ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Պետրոսյան Մարա Գասիկի

ՏՈՊՈԼՈԳԻԱՊԵՍ ՈՉ ՉՐՈՅԱԿԱՆ ՈՐՈՇ ՕԲՅԵԿՏՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ

Ա.04.02 –«Տեսական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ
Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Петросян Мара Гасиковна

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ В РАМКАХ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.04.02 –«Теоретическая физика»

ЕРЕВАН - 2017

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:
Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ., Լ.Մարդոյան

Պաշտոնական ընդիմախոսներ՝ ֆ.մ.գ.դ., Հ. Մաթևոսյան (ՀՀ ԳԱԱ ՌՖԷԻ)

ֆ.թ.գ.թ.,Մ. Բարսեղյան (ՀՀ ԿԳՆ ԵՊՀ)

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀՀ և ՌԴ ԿԳՆ Հայ-ռուսական (սլավոնական) համալսարան

Ատենախոսության պաշտպանությունը կայանալու է 2017թ. հոկտեմբերի 28-ին ժամը 12-ին 049 ֆիզիկայի մասնագիտական խորհրդի նիստում: Հասցե՝ Երևան, ԱլեքՄանուկյան 1:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2017թ. սեպտեմբերի 27-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Վ.Պ.Քալանթարյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.
Научный руководитель: д.ф.м.н., Л.Г. Мардоян

Официальные оппоненты: д.ф.м.н., Г. Матевосян (ИРФЭ НАН РА)
к.ф.м.н.,М. Барсегян (ЕГУ МОНРА)

Ведущая организация: Российско-Армянский (Славянский) университет МОН РА и РФ

Защита диссертации состоится 28-го октября 2017 г. в 12 часов, на заседании специализированного совета физики 049 по адресу: Ереван, ул. А. Манукяна 1.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан 27-го сентября 2017г.

Ученый секретарь специализированного совета
кандидат физ.-мат. наук. В.П. Калантарян

Общая харакеристика работы

Актуальность темы

Проблема генерации монополей является частью более общей проблемы поиска виттеновской дуальности в рамках нерелятивистской квантовой механики. Согласно виттеновской дуальности, калибровочные теории с сильной связью асимптотически эквивалентны теориям, в которых с одной стороны действует слабая связь, с другой – присутствуют топологически нетривиальные объекты в виде монополей и дионов. Виттеновская дуальность открывает путь к проведению надежных вычислений в теориях с сильной связью, т.е. к решению одной из важнейших задач теоретической физики.

В рассматриваемом нами механизме генерации монополей исходной моделью с сильной связью является изотропный осциллятор. Структура этого механизма такова, что остается в силе и после добавления к осцилляторному потенциалу произвольной функции, не нарушающее условие конфаймента, т.е. речь идет о достаточно универсальном механизме.

Отправной точкой генерации монополей и дионов являются небиективные преобразования Гурвица, которые связаны с алгеброй Клиффорда и удовлетворяют, важному с физической точки зрения, условию Эйлера. Уникальность преобразования Гурвица состоит в том, что оно переводит проблему осциллятора в задачу Кеплера-Кулона. Однако, такой переход возможен лишь для осцилляторных пространств с размерностью $2, 4,$ и 8. Преобразования Гурвица переводят эти размерности в размерности $2, 3$ и 5, покрывающие весьма широкий спектр проблем теоретической физики. В самом деле, в пространстве с размерностью $1+2$ в настоящее время успешно развивается квантовая теория гравитации и теория анионов. Очень существенно, что в эту тройку входит и размерность $3,$ которая в особых комментариях не нуждается. Наконец, пространства с размерностью 5 являются полигоном для формулировки теории Калуца-Клейна, внедрения в структуру теории группы де Ситтера, развития теории монополя Янга, высокоразмерной теории эффекта Холла и построения более сложных, чем было отмечено выше, моделей квантовой гравитации.

При отображениях $(2, 4, 8) \rightarrow (2, 3, 5)$ теряются некоторые степения свободы. Этим степеням свободы мы придаем фундаментальную роль, используя их для построения калибровочных пространств на конфигурационными пространствами $(2, 3, 5)$. Генерацию электрического заряда обеспечивает преобразования Гурвица, посколько именно оно переводит осциляторные модели в кулоновские. Генерация магнитного заряда производится преобразованием, связывающим осцилляторные пространства с калибровочными. В результате этих математических преобразований рождаются такие топологически нетривиальные объекты как связанная система заряд-дион и $SU(2)$ монополь Янга-Кулона.

