

Այժմ ուսուցիչը կատարում է հաջորդ քայլը և ցույց է տալիս, որ բերված դատողությունները կարելի է գրել այլ տեսքերով:

Դիտարկում 1.

• Բոլոր թարմ կարկանդակները համով չեն,

• Բոլոր համով կարկանդակները թարմ չեն,

• Յուրաքանչյուր թարմ կարկանդակ համով չէ,

• Յուրաքանչյուր համով կարկանդակ թարմ չէ,

• Ցանկացած թարմ կարկանդակ համով չէ,

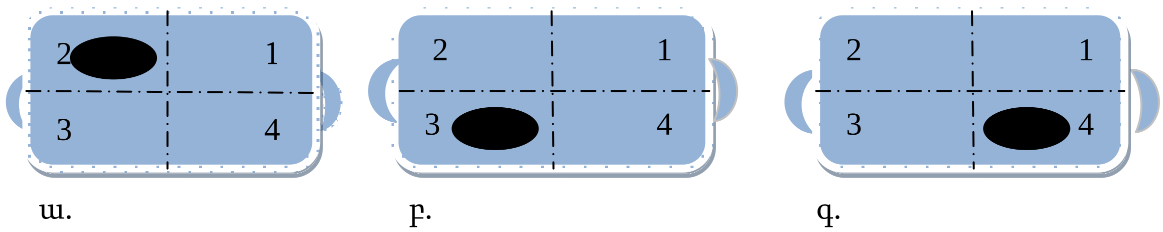
• Ցանկացած համով կարկանդակ թարմ չէ,

• Ամեն մի թարմ կարկանդակ համով չէ,

• Ամեն մի համով կարկանդակ թարմ չէ:

Այս պահին ուսուցիչը պետք է աշակերտների ուշադրությունը հրավիրի այն բանի վրա, որ այստեղ և ընդհանրապես «բոլոր», «ցանկացած», «յուրաքանչյուր», «ամեն մի» բառերը ունեն նույն իմաստային նշանակությունը: (Կարելի է բերել նաև այլ օրինակներ): Սա, մի կողմից՝ կարևոր է սովորողների լեզվամտածողության հստակեցման համար և, մյուս կողմից՝ որոշակի գիտելիք է տալիս ըստ ծավալի ընդհանուր դատողության կառուցվածքի (ընդհանրության քվանտորը կիրառելու) մասին:

Այնուհետև ուսուցիչը սև շրջանակը դնում է երկրորդ, երրորդ ու չորրորդ վանդակներում և դիտարկում ստացված հետևյալ երեք սկուտեղներին համապատասխանող դատողությունները (տես նկ. 19).

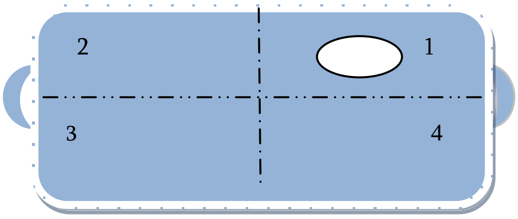


նկ.19

Կարելի է դրանց մասին դիտարկումները կատարել վարժությունների միջոցով: Ահա նման մի վարժություն:

Վարժություն: Երեք սկուտեղներից յուրաքանչյուրի համար ներկայացրեք 1 դիտարկմանը համանման դատողությունները:

Առաջադրված դեպքերը դիտարկելուց հետո ուսուցիչը քննարկում է սպիտակ շրջանակով սկուտեղին համապատասխանող դատողությունները (տես նկ. 20):



նկ.20

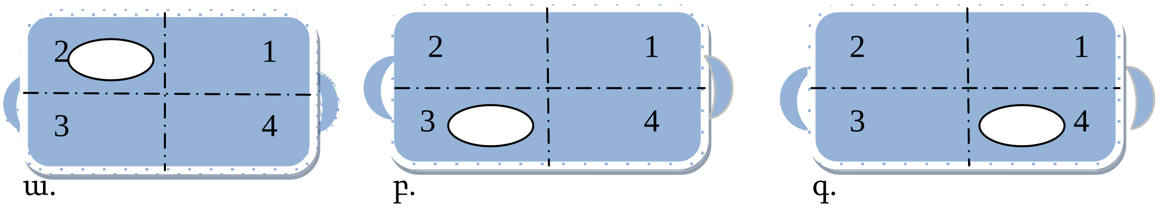
Համադրելով աշակերտների պատասխանները՝ ուսուցիչը ցույց է տալիս, որ բերված դատողությունները կարելի է գրել հետևյալ տեսքերից յուրաքանչյուրով:

Դիտարկում 2.

- Որոշ թարմ կարկանդակներ համով են:
- Որոշ համով կարկանդակներ թարմ են:
- Գոյություն ունի (ունեն) թարմ կարկանդակ(ներ), որ(ոնք) համով է (են):
- Գոյություն ունի (ունեն) համով կարկանդակ(ներ), որ(ոնք) թարմ է (են):
- Կա թարմ կարկանդակ, որը համով է:
- Կա համով կարկանդակ, որը թարմ է:
- Ինչ-որ թարմ կարկանդակ համով է:
- Ինչ-որ համով կարկանդակ թարմ է:
- Որևէ թարմ կարկանդակ համով է:
- Որևէ համով կարկանդակ թարմ է:

Այստեղ նույնպես օգտակար է աշակերտների ուշադրությունը հրավիրել այն բանի վրա, որ «որոշ», «գոյություն ունի», «կա», «ինչ-որ», «որևէ» բառերը գործածվում են նույն իմաստով, հանգամանք, որը, ինչպես նշվեց վերևում, կարևոր է սովորողների լեզվամտածողության հստակեցման համար, և բացի այդ՝ որոշակի գիտելիք է տալիս ըստ ծավալի մասնավոր դատողության կառուցվածքի (գոյության քվանտորի կիրառության) մասին:

Այնուհետև ուսուցիչը սպիտակ շրջանակը դնում է երկրորդ, երրորդ ու չորրորդ վանդակներում և դիտարկում ստացված հետևյալ երեք սկուտեղներին համապատասխանող դատողությունները (տես նկ. 21).

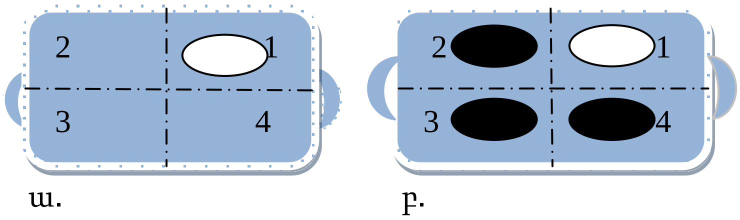


նկ.21

Կարելի է դրանց մասին դիտարկումները նույնպես կատարել վարժությունների միջոցով: Ահա նման մի վարժության օրինակ:

Վարժություն: Վերջին երեք սկուտեղներից յուրաքանչյուրի համար ներկայացրեք 2-րդ դիտարկման մեջ բերված դատողություններին համանման դատողությունները:

Մտածողության հստակեցման հրաշալի հնարավորություն է ստեղծում հետևալ դատողությունների համեմատումը. «Սկուտեղում կան համով և թարմ կարկանդակներ» և «Սկուտեղում կան միայն համով և թարմ կարկանդակներ»: Սրանց տարբերության լեզվական ընկալումը աշակերտների համար այնքան էլ պարզ չէ: Բայց ահա սկուտեղի վրա դրանց պատկերումը այդ տարբերությունը դարձնում է շատ ակնառու (տես նկ. 22).



նկ.22

Այս իրավիճակը մանրամասն քննարկելուց հետո ուսուցիչը աշակերտներին առաջարկում է կազմել և համեմատել հետևյալ պարունակությամբ սկուտեղներին համապատասխանող դատողությունները (տես աղյուսակ 4).

Աղյուսակ 4

միայն 2-րդ քառորդում սպիտակ շրջանակ	երկրորդում՝ սպիտակ, մնացածներում՝ սև շրջանակ
միայն 3-րդ քառորդում սպիտակ շրջանակ	երրորդում՝ սպիտակ, մնացածներում՝ սև շրջանակ
միայն 4-րդ քառորդում սպիտակ շրջանակ	չորրորդում սպիտակ, մնացածներում՝ սև շրջանակ

Քերոլի սկուտեղի միջոցով դիտարկումը կարելի է ավելի ընդլայնել՝ խնդիր դնելով սկուտեղն այնպես պատկերել, որ տեղեկություն տրվի նրանում պարունակվող կարկանդակների ևս մեկ այլ (երրորդ) հատկանիշի մասին: Այդ դեպքը մենք նույնպես դիտարկել ենք:

Քերոլի սկուտեղի միջոցով ուսուցման վերաբերյալ մեր կողմից կատարվել է գիտափորձ, որի նկարագրությունն ու վերլուծությունը կներկայացնենք հաջորդ պարագրաֆում:

2.4. Գիտափորձ

Հետազոտության ընթացքում, տարբեր ուսումնասիրություններին զուգընթաց, մեր կողմից կատարվել են փորձարարական աշխատանքներ, որոնք նպատակաուղղված են եղել ինչպես թեմային վերաբերող առկա իրավիճակի բացահայտմանն ու գնահատմանը, այնպես էլ առաջարկվող մեթոդիկաների արդյունավետության ստուգմանը: Մասնավորապես, կատարել ենք գիտափորձեր մաթեմատիկական ապացուցումները *ծառի տեսքով* ներկայացնելու և *Քերոլի սկուտեղի* միջոցով պարապմունքներ անցկացնելու վերաբերյալ: Բացի այդ, հարցախույզների միջոցով պարզել ենք սովորողների և ուսուցիչների վերաբերմունքը մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ուսուցմանն առնչվող խնդիրների վերաբերյալ:

Առաջարկվող մեթոդիկայի արդյունավետությունը ստուգվել է ուսուցանվող նյութի նկատմամբ սովորողների ցուցաբերած *ճանաչողական հետաքրքրության ապահովման հայտանիշով*, ըստ որի՝ ինչքան բարձր է հետաքրքրությունը, այնքան արդյունավետ է ուսուցումը: Փորձաքննությունն անցկացվել է Ա. Ս. Չերեպանովի առաջարկած մեթոդիկայով [153], որի հիմքում դրվում է հետաքրքրության ցուցանիշի որոշման հետևյալ բանաձևը.

$$Հ \approx \frac{m_1 + 2m_2 + ... + km_k}{km} \quad , \quad (1)$$

որտեղ m-ը գիտափորձի մասնակիցների թիվն է, իսկ k-ն՝ հետաքրքրության մակարդակների սանդղակի աստիճանների թիվը: Սովորաբար, ինչպես և մեր գիտափորձի դեպքում, առանձնացվում է հետաքրքրության մակարդակների սանդղակի չորս աստիճան՝ մոտ է 0-ին- *անհետաքրքիր է,* մոտ է $\frac{1}{3}$-ին՝ այնքան էլ հետաքրքիր չէ, մոտ է- $\frac{2}{3}$-ին-*հետաքրքիր է,* մոտ է 1-ին- *շատ հետաքրքիր է:*

Բերված (1) բանաձևը այդ դեպքում կունենա հետևյալ տեսքը.

$$Հ \approx \frac{m_1 + 2m_2 + 3m_3}{3m} \ ,$$

Որտեղ՝ $m_1 + m_2 + m_3 \leq$ m և.

m-ը գիտափորձի մասնակիցների թիվն է,

m_1-ը՝ այն մասնակիցների թիվը, որոնց համար ուսուցանվող նյութը այնքան էլ հետաքրքիր չէ,

m_2-ը՝ որոնց համար հետաքրքիր է,

m_3–ը՝ որոնց համար շատ հետաքրքիր է:

Նախ ներկայացնենք գիտափորձերը և, այնուհետև, ստացված արդյունքները գնահատենք (2) բանաձևի միջոցով:

1. Ապացուցումների ներկայացումը ծառի տեսքով

Ինչպես արդեն նշվել է (կետ 2.2.2), ծառի տեսքով ապացուցման դեպքում ձախ կողմում բերվում է ապացուցումը՝ որպես ծառ, աջ մասում գրվում են յուրաքանչյուր քայլի համար անհրաժեշտ փաստարկները կամ արտածման կանոնները: Բերված ծառը կամ ապացույցը հնարավորություն է տալիս ցուցադրելու ապացույցի մեջ մասնակցող յուրաքանչյուր բանաձևի ստացման մեխանիզմը: Իսկ աջ մասում՝ փաստարկների բաժնում, տրվում են բանաձևերի ստացման հիմնավորումները կամ արտածման կանոնները:

Որպեսզի պարզենք ծառի տեսքով ապացուցում սովորեցնելու մեթոդի արդյունավետությունը և առաջացող մեթոդական խնդիրները, կատարեցինք գիտափորձ Երևանի Նար-Դոսի անվան թիվ 14 դպրոցի 8-րդ դասարանների աշակերտների, ՀՊՄՀ հենակետային վարժարանի 10-րդ դասարանների սովորողների և ՀՊՄՀ-ի «Մաթեմատիկա» բաժնի 4-րդ կուրսի ուսանողների հետ:

Մեր կողմից նախապես ընտրվել էին մի քանի որոշակի թեորեմներ, որոնք սովորողներին առաջարկվում էին՝ նախ ապացուցել իրենց իմացած մեթոդներով, իսկ այնուհետև, սովորեցնելով ծառի տեսքով ապացուցման եղանակը, աստիճանաբար անցում էր կատարվում դեպի այդ մեթոդը:

Ուշագրավ էր այն փաստը, որ սկզբում՝ առաջին թեորեմի (արտադրյալի աստիճանի հատկությունը) ապացուցման ժամանակ սովորողները հաջորդաբար գրում էին բանաձևեր, սակայն դժվարանում էին պատասխանել «ինչի՞ց օգտվելով գրեցիք այդպես» կամ «ինչի՞ց է դա բխում» հարցերին (շատերի համար նույնիսկ անսպասելի էին այդ հարցերը): Նմանապես, նրանց համար դժվար և անսպասելի էր նաև այն հարցը, թե հայերեն բառերով ինչպե՞ս կարող ենք ձևակերպել այս կամ այն բանաձևը, որը գրված է մաթեմատիկական սիմվոլներով (օրինակ՝ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$): Այն բանից հետո, երբ սովորողներին բացատրվում էր, թե այդ նույն ապացուցումը ինչպես ներկայացնել ծառի տեսքով, և պարզաբանվում էր այդպիսի ապացուցման էությունն ու կատարման ընթացքը, որպես կանոն, փոխվում էր լսարանում տիրող մթնոլորտը և նկատելի էր դառնում ստեղծագործական աշխուժությունը: Դիտարկվող հաջորդ թեորեմի (միևնույն հիմքով աստիճանների արտադրյալի հատկությունը) ապացուցման ժամանակ արդեն ավելի մեծ թվով սովորողներ էին մասնակցում քննարկումներին: Կարևոր էր այն պահը, երբ երկրորդ թեորեմից սկսած, առանց նախապես հիշեցնելու կամ զգուշացնելու, սովորողներն արդեն ինքնակամ փորձում էին ապացուցման ընթացքը ներկայացնել ծառի տեսքով: Անշուշտ, դեռևս շարունակում էին դժվարանալ փաստարկները նշելու գործում, սակայն դա ակտիվ քննարկումների առիթ էր դառնում, որը դասին հաղորդում էր կենդանի աշխուժություն, և սովորողներն ինքնաբերաբար ընդգրկվում էին ուսումնառության գործընթացի մեջ:

Գիտափորձի ընթացքում հաստատվեց մեր այն կանխատեսումը, որ ապացուցման յուրաքանչյուր քայլի համար փաստարկներ նշելը սովորողների կողմից միանգամից չի կարող կատարվել, այն պահանջում է որոնողական աշխատանք: Դրա համար նրանք պետք է իրենց տիրապետած գիտելիքների շրջանակում գտնեն այն փաստերը (սահմանում, աքսիոմ, թեորեմ, օրենք, կանոն և այլն), որոնց կապակցման շնորհիվ հիմնավորվում է տվյալ քայլը: Հաշվի առնելով այդ գործոնը՝ գիտափորձի ընթացքում դիտարկվող ապացուցման հաջորդ խնդիրները (կամ թեորեմները) առաջարկվում էին աստիճանական բարդացման սկզբունքով: Համեմատաբար պարզ կառուցվածքով ապացուցումները, երբ նրանց սխեմայում ծառն ունենում է 2-3 ճյուղեր, հնարավորություն են տալիս առանց ձանձրանալու կենտրոնանալ փաստարկների որոնման աշխատանքի վրա: Մեր հետապնդած նպատակների տեսակետից դա շատ օգտակար էր, քանի որ այս կամ այն թեորեմի կամ պնդման ապացուցումը դիտարկվում էր ոչ թե որպես դասագրքային պատրաստի ապացուցումների սերտում և յուրացում, այլ որպես հայտնաբերում: Ընդ որում դա արվում էր սովորողների միջոցով, նրանց ակտիվ մասնակցությամբ:

Ապացուցումները ծառի տեսքով ներկայացնելու մեթոդի նկատմամբ սովորողների ցուցաբերած հետաքրքրասիրությունը նույնիսկ գերազանցեց մեր նախնական սպասելիքները: Ապացուցման ծառը պատկերելու փորձեր էին անում նաև այն աշակերտները, որոնք, ուսուցիչների վկայությամբ, մաթեմատիկայի դասերին սովորաբար շատ պասիվ են եղել: Պարապմունքների ամփոփման ժամանակ սովորողները հայտնում էին, որ իրենց շատ դուր է եկել ապացուցման այդ եղանակը, քանի որ սխեմատիկորեն տեսնում են, թե ինչը ինչից է բխում, տպավորիչ է, ներգրավվում են անգամ ցածր առաջադիմություն ունեցողները, ապացուցումը չի վանում, այլ գրավում է, վերացնում է վախը սեփական ուժերի նկատմամբ, դառնում են ավելի ինքնավստահ, պատասխանատվություն են զգում իրենց կատարած քայլերի համար, գիտակցում են, որ այն, ինչ գրեցին, պետք է կարողանան հիմնավորել և պետք է կարևորեն հստակ հայերենով ձևակերպել իրենց մտքերը:

Ապացուցումները ծառի տեսքով ներկայացնելու վերաբերյալ անցկացված գիտափորձի ընթացքի հանգամանալի նկարագրությունը ներկայացված է հավելված 2-Ա-ում:

Գիտափորձի շրջանակներում անցկացված յուրաքանչյուր պարապմունքի վերջում սովորողներին բաժանել ենք անանուն հարցաթերթիկներ, որոնց կանդրադառնանք ներքևում:

2. *Քերոլի սկուտեղի կիրառումը ուսուցման գործընթացում*

Ինչպես արդեն նշվել է (կետ 2.3.2), Քերոլի սկուտեղի՝ որպես մեթոդական հնարի էությունն այն է, որ առաջարկվում է կյանքից վերցրած մի այնպիսի հետաքրքիր խնդիր, որում պահանջվում է նկարով պատկերել դիտարկվող առարկաների (մեր օրինակում՝ սկուտեղով մատուցվող կարկանդակների) հատկանիշները, և դրա միջոցով սովորողներին ներքաշվում է տրամաբանական գիտելիքների բացահայտման ոլորտ:

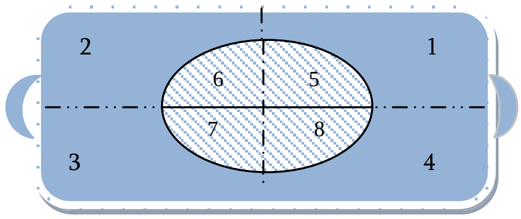
Որպեսզի պրակտիկ փորձարկման միջոցով պարզեինք ուսուցման գործընթացում Քերոլի սկուտեղի կիրառությանը վերաբերող մեթոդական մշակումների արդյունավետության հարցը, մեր կողմից կատարվեց գիտափորձ: Գիտափորձի շրջանակներում պարապմունքներ անցկացրինք Կոտայքի մարզի Պռոշյան համայնքի Պետրոս Ղևոնդյանի անվան միջնակարգ դպրոցի 7-րդ և 10-րդ դասարանների աշակերտների և ՀՊՄՀ-ի հենակետային վարժարանի 10-րդ դասարանների սովորողների հետ: Նույն նպատակով սեմինար անցկացրինք նաև ՀՊՄՀ-ի «Մաթեմատիկա» բաժնի ուսանողների համար:

Գիտափորձի ընթացքում հիմնականում կատարում էինք այն հաջորդական քայլերը, որոնք նկարագրել ենք վերևում՝ 2.3.2 կետում: Այսինքն 1-ին քայլում դիտարկում էինք այն հարցը, թե նկարով ինչպե՞ս պատկերել սկուտեղում կարկանդակ լինել-չլինելու հարցը, 2-րդ քայլում՝ կարկանդակներով սկուտեղն ինչպե՞ս պատկերել, որ տեղեկություն տրվի կարկանդակների որևէ մի հատկանիշի (մեր օրինակում՝ թարմության) մասին, իսկ 3-րդ քայլում քննարկվում էր նույն հարցը, սակայն այս դեպքում դրվում էր կարկանդակների ևս մեկ հատկանիշ (համով լինել-չլինելը) պատկերելու խնդիրը:

Այս հարցերը խթանում էին սովորողների երևակայությունը, և նրանք, ուշադրավ հնարքներ գործադրելով, առաջարկում էին պատկերների այնպիսի համակարգ, որը կհամապատասխաներ առարկաների (կարկանդակների) հատկանիշներին վերաբերող տեղեկատվությանը: Սովորողների ակտիվությունը շատ բարձր էր, առանց բացառության մասնակցում էին բոլորը: Ստեղծվում էր շատ բարենպաստ պայման ավելի լուրջ կրթական խնդիր լուծելու համար: Իսկ այդ խնդիրը առաջին հերթին վերաբերում էր սկուտեղի պատկերներին համապատասխանող դատողությունների ձևակերպումներին:

Սկզբում դիտարկեցինք կարկանդակների միայն մեկ հատկանիշով պատկերված սկուտեղներին վերաբերող դատողությունները: Սովորողները նախ հասկացան, որ ձևակերպումների մեջ բառերի նշանակությունը շատ էական է, որպեսզի դատողությունը ճշգրտորեն համապատասխանի տվյալ պատկերի բովանդակությանը: Այստեղ հստակեցվեցին ընդհանրության քվանտոր արտահայտող (բոլոր, յուրաքանչյուր, ամեն մի, ցանկացած և այլն) բառերի և գոյության քվանտոր (որոշ, կա, գոյություն ունի, որևէ և այլ) բառերի իմաստները, պարզաբանվեց նաև պարզ դատողությունների ժխտման իմաստը: Այնուհետև, երբ դիտարկեցինք կարկանդակների երկու հատկանիշով պատկերված սկուտեղներին վերաբերող դատողությունները, զգալիորեն ընդլայնվեց տրամաբանական հարցադրումների շրջանակը: Այս դեպքում արդեն գործ ունեցանք տրամաբանական շաղկապների կիրառմամբ ստացվող բարդ դատողությունների հետ: Ընդ որում շատ օգտակար էր ուղիղ և հակադարձ խնդիրների դիտարկումը. մի դեպքում ներկայացնում էինք սկուտեղի նկարը և սովորողներին առաջարկում ձևակերպել դրան համապատասխանող դատողությունը, իսկ մյուս դեպքում՝ ներկայացնում էինք դատողությունը և առաջարկում պատկերել դրան համապատասխանող սկուտեղի նկարը: Նշենք որ դատողությունների միջև կապեր ստեղծելիս (հատկապես բարդ դատողությունների ժխտումները ձևակերպելիս) սովորողների թույլ տրված սխալները հեշտությամբ ուղղվում կամ կանխվում էին, երբ դրանք ցուցադրում էինք համապատասխան նկարով:

Գիտափորձի ընթացքում սովորողների մոտ հարց առաջացավ կարկանդակների երեք հատկանիշով պատկերված սկուտեղի դիտարկման վերաբերյալ: Ելնելով դրանից՝ առաջին պարապմունքից հետո նպատակահարմար գտանք մի պարապմունք նվիրել նաև այդ դեպքի քննարկմանը, երբ ավելացվում էր ևս մեկ հատկանիշ՝ կարկանդակների օգտակար լինելու հատկանիշը: Ի տարբերություն երկու հատկանիշների դեպքի, երբ սկուտեղը բաժանվում էր չորս մասի (յուրաքանչյուր հատկանիշին և նրա ժխտմանը մեկական), երեք հատկանիշների պարագայում սկուտեղի բաժանվող մասերի թիվը դառնում էր ութ (երեք հատկանիշների ու դրանց ժխտումների հնարավոր բոլոր զուգակցումների թիվը ութն է): Սովորողների առաջարկությունները հանգեցրին նրան, որ սկուտեղը վերադասավորեցինք այնպես, որ կենտրոնում տեղադրենք օգտակար կարկանդակները, իսկ ծայրամասերում՝ ոչ օգտակարները, և սկուտեղն ստացավ հետևյալ տեսքը (տես նկ. 23).



նկ.23

Քառաբաժան սկուտեղի համեմատությամբ, այժմ ավելի ընդլայնվեց տրամաբանական շաղկապների գործածությամբ ձևակերպված բարդ դատողությունների դիտարկման շրջանակը, և մենք պարապմունքի արդյունքում համոզվեցինք, թե ինչպիսի մեծ հնարավորություններ է ստեղծում Քերոլի սկուտեղը սովորողների լեզվական, պատկերային և տրամաբանական մտածողության զարգացման գործում:

Պարապմունքների ամփոփման ժամանակ դիմում էինք սովորողներին՝ կարծիք հայտնել պարապմունքի մասին: Առավել հաճախ էին հնչում նրանց արտահայտած հետևյալ տեսակետները.

- Պարապմունքները շատ հետաքրքիր էին, ժամանակը շատ արագ էր անցնում,
- Նյութը բոլորիս համար հասկանալի էր, որովհետև բարդ գիտելիքներ չէր պահանջում,
- Նկարների միջոցով ցույց տրված պատկերները շատ էին օգնում, որ խնդիրները լավ հասկանանք և ճիշտ լուծենք,
- Հասկացանք, որ խոսելիս ճիշտ ձևակերպումներ տալը շատ կարևոր է,
- Պարապմունքի ընթացքում մենք ոչ թե միայն լսում էինք ուսուցչի պատմածն ու բացատրածը, այլ ինքներս ակտիվ քննարկում էինք:

Ուսուցման գործընթացում Քերոլի սկուտեղի կիրառության վերաբերյալ անցկացված գիտափորձի ընթացքի հանգամանալի նկարագրությունը ներկայացված է հավելված 2-Բ-ում:

Գիտափորձի շրջանակներում անցկացված յուրաքանչյուր պարապմունքի վերջում սովորողները լրացրին անանուն հարցաթերթիկներ, որոնց կանդրադառնանք ստորև:

3. Գիտափորձի արդյունքների գնահատումը

Ինչպես արդեն նշել ենք, առաջարկվող մեթոդիկայի արդյունավետությունը ստուգելու և գնահատելու համար գիտափորձի շրջանակներում անցկացված յուրաքանչյուր պարապմունքի վերջում մասնակիցներին բաժանվել են հարցաթերթիկներ: Դրանցում ընդգրկված առանցքային հարցը վերաբերում էր ուսուցանվող նյութի նկատմամբ նրանց ցուցաբերած ճանաչողական հետաքրքրության գնահատականին: Ուսուցանվող նյութի նկատմամբ վերաբերմունքն արտահայտելու համար առանձնացրել էինք հետաքրքրության մակարդակների սանդղակի երեք աստիճան: Եվ ըստ դրա էլ հարցաթերթիկներում «Որքանո՞վ էր հետաքրքիր ուսուցանվող նյութը» հարցի համար որպես պատասխանի ընտրության տարբերակներ նշված էին՝

ա) անհետաքրքիր է, բ) հետաքրքիր է, գ) շատ հետաքրքիր է:

Լրացված հարցաթերթիկներում ամփոփված տվյալները խմբավորեցինք և (2) բանաձևով հաշվեցինք հետաքրքրությունների ցուցանիշը՝ ինչպես Քերոլի սկուտեղի կիրառության, այնպես էլ ծառի տեսքով ապացուցումների համար: Ստացվեցին հետևյալ ցուցանիշները (տես աղյուսակ 5):

Աղյուսակ հետաքրքրությունների ցուցանիշի

Աղյուսակ 5

Աշխատանքի տեսակը	Աշխատանքի միջավայրը	Մասնակիցների թիվը	Հետաքրքրության ցուցանիշը
Քերոլի սկուտեղի կիրառությունը	Միջին դպրոց	54	0,91
	Ավագ դպրոց	96	0,84
Ծառի տեսքով ապացուցումները	Աշակերտական	89	0,64
	Ուսանողական	68	0,82

Աղյուսակում երևում է, որ ինչպես Քերոլի սկուտեղի կիրառության, այնպես էլ ծառի տեսքով ապացուցումների հետաքրքրության ցուցանիշները աշխատանքի բոլոր միջավայրերում զգալիորեն բարձր են «հետաքրքիր է» բնութագրի միջին ցուցանիշից (նշենք, որ Վ. Ս. Չերեպանովի սանդղակով միջին ցուցանիշը 0,5 է): Իսկ Քերոլի սկուտեղի կիրառության դեպքում այդ ցուցանիշը համապատասխանում է «շատ հետաքրքիր է» բնութագրին (Վ. Ս. Չերեպանովի սանդղակով «շատ հետաքրքիր է» բնութագրի ներքևի սահմանը 0,83 ցուցանիշն է): Ընդ որում, հետաքրքրության ամենաբարձր ցուցանիշն ունի Քերոլի սկուտեղի կիրառությունը միջին դպրոցում: Մեր կարծիքով, դա բացատրվում է հետևյալ երկու գործոնների ազդեցությամբ: Գործոններից մեկը վերաբերում է սկուտեղի կիրառության մեթոդին, որին հատկանշական է այն, որ ուսուցման գործընթացն ուղեկցվում է խաղային տարրեր պարունակող իրադրություններով, ինչը միջին դպրոցի սովորողների կողմից ավելի է կարևորվում: Մյուս գործոնը վերաբերում է դիտարկվող խնդրին, որի բովանդակության մեջ արտացոլված իրադրությունը անմիջական կապ ունի առօրյա կյանքի հետ, և դա դրական վերաբերմունք է առաջացնում ուսումնական գործընթացի նկատմամբ:

Անդրադառնալով ծառի տեսքով ապացուցումներին՝ նշենք, որ ստացված ցուցանիշները վկայում են, որ ապացուցման այդ եղանակը զգալիորեն նպաստում է սովորողների ճանաչողական հետաքրքրության բարձրացմանը: Մաթեմատիկական ապացուցումներն առհասարակ պահանջում են մաթեմատիկական պատրաստվածություն և բարձրակարգ մտածողության կարողություններ: Այդ պատճառով, ինչպես ցույց են տալիս մանկավարժների շրջանում կատարված հարցումները, սովորողների մեծամասնությունը սովորաբար խուսափում է ապացուցումներից: Այդ առումով ծառի տեսքով ապացուցումների ներկայացումը զգալիորեն փոխում է իրավիճակը: Գիտափորձի արդյունքները հաստատում են, որ ապացուցման այդ եղանակը հետաքրքրություն է արթնացնում ավելի շատ թվով սովորողների մոտ և նրանք սկսում են ակտիվորեն մասնակցել ուսումնական գործընթացին: Ուստի ապացուցման նկատմամբ աշակերտների կողմից ցուցաբերված հետաքրքրության 0,64 ցուցանիշը պետք է դիտել որպես առաջընթաց լուրջ քայլ: Իսկ ուսանողների կողմից ցուցաբերված հետաքրքրության 0,82 ցուցանիշը պետք է շատ բնական համարել, հատկապես եթե նկատի ունենանք, որ գիտափորձին մասնակցել են մաթեմատիկական մասնագիտությամբ կողմնորոշված ուսանողները: Սակայն նրանց դիրքորոշումը պարզելը նույնպես կարևոր էր, քանի որ նրանք կարող էին տալ լիովին գիտակցված և հիմնավոր գնահատական:

Այսպիսով, գիտափորձի արդյունքները բավարար հիմք են տալիս ասելու, որ մեթոդական այն նոր մոտեցումները, որոնք ուղղված են տրամաբանության տարրերի ուսուցմանը, ունեն բարձր արդյունավետություն, և դրանց վերաբերյալ տեսական հիմնավորումները հաստատում են փորձարարական աշխատանքներում և գործնական կիրառություններում:

Երկրորդ գլխում կատարված վերլուծությունները հանգեցնում են հետևյալ հետևություններին

Սովորողների տրամաբանական մտածողության և դրա հետ շաղկապված լեզվական կարողությունների զարգացման խնդիրը ընդհանուր հարցադրումների և նպատակադրումների մակարդակից փոխադրվում է կոնկրետ առարկայական դաշտ: Եվ դա իրականացվում է այն մոտեցման շնորհիվ, ըստ որի տրամաբանության հիմունքներից ընտրված որոշակի գիտելիքները կրթության բովանդակության մեջ բացորոշ ձևով ներառելուն զուգընթաց, միաժամանակ, մեթոդական համակարգը հարստացվում է այնպիսի բաղադրիչներով, որոնցում առավել ամբողջական ու լիարժեք են արտացոլվում կրթության նորացված բովանդակության առանձնահատկությունները: Դրա արդյունքում բավարար լուծում են ստանում մեթոդամանկավարժական, մասնավորապես նաև մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայի արդիական մի քանի հիմնահարցեր:

ա. Տրամաբանական կառուցվածքային ձևերին (հասկացություն, դատողություն, մտահանգում) և դրանց առնչություններին վերաբերող ուսումնական խնդիրները զուտ վերացական ընկալումների մակարդակից փոխադրվում են նաև պատկերային ընկալումների մակարդակ: Եվ դա արվում է այն բանի շնորհիվ, որ տրամաբանական ձևերն արտահայտվում են բազմությունների և դրանց գործողությունների միջոցով, որոնք ներկայացվում են էյլերյան շրջանակներով, ինչը ակնառու և տեսանելի է դարձնում դիտարկվող առնչությունները:

բ. Տրամաբանության և բազմությունների տեսության տարրերի միջև խորքային կապերի բացահայտումը նոր հեռանկարներ է ստեղծում ժամանակակից մանկավարժության հայեցակետից արդյունավետ համարվող բազմառարկայական ինտեգրված ուսուցման համար: Դա պայմանավորված է այն կարևոր հանգամանքով, որ բազմությունները և տրամաբանության հիմունքները համընդգրկուն կիրառություններ ունեն ոչ միայն մաթեմատիկայում, այլև ուսումնական մյուս բնագավառներում:

գ. Բազմակողմանիորեն քննարկվում է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի համար առանցքային նշանակություն ունեցող մի հիմնահարց, որը վերաբերում է ապացուցման կարողությունների զարգացմանը: Այդ կապակցությամբ կատարված դիտարկումների հիման վրա լուսաբանվում է ապացուցումների համար մշակված մի այնպիսի եղանակ, որում «ծառի» տեսքով պատկերավոր և ընկալելի ներկայացվում են ապացուցման քայլերն ու դրանց հիմնավորումները: Դրա շնորհիվ ոչ միայն զգալիորեն բարձրանում է մաթեմատիկայի ուսուցման արդյունավետությունը, այլև այն բարերար ազդեցություն ունի տրամաբանական և լեզվական-արտահայտչական մշակույթի զարգացման վրա:

դ. Մաթեմատիկայի հանրակրթական դասընթացներում տրամաբանության տարրերի ներառման կապակցությամբ բարձրացվում է մաթեմատիկայի ուսուցիչների պատրաստման և վերապատրաստման համակարգերում համարժեք բարելավումներ կատարելու հիմնահարց և առաջարկվում լուծման որոշակի ուղիներ: Մասնավորապես այդ նպատակին են ծառայում հետևողականորեն մշակված ծրագրային այն դրույթները, որոնք հարկավոր է կյանքի կոչել բուհական կրթական ծրագրերում և ուսուցիչների վերապատրաստման դասընթացներում:

ե. Ուսուցիչների տրամաբանական պատրաստվածության մակարդակի բարձրացման խնդրի տեսանկյունից առանձնահատուկ կարևորություն է ստանում ուսուցման մեթոդների կատարելագործման հիմնահարցի լուծումը: Այդ նպատակով հստակեցվում, պարզաբանվում և մաթեմատիկայի ուսուցման համար հարմարեցվում են ժամանակակից այն մեթոդներն ու մեթոդական հնարները, որոնց կիրառությունը արդյունավետ է սովորողների տրամաբանական և լեզվական կարողությունների խթանման ու զարգացման առումով: Ավելին, այդ մեթոդների հմտորեն գործածության շնորհիվ ուսուցման գործընթացը սովորողների համար դառնում է մատչելի, հետաքրքիր և գրավիչ:

Այսպիսով, մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում տրամաբանության տարրերի ներառման և ժամանակակից մեթոդների արդյունավետ կիրառման շնորհիվ ուսումնական բնագավառների համակարգում զգալիորեն մեծանում է մաթեմատիկայի հանրակրթական ներուժը, և արդյունքում՝ մաթեմատիկան «ընտրյալների համար նախատեսված» առարկայից սկսում է վերածվել բոլորի համար հասանելի առարկայի:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Տրամաբանության հիմնահարցերի հետազոտությունն ու լուսաբանումը գիտական մտքի և կրթական մշակույթի դարավոր զարգացման բոլոր փուլերում կարևորվել և շարունակական բնույթ են ունեցել: Ժամանակակից կրթական հայեցակարգերում շեշտադրվում է տրամաբանական մտածողության զարգացման հիմնարար նշանակությունը նաև հանրակրթական դպրոցների սովորողների համար: Ձևավորված մոտեցումներից մեկը, թերևս ամենակիրառականը, տրամաբանության տարրերը մաթեմատիկայի հետ զուգորդված ուսուցումն է: Այդ մոտեցման հետ կապված բովանդակային և մեթոդական հիմնահարցերի վերաբերյալ մեր կողմից կատարված հետազոտությունները բավարար հիմք են տալիս հետևյալ դրույթները հաստատելու համար:

1. Հանրակրթական դպրոցների մաթեմատիկայի առարկայախմբի դասընթացներում տրամաբանության տարրերի ներառումը՝

ա) հնարավորություն է տալիս արմատապես բարելավելու սովորողների լեզվատրամաբանական մտածողության զարգացման խնդրի լուծումը,

բ) հիմք է ծառայում դասընթացի տեխնիկավարժանքային ուղղվածությունը գաղափարական-բովանդակային դաշտ տեղափոխելու, սերտողական ուսուցման թերությունները նվազեցնելու և ուսուցման արդյունավետությունը բարձրացնելու համար,

գ) ստեղծում է սովորողների դաստիարակության և արժեհամակարգի ձևավորման լրացուցիչ հնարավորություններ:

2. Մաթեմատիկայի ուսուցման արդյունավետության բարձրացմանը նպաստում է մեթոդական համակարգի հարստացումը այնպիսի մեթոդական հնարներով, որոնց օգնությամբ տրամաբանական գործողությունները վերացական ձևերի մակարդակից փոխադրվում են պատկերային ընկալումների մակարդակ և միաժամանակ ստանում են լեզվական հստակ ձևակերպումներ: Դրա շնորհիվ՝

ա) ուսուցման գործընթացը սովորողների համար դառնում է մատչելի և հետաքրքիր, բ) հեշտությամբ են կանխվում տրամաբանական գործողություններ կատարելիս սովորողների կողմից թույլ տրվող հնարավոր սխալները,

գ) նոր հնարավորություններ են ստեղծվում միջառարկայական կապերի բացահայտման և բազմառարկայական ինտեգրված ուսուցման համար:

3. Հանրակրթական ծրագրերի բովանդակության մեջ տրամաբանական բաղադրիչի ուժեղացումը կապված է ուսուցիչների տրամաբանական պատրաստվածության մակարդակի բարձրացման խնդրի հետ, որի լուծման համար հարկավոր է կատարել բովանդակային փոփոխություններ բուհական ծրագրերում:

Օգտագործված գրականություն

1. Աբրահամյան Ա. Վ., Աշակերտների տրամաբանական մտածողության զարգացումը մաթեմատիկայի դասերին, Եր., Լույս, 1978 թ., 72 էջ:
2. Աթանասյան Լ. Ս., Բուտուզով Վ. Ֆ., Կադոմցև Մ. Բ. և ուրիշներ, Երկրաչափություն-7. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 7-րդ դասարանի, Եր., Զանգակ-97, 2011 թ., 128 էջ:
3. Աթանասյան Լ. Ս., Բուտուզով Վ. Ֆ. և ուրիշներ, Երկրաչափություն-8. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 8-րդ դասարանի, Եր., Զանգակ, 2012 թ., 144 էջ:
4. Աթանասյան Լ. Ս., Բուտուզով Վ. Ֆ. և ուրիշներ, Երկրաչափություն-9. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 9-րդ դասարանի, Եր., Զանգակ-97, 2013 թ., 144 էջ:
5. Այվազյան Է. Ի., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, Ուսուցչի մեթոդական ձեռնարկ (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր., Տիգրան Մեծ, 2009 թ., 104 էջ:
6. Այվազյան Է. Ի., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, Ուսուցչի մեթոդական ձեռնարկ (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար), Եր., Էդիթ Պրինտ, 2009 թ., 80 էջ:
7. Այվազյան Է. Ի., Մաթեմատիկական ապացուցումների ուսուցման մեթոդաբանական հիմունքները, Եր., Էդիթ Պրինտ, 2007 թ., 306 էջ:
8. Այվազյան Է. Ի., «Տրամաբանության հանրահաշիվը» թեմայի ուսուցման մասին, //Մաթեմատիկան դպրոցում, N 3-4, Եր., 1999 թ., 48-56 էջեր:
9. Աստվածատրյան Մ., և ուրիշներ, Ինտեգրված թեմատիկ միավորներ, Եր., ԱՅՐԵՔՍ, 2003թ., 255 էջ:
10. Աստվածատրյան Մ. և ուրիշներ, Ուսումնառությունն ու դասավանդումը կրտսեր դպրոցում, Եր., ԱՅՐԵՔՍ, 2001 թ., 320 էջ:
11. Աստվածատրյան Մ. և ուրիշներ, Ուսուցիչների վերապատրաստման գործընթացի կատարելագործումը, Եր., ԱՅՐԵՔՍ, 2003 թ., 336 էջ:
12. Ավագյան Ա., Հիշողության երևույթը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում, //Մաթեմատիկան դպրոցում, N 5-6, Եր., 2009 թ., 85-92 էջեր:

13. Ավետիսյան Ռ. Ա., Խաչատրյան Ռ. Ս., Երկրաչափություն 10-12, Ուսուցչի ձեռնարկ (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր., Անտարես, 2009 թ., 124 էջ:

14. Ավետիսյան Ռ. Ա., Հանրահաշիվը 7-9-րդ դասարաններում, Ուսուցչի ձեռնարկ, Անտարես, Եր., 2011 թ., 80 էջ:

15. Ավետիսյան Ս. Հ., Իմացաբանականի և տրամաբանականի փոխհարաբերությունը մաթեմատիկայում, ԳԱ հրատարակչություն, 1973 թ., 168 էջ:

16. Ավետիսյան Ս. Հ., Մաթեմատիկական տրամաբանության հիմնական տարրեր, Եր., Լույս, 1969 թ., 302 էջ:

17. Արնաուդյան Ա. և ուրիշներ, Մասնագիտական զարգացման ձեռնարկ ուսուցիչների համար, ԿԱԻ, Եր., 2004թ, 180 էջ:

18. Բրուտյան Գ. Ա., Տրամաբանության դասընթաց, Եր., ԵՊՀ հրատարակչություն, 1976 թ., 508 էջ:

19. Բրուտյան Գ. Ա., Տրամաբանություն, Ուսումնական ձեռնարկ հանրակրթական դպրոցի 9-10-րդ դասարանների համար, Եր., ՀՀ ԳԱԱ Գիտություն, 1998 թ., 213 էջ:

20. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 10-րդ դասարանի (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր., Տիգրան Մեծ, 2009 թ., 208 էջ:

21. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 11-րդ դասարանի (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր., Տիգրան Մեծ, 2010 թ., 208 էջ:

22. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 12-րդ դասարանի (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր., Տիգրան Մեծ, 2011 թ., 208 էջ:

23. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 10-րդ դասարանի (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար), Եր., Էդիթ Պրինտ, 2009 թ., 136 էջ:

24. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 11-րդ դասարանի (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար), Եր., Էդիթ Պրինտ, 2010 թ., 128 էջ:

25. Գևորգյան Գ. Գ., Սահակյան Ա. Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 12-րդ դասարանի (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար), Եր., Էդիթ Պրինտ, 2009 թ., 128 էջ:

26. Գևորգյան Հ. Ա., Բաղդասարյան Վ. Խ., Տրամաբանություն, Եր., Լույս 1994 թ.,264 էջ:

27. Գևորգյան Հ. Ա., Դասական ձևական տրամաբանության հարաբերությունը ժամանակակից տրամաբանական ուսմունքների և մաթեմատիկական տրամաբանության հետ//Գիտության և մշակույթի փիլիսոփայության և մեթոդաբանության հարցեր, Եր., ՀՀ ԳԱԱ, Էդիթ Պրինտ, 2013 թ., 7-48 էջեր:

28. Դավիթ Անհաղթ, Երկեր /թարգմ, առաջ. և ծանոթ. Ս. Ս. Արևշատյանի, Երևան, 1980 թ.:

29. Զաքարյան Ս. Ա., Փիլիսոփայության պատմություն, Եր., Նաիրի, 2000 թ., 336 էջ:

30. Թադևոսյան Ժ. Ս., Տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչին մաթեմատիկական տրամաբանության հիմունքների ուսուցման մեթոդիկան, Եր., 2010 թ., 136 էջ:

31. Ժամանակակից մանկավարժական մոտեցումներ. քսաներորդ դարի մանկավարժական տեսություններ (Ս. Տ. Վարդումյանի խմբագրությամբ), Եր.,ԱՅՐԵՔՍ, Նոյյան տապան, 2005 թ., 410 էջ:

32. «Կենգուրու» միջազգային մաթեմատիկական մրցույթ. խնդիրներ և լուծումներ 3-12-րդ դասարանցիների համար, Եր., «Այբ» կրթական հիմնադրամ, 2013 թ., 90 էջ:

33. Կոմենսկի Յա. Ա., Մեծ Դիդակտկա, Եր., Զանգակ, 2010 թ., 432 էջ:

34. Հակոբյան Ա., Խրիմյան Ն., Տրամաբանական խաղեր. հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Եր., Մակմիլան-Արմենիա, 2000 թ., 200 էջ:

35. Հակոբյան Ս. Է., Դեդուկցիայի և ինդուկցիայի մասին ավանդական պատկերացումների վերանայումը մաթեմատիկական կրթության հայեցակետից// Գիտության և մշակույթի փիլիսոփայության և մեթոդաբանության հարցեր, ԳԱԱ, Եր., Էդիթ Պրինտ, 2013 թ., 108-127 էջեր:

36. Հակոբյան Ս. Է., Երկրաչափություն. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 10-րդ դասարանի (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար), Եր., Տիգրան Մեծ, 2009 թ., 120 էջ:

37. Հակոբյան Ս. Է., Երկրաչափություն. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 11-րդ դասարանի (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար), Եր., Տիգրան Մեծ, 2010 թ., 136 էջ:

38. Հակոբյան Ս. Է., Երկրաչափություն. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 12-րդ դասարանի (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար), Եր., Տիգրան Մեծ, 2011 թ., 128 էջ:

39. Հակոբյան Ս. Է., Երկրաչափություն 7-9, Ուսուցչի մեթոդական ձեռնարկ, Եր., Զանգակ-97, 2011 թ., 104 էջ:

40. Հակոբյան Ս. Է., Երկրաչափություն 10-12, Ուսուցչի ձեռնարկ, հանրակրթական դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար, Եր., Տիգրան Մեծ, 2009 թ., 104 էջ:

41. Հակոբյան Ս. Է., Տրամաբանական գիտելիքների համառոտ տեղեկատու// Մաթեմատիկան դպրոցում, N4-5 (19-20), Եր., 2001 թ., 90-103 էջեր:

42. Հակոբյան Ս. Է., Տրամաբանության հիմունքները որպես կրթության բովանդակային բաղադրիչ//Մաթեմատիակայի դասավանդման արդի հիմնահարցեր, Պրակ 3, Եր., 2003 թ., 14-21 էջեր:

43. Հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի առարկայական չափորոշչի նախագիծ//Մաթեմատիկան դպրոցում, Եր., 2001 թ., N 3, -64 էջ:

44. Հանրակրթության պետական չափորոշիչ//ՀՀ կառավարության 2011 թ. հուլիսի 28-ի N1088-Ն որոշման հավելված//www.aniedu.am.

45. Հանրահաշիվ. Ծրագիր հանրակրթական դպրոցի 6-8-րդ դասարանների համար// Մաթեմատիկան դպրոցում, Եր., 1999 թ., N3-4, 72 էջ, 3-15 էջեր:

46. Հանրահաշիվ. Ծրագիր 7-9-րդ դասարանների (հաստատված 2011 թ.), www. aniedu.am, 5 էջ:

47. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր, երկրաչափություն, Հանրակրթական ավագ դպրոցի չափորոշիչներ և ծրագրեր, Եր., Տիգրան Մեծ, 2009 թ., 144 էջ:

48. Հարութիւնեանց Ի., Համառոտ տրամաբանություն//Մաթեմատիկան դպրոցում, N1(10), Եր., 2000 թ., 27-32 էջեր:

49. Հարությունյան Ս., Մաթեմատիկա-3, Մեթոդական ուղեցույց, Եր., Արևիկ, 2008 թ., 176 էջ:

50. Հերթական ատեստավորման ենթակա մաթեմատիկայի ուսուցիչների մասնագիտական զարգացման, վերապատրաստման դասընթացների ուղեցույց (կազմողներ՝ Ս. Հակոբյան, Վ. Ոսկանյան, Ռ, Ստեփանյան), Եր., Տիգրան Մեծ, 2013 թ., 168 էջ:

51. Հովհաննիսյան Ա., Հարությունյան Կ. և ուրիշներ, Համագործակցային ուսուցում. ձեռնարկ, Եր., Անտարես, 2006 թ., 124 էջ:

52. Հովհաննիսյան Վ. Հարությունյան Ս., Մաթեմատիկա-3. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 3-րդ դասարանի,, Եր., Արևիկ, 2008 թ., 224 էջ:

53. Մաթեմատիկա, Հանրակրթական հիմնական դպրոցի առարկայական չափորոշիչ և ծրագիր, Եր., Անտարես, 2007 թ., 84 էջ:

54. Միջնակարգ (լրիվ) ընդհանուր կրթության պետական չափորոշիչ//ՀՀ ԿԳՆ Տեղեկագիր, Եր., 2000 թ., N2, 24-48 էջեր:

55. Միրումյան Կ. Ա., Գրիգոր Մագիստրոսի մաթեմատիկական-մանկավարժական հայացքները//Մաթեմատիկան դպրոցում, N 5-6 (14-15), Եր., 2000 թ., 90-100 էջեր:

56. Միրումյան Կ. Ա., Դավիթ Անհաղթի մաթեմատիկական հայացքները //Մաթեմատիկան դպրոցում, Եր., 2001 թ., N 1-2 (16-17), 98-108 էջեր:

57. Միքայելյան Հ. Ս., Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը, Եր., Էդիթ պրինտ, 2011 թ., 184 էջ:

58. Միքայելյան Հ. Ս., Խաղերը որպես հանրահաշվի ուսուցման արդյունավետության բարձրացման միջոց//Մաթեմատիկան դպրոցում, Եր., N 3-4, 1999 թ.:

59. Միքայելյան Հ. Ս., «Հանրահաշիվ 7» դասագրքի խնդիրների լուծումներ, ցուցումներ, մեթոդական խորհուրդներ, Եր., Զանգակ-97, 2007 թ., 116 էջ:

60. Միքայելյան Հ. Ս., «Հանրահաշիվ 8» դասագրքի խնդիրների լուծումներ, ցուցումներ, ստուգողական աշխատանքների, թեստերի տարբերակներ, մեթոդական խորհուրդներ, Եր., Էդիթ Պրինտ, 2009 թ., 208 էջ:

61. Միքայելյան Հ. Ս., «Հանրահաշիվ 9» դասագրքի խնդիրների լուծումներ, ցուցումներ, մեթոդական խորհուրդներ, Եր., Էդիթ Պրինտ, 2010 թ., 174 էջ:

62. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 7. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 7-րդ դասարանի, Եր., Էդիտ Պրինտ, 2006 թ., 305 էջ:

63. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 8. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 8-րդ դասարանի, Եր., Էդիտ Պրինտ, 2007 թ., 305 էջ:

64. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 9. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 9-րդ դասարանի, Եր., Էդիտ Պրինտ, 2008 թ., 305 էջ:

65. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 6. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 6-րդ դասարանի, Եր., Հայ Էդիթ, 1999 թ., 288 էջ:

66. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 7. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 7-րդ դասարանի, Եր., Հայ Էդիթ, 1999 թ., 288 էջ:

67. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշիվ 8. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 8-րդ դասարանի, Եր., Հայ Էդիթ, 1999 թ., 304 էջ:

68. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշվի ուսուցման հիմնահարցերը, Եր., Էդիթ Պրինտ, 2003 թ., 188 էջ:

69. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշվի ուսուցումը 6-8-րդ դասարաններում, Մեթոդական ձեռնարկ, Եր., Հայ էդիթ, 1999 թ., 64 էջ:

70. Միքայելյան Հ. Ս., Հանրահաշվի ուսուցումը 6-8-րդ դասարաններում, Մեթոդական ձեռնարկ, Եր., Հայ էդիթ, 2002 թ., 292 էջ:

71. Միքայելյան Հ. Ս., Մաթեմատիկական կրթությունը և սովորողների հոգեկան կոփումը//Մանկավարժություն, N 1, Եր., 2010 թ., 18-29 էջեր:

72. Միքայելյան Հ. Ս., Մկրտչյան Ա. Տ., Լուիս Քերոլը, նրա սկուտեղը և սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման հիմնահարցը//Մաթեմատիկան դպրոցում, N 2 (83), Եր., 2012 թ., 3-17 էջեր:

73. Միքայելյան Հ. Ս., Մկրտչյան Ա. Տ., Մաթեմատիկական ապացուցումների ներկայացման մի եղանակի մասին//Մաթեմատիկական կրթություն: Հանրապետական գիտաժողով: 24-25 հոկտեմբերի, 2013 թիվ (նյութերի ժողովածու), Եր., Էդիթ Պրինտ, 2013 թ., 113-122 էջեր:

74. Միքայելյան Հ. Ս., Սովորողների կամային որակների ձևավորումը և մաթեմատիկական կրթությունը//Մարդ և հասարակություն, N2, Եր., 2013 թ., 26-45 էջեր:

75. Միքայելյան Հ. Ս., «Տրամաբանության հանրահաշիվը» թեմայի ուսուցման մասին// Մաթեմատիկան դպրոցում, N3-4, Եր., 1999, 40-47 էջեր:

76. Միքայելյան Հ. Ս., Տրամաբանության ուսուցումը հանրահաշվի դասընթացում// Մաթեմատիկայի ուսուցման արդի հիմնահարցերը, Գիտամեթոդական հոդվածների ժողովածու, Պրակ 1, Եր., 2002 թ., 3-10 էջեր:

77. Մկրտչյան Ա. Տ., Լուիս Քերոլը, նրա սկուտեղը և սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման հիմնահարցը-գիտափորձ//Մաթեմատիկան դպրոցում, N3 (84), Եր., 2012 թ., 30-37 էջեր:

78. Մկրտչյան Ա. Տ., Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ապացուցումների համակարգի մասին//Մաթեմատիկան դպրոցում, N 3 (90), Եր., 2013 թ., 23-43 էջեր:

79. Մկրտչյան Ա. Տ., Տրամաբանական գիտելիքներն ու կարողությունները «Երկրաչափություն» ուսումնական առարկայի չափորոշչում և ծրագրում// Մաթեմատիկան դպրոցում, N5 (80), Եր., 2011 թ., 9-30 էջեր:

80. Մկրտչյան Ա. Տ., Տրամաբանական գիտելիքներն ու կարողությունները «Հանրահաշիվ» ուսումնական առարկայի չափորոշչում և ծրագրում//Մաթեմատիկան դպրոցում, N3 (78), Եր., 2011 թ., 10-20 էջեր:

81. Մկրտչյան Ա. Տ., Տրամաբանական գիտելիքներն ու կարողությունները «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» ուսումնական առարկայի չափորոշչում և ծրագրում//Մաթեմատիկան դպրոցում, N(79), Եր., 2011 թ., 28-42 էջեր:

82. Մկրտչյան Ա. Տ., Տրամաբանական գիտելիքներն ու կարողությունները 5-6-րդ դասարանների «Մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայի չափորոշչում և ծրագրում//Մաթեմատիկան դպրոցում, N1 (76), Եր., 2011 թ., 3-11 էջեր:

83. Մկրտչյան Ա. Տ., Տրամաբանության հիմունքները մաթեմատիկայի հանրակրթական և մասնագիտական կրթության ծրագրերում// Պրոֆեսորադասախոսական անձնակազմի, ասպիրանտների, հայցորդների և գիտաշխատողների 54-րդ գիտաժողովի նյութերի ժողովածու), Եր., Մանկավարժ, 2010 թ., 172-174 էջեր:

84. Մկրտչյան Ա. Տ., Տրամաբանության հիմունքները որպես մաթեմատիկական կրթության բովանդակային բաղադրիչ//Մանկավարժական միտք, Զանգակ, N 1-2, Եր., 2012 թ., 19-26 էջեր:

85. Մկրտչյան Ա. Տ., Տրամաբանությունը Հին Հունաստանում//Մարդ և հասարակություն, N 1, Եր., 2012 թ., 23-34 էջեր:

86. Մկրտչյան Մ. Ա., Մաթեմատիկական կրթության բարեփոխման հիմնահարցերը//Մաթեմատիկան դպրոցում, Եր., 2003 թ., N 5-6 (32-33), 3-11 էջեր:

87. Մկրտչյան Մ. Ա., Մտորումներ մաթեմատիկական կրթության շուրջ//Մաթեմատիկան դպրոցում, Եր., 2006 թ., N 1 (46), 3-7 էջեր:

88. Մկրտչյան Ս., Աբրահամյան Ա., Իսկանդարյան Ս., Մաթեմատիկա 1. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 1-ին դասարանի, մաս երկրորդ, Եր., Զանգակ 97, 2010 թ., 96 էջ:

89. Մկրտչյան Ս., Աբրահամյան Ա., Իսկանդարյան Ս., Մաթեմատիկա 2. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 2-րդ դասարանի, մաս առաջին, Եր., Զանգակ 97, 2010 թ., 175 էջ:

90. Մկրտչյան Ս., Աբրահամյան Ա., Իսկանդարյան Ս., Մաթեմատիկա 3. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 3-րդ դասարանի, Եր., Զանգակ 97, 2008 թ., 192 էջ:

91. Մկրտչյան Ս., Աբրահամյան Ա., Իսկանդարյան Ս., Սարգսյան Ռ., Մաթեմատիկա 4. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 4-րդ դասարանի, Եր., Զանգակ 97, 2009 թ., 176 էջ:

92. Նահապետյան Բ., Աբրահամյան Ա., Մաթեմատիկա 5. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 5-րդ դասարանի, Եր., ՄԱՆՄԱՐ, 2011 թ., 224 էջ:

93. Նահապետյան Բ., Աբրահամյան Ա., Մաթեմատիկա 6. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 6-րդ դասարանի, Եր., ՄԱՆՄԱՐ, 2012 թ., 224 էջ:

94. Նահապետյան Բ., Աբրահամյան Ա., Մաթեմատիկան 5-6-րդ դասարաններում, ուսուցչի մեթոդական ձեռնարկ, Եր., ՄԱՆՄԱՐ, 2011 թ., 88 էջ:

95. Նիկոլսկի Ս. Մ., Պոտապով և ուրիշներ, Հանրահաշիվ. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 7-րդ դասարանի, (թարգմանիչ և խմբագիր՝ Ռ. Ավետիսյան), Եր., Անտարես, 2011թ., 208 էջ:

96. Նիկոլսկի Ս. Մ., Պոտապով Մ. Կ. և ուրիշներ, Հանրահաշիվ. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 8-րդ դասարանի, (թարգմանիչ և խմբագիր՝ Ռ. Ավետիսյան), Եր., Անտարես, 2012թ., 280 էջ:

97. Նիկոլսկի Ս. Մ., Պոտապով Մ. Կ. և ուրիշներ, Հանրահաշիվ. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 9-րդ դասարանի, (թարգմանիչ և խմբագիր՝ Ռ. Ավետիսյան), Եր., Անտարես, 2013թ., 280 էջ:

98. Շարիգին Ի. Ֆ., Երկրաչափություն. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 10-րդ դասարանի (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր., Անտարես, 2009 թ., 128 էջ:

99. Շարիգին Ի. Ֆ., Երկրաչափություն. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 11-րդ դասարանի (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր., Անտարես, 2010 թ., 112 էջ:

100. Շարիգին Ի. Ֆ., Երկրաչափություն. դասագիրք հանրակրթ. դպր. 12-րդ դասարանի (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր., Անտարես, 2011 թ., 140 էջ:

101. Ստոլյար Ա. Ա., Մաթեմատիկայի ուսուցումը և սովորողների տրամաբանական զարգացումը//Մաթեմատիկան դպրոցում, N 1, Եր., 2002 թ., 19-31 էջեր:

102. Տրամաբանություն. ծրագիր ավագ դպրոցի համար//ԿԳՆ 2013 թ. հուլիսի 9-ի N920-Ա/Ք հրամանի հավելված, www.aniedu.am, -7 էջ:

103. Քերոլ Լ., Տրամաբանական խաղ//Մաթեմատիկան դպրոցում, N 4 (79), Եր., 2011 թ., 48-63 էջեր:

104. Адамар Ж., Исследование психологии изобретения в области математики, М., Сов. Радио, 1970 г., 152 с.