Переход от осцилляторных моделей к топологически нетривиальным системам несет в себе концептуально важный элемент дуальности, состоящий в том, что энергия и константа связи осциллятора трансформируются в константу связи и энергию топологически нетривиальных систем. Таким образом, осциллятор не тождествен, а дуален топологически нетривиальных системам. Указанный факт есть основополагающее свойство оператора Шредингера, объясняющее связь проблемы генерации дионов с виттеновской дуальностью.

Рассматриваемые нами в диссертации системы в основном являются суперинтегрируемыми, т.е. системами, для которых число независимых интегралов движения равно $2N-1$ (задача МИК-Кеплера, восьмимерный изотропный осциллятор и монополь Янга-Кулона) и $2N-2$ (обобщенная задача МИК-Кеплера и четырехмерный двойной сингулярный осциллятор), где N - число степеней свободы. В первом случае систему называют максимально, а во втором – минимально суперинтегрируемой системой.

Суперинтегрируемые системы обладают исключительно важным свойством: они допускает разделение переменных в уравнениях Гамильтона-Якоби и Шредингера в нескольких ортогональных системах координат. Выбор конкретной системы координат диктуется соображениями удобства, например, в спектроскопической задаче водородоподобных систем используется сферическая система координат, при рассмотрении эффекта Штарка – параболическая система координат, а в двухцентровой задаче – вытянутые сфероидальные координатаы. Такое обилие разделения переменных в уравнении Шредингера для суперинтегрируемых систем приводит к задаче о межбазисных разложений, т.е. возникает необходимость перехода от одной волновой функции к другой. И, наконец, последные годы достаточно интенсивно исследуют высокоразмерные точно решаемые модели в пространствах постоянной кривизны, к которым относится и предложенная нами альтернативная модель сферического осциллятора Хиггса, которую можно пременять для построения теории квантового эффекта Холла в высших размерностях.

Цель диссертационной работы

Цель и задачи диссертации заключаются в следующем:

1. Исследование эффекта Штарка в задаче МИК-Кеплера.
2. Установление преобразования дуальности между задачами обобщенной системы МИК-Кеплера и четырехмерного двойного сингулярного осциллятора.
3. Решение задачи рассеяния заряженных частиц в поле $SU(2)$монополя Янга-Кулона.
4. Исследование альтернативной модели сферического осциллятора Хиггса.

Научная новизна

1. Показано, что в связанной системе МИК-Кеплера, как и в атоме водорода, имеет место линейный эффект Штарка и, что постоянное однородное электрическое поле в этом случае полностью снимает вырождение энергетических уровней по азимутальному квантовому числу.
2. Рассмотрена обобщенная задача МИК-Кеплера и дуальная ей задача четырехмерного двойного сингулярного осциллятора и установлено, что преобразованием дуальности является обобщенная версия KS-преобразования.
3. Вычислено дифференциальное сечение рассеяния заряженных частиц в $SU(2)$ монополя Янга-Кулона.
4. Рассмотрена модель альтернативной модели сферического осциллятора Хиггса, найдены квазирадиальные волновые функции и энергетические спектры на D-мерной сфере и на D-мерном двухполостном гиперболоиде.

Практическая ценность работы

Рассматриваемые в диссертации топологически нетривиальные системы и полученные нами результаты могут быть применены как в разных наноструктурах при изучения физических явлений, так и для построения квантовой теории эффекта Холла в высших размерностях.

Основные результаты выносимые на защиту

1. С помощью теории возмущении установлена, что постоянное однородное электрическое поле полностью снимает вырождение энергетического спектра задачи МИК-Кеплера по азимутальному квантовому числу.
2. С помощью обобщенной версии преобразования Кусттанхеймо-Штифеля установлена связь между обобщенной задачи МИК-Кеплера и четырехмерного двойного сингулярного осциллятора.
3. В рамках нерелятивистской квантовой механики решена задача рассеяния электронов в поле $SU(2)$ монополя Янга-Кулона.
4. Предложена альтернативная модель сферического осциллятора и решена проблема собственных функций и собственных значений на D-мерной сфере и на D-мерном двухполостном гиперболоиде.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на семинарах кафедры теоретической физики им. академика Г.С. Саакяна Ереванского государственного университета, Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований и на следующих международных конференциях:

- Second International Workshop on Superintegrable Systems in Classical and Quantum Mechanics, June 27 – July 1, 2005, Dubna, Russia;
- XII International Conference on Symmetry Methods in Physics, July 3 – 8, 2006, Yerevan, Armenia;
- XVII Colloquium on Intgrable Systems and Quantum Symmetries, June 14-16, 2007, Prague, Czech Republic.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 5 работ.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 219 наименований. Общий объем диссертации – 104 страниц.

Содержание работы

Введение. Во введение дан обзор современного состояния теории суперинтегрируемых систем и квантовых систем с нетривиальной топологией, а также приведено обоснование актуальности темы диссертационной работы, сформулириваны задачи исследования и основные результаты, представлено краткое содержание работы по главам.

Первая глава посвящена задаче МИК-Кеплера в постоянном однородном электрическом поле. В §1 приведена минимально необходимая информация о задаче МИК-Кеплера, а именно, что максимально суперинтегрируемая система МИК-Кеплера, или связанная система заряд-дион (дион эта частица, являющиеся одновременно источником как электрического, так имагнитного поля), описывается гамильтонианом

$$\widehat{H}_0 = \frac{1}{2\mu_0}\left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}^{(\pm)}\right)^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2\mu_0 r^2} - \frac{e^2}{r}, \tag{1}$$

где

$$\vec{A}^{(\pm)} = \frac{g}{r(r\mp z)}\left(\pm y, \mp x, 0\right). \tag{2}$$

Векторные потенциалы $\vec{A}^{(\pm)}$ соответствуют монополю Дирака с магнитным зарядом $g = \hbar cs/e$ где $s = 0, \pm 1/2, \pm 1, \ldots,$ и с осью сингулярности при $z > 0$ и $z < 0$ соответственно. Векторные потенциалы $\overrightarrow{A}^{(+)}$и $\vec{A}^{(-)}$ связаны между собой калибровочным преобразованием $\vec{A}^{(-)} = \vec{A}^{(+)} + gradf,$ где $f = 2garctan\, y/x,$ а напряженность магнитного поля созданное дионом имеет вид $\overrightarrow{B} = rot\overrightarrow{A}^{(\pm)} = g\vec{r}/r^3.$

Наличие скрытой симметрии задачи МИК-Кеплера обусловлена тем, что наряду с гамильтонианом (1) имеют место и следующие интегралы движения

$$\hat{\vec{J}} = \vec{r} \times \left(-i\vec{\nabla} + \frac{e}{\hbar c}\overrightarrow{A}^{(\pm)}\right) + s\frac{\vec{r}}{r}, \tag{3}$$

$$\hat{\vec{I}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0}}\left[\hat{\vec{J}} \times \left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\overrightarrow{A}^{(\pm)}\right) - \left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\overrightarrow{A}^{(\pm)}\right) \times \hat{\vec{J}}\right] + \frac{e^2}{\hbar\sqrt{\mu_0}}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{4}$$

где $\hat{\vec{J}}$определяет вращательный момент системы, а оператор $\hat{\vec{I}}$ является аналогом вектора Лапласа-Рунге-Ленца-Паули.

При фиксированных отрицательных значениях энергии интегралы движения (3) и (4) образуют алгебру $so(4)$, а при положительных значениях энергии - $so(3,1)$. Таким образом система МИК-Кеплера является естественным обобщением задачи Кеплер-Кулона в присутствие Дираковского диона. Задачу МИК-Кеплера можно построить редукцией четырехмерного изотропного осциллятора с помощью так называемого преобразования Кустаанхеймо-Штифеля как на классическом, так и на квантовом уровнях.

§2 состоит из двух подпараграфов. В сылу $SO(4)$ скрытой симметрии задачи МИК-Кеплера [100] переменные в уравнение Шредингера для этой системы разделяются в сферических, параболических и вытянутых сфероидальных системах координат. В §2.1 приведено явное выражение сферического базиса задачи МИК-Кеплера, которое имеет вид

$$\psi_{njm}^{(s)}(r,\theta,\varphi) = \left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} R_{nj}^{(s)}(r) d_{ms}^{j}(\theta) e^{i(m+s)\varphi}. \tag{5}$$

Здесь $d^j_{ms}(\theta)$ есть d-функция Вигнера, а радиальная волновая функция $R^{(s)}_{nj}(r)$ определяется выражением

$$R^{(s)}_{nj}(r) = \frac{2e^{\frac{r}{nr_0}}}{n^2 r_0^{3/2}(2j+1)!}\sqrt{\frac{(n+j)!}{(n-j-1)!}}\left(\frac{2r}{r_0 n}\right)^j F\left(-n+j+1; 2j+2; \frac{2r}{r_0 n}\right), \tag{6}$$

где $r_0 = \hbar^2/\mu_0 e^2$– радиус Бора, а $F(a; c; z)$– вырожденная гипергеометрическая функция. Сферический базис задачи МИК-Кеплера (5) является решением спектральной задачи

$$\hat{H}_0\,\psi = E^{(0)}\psi\,, \qquad \hat{J}^2\,\psi = j(j+1)\,\psi\,, \qquad \hat{J}_z\,\psi = -\left(s + i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi = m\psi\,, \tag{7}$$