105. Аминова А. В., Элементы теории множеств, Казань, Казанский гос. ун-т, 2008 г., 46 с.

106. Биргкоф Г., Математика и психология, М., Сов. Радио, 1979 г., 96 с.

107. Блонский П. П., Память и мышление, Питер, СПб, 2001 г., 288 с.

108. Блонский П. П., Развитие мышления школьников, М., Учпедгиз, 1935 г., 128 с.

109. Болтянский В.Г., Математическая культура и эстетика//Математика в школе, 1982 г., N2, стр. 40-43.

110. Брадис В. М., Минковский В., Л., Харчева А., К., Ошибки в математических рассуждениях, М., Учпедгиз, 1959 г., 178 с.

111. Вейль Г., Математика и мышление, М., Наука, 1989 г., 400 с.

112. Виноградов С. Н. и Кузьмин А.Ф., Логика, Учебник для средней школы, Изд. 8, Москва, Учпедгиз, 1954 г., 176 с.

113. Генцен Г., Математическая теория логического вывода, М., Наука, 1967 г., стр. 9–76.

114. Гоноболин Ф. Н., К вопросу о понимании геометрических доказательств учащимися, Известия АПН РСФСР, 1954 г., стр. 175-192.

115. Гусева Н. В., Теоретические и методоческие основы раскрытия эстетического потенциала школьной математики при обучении в 5-6 классах, Арзамас, 1999 г., 212 с.

116. Дубнов Я.С., Ошибки в геометрических доказательствах, М., Физматлит, 1961 г., 70с.

117. Ерышев А. А. Н. П. Лукашевич, Е. Ф. Сластенко, Логика, Курс лекций, 3-е изд., перепаб. И доп.-К., МАУП, 2000 г., 184 с.

118. Зегет В. Элементарная логика. – М., Высшая школа, 2005 г., -254 с.

119. Клини С.К. Математическая логика: Пер. с англ., М., Мир, 1973 г., 368 с.

120. Кобалия О. А., Эстетическое воспитание про обучении геометрии в сренней школе, Дисс. на соск. У . ст. канд. пед. наук., М., 1984 г., 170 с.

121. Колягин Ю. М., Оганесян В. А. и др., Методика преподавания математики в средней школе, Общая методика, Учеб. Пособие для студентов физ. – мат. фак. пед. Институтов, Москва, Просвещение, 1975 г., 462 с.

122. Колягин Ю. М., Оганисян В. А., Учись решить задачи, М., 1980 г., 96 с.

123. Курант Р., Робинсон Г., Что такое математика?, М., Просвещение, 1967 г., 558 с.

124. Лакатос И. Доказательства и опровержения, изд. М., Наука, 1967 г., 152 с.

125. Ликсина. Е. В., Подготовка учителя к реализации эстетического воспитания в процессе обучения математике, дис. на соискание уч. ст. к.п.н., Пенза, 2004 г., 177с.

126. Маковельский А.О., История логики, Москва, Директ-Медиа, 2008 г., 136 с.

127. Мендельсон Э., Введение в математическую логику, Москва, Наука, 1976 г., 320с.

128. Минковский В. Л., Об элементах эстетического воспитания на уроках математики//Математика в школе, N4, 1963 г., с. 25-30.

129. Неменский Б. М., Мудрость Кросоты –О проблемах эстетического воспитания; книга для учителя, М., Просвещение, 1981 г., 190 с.

130. Новиков П. С., Элементы математической логики. 2-ое изд. М., Наука, 1973 г., 400 с.

131. Петров Ю. А., Столяр А. А. Какая логика нужна учителю? (http://www.bimbad.ru/biblioteka/article_full.php?aid=910)

132. Пиаже Ж., Речь и мышление ребёнка. М., Педагогика-Пресс, 1994 г., 528с.

133. Пойа Д., Как решать задачу? — М., Учпедгиз, 1969 г., 208 с.

134. Пойа Д., Математика и правдоподобные рассуждения, М., Глав. ред. физ-мат. лит., 1975 г., 464 с.

135. Пуанкаре А., О науке, М., Наука, 1990 г., 736 с.

136. Родионов М. А., Мотивация учения математике и пути ее формирования, Саранск, Морд. ГПИ, 2001 г., 252 с.

137. Романенко Ю. М., Философские и эстетические аспекты математического знания, диссертация на соискания уч. ст. канд. пед. наук, Дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 : М., 2005г., 170 с.

138. Ружа И., Теория множеств//Малая математическая энциклапедия, Будапешт, АН Венгрии, 1976 г., стр. 536-579.

139. Рыжик В. И., Логика в школьном математическом образовании//Математика в школе, N3, 2007 г., стр. 31-37.

140. Рыжик В. И., Логика в школьном математическом образовании, Математика в школе, N4, 2007 г., стр. 39-47.

141. Рыжик В. И., 30000 уроков математики: Книга для учителя, М., Просвещение, 2003 г., 288 с.

142. Саранцев Г. И., Методика обучения математике в средней школе, Москва, Просвещение, 2002 г., 226 с.

143. Саранцев Г. И., Эстетическая мотивация обучеия математке, ПО РА, Мордов. пед. ин-т., Саранск, 2003 г., 136 с.

144. Сластенин В. А. и др. Педагогика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. - М.: Издательский центр Академия, 2002 г., 576 с.

145. Слепкань З.И., Психолого-педагогические основы обучения математике. Метод. пособие. – К., Рад. Школа, 1983 г., 190 с.

146. Столл Р. Р., Множества, логика, аксиоматические теории, М., Просвещение, 1968 г., 232 с.

147. Столяр А. А., "Воспитание логического мышления у учащихся на уроках математики", 1951 г.

148. Столяр А.А., Логичееские проблемы преподавания математики, Минск, Высшая школа, 1965 г., 255 с.

149. Столяр А. А., Педагогика математики, Минск, Высшая школа, 1986 г., 414 с.

150. Тимофеева И. Л., '' Как устроено доказательство?''//Математика в школе, 2004 г., N8, стр. 74-81.

151. Фирстова Н. И., Эстетическое воспитание учащихся при обучении математике в средней школе : Дис. на соискание уч. ст. канд. пед. наук, Москва, 1999 г., 159 с.

152. Фромм Э., Психоанализ и этика, М., Песпублика, 1993 г., 138 с.

153. Хаусдорф Ф., Теория множеств, Либроком, 2013 г., 304 с.

154. Черепанов В. С. Экспертные методы в педагогических исследованиях, М., Педагогика, 1980 г., 150 с

155. Черкасов Р. С., Столяр А. А.,Методика преподавания математики в средней школе, Москва, Просвещение, 1985 г., 336 с.

156. Шедровицкий Г. И., Розин В. М., Непомнящая И. И., Алексеев Н. Г., Педагогика и логика, Москва, Касталь, 1993 г., 416 с.

157. Шохер-Троцкий С. И., Эстетический элемент в преподавании математики// Труды Всероссийского сьезда по педагогической психлогии, Спб., 2002 г., стр. 391-392.

158. https://www.aniedu.am (ՀՀ չափորոշիչ և ծրագիր):

159. https://www.edu.by (Բելառուսի ծրագիր):

160. https://www.mes.gov.ge (Վրաստանի չափորոշիչ և ծրագիր):

161. https://www.minedu.unibel.by (Բելառուսի չափորոշիչ):

162. https://www.mon.gov.ru (Ռուսաստանի չափորոշիչ):

163. https://www.mon.gov.ua (Ուկրաինայի չափորոշիչ և ծրագիր):

Հավելված 1-Ա

1. ՀՀ հանրակրթության պետական չափորոշչում տարրական կրթության բովանդակության մեջ տրամաբանության տարրերին վերաբերող նյութերը (տես աղյուսակ 1) [44, 35-38]:

Աղյուսակ 1

Տարրական կրթության հանրակրթական ծրագրի (տարրական դպրոց) բովանդակությանը ներկայացվող պահանջները	**Տարրական դպրոցի շրջանավարտին ներկայացվող ընդհանրական պահանջներ**
Տարրական կրթության հիմնական նպատակներն են սովորողի՝ • մտավոր, հոգևոր և ֆիզիկական կարողությունների զարգացումը. • լեզվամտածողության, գրագիտության, տրամաբանության աշխարհայացքային պատկերացումների հիմքերի ստեղծումը. • միջին դպրոցում ուսումը շարունակելու համար պահանջվող կրթամակարդակի ապահովումը: **Տարրական կրթության ծրագրի «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառը նպատակաուղղված է՝** • սովորողի կողմից սեփական մտքերը ճշգրիտ ձևակերպելու, ուրիշի մտքերը հասկանալու անհրաժեշտության ու կարևորության, ինքնուրույն աշխատելու և ստեղծագործելու անհրաժեշտության գիտակցմանը. • պարզ մաթեմատիկական հասկացություններով աշխատելու, խնդիրներ և վարժություններ լուծելու միջոցով սովորողի մտավոր ունակությունների զարգացման խթանմանը. • մտքերը հստակ ձևակերպելու, տրամաբանված դատողություններ կատարելու, տարբեր իրավիճակներում կողմնորոշվելու կարողությունների ձևավորմանը: **Տարրական կրթության ծրագիրը պետք է ներառի նախնական, տարրական գիտելիքներ, պատկերացումներ՝** • տրամաբանական մտածողության մասին:	**Տարրական դպրոցի շրջանավարտը պետք է՝** ունենա մաթեմատիկական գրագիտություն և տարրական կարողություններ բնագիտության ոլորտում՝ • տիրապետի տարրական մաթեմատիկայի նշանային համակարգին, կիրառի թվաբանական գործողությունները (գումարում, հանում, բազմապատկում, բաժանում) առօրյա պարզ խնդիրներում, • եզրակացություններ անի պատճառահետևանքային կապերի վերաբերյալ:

2. ՀՀ հանրակրթության պետական չափորոշչում հիմնական և միջնակարգ կրթության բովանդակության մեջ տրամաբանության տարրերին վերաբերող նյութերը (տես աղյուսակ 2 և 3) [44, 35-38]:

Աղյուսակ 2

Հիմնական կրթության հանրակրթական ծրագրի (միջին դպրոց) բովանդակությանը ներկայացվող նվազագույն պահանջները	**Միջնակարգ կրթության հանրակրթական ծրագրի (ավագ դպրոցի) բովանդակությանը ներկայացվող նվազագույն պահանջները**
Հիմնական կրթության նպատակներն են սովորողի՝ • տարրական կրթության հիմքի վրա ձևավորված մտավոր, հոգևոր և ֆիզիկական կարողություն-ների հետագա զարգացման ապահովումը. • բարձրակարգ, քննադատական մտածողության զարգացումը, լեզվամտածողության, գրագիտու-թյան, մաթեմատիկական տրամաբանության, աշ-խարհայացքային պատկերացումների հիմքերի ամրապնդումը: **Միջին դպրոցի ծրագրի «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառը նպատակաուղղված է՝** • սովորողների կողմից ինքնուրույն կշռադատու-թյուններ կատարելու ձգտմանը. • մտքի ճշգրտության, ճկունության կարևորմանը. • տարաբնույթ խնդիրների լուծման ժամանակ ստեղծագործական մոտեցման ցուցաբերմանը. • համագործակցային մեթոդներով աշխատելու կարևորմանը, սովորողի մտավոր ունակություն-ները • զարգացնելու, շրջապատի և առօրյա կյանքի տարբեր երևույթները մոդելավորելու, հիմնավոր դատողություններ • կատարելու գիտելիքների կարողությունների և հմտությունների զարգացմանը: **Միջին դպրոցի ծրագիրը պետք է ներառի գիտելիքներ և պատկերացումներ՝** • բազմությունների հետ տարրական գործողու-թյուններ կատարելու կանոնների մասին:	**Միջնակարգ կրթության նպատակներն են սովորողի՝** • հիմնական կրթության հիմքի վրա ձևավորված մտավոր, հոգևոր և ֆիզիկական կարողություն-ների հետագա զարգացման ապահովումը, • քննադատական մտածողության, մտագործու-նեության, լեզվամտածողության և տրամաբանու-թյան զարգացմանը, ինչպես նաև գիտական աշխարհայացքի ընդլայնմանը նպաստելը: **Ավագ դպրոցի ծրագրի «Մաթեմատիկա» ուսումնական բնագավառը նպատակաուղղված է՝** • սովորողների տրամաբանական մտածողու-թյան և տարածական պատկերացման զարգացմանը, ալգորիթմական և քննական մտածողության ձևավորմանը, տարաբնույթ խնդիրներ մոդելավորելու և վերլուծություններ կատարելու, տվյալների հետ աշխատելու, հետագա կրթության և մասնագիտական գործունեության համար կարողությունների զարգացմանը: **Ավագ դպրոցի ծրագիրը պետք է ներառի կայուն գիտելիքներ և պատկերացումներ՝** • տրամաբանության որոշ տարրերի, բազմու-թյունների հետ տրամաբանական գործողություն-ների, եզրահանգումներ կատարելու մեթոդների մասին:

Աղյուսակ 3

Հիմնական (միջին) դպրոցի շրջանավարտին ներկայացվող ընդհանրական պահանջները	Միջնակարգ (ավագ) դպրոցի շրջանավարտին ներկայացվող ընդհանրական պահանջները
Հիմնական (միջին) դպրոցի շրջանավարտը պետք է՝ • ունենա մաթեմատիկական գրագիտություն ու մտածողություն, կայուն գիտելիքներ և ճանաչողական ու կիրառական ունակություններ բնական գիտությունների ոլորտում՝ • կարողանա նկարագրել շրջապատի և առօրյա կյանքի տարբեր երևույթներ, կատարի դրանց վերաբերյալ հստակ դատողություններ, փաստարկների վրա հենվելով՝ կարողանա կատարել հիմնավորումներ, • կարողանա նկատել տարբեր երևույթների միջև առկա կապերը, երևույթների առանձնահատկու-թյունները, • օրինաչափությունները և ներկայացնի դրանք բառերով ու սիմվոլներով, • ունենա առօրյա գործունեության հետ կապված խնդիրների լուծման կարողություն (ծախսերի պլանավորում, գնումների կատարում, առօրյա իրավիճակներին վերաբերող հաշվարկների կատարում և այլն), • ունենա հետազոտական պարզ աշխատանքներ կատարելու տարրական կարողություններ և հմտություններ, • տիրապետի գիտական ճանաչողության մեթոդների, կարողանա դրանք կիրառել կոնկրետ իրավիճակներում, • բացահայտի և պարզաբանի առանձին երևույթների պատճառահետևանքային կապերը:	**Միջնակարգ (ավագ) դպրոցի, վարժարանի շրջանավարտը պետք է՝** • ունենա տրամաբանական զարգացած մտածո-ղություն, ճանաչողական, ստեղծագործական ու կիրառական ունակություններ՝ մաթեմատիկայի ու բնական գիտությունների ոլորտում՝ • տիրապետի ապացուցման մեթոդների, իրականացնի հետազոտական աշխատանք, • կարողանա տարբեր երևույթների վերաբերյալ կատարել վերլուծություններ, ապացուցման եղանակներ կիրառելով՝ կատարի հիմնավորում-ներ, • տվյալները վերլուծելով և համադրելով՝ կարողանա կատարել ճիշտ հետևություններ, • կարողանա բացահայտել օբյեկտների տարրերի միջև գոյություն ունեցող կապերը, երևույթների առանձնահատկությունները, օրինաչափություն-ները և տալ դրանց մեկնաբանությունը, • կարողանա վերլուծել, մեկնաբանել և ներկայացնել երևույթների պատճառահետևանքա-յին կապերը, • կարողանա վերլուծություններ կատարելով՝ կառուցել մաթեմատիկական մոդելներ, գրաֆիկ-ներ, գծապատկերներ, • ունենա կիրառական խնդիրներ լուծելու կարողություն, • տիրապետի գիտական ճանաչողության մեթոդ-ներին, կարողանա մոդելավորել, վարկածներ առաջադրել և փորձնական ճանապարհով ստուգել, ստացված արդյունքներն ընդհանրացնել, կատարել եզրահանգումներ և կանխատեսումներ:

Հավելված 1-Բ

1. Տրամաբանական գիտելիքներն ու կարողությունները 1-4- րդ դասարանների «Մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայի չափորոշչում

Առարկայական չափորոշչում տրամաբանությանը վերաբերող գիտելիքներն ու կարողությունները տարրական դպրոցն ավարտողի համար ներկայացված են հետևյալ նվազագույն՝ պարտադիր պահանջներով (տես աղյուսակ 4) [53, 8].

Աղյուսակ 4

Ա մակարդակ (նվազագույն պահանջներ)	**Բ. մակարդակ (ավելանում են Ա մակարդակի պահանջներին)**	**Գ մակարդակ (ավելանում են Ա և Բ մակարդակներին)**
Գաղափար ունենա դատողության մասին, ***իմանա*** տվյալները աղյուսակի տեսքով ներկայացնելու և աղյուսակներից ու դիագրամներից տվյալներ ստանալու եղանակներ, ***կարողանա*** առարկաները տեսակավորել և խմբավորել ըստ տրված հատկանիշի համեմատման միջոցով, հարցումների միջոցով տվյալներ հավաքել և գրանցել դրանք, աղյուսակներից, դիագրամներից տվյալներ ստանալ, տրված պայմաններին բավարարող տարբերակներ գըրանցել, որոշված նպատակին հասնելու գործողությունների հաջորդականություն կազմել, օգտվել կյանքում հանդիպող աղյուսակային տվյալներից (դասացուցակ, գնացուցակ, չըվացուցակ և այլն): ***Իմանա*** խնդրի բաղադրիչները, ***կարողանա*** առանձնացնել խնդրի պայմանը և պահանջը, խնդրի լուծման պլան կազմել, խնդրի լուծման ժամանակ գծապատկերներ,աղյուսակներ օգտագործել, օգտակար քայլեր գտնել կիրառական, հետաքրքրաշարժ խնդիրների լուծման և խաղերի համար (գետանց, լաբիրինթոս, դոմինո, մատիտի մեկ հպումով գծվող պատկերներ և այլն), ըստ նշանակության և տեղին օգտա-գործել սովորած տերմինները, մասնակցել քննարկումների, օգտվել ուրիշի դատողություններից, տվյալներից, խնդիրներ լուծելիս մասնակցել խմբային աշխատանքի, խոսքային և ոչ խոսքային աղբյուրներից տեղեկություն ստանալ: Միաժամանակ, կանոնակարգված են նաև այն գիտելիքներն ու կարողություն-ները, որոնք համապատասխա-նում են միջին և բարձր պատրաստվածության մակարդակներին: Դրանք որոշակիացվում են հետևյալ պահանջներով.	***Իմանա*** ալգորիթմների գրանցման պայմանանշաններ, կարողանա առարկաները տեսակավորել և խմբավորել ըստ երկու հատկանիշի համադրման միջոցով, դիտարկումների, փորձերի միջոցով տվյալներ (նաև ոչ թվային) հավաքել և գրանցել դրանք, տվյալները ներկայացնել աղյուսակների միջոցով, տրված հաջորդականությունների օրինակներում նկատել օրինաչափությունը և շարունակել հաջորդականությունը, բազմակի ելք ունեցող պարզ իրավիճակներում գրանցել տրված պայմաններին բավարարող բոլոր հնարավոր տարբերակները, նպատակին հասնելու գործողությունների հաջորդականությունը (ալգորիթմը) գրանցել պայմանանշանների միջոցով: ***Կարողանա*** խնդիրը վերլուծել ավելի պարզ խնդիրների, խնդրի լուծման տարբեր եղանակներ փնտրել, տրված պայմանների դեպքում խնդիր ձևակերպել, քայլեր և ալգորիթմներ մշակել կիրառական, հետաքրքրաշարժ խնդիրների լուծման և խաղերի համար (գետանց, լաբիրինթոս, դոմինո, մատիտի մեկ հպումով գծվող պատկերներ, կեղծ դրամներ, շախմատի տախտակ և այլն), ըստ նշանակության և տեղին օգտագործել սովորած հասկացությունները, արտահայտությունները:	***Կարողանա*** առարկաները տեսակավորել և խմբավորել ըստ երկուսից ավելի հատկանիշների, տվյալները ներկայացնել դիագրամների միջոցով, հաշվել տրված պայմաններին բավարարող տարբերակների քանակը, տարբեր ալգորիթմներ գտնել և համեմատել դրանք: ***Կարողանա*** առանց խնդիրը լուծելու կռահել ու գտնել խնդրի պատասխանը, համեմատել լուծման արդյունքի հետ, լուծման արդյունավետ եղանակներ ընտրել կիրառական, հետաքրքրաշարժ խնդիրների և խաղերի համար, ունեցած տեղեկությունները մշակել, համեմատել և ներկայացնել տարբեր ձևերով:

2. Տրամաբանական գիտելիքներն ու կարողությունները 5-6 րդ դասարանների «Մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայի չափորոշչում

Առարկայական չափորոշչում տրամաբանությանը վերաբերող գիտելիքները, կարողություններն ու հմտությունները 5-6 րդ դասարանները ավարտողի համար ներկայացված են հետևյալ նվազագույն՝ պարտադիր պահանջներով (տես աղյուսակ 5) [53, 13].