которое описывает связанную систему МИК-Кеплера с энергией $E^{(0)}_n = -\mu_0 e^4/2\,\hbar^2 n^2$, вращательным моментом j и z-компонентой вращательного момента m. Причем $n = |s| + 1, |s| + 2, \ldots$, а $j = |s|, |s| + 1, \ldots, n-1$, $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$. Квантовые числа j и m характеризуют полный момент системы и его проекцию на ось z. При целом s система имеет целый спин, а при полуцелом s - полуцелый. При $s = 0$ задача МИК-Кеплера переходит в водородноподобную систему.

При тождественном преобразования $\varphi \to \varphi + 2\pi$ волновая функция связанной системы МИК-Кеплера однозначна при целом s и меняет знак при полуцелом s. Во втором случае неоднозначность волновой функции можно истолковать как присутсвие магнитного поля бесконечно тонкого соленоида, направленного вдоль оси z, порождающего в системе спин $1/2$. В §2.2 приведено явное выражение волновой функции связанной системы МИК-Кеплера в параболических координатах, которую можно представить в виде

$$\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}(\mu, \nu, \varphi) = \frac{1}{n^2\sqrt{\pi r_0^3}}\Phi_{n_1, m+s}(\mu)\Phi_{n_2, m-s}(\nu)e^{i(m+s)\varphi}, \tag{8}$$

где

$$\Phi_{pq}(x) = \frac{1}{|q|!}\sqrt{\frac{(p+|q|)!}{p!}}e^{-x/2nr_0}\left(\frac{x}{nr_0}\right)^{|q|/2} F\left(-p;\ |q|+1;\ \frac{x}{nr_0}\right). \tag{9}$$

Параболические квантовые числа n_1 и n_2 связаны с главным квантовым числом n следующим образом

$$n = n_1 + n_2 + \frac{|m+s| + |m-s|}{2} + 1.$$

Для собственного значения z- компоненты аналога вектора Лапласа-Рунге-Ленца-Паули получено выражение

$$I_z = \frac{e^2\sqrt{\mu_0}}{n\hbar}\left(n_1 - n_2 + \frac{|m+s| - |m-s|}{2}\right).$$

В §3 рассмотрено обощение разложения Парка-Тартера в присутсвие монополя Дирака

$$\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}(\mu, \nu, \varphi) = \sum_{j=m_+}^{n-1} W^j_{n n_1 m s}\psi^{(s)}_{njm}(r, \theta, \varphi)\,.$$

Пользуясь условием ортогональности радиальных волновых функций задачи МИК-Кеплера по вращательному моменту

$$\int_0^\infty R_{nj}^{(s)}(r)\, R_{nj'}^{(s)}(r) dr = \frac{2}{r_0^2 n^3} \frac{\delta_{jj'}}{2j+1}.$$

Для коэффициентов $W_{nn_1ms}^{j}$ получены представление Парка

$$W_{nn_1ms}^{j} = (-1)^{n_1+\frac{m-s+|m-s|}{2}} C^{j,m_+}_{\frac{n_1+n_2+|m-s|}{2},\frac{n_2-n_1+|m-s|}{2};\frac{n_1+n_2+|m+s|}{2},\frac{n_1-n_2+|m+s|}{2}}, \qquad (10),$$

где $C_{a,\alpha;b,\beta}^{c,\gamma}$ - коэффициенты Клебша-Гордана группы $SU(2)$, и представление Тартера

$$W_{nn_1ms}^{j} = (-1)^{\frac{m-s+|m-s|}{2}} \sqrt{\frac{(2j+1)(n_1+|m+s|)!\,(n_2+|m-s|)!\,(j+m_+)!\,(j+m_-)!}{(n_1)!\,(n_2)!\,(n-j-1)!\,(n+j)!\,(j-m_+)!\,(j-m_-)!}} \times$$

$$\times \frac{(n-m_+-1)!}{|m+s|!}\; {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -n_1\,, -j+m_+, j+m_++1 \\ \\ |m+s|+1,\ -n+m_++1 \end{matrix} \middle| 1 \right\}.$$

.