Աղյուսակ 5

Ա մակարդակ (նվազագույն պահանջներ)	Բ. մակարդակ (ավելանում են Ա մակարդակի պահանջներին)	Գ մակարդակ (ավելանում են Ա և Բ մակարդակներին)
Իմանա ասույթների, «և», «ոչ», «կամ» տրամաբանական ձևեր պարունակող դատողությունների, բազմությունների օրինակներ, **կարողանա** կազմել վերջավոր բազմության ենթաբազմություն: **Իմանա** տվյալները աղյուսակի, դիագրամի տեսքով ներկայացնելու և աղյուսակներից ու դիագրամներից տվյալներ ստանալու եղանակներ: **Կարողանա** առարկաները տեսակավորել և խմբավորել ըստ տրված հատկանիշի համեմատման միջոցով, հարցումների, փորձերի միջոցով տվյալներ (նաև ոչ թվային) հավաքել և գրանցել դրանք, աղյուսակներից, դիագրամներից տվյալներ ստանալ: **Իմանա** խնդրի բաղադրիչները, **կարողանա** առանձնացնել խնդրի պայմանը և պահանջը, խնդրի լուծման պլան կազմել, խնդիրների լուծման ժամանակ գծապատկերներ, աղյուսակներ, դիագրամներ օգտագործել, օգտակար քայլեր գտնել կիրառական, հետաքրքրաշարժ խնդիրների լուծման և խաղերի համար (գետանց, լաբիրինթոս, դոմինո, մատիտի մեկ հպումով գծվող պատկերներ և այլն), ըստ նշանակության և տեղին օգտագործել սովորած տերմինները, մասնակցել քննարկումների, օգտվել ուրիշի դատողություններից, տվյալներից, խնդիրներ լուծելիս մասնակցել խմբային աշխատանքի, խոսքային և ոչ խոսքային աղբյուրներից տեղեկություն ստանալ:	**Իմանա** «եթե-ապա» տրամաբանական ձև պարունակող դատողությունների օրինակներ, ալգորիթմների գրանցման պայմանանշաններ: **Կարողանա** առարկաները տեսակավորել և խմբավորել ըստ երկու հատկանիշի համադրման միջոցով, գտնել տրված վերջավոր բազմությունների հատումը, դիտարկումների միջոցով տվյալներ (նաև ոչ թվային) հավաքել և գրանցել դրանք, տվյալները ներկայացնել դիագրամների միջոցով, տրված հաջորդականությունների օրինակներում նկատել օրինաչափությունը և շարունակել հաջորդականությունը, գրանցել տրված պայմաններին բավարարող բոլոր հնարավոր տարբերակները: **Կարողանա** խնդիրները ավելի պարզ խնդիրների վերածել, խնդրի լուծման տարբեր եղանակներ փնտրել, տրված պայմաններով խնդիր կազմել, քայլեր և ալգորիթմներ մշակել կիրառական, հետաքրքրաշարժ խնդիրների լուծման և խաղերի համար (գետանց, լաբիրինթոս, դոմինո, մատիտի հպումով գծվող պատկերներ, կեղծ դրամներ, շախմատի տախտակ և այլն), ըստ նշանակության և տեղին օգտագործել սովորած հասկացությունները, արտահայտությունները:	**Կարողանա** տվյալները ներկայացնել տարբեր տեսքի դիագրամներով, առարկաները տեսակավորել և խմբավորել ըստ երկուսից ավելի հատկանիշների վերլուծման միջոցով, տվյալների աղյուսակներում և հաջորդականություններում օրինաչափություններ նկատել, հաշվել տրված պայմաններին բավարարող տարբերակների քանակը: **Կարողանա** առանց խրնդիրը լուծելու կռահել և գնահատել խնդրի պատասխանը,համեմատել լուծման արդյունքի հետ, լուծման արդյունավետ եղանակներ ընտրել կիրառական,հետաքրքրաշարժ խնդիրների և խաղերի համար, ունեցած տեղեկությունները մշակել, համեմատել և ներկայացնել տարբեր ձևերով:

3. Տրամաբանական գիտելիքներն ու կարողությունները ավագ դպրոցի «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» ուսումնական առարկայի չափորոշչում

Առարկայական չափորոշչում տրամաբանությանը վերաբերող ***գիտելիքները, կարողություններն*** ու ***հմտությունները*** ավագ դպրոցի ***տարբերակված (հանրակրթական) հոսքում*** սովորողի համար ներկայացված են հետևյալ պահանջներով (տես աղյուսակ 6) [47, 21].

Աղյուսակ 6

Ա մակարդակ (նվազագույն պահանջներ)	Բ. մակարդակ (ավելանում են Ա մակարդակի պահանջներին)	Գ մակարդակ (ավելանում են Ա և Բ մակարդակներին)
• ***Կարողանա*** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմել ասույթներ և պարզագույն դեպքերում ձևակերպել դրանց ժխտումները, • ***Գիտենա*** ինչ է ապացուցումն ու հերքումը, գաղափար ունենա հակասող ենթադրությամբ ապացուցման մասին, • ***Գաղափար ունենա*** դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգման, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մասին:	• ***Իմանա*** մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը և կարողանա պարզագույն պնդումներ ապացուցել դրա կիրառմամբ: • ***Կարողանա*** ասույթներ ձևակերպել «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով, ձևակերպել դրանց ժխտումները և կիրառել մտահանգումներ կատարելիս, • ***Գաղափար ունենա*** ուղղակի և անուղղակի ապացուցման ու հերքման եղանակների մասին:	• ***Գաղափար ունենա*** փոփոխական պարունակող ասույթների մասին, • ***Գաղափար ունենա*** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմված ասույթների տրամաբանական գումարի, արտադրյալի և համարժեքության մասին,

Առարկայական չափորոշչում տրամաբանությանը վերաբերող **գիտելիքները, կարողություններն** ու **հմտությունները ընդհանուր հոսքում** սովորողի համար ներկայացված են հետևյալ պահանջներով (տես աղյուսակ 7) [47, 28].

Աղյուսակ 7

Ա մակարդակ	Բ մակարդակ	Գ մակարդակ
• ***Կարողանա*** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմել ասույթներ և պարզագույն դեպքերում ձևակերպել դրանց ժխտումները, • ***Գիտենա*** ինչ է ապացուցումն ու հերքումը, գաղափար ունենա հակասող ենթադրությամբ ապացուցման մասին, • ***Գաղափար ունենա*** դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգման, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մասին:	• ***Իմանա*** մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը և կարողանա պարզագույն պնդումներ ապացուցել դրա կիրառմամբ, • ***Կարողանա*** ասույթներ ձևակերպել «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով, ձևակերպել դրանց ժխտումները և կիրառել մտահանգումներ կատարելիս, • ***Գաղափար ունենա*** ուղղակի և անուղղակի ապացուցման ու հերքման եղանակները, կարողանա դրանք կիրառել մտահանգումներ կատարելիս:	• ***Գաղափար ունենա*** դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգումների հիմնական կանոնների մասին, • ***Գաղափար ունենա*** փոփոխական պարունակող ասույթների մասին, • ***Գաղափար ունենա*** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմված ասույթների տրամաբանական գումարի, արտադրյալի և համարժեքության մասին: • ***Պարզ դեպքերում կարողանա*** ներկայացնել «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմված ասույթների տրամաբանական գումարը և արտադրյալը:

Տրամաբանությանը վերաբերող *գիտելիքները, կարողություններն* ու *հմտությունները խորացված ուսուցման հոսքում* սովորողի համար առարկայական չափորոշչում ներկայացված են հետևյալ պահանջներով (տես աղյուսակ 8) [47, 34].

Աղյուսակ 8

Ա մակարդակ	Բ մակարդակ	Գ մակարդակ
• **Կարողանա** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմել ասույթներ և պարզագույն դեպքերում ձևակերպել դրանց ժխտումները, • **Գիտենա** ինչ է ապացուցումն ու հերքումը, գաղափար ունենա հակասող ենթադրությամբ ապացուցման մասին, • **Գաղափար ունենա** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով դատողությունների,դրանց տրամաբանական գումարի, արտադրյալի, ժխտման,հետևության և համարժեքության մասին, • **Գաղափար ունենա** դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգման,մաթեմատիկական ինդուկցիայի մասին:	• ***Իմանա*** մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը և կարողանա պարզագույն պնդումներ ապացուցել դրա կիրառմամբ, • ***Կարողանա*** դատողություններ ձևակերպել «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով, ձևակերպել դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը, հետևությունը և համարժեքությունը, • ***Գաղափար ունենա*** ապացուցման և հերքման, դրանց հիմնական եղանակների մասին, • ***Հասկանա*** ուղղակի և անուղղակի ապացուցման ու հերքման եղանակները, կարողանա դրանք կիրառել մտահանգումներ կատարելիս:	•***Գաղափար ունենա*** դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգումների հիմնական կանոնների մասին, •***Գաղափար ունենա*** փոփոխական պարունակող ասույթների մասին, •***Իմանա*** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմված ասույթների ժխտումը,տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, հետևությունը և համարժեքությանը, •***Իմանա*** ինչ է ապացուցումը և հերքումը, դրանց հիմնական եղանակները:

4. Տրամաբանական գիտելիքներն ու կարողությունները «Երկրաչափություն» ուսումնական առարկայի չափորոշչում

Երկրաչափության առարկայական չափորոշչում տրամաբանությանը վերաբերող **գիտելիքները, կարողություններն** ու **հմտությունները** *հիմնական դպրոցում* սովորողի համար ներկայացված են հետևյալ պահանջներով (տես աղյուսակ 9) [53, 67-68].

Աղյուսակ 9

Ա մակարդակ	Բ մակարդակ	Գ մակարդակ
Գործնական և ուսումնական խնդիրներ լուծելիս **կարողանա** աշխատել ինքնուրույն և համագործակցել խմբում,**գաղափար ունենա** հասկացության, դատողության, մտահանգման, ապացուցման և հերքման մասին, **կարողանա** նկարագրել կատարված քայլերն ու գործողությունները, դրանց վերաբերյալ տալ պարզաբանումներ և հիմնավորումներ,օգտվել տեղեկատվության աղբյուրներից, կատարել համեմատություններ, վերլուծություններ, ստուգումներ և ճշգրտումներ, հաղորդակցվել երկրաչափության լեզվի և պայմանանշանների օգտագործմամբ:	**Հասկանա** ինչ է սահմանումը, աքսիոմը, թեորեմը,ապացուցումը, հերքումը, **կարողանա** բերել օրինակներ, որոշել մի քանի պարզ դատողություններից կազմված պնդումների ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը, կատարել անմիջական և ոչ բարդ միջնորդավորված մտահանգումներ, ըստ անհրաժեշտության բերել փաստարկներ, կատարել անհրաժեշտ վերլուծություններ, տարբեր եղանակներով ստուգումներ և ճշգրտումներ, երկրաչափության լեզվի և պայմանանշանների օգտագործմամբ արտահայտվել հստակ և հասկանալի:	**Հասկանա** երկրաչափության աքսիոմատիկ կառուցման իմաստը, **իմանա** ուղղակի և անուղղակի ապացուցումների եղանակները,**կարողանա** ապացուցման խնդիրներ լուծելիս բերել անհրաժեշտ և բավարար փաստարկներ, պահպանել մտահանգման կանոնները,գրավոր և բանավոր արտահայտվել ճշգրիտ և հստակ՝ տեղին օգտագործելով երկրաչափության հասկացությունները, գծապատկերները, պայմանանշանները:

Առարկայական չափորոշչում տրամաբանությանը վերաբերող **գիտելիքները, կարողություններն** ու **հմտությունները** *ավագ դպրոցի ընդհանուր հոսքում* սովորողի համար ներկայացված են հետևյալ պահանջներով (տես աղյուսակ 10) [47, 103].

Աղյուսակ 10

Ա մակարդակ	Բ մակարդակ	Գ մակարդակ
Աշխատանքային և ուսումնական իրադրություններում *կարողանա* գործել ինքնուրույն և համագործակցել խմբում, *գաղափար ունենա* հասկացության, սահմանման, դասակարգման, մտահանգման, ապացուցման և հերքման մասին, *կարողանա* նկարագրել կատարած քայլերն ու գործողությունները, դրանց վերաբերյալ տալ պարզաբանումներ և հիմնավորումներ, օգտվել տեղեկատվության աղբյուրներից, կատարել վերլուծություններ, ընդհանրացումներ, ստուգումներ և ճշգրտումներ,հաղորդակցվել՝ երկրաչափության լեզվի և պայմանանշանների օգտագործմամբ:	*Իմանա* ինչ են դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգումները, համանմանությունը, ուղղակի և անուղղակի ապացուցումն ու հերքումը, *կարողանա* որոշել ընդհանուր և մասնավոր դատողություններից կազմված պնդումների ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը, ձևակերպել դրանց հակառակը (տրամաբանական ժխտումը), գործնական և ուսումնական խնդիրներ լուծելիս օգտվել տեղեկատվության աղբյուրներից, կատարել անհրաժեշտ վերլուծություններ և ընդհանրացումներ, տարբեր եղանակներով ստուգումներ և ճշգրտումներ, բերել փաստարկներ,օգտագործելով երկրաչափության լեզուն, պայմանանշաններ և տեխնիկական միջոցներ՝ արտահայտվելով հըստակ և հասկանալի:	*Գիտենա* ինչ կապ կա տարածաչափության և հարթաչափության աքսիոմների միջև, *իմանա* և պահպանի սահմանման և դասակարգման հիմնական կանոնները, *գիտենա* մտահանգումների, ապացուցման և հերքման տարբեր եղանակներ և *կարողանա* դրանք կիրառել ըստ անհրաժեշտության, լուծել ապացուցման խնդիրներ՝ բերելով անհրաժեշտ և բավարար փաստարկներ, գրավոր և բանավոր արտահայտվել ճշգրիտ, որոշակի և հակիրճ՝ տեղին օգտագործելով երկրաչափական հասկացություններ, գծապատկերներ, պայմանանշաններ, ոչ խոսքային միջոցներ:

Առարկայական չափորոշչում տրամաբանությանը վերաբերող **գիտելիքները, կարողություններն** ու **հմտությունները** ավագ դպրոցի հանրակրթական-տարբերակված հոքում սովորողի համար ներկայացված են հետևյալ պահանջներով (տես աղյուսակ 11) [47, 97].

Աղյուսակ 11

Ա մակարդակ	Բ մակարդակ	Գ մակարդակ
Աշխատանքային և ուսումնական իրադրություններում ***կարողանա*** գործել ինքնուրույն և համագործակցել խմբում, ***գաղափար ունենա*** հասկացության, սահմանման, դասակարգման, մտահանգման, ապացուցման և հերքման մասին, ***կարողանա*** նկարագրել կատարած քայլերն ու գործողությունները, դրանց վերաբերյալ տալ պարզաբանումներ և հիմնավորումներ, օգտվել տեղեկատվության աղբյուրներից, կատարել վերլուծություններ, ընդհանրացումներ, ստուգումներ և ճշգրտումներ, հաղորդակցվել՝ երկրաչափության լեզվի և պայմանանշանների օգտագործմամբ:	*Գաղափար ունենա* դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգումների, համանմանության, ուղղակի և անուղղակի ապացուցման ու հերքման մասին, *կարողանա* որոշել ընդհանուր և մասնավոր դատողություններից կազմված պնդումների ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը, ձևակերպել դրանց հակառակը (տրամաբանական ժխտումը),գործնական և ուսում-նական խնդիրներ լուծելիս օգտվել տեղեկատվության աղբյուրներից, կատարել անհրաժեշտ վերլուծություններ և ընդհանրացումներ, տարբեր եղանակներով ստուգում-ներ, բերել փաստարկներ, օգտա-գործելով երկրաչափական լեզուն, պայմանանշաններ և տեխնիկական միջոցներ՝ արտահայտվել հստակ և հասկանալի:	*Իմանա* և պահպանի սահմանման ու դասակարգման հիմնական կանոնները, *գիտենա* մտահանգումների, ապացուցման և հերքման տարբեր եղանակներ և *կարողանա* դրանք կիրառել ըստ անհրաժեշտության, լուծել ապացուցման ոչ բարդ խնդիրներ՝ բերելով անհրաժեշտ և բավարար փաստարկներ, գրավոր և բանավոր արտահայտվել ճշգրիտ, որոշակի և հակիրճ՝ տեղին օգտագործելով երկրաչափական հասկացություններ,գծապատկերներ, պայմանանշաններ, ոչ խոսքային միջոցներ:

Առարկայական չափորոշչում տրամաբանությանը վերաբերող **գիտելիքները, կարողություններն** ու **հմտությունները** *ավագ դպրոցի խորացված ուսուցման* հոքում սովորողի համար ներկայացված են հետևյալ պահանջներով (տես աղյուսակ 12) [47, 108].

Աղյուսակ 12

Ա մակարդակ	**Բ մակարդակ**	**Գ մակարդակ**
Աշխատանքային և ուսումնական իրադրություն-ներում *կարողանա* գործել ինքնուրույն և համագործակցել խմբում, *գաղափար ունենա* հասկացության, սահմանման, դասակարգման, մտահանգման, ապացուցման և հերքման մասին, *կարողանա* նկարագրել կատարած քայլերն ու գործողությունները, դրանց վերաբերյալ տալ պարզաբա-նումներ և հիմնավորումներ, օգտվել տեղեկատվության աղ-բյուրներից, կատարել վերլու-ծություններ, ընդհանրացում-ներ, ստուգումներ և ճշգրտում-ներ, հաղորդակցվել՝ երկրաչա-փության լեզվի և պայմանա-նշանների օգտագործմամբ:	*Իմանա* ինչ են դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգումները, համանմանությունը, ուղղակի և անուղղակի ապացուցումն ու հերքումը, *կարողանա* որոշել ընդհանուր և մասնավոր դատողություններից կազմված պնդումների ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը, ձևակերպել դրանց հակառակը (տրամաբանական ժխտումը), գործնական և ուսումնական խնդիրներ լուծել-իս օգտվել տեղեկատվության աղբյուրներից, կատարել անհրաժեշտ վերլուծություններ և ընդհանրացումներ, տարբեր եղանակներով ստուգումներ և ճշգրտումներ, բերել փաստարկ-ներ, օգտագործելով երկրաչա-փության լեզուն,պայմանանշան-ներ և տեխնիկական միջոցներ՝ արտահայտվել հստակ և հաս-կանալի:	*Գիտենա* ինչ կապ կա տարածաչափության և հարթա-չափության աքսիոմների միջև, *գաղափար ունենա* աքսիոմների համակարգի անհակասական-ության և անկախության մասին, *իմանա* և պահպանի սահման-ման և դասակարգման հիմնա-կան կանոնները, *գիտենա* մտահանգումների, ապացուց-ման և հերքման տարբեր եղանակներ և կարողանա դրանք կիրառել ըստ անհրաժեշտության,լուծել ապա-ցուցման խնդիրներ՝ բերելով անհրաժեշտ և բավարար փաստարկներ, գրավոր և բանավոր արտահայտվել ճըշ-գրիտ, որոշակի և հակիրճ՝ տեղին օգտագործելով երկրա-չափության հասկացություններ, գծապատկերներ, պայմանա-նշաններ, ոչ խոսքային միջոց-ներ:

Հավելված 1-Գ

1. Տրամաբանական գիտելիքներն ու կարողությունները «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» ուսումնական առարկայի ծրագրում

1. «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր» առարկայի ծրագրերում 10-րդ, 11-րդ և 12-րդ դասարանների տարբերակված, ընդհանուր և խորացված հոսքերի համար տրամաբանության տարրերին վերաբերող կրթական ընդհանուր խնդիրներն են (տես աղյուսակ 13) ՝ [47, 42], [47, 46], [47, 50]:

Աղյուսակ 13

10-րդ դասարան	11-րդ դասարան	12-րդ դասարան
Ընդլայնել միջին դպրոցում ձեռք բերած կարողությունները տարբեր իրադրություններում մաթեմատիկական մոդելավոր-ման, կիրառական խնդիրների լուծման հարցերում, զարգացնել ապացուցելու և հերքելու կարողությունները, ընդլայնել սովորողների տրամաբանական, ալգորիթմական մտածողու-թյունը, ձևավորել նախնական գիտելիքներ մաթեմատիկական անալիզի հիմնական խնդիրներն ուսումնասիրելու համար:	Զարգացնել ինքնուրույն աշխատելու և այլոց հետ համագործակցելու կարողու-թյունները, արմատավորել տրա-մաբանական և ալգորիթմական մտածողությունը, ձևավորել մաթեմատիկական անալիզի, հանրահաշվի գիտելիքների կարևորության գիտակցում և ներքին օրինաչափությունների գեղեցկության արժևորում:	Խորացնել սովորողների նպատակասլացությունն ու հե-տևողականությունը, փաստ-արկելու, ապացուցելու, հերքե-լու, համաձայնության գալու կարողությունները, արմատա-վորել տարբեր իրադրություն-ներում տրամաբանական մտա-հանգումներ կատարելու, հետե-վություններ և եզրակացություն-ներ կատարելու կարողություն-ները, շարունակել զարգացնել գործնական և կիրառական բնույթի խնդիրների մոդելավոր-ումն ու լուծման մեթոդների քննարկումը, սովորողներին նախապատրաստել պետական քննության:

2. Ավագ դպրոցի ծրագրում տրամաբանությանը վերաբերող հարցեր նախատեսվում է ուսումնասիրել հիմնականում 11-րդ դասարանում: «Թվային հաջորդականություն, սահման» թեմայի համար *տարբերակված հոսքի* համար նախատեսվում է հատկացնել 18-ժամ [47, 47-48], *ընդհանուր հոսքի* համար՝ **22 (27) ժամ** [47, 58-59], *խորացված ուսուցման հոսքի* համար՝ 35(44) ժամ [47, 69-70], որի ուսուցման համար նախատեսվում է դիտարկել հետևյալ հարցերը (տես աղյուսակ 14).

Աղյուսակ 14

տարբերակված հոսք	ընդհանուր հոսք	խորացված հոսք
Թվային հաջորդականություն, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի կիրառություններ: Ասույթներ, փոփոխական պարունակող ասույթ, դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը: Հետևություն և համարժեքություն: Անվերջ փոքրեր, անվերջ փոքրերի հատկությունները, հաջորդականության սահման, e թիվը, հաջորդականությունների սահմանների հաշվման օրինակներ: Անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա:	Թվային հաջորդականություն, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի կիրառություններ: Ասույթներ, փոփոխական պարունակող ասույթ, դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը: Հետևություն և համարժեքություն: Անվերջ փոքրեր, անվերջ փոքրերի հատկությունները, հաջորդականության սահման, e թիվը, հաջորդականությունների սահմանների հաշվման օրինակներ: Անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա, գաղափար պարբերական կոտորակների մասին:	Փոփոխական պարունակող դատողություն: «Ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով դատողություններ, դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը, հետևությունը և համարժեքությունը: Դեդուկտիվ մտահանգում, դեդուկտիվ մտահանգման հիմնական կանոնները, ինդուկտիվ մտահանգում, մաթեմատիկական ինդուկցիա: Ապացուցում և հերքում, ապացուցման և հերքման հիմնական եղանակները: Թվային հաջորդականություն, անվերջ փոքրեր, անվերջ փոքրերի հատկությունները, հաջորդականության սահման, e թիվը, հաջորդականությունների սահմանների հաշվման օրինակներ:Անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա, գաղափար պարբերական կոտորակների մասին:

Թեմայի ուսումնասիրությունը սովորողներին հնարավորություն է ընձեռելու (տես աղյուսակ 15).

Աղյուսակ 15

տարբերակված հոսք	ընդհանուր հոսք	խորացված հոսք
Գիտենալ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը և կարողանալ պարզագույն պնդումներ ապացուցել այդ մեթոդի կիրառմամբ, • ***Գաղափար ունենալ*** փոփոխական պարունակող ասույթների մասին, կարողանալ ասույթներ ձևակերպել «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով և կիրառել մտահանգումներ կատարելիս, • ***Գաղափար ունենալ*** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմված ասույթների տրամաբանական գումարի, արտադրյալի և համարժեքության մասին: • ***Պարզ դեպքերում կարողանալ ներկայացնել*** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանա- • կան ձևերով կազմված ասույթների տրամաբանական գումարը, արտադրյալը և համարժեքությունը:	• ***Գաղափար ունենալ*** դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգման հիմնական կանոնների մասին, • ***Գիտենալ*** մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը և կարողանալ պնդումներ ապացուցել այդ մեթոդի կիրառմամբ, • ***Գաղափար ունենալ*** փոփոխական պարունակող ասույթների մասին, կարողանալ ասույթներ ձևակերպել «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով և կիրառել մտահանգումներ կատարելիս, • ***Գաղափար ունենալ*** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմված ասույթների տրամաբանական գումարի, արտադրյալի և համարժեքության մասին, • ***Պարզ դեպքերում կարողանալ ներկայացնել*** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմված ասույթների տրամաբանական գումարը, արտադրյալը և ժխտումը:	• ***Գաղափար ունենալ*** փոփոխական պարունակող ասույթների մասին, կարողանալ դատողություններ ձևակերպել «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով և դրանք կիրառել մտահանգումներ կատարելիս, • ***Գաղափար ունենալ*** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմված ասույթների տրամաբանական գումարի, արտադրյալի և համարժեքության մասին, • ***Պարզ դեպքերում կարողանալ ներկայացնել*** «ցանկացած», «գոյություն ունի» տրամաբանական ձևերով կազմված ասույթների տրամաբանական գումարը, արտադրյալը և ժխտումը: • ***Գաղափար ունենալ*** դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգման հիմնական կանոնների մասին, • ***Գիտենալ*** մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը և կարողանալ պնդումներ ապացուցել այդ մեթոդի կիրառմամբ, • ***Գաղափար ունենա*** ապացուցման և հերքման մասին, իմանալ դրանց հիմնական եղանակները:

3. Տրամաբանական գիտելիքներն ու կարողությունները «Երկրաչափություն» ուսումնական առարկայի ծրագրերում

Հիմնական դպրոցի «Երկրաչափություն» ուսումնական առարկայի կրթական ընդհանուր խնդիրներն ըստ դասարանների (տես աղյուսակ 16) [53, 74-75].

Աղյուսակ 16

7-րդ դասարան	8-րդ դասարան	9-րդ դասարան
Ձևավորել երկրաչափական լեզվի գործածման,գծապատկերման կարողություններ, նպաստել պատկերային մտածողության զարգացմանը, հասկացություններ սահմանելու,եզրակացություններ կատարելու, թեորեմներ ապացուցելու,գործողությունների պլան մշակելու, հետևանքները վերլուծելու,կռահումներ կատարելու կարողությունների զարգացմանը:	Զարգացնել ինքնուրույն և համագործակցային աշխատանքներ կատարելու, կառուցումներ, դիտարկումներ, համեմատություններ, դասակարգումներ, վերլուծություններ, ընդհանրացումներ անելու, վարկածներ առաջադրելու, ապացուցումներ և արտածումներ կատարելու, դրանց արտահայտման համար երկրաչափության լեզուն գործածելու կարողություններ:	Շարունակել զարգացնել երկրաչափական կառուցումներ,ապացուցումներ կատարելու, խնդրի լուծման պլան մշակելու, ըստ անհրաժեշտության տեղեկատվության աղբյուրներից օգտըվելու, երկրաչափության լեզվով հաղորդակցվելու կարողություններ:

Ավագ դպրոցի ընդհանուր հոսքի երկրաչափության ծրագրի կրթական ընդհանուր խնդիրներն ըստ դասարանների (տես աղյուսակ 17) [47, 126-127].

Աղյուսակ 17

10-րդ դասարան	11-րդ դասարան	12-րդ դասարան
Ձևավորել և զարգացնել տարածական պատկերների՝ հարթության վրա գծապատկերման, գծագրերի միջոցով կողմնորոշվելու, երկրաչափության լեզվի օգտագործմամբ հաղորդակցվելու, հասկացություններ սահմանելու,կատարած գործողություններն ու քայլերը հիմնավորելու, բանաձևեր արտածելու, թեորեմներ ապացուցելու կարողություններ:	Զարգացնել երկրաչափական պատկերների հատկությունների հիման վրա բանաձևեր արտածելու, կիրառական խնդիրներ լուծելու, երկրաչափական գիտելիքների հետ մեկտեղ հանրահաշվական և եռանկյունաչափական գիտելիքներ օգտագործելու, երկրաչափական լեզվի և պայմանանշանների գործածությամբ հաղորդակցվելու, վարկածներ առաջարկելու,եզրակացություններ կատարելու, կատարած քայլերը պարզաբանելու և հիմնավորելու կարողություններ:	Շարունակել զարգացնել գործնական աշխատանքներում գիտելիքները բազմակողմանիորեն կիրառելու, տեղեկատվության աղբյուրից վարժ օգտվելու, տարբեր իրադրություններում գործողությունների պլան մշակելու, կանխատեսումներ, կռահումներ, ստուգումներ, գնահատումներ կատարելու, համագործակցելու, երկրաչափության լեզվով և պայմանանշաններով հաղորդակցվելու կարողություններ և հմտություններ:

Ավագ դպրոցի տարբերակված-հանրակրթական հոսքի երկրաչափության ծրագրում կրթության ընդհանուր խնդիրներն ըստ դասարանների (տես աղյուսակ 18) [47, 118-119].

Աղյուսակ 18

10-րդ դասարան	11-րդ դասարան	12-րդ դասարան
Ձևավորել և զարգացնել տարածական պատկերների՝ հարթության վրա գծապատկերման, գծագրերի միջոցով կողմնորոշվելու, երկրաչափության լեզվի օգտագործմամբ հաղորդակցվելու, հասկացություններ սահմանելու, եզրակացություններ կատարելու,կատարած գործողություններն ու քայլերը նկարագրելու և պարզաբանելու կարողություններ:	Զարգացնել երկրաչափական պատկերների հատկությունների հիման վրա կիրառական խնդիրներ լուծելու, երկրաչափական գիտելիքների հետ մեկտեղ հանրահաշվական և եռանկյունաչափական գիտելիքներ օգտագործելու, երկրաչափական լեզվի և պայմանանշանների գործածությամբ հաղորդակցվելու, եզրակացություններ կատարելու, կատարած քայլերը հիմնավորելու կարողություններ:	Շարունակել զարգացնել գործնական աշխատանքներում գիտելիքները կիրառելու, տեղեկատվության աղբյուրներից օգտվելու, գործողությունների պլան մշակելու, կռահումներ, ստուգումներ, գնահատումներ կատարելու, համագործակցելու, երկրաչափության լեզվով և պայմանանշաններով հաղորդակցվելու կարողություններ և հմտություններ:

Ավագ *դպրոցի խորացված ուսուցման հոսքի* երկրաչափության ծրագրում կրթական ընդհանուր խնդիրներն ըստ դասարանների (տես աղյուսակ 19) [47, 135].

Աղյուսակ 19

10-րդ դասարան	11-րդ դասարան	12-րդ դասարան
Ձևավորել և զարգացնել տարածական պատկերների՝ հարթության վրա գծապատկեր-ման, գծագրերի միջոցով կողմնորոշվելու, երկրաչափության լեզվի օգտագործմամբ ազատ հաղորդակցվելու, հասկացություններ սահմանելու, կատարած գործողություններն ու քայլերը հիմնավորելու, բանաձևեր արտածելու, թեորեմներ ապացուցելու կարողություններ:	Զարգացնել երկրաչափական պատկերների հատկությունների հիման վրա բանաձևեր արտածելու, կիրառական և տեսական բնույթի խնդիրներ լուծելու, երկրաչափական գիտելիքների հետ մեկտեղ հանրահաշվական և եռանկյունաչափական գիտելիքներ օգտագործելու, երկրաչափական լեզվի և պայմանանշանների արդյունավետ գործածությամբ ազատ հաղորդակցվելու, վարկածներ առաջարկելու, եզրակացություններ կատարելու, կատարած քայլերը պարզաբանելու և հիմնավորելու կարողություններ:	Շարունակել զարգացնել գործնական և հետազոտական աշխատանքներում գիտելիքները կիրառելու, տեղեկատվության աղբյուրներից օգտվելու, տարբեր իրադրություններում գործողությունների պլան մշակելու, կանխատեսումներ, կռահումներ, ստուգումներ, գնահատումներ կատարելու, համագործակցելու, երկրաչափության լեզվով և պայմանանշաններով ազատ հաղորդակցվելու կարողություններ և հմտություններ:

Հավելված 2-Ա

Ապացուցումների սխեմաները մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում (գիտափորձ)

Որպեսզի պարզենք ծառի տեսքով ապացուցում սովորեցնելու մեթոդի արդյունավետությունը և առաջացող մեթոդական խնդիրները, կատարեցինք գիտափորձ Երևանի Նար- Դոսի անվան թիվ 14 դպրոցի 8-րդ դասարանի աշակերտների, ՀՊՄՀ-ի հենակետային վարժարանի 10-րդ դասարանի սովորողների և ՀՊՄՀ-ի «Մաթեմատիկա» բաժնի չորրորդ կուրսի ուսանողների հետ:

Հանգամանորեն ներկայացնենք այդ գիտափորձերից մեկը, որն անցկացվեց Երևանի Նար-Դոսի անվան թիվ 14 դպրոցում, կիսամյակի վերջում՝ թեմաների կրկնությունների ժամանակ: Մեր կողմից ընտրվեցին մի քանի թեորեմներ, որոնք սովորողներին առաջարկվեցին ապացուցել իրենց իմացած մեթոդներով, այնուհետև սովորեցնելով ծառի տեսքով ապացուցման ձևը, աստիճանաբար անցում կատարվեց դեպի վերջին մեթոդը, ինչի հիման վրա կատարվեցին համապատասխան հետևություններ գիտափորձի վերաբերյալ:

Ու. Կարո՞ղ եք ձևակերպել արտադրյալի աստիճանի հատկությունը:

Սովորողները չկարողացան բանավոր կերպով հստակ ձևակերպել և ցանկություն հայտնեցին գրատախտակին գրել այդ հատկությունը: Սովորողներից մեկը գրեց $(a{\cdot}b)^n=a^n{\cdot}b^n$: Ուսուցչի օգնությամբ նրանք ձևակերպեցին վերոհիշյալ հատկությունը՝ արտադրյալի աստիճանը հավասար է արտադրիչների աստիճանների արտադրյալին: Այսինքն՝ կամայական **a** և **b** արտահայտությունների համար $\mathbf{(a{\cdot}b)^n=a^n{\cdot}b^n}$**:**

Ու. Իսկ կարո՞ղ եք ապացուցել այդ հատկությունը:

Ա. Այո՛:

Աշակերտներից մեկը գրատախտակին գրեց.

$(a{\cdot}b)^n=(a{\cdot}b)\cdot\ldots\cdot(a.b)=(a{\cdot}a{\cdot}\ldots{\cdot}a)\cdot(b{\cdot}b{\cdot}\ldots{\cdot}b)=a^n{\cdot}b^n$

Ու. Իսկ քանի՞ հատ են այդ արտադրիչները:

Ա. n հատ:

Ու. Իսկ ինչպե՞ս նշենք այդ հանգամանքը:

Աշակերտը ուղղում է. $(a\cdot b)^n = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n} = \underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{n}\cdot\underbrace{(b\cdot\ldots\cdot b)}_{n} = a^n\cdot b^n$

Ու. Իսկ կարո՞ղ եք մեզ բացատրել, թե ինչից օգտվելով գրեցիք այդպես:

Ա. Օգտվեցի աստիճանից, հետո բացեցի փակագծերը, հետո էլի օգտվեցի աստիճանից:

Ու. Լավ: Հիմա ես նույնը կգրառեմ այլ տեսքով:

Ուսուցիչը նկարում է գրատախտակին (տես գծ. 1):

Ապացուցումը	Փաստարկները
$(a\cdot b)^n = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n} =$	աստիճանի սահմանումը
$= \underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)}_{n} = a^n\cdot b^n$	արտադրյալի տեղափոխական և զուգորդական օրենքները, աստիճանի սահմանումը
$\boxed{(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n}$	հավասարության փոխանցական օրենքը

գծ.1

Աշակերտը տեսավ իր թույլ տված սխալները փաստարկումներ կատարելիս:

Ուսուցիչը բացատրեց ծառի տեսքով կատարվող ապացույցի էությունը, կատարման ընթացքը:

Ու. Իսկ կարո՞ղ եք ապացուցել միևնույն հիմքով աստիճանների արտադրյալի հատկությունը:

Մի քանի հոգի ցանկություն են հայտնում գալ գրատախտակի մոտ: Աղջիկը, որը ցանկացել էր գալ գրատախտակի մոտ, պարզվեց այդքան էլ չէր հասկացել, թե ինչ պիտի ապացուցի: Ուսուցիչը մեկ անգամ ևս կրկնում է հատկության անվանումը և տեսնելով, որ դարձյալ գլխի չի ընկնում, փորձում է օգնել:

Ու. Հիշու՞մ եք, թե ինչի է հավասար $a^n\cdot a^m$:

Ա. Այո:

Գրում է. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Ու. Ապրե՛ս, իսկ կարո՞ղ ես ապացուցել:

Աշակերտը սկսում է նկարել ապացույցը ծառի տեսքով: Նկատենք, որ ուսուցիչը չէր նշել, թե ինչ եղանակով պետք է նա ապացուցեր (տես գծ. 2):

Ապացուցումը	Փաստարկները
$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{n} \cdot \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m} =$	աստիճանի սահմանումը
$= \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{n+m} = a^{n+m}$	արտադրյալի տեղափոխական և զուգորդական օրենքները, աստիճանի սահմանումը
$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$	հավասարության փոխանցական օրենքը

գծ.2

Աշակերտուհին «ծառը» նկարեց գրեթե առանց օգնության, դժվարացավ երկրորդ քայլում, սակայն ուսուցչի մասնավոր օրինակների վրա բացատրելուց հետո գլխի ընկավ ընդհանուր դեպքի գրությունը: Փաստարկումներն այս անգամ համեմատաբար հեշտ հիմնավորվեցին: Սովորողները դժվարանում էին փաստարկումների ճիշտ ձևակերպումների մեջ: Նկատվեց, որ երկրորդ աշակերտուհին, ի տարբերություն առաջինի, որը դասարանի լավ սովորողներից էր, միջին մակարդակի գիտելիքներով էր օժտված և ցանկություն էր հայտնել գրել ապացույցը զուտ գրառման գրավչության պատճառով:

Այնուհետև ապացուցվեցին թվերի համեմատության միջոցով քառակուսի արմատների համեմատության հատկությունը. ա).Եթե ոչ բացասական թվերից մեկը փոքր է մյուսից, ապա նրա քառակուսի արմատը նույնպես փոքր կլինի մյուսի քառակուսի արմատից: Այսինքն՝ եթե $a<b$, ապա $\sqrt{a}<\sqrt{b}$, որտեղ a-ն և b-ն կամայական ոչ բացասական թվեր են: բ) Եթե ոչ բացասական թվերից մեկը մեծ է մյուսից, ապա նրա քառակուսի արմատը նույնպես մեծ կլինի մյուսի քառակուսի արմատից: Այսինքն՝ եթե $a>b$, ապա $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ (տես գծ. 3):

Ապացուցումը	Փաստարկները
a , b $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ կամ $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ $(\sqrt{a})^2 \geq (\sqrt{b}^{\,2})$ $a \geq b$ $a < b$ հակասություն $\sqrt{a} < \sqrt{b}$	իրական ոչ բացասական թվեր իրական թվերի համեմատության սկզբունքը ենթադրություն աստիճանի կապը անհավասարության հետ արմատի սահմանումը, պայմանը

գծ.3

Առաջին դեպքի կառուցումից հետո ուսուցիչը էվրիստիկ զրույցի միջոցով բերում է նրան, որ սովորողները գլխի ընկնեն, որ երկրորդ դեպքի ապացույցը հարկավոր է բերել առաջին դեպքի արդյունքին: Աշակերտները գլխի ընկան, որ երկրորդ դեպքում, եթե $a > b$, ապա դրանից բխում է, որ $b < a$, ու խնդիրը հանգում է առաջին դեպքին:

Այնուհետև աշակերտները ապացուցեցին, որ եթե ոչ բացասական թվերից մեկը փոքր չէ մյուսից, ապա նրա քառակուսի արմատը նույնպես փոքր չէ մյուսի քառակուսի արմատից: Այսինքն եթե $a \geq b$, ապա $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$, որտեղ a-ն և b-ն կամայական ոչ բացասական թվեր են (տես գծ. 4):

Ապացուցումը	Փաստարկները
a , b $a \geq b$ $a > b$ $a = b$ $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ կամ $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ կամ $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$	իրական ոչ բացասական թվեր պայմանը $\geq$-ի սահմանումը Անհավասարության և հավասարության կապերը արմատի հետ Տրամաբանական գումարի սահմանումը

գծ. 4

Այս ապացուցման ժամանակ աշակերտները չէին կարողանում կատարել վերջին փաստարկումը: Նրանց մաթեմատիկայի ուսուցչուհին, որը մինչ այդ լուռ նստած էր, աշակերտներին դիմեց հետևյալ կերպ.