В §4 получен сфероидальный интеграл движения задачи МИК-Кеплера, ответственный за разделение переменных в уравнение Шредингера в вытянутых сфероидальных координатах, и выведены трехчленные рекуррентные соотношения для коэффициентов разложений по сферическому и параболическому базисам. В §5 рассмотрен линейный эффект Штарка. Вычислена поправка в первом приближении к собственному значению энергии

$$E_n^{(1)} = \frac{3\hbar^2|e|\varepsilon}{2\mu_0 e^2}\left[n\left(n_1-n_2+\frac{|m+s|-|m-s|}{2}\right)-\frac{ms}{3}\right],$$

в которой линейный член по m указывает на то, что постоянное однородное электрическое поле ε в отличие случая атома водорода, полностью снимает вырождение энергетического спектра по азимутальному квантовому числу m. В §6 дается краткий анализ линейного эффекта Штарка для задачи МИК-Кеплера, являющимся основным результатом этой главы.

Вторая глава посвящена исследованию некоторых аспектов минимально суперинтегрируемой динамической системы с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu_0}\left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}^{(+)}\right)^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2\mu_0 r^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{\lambda_1}{r(r+z)} + \frac{\lambda_2}{r(r-z)}, \qquad (11)$$

названная обобщенной задачей МИК-Кеплера. Здесь λ_1 и λ_2 неотрицательные постоянные. §1 этой главы состоит из трех подпараграфов. В §1.1 показано, что сферический базис обобщенной задачи МИК-Кеплера одновременно является собственной функцией системы коммутирующих операторов $\hat{H}, \hat{M}$ и $\hat{J}_z$ и имеют место следующие спектральные задачи:

$$\hat{H}\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right) = -\frac{\mu_0 e^4}{2\hbar^2\left(n+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)^2}\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right),$$

$$\hat{M}\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right) = \left(j+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)\left(j+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}+1\right)\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right),$$

$$\hat{J}_z\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)=-\left(s+i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)=m\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right),$$

где

$$\widehat{M}=\hat{J}^2+\frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\frac{\lambda_1}{1+\cos\theta}+\frac{\lambda_2}{1-\cos\theta}\right),$$

а явное выражение сферической волновой функции имеет вид

$$\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)=R_{nj}^{(s)}\left(r;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)Z_{jm}^{(s)}\left(\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right),$$

где

$$Z_{jm}^{(s)}\left(\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)=N_{jm}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{m_1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{m_2}P_{j-m_+}^{(m_2,m_1)}(\cos\theta)e^{i(m+s)\varphi},$$

$$R_{nj}^{(s)}\left(r;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)=C_{nj}(2\varepsilon r)^{\left(j+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)}e^{-\varepsilon r}F\left(-n+j+1;2j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}+2;2\varepsilon r\right).$$

Здесь

$$m_1=|m+s|+\delta_1^{(s)}=\sqrt{(m+s)^2+\frac{4\mu_0\lambda_1}{\hbar^2}},\quad m_2=|m-s|+\delta_2^{(s)}=\sqrt{(m-s)^2+\frac{4\mu_0\lambda_2}{\hbar^2}},$$

$$N_{jm}=(-1)^{\frac{m-s+|m-s|}{2}}\sqrt{\frac{\left(2j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}+2\right)(j-m_+)!\,\Gamma\left(j+m_++\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}+1\right)}{4\pi\Gamma\left(j+m_-+\delta_1^{(s)}+1\right)\Gamma\left(j-m_-+\delta_2^{(s)}+1\right)}},$$

$$N_{jm}=\frac{2\varepsilon^2\sqrt{r_0}}{\Gamma\left(2j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}+2\right)}\sqrt{\frac{\Gamma\left(n+j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}+1\right)}{(n-j-1)!}}\;,\varepsilon=\sqrt{-\frac{2\mu_0E}{\hbar^2}}=\frac{1}{r_0\left(n+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)}.$$

В подпараграфе 1.2 приведено явное выражение параболического базиса обобщенной задачи МИК-Кеплера, которое имеет вид

$$\psi_{n_1n_1m}^{(s)}\left(\mu,\nu,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)=\varepsilon^2\sqrt{\frac{r_0}{\pi}}\Phi_{n_1m_1}^{(s)}\left(\mu;\delta_1^{(s)}\right)\Phi_{n_2m_2}^{(s)}\left(\nu;\delta_2^{(s)}\right)e^{i(m+s)\varphi},$$

где

$$\Phi_{n_im_i}^{(s)}\left(t_i;\delta_i^{(s)}\right)=\sqrt{\frac{\Gamma(n_i+m_i+1)}{(n_i)!}}\frac{e^{-\frac{\varepsilon t_i}{2}}(\varepsilon t_i)^{\frac{m_i}{2}}}{\Gamma(m_i+1)}F(-n_i;\ m_i+1;\ \varepsilon t_i),$$

причем $i=1{,}2$ и $t_1=\mu$, а $