Ու. Երեխաներ, չէ՞ որ ես ձեզ բացատրել էի տրամաբանական գումարը:

Աշակերտները անմիջապես հիշեցին, որ «կամ» շաղկապի մասին է խոսքը, ու վերջին փաստարկումը բխում է տրամաբանական գումարի սահմանումից:

Հետո ուսուցչուհին նշեց, որ ինքը ստիպված է աշակերտներին լրացուցիչ բացատրել տրամաբանական որոշ շաղկապների մասին, քանի որ դրանք անհրաժեշտ են, և առանց դրա հնարավոր չէ հասկանալ մի շարք թեմաների իմաստային նրբությունները:

Աշակերտներն արդեն համեմատաբար ավելի հեշտ կառուցեցին ու ապացուցեցին քառակուսի արմատների արտադրյալի հատկությունը (տես գծ. 5):

Ապացուցումը	Փաստարկները
$a\,,\ b$	իրական ոչ բացասական թվեր
$\sqrt{a} \geq 0 \quad \sqrt{b} \geq 0$	արմատի սահմանումը
$\boxed{\sqrt{a}\,.\sqrt{b} \geq 0}$	ոչ բացասական թվերի արտադրյալի հատկությունը
$(\sqrt{a}\,.\sqrt{b}\,)^2 = a\ b$	աստիճանի և արմատի հատկությունը
$\boxed{\sqrt{a}\,.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}}$	արմատի սահմանումը

գծ.5

Վերջում տրված հարցերի շնորհիվ պարզվեց, որ երեխաներին շատ դուր եկավ նման ապացուցման մեթոդը, քանի որ սխեմատիկորեն նրանք տեսնում են, թե ինչից ինչ է բխում, տպավորիչ է, լավ է հիշվում, ներգրավվում են անգամ ցածր առաջադիմություն ունեցող աշակերտները, ապացուցումը չի վանում, այլ գրավում է, վերացնում է վախը սեփական ուժերի հանդեպ, աշակերտները ավելի ինքնավստահ են դառնում, զարգացնում է լեզվատրամաբանական մտածողությունը, նրանց մոտ զարգանում է փաստարկումներ կատարելու կարողությունները, պատասխանատվություն են զգում իրենց կատարած ամեն մի քայլի համար, գիտակցում են, որ այն, ինչ գրեցին, պետք է կարողանան հիմնավորել, ճիշտ ձևակերպեն իրենց մտքերը, միայն տառային արտահայտություններով չգրեն այն, ինչ ապացուցում են, կարողանան հստակ հայերենով ձևակերպել իրենց մտքերը:

Գիտափորձը, ինչպես նշվեց, կատարվել է կիսամյակի վերջում, ու փորձը ցույց տվեց, որ հատկապես նման ապացուցումները նպատակահարմար է կիրառել կրկնողությունների ժամանակ: Սովորողները փաստարկումների սյունակում ստիպված են նշել այն պայմանները, հատկությունները, որոնցից օգտվում են տվյալ ապացույցի ընթացքում, ինչը նպաստում է, որ նրանք վերհիշեն իրենց անցած նյութը: Ծառի տեսքով ապացույցները նպատակահարմար են նաև կիրառել արտադասարանական պարապմունքների ժամանակ. որտեղ կարելի է կազմել ավելի երկար ու բարդ սխեմաներ:

Հավելված 2-Բ

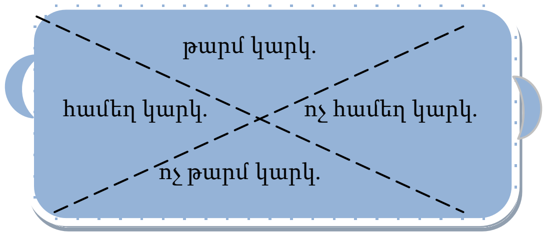
Քերոլի սկուտեղի օգտագործման նպատակով անցկացված գիտափորձը

Գիտափորձը նպատակ ուներ պրակտիկ փորձարկման միջոցով ստուգելու «Լուիս Քերոլը, նրա սկուտեղը և սովորողների տրամաբանական մտածողության զարգացման հիմնահարցը» աշխատանքում առաջարկված մեթոդական մշակումների արդյունավետությունը: Սովորողների տրամաբանական մտածողության ձևավորմանը և զարգացմանն ուղղված տրամաբանական խաղը մեր կողմից նպատակահարմար է եղել անցկացնել լրացուցիչ պարապմունքների ընթացքում:

Գիտափորձը կատարվել է Կոտայքի մարզի Պռոշյան համայնքի Պետրոս Ղևոնդյանի անվան միջնակարգ դպրոցում և ՀՊՄՀ-ի հենակետային վարժարանում: Գիտափորձն ավելի համոզեց, որ խաղային իրադրությունների նպատակային օգտագործումը դրական ազդեցություն է ունենում սովորողների տրամաբանական մտածողության և լեզվական հմտությունների զարգացման հարցերում:

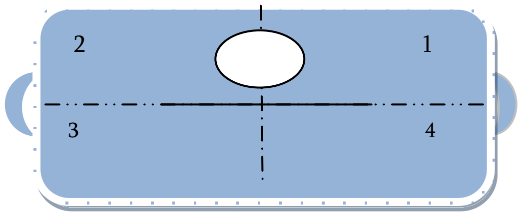
Հանգամանորեն ներկայացնենք այդ գիտափորձերից մեկը, որն անցկացվեց Պռոշյան համայնքի դպրոցի 7-րդ և 10-րդ դասարանների աշակերտների հետ: Ընդ որում նկատվեց առավել մեծ ակտիվություն 7-րդ դասարանի աշակերտների հետ աշխատելիս:

Նշենք, որ գիտափորձի ժամանակ երեխաները ներկայացնում էին հետաքրքիր առաջարկություններ, որոնք շատ հաճախ համընկնում կամ շատ մոտ էին լինում մեր առաջարկություններին: Սկուտեղում կարկանդակ լինել-չլինելու փաստը երեխաները առաջարկեցին նաև նշել + և - նշաններով: Թարմ կարկանդակները առաջարկեցին նշել դեղին շրջանակով, իսկ ոչ թարմերը՝ սև: Այնուհետև առաջարկեցին թարմերը հավաքել սկուտեղի մի կողմում, իսկ ոչ թարմերը՝ մյուս կողմում: Իսկ երբ ավելացվում էր կարկանդակների երկրորդ՝ համեղ լինելու հատկանիշը, նրանցից մի քանիսը առաջարկեց սկուտեղը բաժանել 4 մասի հետևյալ կերպ (տես նկ. 1)՝



նկ.1

Նրանք նաև առաջարկեցին «Որոշ կարկանդակներ թարմ են» դատողությունը պատկերել հետևյալ ձևով (տես նկ. 2).



նկ.2

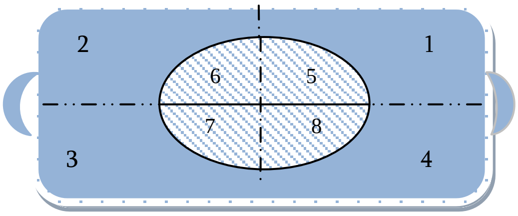
Սկզբում նկատվում էր երեխաների լեզվական և տրամաբանական կարողությունների բավականին ցածր մակարդակը, բայց մեր կողմից կատարված մի քանի դիտողություններից հետո նրանք սկսեցին արագ կողմնորոշվել, ինչը վկայում է, որ այս խաղ-պարապմունքը, իրոք, նպաստում է լեզվատրամաբանական մտածողության զարգացմանը:

Պարապմունքի ընթացքում դիտարկվեց կարկանդակների թարմ և համեղ լինելու հատկանիշների դեպքը, և ըստ դրա էլ սկուտեղը բաժանվեց չորս մասի՝ կարկանդակները դասավորելու նպատակով: Առաջին պարապմունքից հետո նպատակահարմար գտանք մի փոքր էլ բարդացնել խաղը և ավելացնել ևս մեկ հատկանիշ՝ կարկանդակների օգտակար լինելու հատկանիշը:

Շարունակենք խաղ-պարապմունքի շարադրումը.

Ու.-Երեխանե՛ր, այժմ ենթադրենք մեր կարկանդակներն օժտված են ևս մի հատկանիշով՝ օգտակար լինելու: Ի՞նչ եք կարծում, ինչպե՞ս դասավորենք նման դեպքում մեր սկուտեղում եղած կարկանդակները:

Հնչեցին բազմաթիվ առաջարկներ, որոնք հանգեցին նրան, որ սկուտեղը վերադասավորեցինք այնպես, որ կենտրոնում հավաքենք օգտակար կարկանդակները, իսկ ծայրամասերում՝ ոչ օգտակարները: Սկուտեղը ստացավ հետևյալ տեսքը (տես նկ. 3).



նկ.3

Երեխաները այս անգամ շատ ավելի հեշտ էին պատկերացնում ու պատասխանում այն հարցին, թե ինչպիսի՞ հատկանիշներով են օժտված 1,2,3,4,5,6,7,8, վանդակներում պատկերված կարկանդակները.

1-ում՝ թարմ, համեղ, ոչ օգտակար,

2-ում՝ թարմ, ոչ համեղ, ոչ օգտակար,

3-ում՝ ոչ թարմ, ոչ համեղ, ոչ օգտակար,

4-ում՝ ոչ թարմ, համեղ, ոչ օգտակար,

5-ում՝ համեղ, թարմ, օգտակար,

6-ում՝ ոչ համեղ, թարմ, օգտակար,

7-ում՝ ոչ համեղ, ոչ թարմ, օգտակար,

8-ում՝ համեղ, ոչ թարմ, օգտակար:

Մեկ առ մեկ պատկերեցինք սպիտակ և սև շրջանակները սկուտեղի յուրաքանչյուր տիրույթում, որպեսզի ըստ այդմ պարզվի երեխաները մտապահե՞լ են տիրույթներին պատկանող կարկանդակների հատկանիշները, թե՞ ոչ:

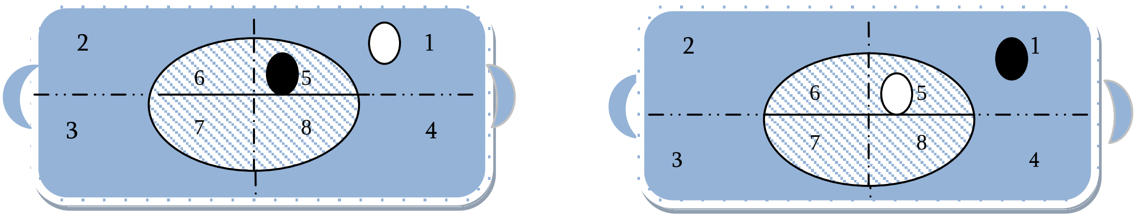
Նշենք, որ այս դեպքում անիմաստ ու ձանձրալի կլիներ քննարկել սկուտեղների բոլոր հնարավոր դեպքերը: Շատ ավելի հեշտ կլիներ ու օգտակար, եթե դիտարկեինք սկուտեղի վերին, ստորին, աջ կամ ձախ կեսերը: Ընդ որում այստեղ ևս ամեն դեպք չէ, որ նպատակահարմար էր դիտարկել:

Մենք կատարել ենք դեպքերի մանրամասն քննարկում ու նպատակահարմար ենք գտնում աշակերտների ուշադրությունը գրավել հետևյալների վրա:

Ու.-Երեխանե՛ր, այժմ դիտարկենք մեր սկուտեղի վերին կեսը, ի՞նչ կասեք այս երկու սկուտեղներում գտնվող կարկանդակների հատկանիշների մասին:

Ա.-Նախ և առաջ, եթե այս սկուտեղում կարկանդակներ կան, ապա դրանք բոլորն էլ թարմ են, քանի որ մենք դիտարկում ենք սկուտեղի միայն վերին կեսը:

Ու.-Իսկ ի՞նչ կասեք կարկանդակների համեղ և օգտակար լինելու մասին :



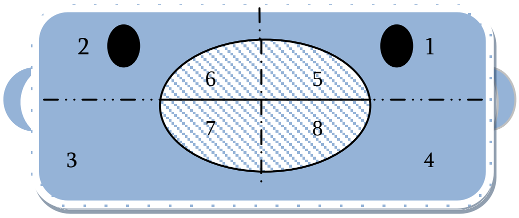
նկ.4

Ա.-Քանի որ կարկանդակները տեղավորված են սկուտեղի աջ մասում, ուրեմն համեղ են, բայց սկուտեղի մեջտեղի տիրույթը դատարկ է, ուրեմն՝ առաջին նկարում պատկերված է «Բոլոր համեղ կարկանդակները օգտակար չեն», իսկ երկրորդում՝ «Բոլոր համեղ կարկանդակները օգտակար են» դատողությունները (տես նկ. 4):

Խաղի ժամանակ լարվում էր երեխաների հիշողությունը, որպեսզի մտապահեն յուրաքանչյուր տիրույթում գտնվող կարկանդակին բնորոշ հատկությունները, բացի այդ սովորում էին անտեսել սկուտեղի այն կեսը, որը տվյալ պահին չէինք դիտարկում:

Ու.- Ինչպե՞ս կպատկերեք «Ոչ մի թարմ կարկանդակ չի հանդիսանում ոչ օգտակար» դատողությունը:

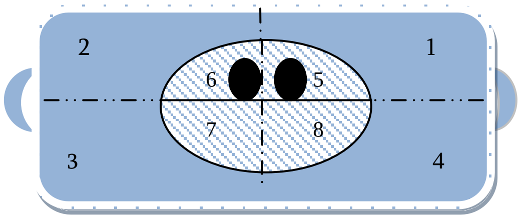
Ա.- Դա նշանակում է, որ 1 և 2 տիրույթներում կարկանդակներ չկան, ուրեմն կպատկերենք այսպես (տես նկ. 5).



նկ.5

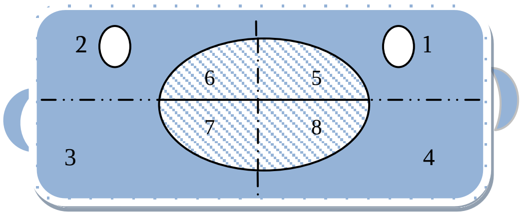
Ու.- Իսկ ի՞նչ կասեք հետևյալ սկուտեղի մասին:

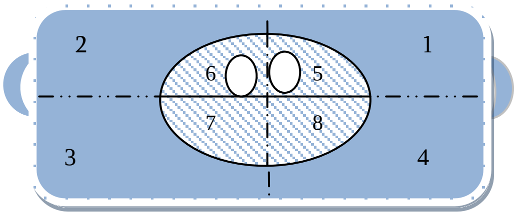
Ա.- Համանմանորեն, այս դեպքում էլ դատարկ են 5 և 6 տիրույթները, հետևաբար պատկերված է «Ոչ մի թարմ կարկանդակ օգտակար չէ» դատողությունը (տես նկ. 6):



նկ.6

Ու.-Իսկ ի՞նչ կասեք հետևյալ սկուտեղի մասին:

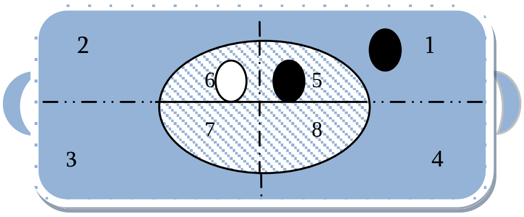




նկ.7

Ա.- Առաջին սկուտեղում կան թարմ և ոչ օգտակար կարկանդակներ, իսկ երկրորդում՝ թարմ և օգտակար (տես նկ. 7):

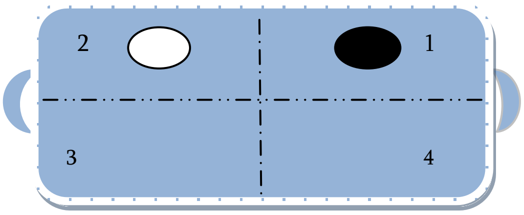
Ու.- Ի՞նչ կասեք հետևյալ սկուտեղում գտնվող կարկանդակների թարմ և համեղ լինելու մասին:



նկ.8

Ա.- Նախ և առաջ երևում է, որ դատարկ են 1 և 5 վանդակները, ուրեմն սկուտեղում չկան թարմ և համեղ կարկանդակներ: 6-ում կան կարկանդակներ, չնայած այն բանին, որ 2-րդ վանդակում ոչինչ չի պատկերված, դա էլ բավական է, որ պնդենք, որ ձախ մասում ինչ-որ բան կա (տես նկ. 8):

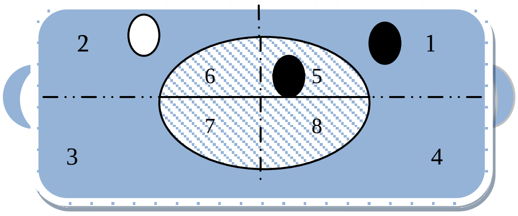
Ու.- Եթե մենք ցանկանում ենք ազատվել օգտակար լինելու հատկանիշից, ապա այդ նույն սկուտեղից կարող ենք անցում կատարել հետևյալ փոքրիկ սկուտեղին (տես նկ. 9).



նկ.9

Ա- Այսինքն ավելի ակնհայտորեն երևաց, որ պատկերված էր «Բոլոր թարմ կարկանդակները համեղ չեն» դատողությունը:

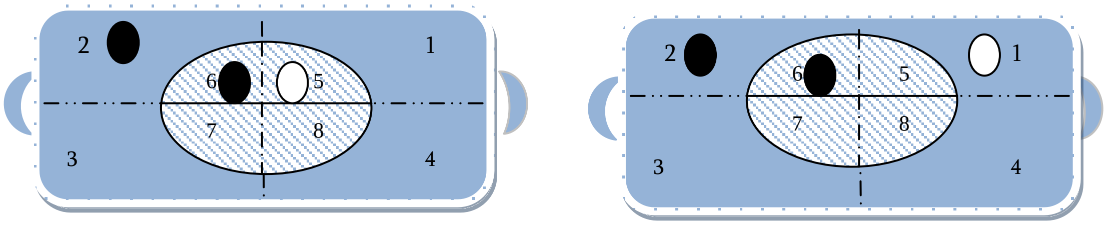
Ու.-Այո՛: Եթե ուշադիր նայեք նույն դատողությունը կարտահայտի նաև հետևյալ սկուտեղը (տես նկ. 10):



նկ.10

Ա.- Իսկապես, այս անգամ էլ զբաղված է 2-րդ վանդակը ու ոչինչ չի նկարված 6-րդ տիրույթում, բայց դա էլ բավական է տեսնել, որ ձախ մասում ինչ-որ կարկանդակներ կան, ու դարձյալ կարող ենք հանգել մեր փոքրիկ սկուտեղին:

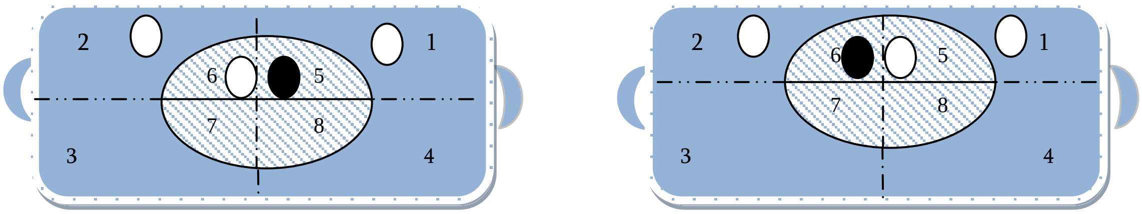
Ուսուցիչը այս անգամ էլ պատկերեց հետևյաց սկուտեղները (տես նկ. 11).



նկ.11

և նրանք շատ հեշտությամբ ասացին, որ պատկերված են «Բոլոր թարմ կարկանդակները համեղ են» դատողությունը և նկարեցին դրանց համապատասխան փոքր սկուտեղը:

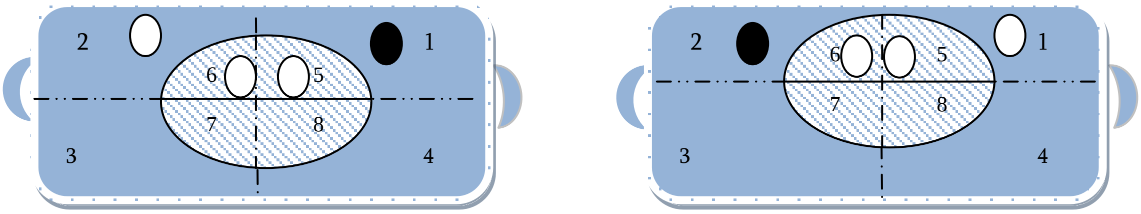
Աշակերտների լեզվական և տրամաբանական կարողությունները զարգացնելու և ստացած գիտելիքներն ամրապնդելու համար նպատակահարմար գտանք կատարել խմբային աշխատանք՝ ուսումնասիրել հետևյալ դեպքերը (տես նկ. 12-17).



նկ.12

Սկուտեղում չ կան միայն համեղ և օգտակար կարկանդակներ

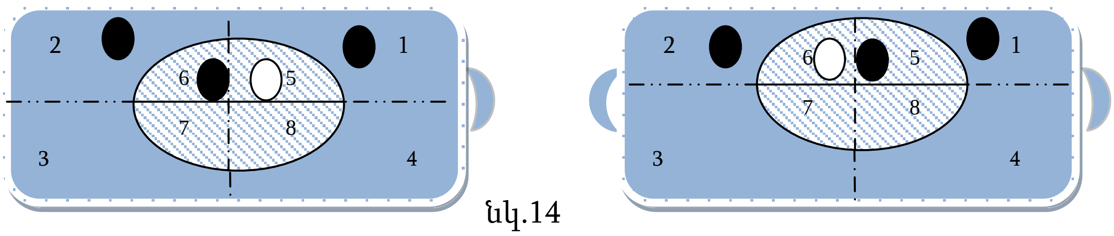
Սկուտեղում չկան միայն ոչ համեղ և օգտակար կարկանդակներ



նկ.13

Սկուտեղում չկան միայն համեղ և ոչ օգտակար կարկանդակներ

Սկուտեղում չ կան միայն ոչ համեղ և ոչ օգտակար կարկանդակներ

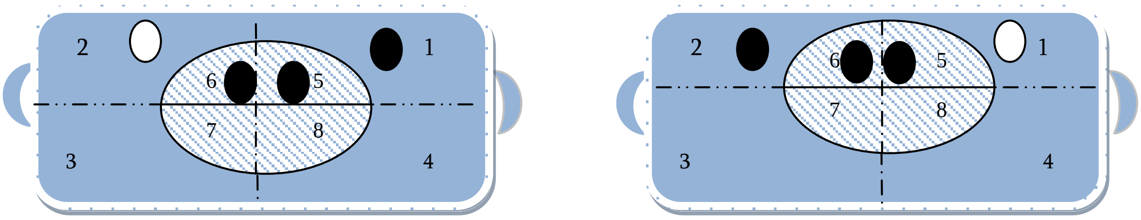


նկ.14

Սկուտեղում կան միայն համեղ և օգտակար կարկանդակներ

Սկուտեղում կան միայն համեղ և օգտակար կարկանդակներ

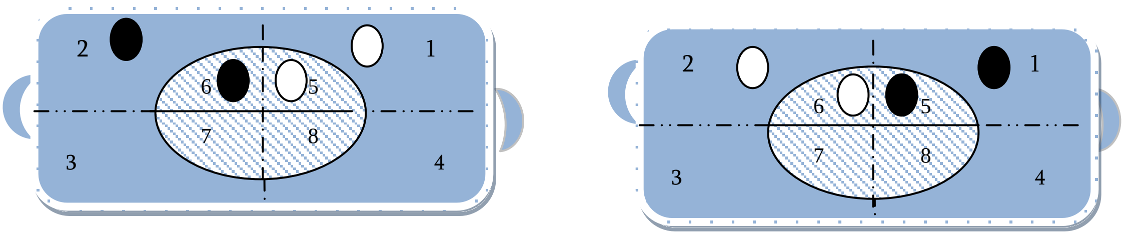
նկ.15



նկ.16

Սկուտեղում կան միայն ոչ համեղ և ոչ օգտակար կարկանդակներ

Սկուտեղում կան միայն համեղ և ոչ օգտակար կարկանդակներ



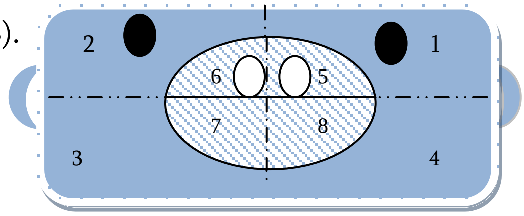
նկ.17

Այնուհետև աշակերտներին ըստ խմբերի տրվեց ստուգող հարց:

Ու.- Իսկ ի՞նչ եք կարծում, ինչպե՞ս պատկերենք «Բոլոր թարմ կարկանդակները օգտակար են» դատողությունը:

Աշակերտները շատ արագ կողմնորոշվեցին և տվեցին հետևյալ պատասխանը.

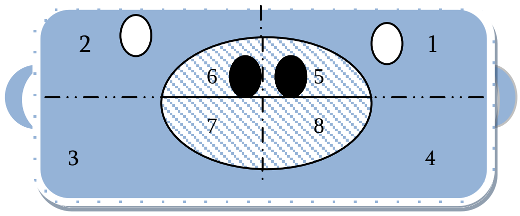
- Դա նշանակում է, որ դատարկ են 1 և 2 տիրույթները,ուրեմն կպատկերենք սև շրջանակներով, իսկ կենտրոնում կան կարկանդակներ, ուրեմն մեր սկուտեղը կընդունի հետևյալ տեսքը (տես նկ. 18).



նկ.18

Նույն կերպ մյուս խմբերին առաջարկվեց պատկերել «Բոլոր կարկանդակները ոչ օգտակար են դատողությունը»:

Նրանք ներկայացրին հետևյալ պատկերը (տես նկ. 19).



նկ.19

Ժամանակի առկայության պայմաններում համանման մի քանի դեպք կարելի էր առաջարկել դիտարկելու նաև սկուտեղի աջ, ձախ կամ ստորին կեսերը:

Պարապմունքի ավարտին կատարեցինք անդրադարձ և դիմեցինք աշակերտներին՝ կարծիք հայտնել պարապմունքի մասին: Նրանք արտահայտեցին այսպիսի տեսակետներ.

- պարապմունքը շատ հետաքրքիր էր, և ժամանակը շատ աննկատ անցավ,
- նյութը բոլորիս համար հասանելի էր, որովհետև բարդ գիտելիքներ չէր պահանջվում,
- նկարով ցույց տրված պատկերները շատ էին օգնում, որ խնդիրները լավ հասկանանք և լուծելիս չդժվարանանք,
- հասկացանք, որ խոսելիս ճիշտ ձևակերպումներ տալը շատ կարևոր է…

Ուշագրավ էր նաև այն հանգամանքը, որ աշակերտները պարապմունքն ավարտելուց հետո ևս շարունակում էին զրուցել «սկուտեղի» մասին:

Հավելված 2-Գ

Մաթեմատիկական տրամաբանության բուհական դասընթացում կատարվող ծրագրային փոփոխությունների նախագիծ

Առաջարկվող ծրագրի բացատրագիրը

Ժամանակակից մաթեմատիկական կրթության անբաժան բաղադրիչներից մեկը մաթեմատիկական տրամաբանությունն է, որի միջոցով մաթեմատիկական տեսություններն արտահայտվում են ճշգրտված լեզվական ձևերով. կանոնավորվում են տեսական դրույթներն ու դրանց արտածումները:

Տրամաբանության վերաբերյալ նախնական տեղեկություններ ուսանողներն ստանում են ուսումնական տարբեր առարկաների դասընթացներում: Յանկացած գիտաճյուղ՝ անկախ հետազոտության բնագավառից, որպես հիմնարար գիտելիք ներառում է տրամաբանական հասկացություններ, գործողություններ և օրենքներ: Սակայն այդ դասընթացների կողմից տրվող տրամաբանական գիտելիքները կրում են տարերային բնույթ, դրանք չեն կազմում համակարգված ամբողջություն և, որ կարևոր է, դրանց ապավինելով չի երաշխավորվում կշռադատությունների մեջ տրամաբանական սխալների կանխումը (իրավիճակի ուսումնասիրությունը ցույց է տալիս, որ սովորողների և նույնիսկ մասնագետներից շատերի մոտ դեռևս անբավարար է տրամաբանական գրագիտությունը):

Մաթեմատիկական տրամաբանության դասընթացի հիմնական նպատակն է համակարգել ուսանողների՝ տրամաբանության վերաբերյալ արդեն ունեցած գիտելիքները, բացահայտել մաթեմատիկայում դրսևորվող տրամաբանական մտածողության հիմնական սկզբունքներն ու օրենքները, ուսումնասիրել գիտության այդ բնագավառի հիմունքները, ծանոթանալ ժամանակակից նվաճումներին և զարգացման միտումներին:

Ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների համար մաթեմատիկական տրամաբանության դասընթացը հնարավորություն է ընձեռում լուծելու հետևյալ խնդիրները.

ա) բարձրացնել մաթեմատիկական-մասնագիտական պատրաստության մակարդակը, հասուն լինել մաթեմատիկայի հիմունքների հետազոտության համար,

բ) խորացնել գիտելիքները ուսումնական առարկաների համակարգում միջառարկայական կապերի, դրանց հիմքերում ընկած տրամաբանական առնչությունների վերաբերյալ,

գ) զարգացնել տրամաբանական մտածողությունը, լեզվական արտահայտչական ունակությունները, մտածողական գործողություններում դրանց կիրառելու կարողությունը:

դ) ընդլայնել մտահորիզոնը, խթանել ստեղծագործական աշխատանքը, ձեռք բերել ինքնուրույն մտագործունեության փորձ:

Մաթեմատիկական տրամաբանության դասընթացը ուսանողների համար լուծելու է ևս մի կարևոր խնդիր. նրանք ձեռք են բերելու այնպիսի գիտելիքներ և կարողություններ, որոնք բավարար կլինեն հանրակրթական դպրոցներում դասավանդելու տրամաբանություն առարկան, որն ընդգրկված է դպրոցական ընտրողական առարկայացանկում:

Մաթեմատիկական տրամաբանության դասընթացը բաղկացած է երկու հիմնական բաժիններից: Առաջին բաժինը նվիրված է բովանդակային տրամաբանությանը, որում ուսումնասիրվում են մաթեմատիկայի բոլոր բնագավառներում լայնորեն կիրառվող տրամաբանական գործողությունները, այդ թվումª սահմանումը, դասակարգումը, ապացուցումը և դրանց կանոնները: Այս բաժնի իմացությունը թույլ կտա, մի կողմից, բարձրացնել ուսանողների ընդհանուր տրամաբանական պատրաստության մակարդակը և մյուս կողմից՝ հիմք կհանդիսանա դասընթացի երկրորդ բաժնի յուրացման համար: Երկրորդ բաժինը նվիրված է ասույթների և պրեդիկատների հաշիվներին, որոնք ներկայացվում են որպես աքսիոմակարգերով կառուցված տեսություններ, ընդ որում՝ միաժամանակ անդրադարձ է կատարվում նաև դրանց բովանդակային մեկնաբանություններին:

Դասընթացում կարևորվում է թեմաներից յուրաքանչյուրի կիրառական նշանակության բացահայտումը: Դրա համար անհրաժեշտ է տեսական բանաձևումներն ուղեկցել կիրառության օրինակների լուսաբանմամբ: Այդպիսի օրինակներ ընտրվում են ինչպես մաթեմատիկայի և մեթոդիկայի տարբեր բնագավառներից, այնպես էլ բնագիտական և հումանիտար առարկաներից:

Դասընթացի ճանաչողական և կիրառական խնդիրները լուծելու համար դասավանդելիս նախատեսվում են տեսական, սեմինար և գործնական պարապմունքներ, ռեֆերատներ և կուրսային աշխատանքներ: Ուսուցման ավանդական մեթոդները զուգակցվելու են ժամանակակից մեթոդների հետ, կիրառվելու են ուսուցման նոր տեխնոլոգիաներ:

Տրամաբանության հիմունքների հենքային բովանդակությունը

Ներածություն. Տրամաբանության առարկան և նշանակությունը: Տրամաբանության առնչությունը գիտելիքների ճշմարտության հարցի հետ:

Հասկացություն, հասկացության լեզվական արտահայտումը: Հասկացության բովանդակությունը և ծավալը, դրանց հարաբերությունը: Հասկացության տեսակներն ըստ բովանդակության և ըստ ծավալի. դրական և ժխտական, բացարձակ և հարաբերակցական, հավաքական և ոչ հավաքական, եզակի և ընդհանուր, իրակալ և դատարկ հասկացություններ: Հասկացությունների հարաբերություններն ըստ ծավալի. արտակայության, խաչավորման, ներառման և համարժեքության հարաբերությունները, դրանց ներկայացումը էյլերյան շրջաններով: Հասկացության ընդհանրացումը և սահմանափակումը, սեռային և տեսակային հասկացություններ: Երկուսից ավելի հասկացությունների հարաբերությունները:

Սահմանում: Սահմանումը որպես տրամաբանական գործողություն: Գենետիկ (ծագումնաբանական) սահմանման առանձնահատկությունը: Սահմանման կանոնները, սահմանման համաչափությունը, կրկնաբանության ու շրջապտույտի բացառումը, հստակությունն ու հակիրճությունը: Սահմանման նշանակությունը և կիրառությունը, կիրառություններում հաճախակի հանդիպող սխալների կանխումը: Սահմանմանը հարակից գործողություններ. մատնանշում, նկարագրություն, բնութագրում: Համեմատում, նմանեցում, տարբերակում, հակադրում, փոխաբերում, լուսաբանումն օրինակով:

Բաժանում: Բաժանումը որպես տրամաբանական գործողություն: Բաժանման կառուցվածքը՝ բաժանվող հասկացություն, բաժանման անդամներ, բաժանման հիմք: Բաժանման մեխանիզմը: Բաժանման կանոնները. համաչափությունը, մեկ հիմքով բաժանումը, թռիչքի անթույլատրելիությունը: Դասակարգում և համակարգում:

Դատողություն, դատողության ճշմարտային արժեքները, դատողության լեզվական արտահայտումը: Պարզ և բարդ դատողություններ: Պարզ դատողության կազմությունը՝ սուբյեկտը, պրեդիկատը, կապը: Պարզ դատողության բովանդակային և ծավալային մեկնաբանությունները: Դատողության տեսակներն ըստ քանակի և ըստ որակի: Եզակի, ընդհանուր և մասնավոր դատողություններ: Հաստատական և ժխտական դատողություններ: Դատողությունների միացյալ դասակարգումն ըստ քանակի և որակի. ընդհանուր-հաստատական, ընդհանուր ժխտական, մասնավոր հաստատական և մասնավոր ժխտական դատողություններ, դրանց բանաձևերը և գծապատկերումը էյլերյան շրջանների միջոցով: Տերմինների բաշխվածությունը դատողության մեջ:

Բարդ դատողություն, տրամաբանական շաղկապներ: Միացյալ դատողություն (կոնյունկցիա), թույլ բաժանարար դատողություն (թույլ դիզյունկցիա), ուժեղ բաժանարար դատողություն (ուժեղ դիզյունկցիա), պայմանական դատողություն (իմպլիկացիա): Բարդ դատողությունների ճշմարտային աղյուսակները: Դատողության ժխտումը, բարդ դատողությունների ժխտումները:

Մտահանգում, մտահանգման բաղադրիչները: Բխեցման օրենքը: Մտահանգման տեսակներն ըստ նախադրյալների թվի, և ըստ բխեցման եղանակի. անմիջական և միջնորդավորված մտահանգումներ, դեդուկտիվ և ինդուկտիվ մտահանգումներ: Անմիջական մտահանգում՝ շրջում, փոխակերպում, նվազեցում: Սիլլոգիզմ: Ընդհանուր գաղափար սիլլոգիզմի մասին, սիլլոգիզմի կառուցվածքը՝ նախադրյալները և եզրակացությունը, մեծ, փոքր և միջին տերմինները: Սիլլոգիզմի աքսիոմը: Սիլլոգիզմի ընդհանուր կանոնները: Սիլլոգիզմի չորս ֆիգուրները, դրանց կանոնները և մոդուսները:

էնթիմեմա, խոսքի տնտեսման սկզբունքը: Հարաբերական մտահանգում, հարաբերական դատողություններ, դրանց փոխանցական և ոչ փոխանցական առնչությունները:

Պայմանական և բաժանարար մտահանգումներ: Պայմանական-պարզ, բաժանարար-պարզ մտահանգումներ, դրանց մոդուսները, երկընտրանք: Ինդուկտիվ մտահանգում, դրա կառուցվածքը և տեսակները: Գաղափար հավաստի և հավանական գիտելիքի մասին: Լրիվ ինդուկցիա: Ոչ լրիվ ինդուկցիա, պարզ թվարկման ինդուկցիա: Ոչ լրիվ ինդուկցիա դեպքերի հատուկ ընտրության միջոցով, Բեկոնի-Միլի ինդուկցիա: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի առանձնահատկությունները: Անալոգիա, անալոգիայի կիրառությունը մաթեմատիկայում:

Ապացուցում և հերքում: Ապացուցումը որպես տրամաբանական գործողություն: Ապացուցման կառուցվածքը՝ թեզիսը, հիմքերը, ապացուցման եղանակը: Ուղղակի և անուղղակի ապացուցումներ: Ապացուցման կանոնները, թեզիսի որոշակիությունն ու անփոփոխությունը, փաստարկների ճշմարիտ, անհրաժեշտ և բավարար լինելը: Ապացուցման կիրառություններում հանդիպող բնորոշ սխալների վերլուծությունը և դրանց կանխումը: Հերքումը որպես տրամաբանական գործողություն: Հերքման կառուցվածքը՝ թեզիսը, հիմքերը, հերքման եղանակը: Առանց ապացուցման տրված դրույթի հերքումը, իր ապացուցման հետ տրված դրույթի հերքումը:

Պարալոգիզմ, սոփեստություն, պարադոքս, դրանց ճանաչողական նշանակությունը և դրսևորման առանձնահատկությունները մաթեմատիկայում:

Տրամաբանության հիմնական օրենքները. նույնության օրենքը, հակասության օրենքը, երրորդի բացառման օրենքը, բավարար հիմունքի օրենքը: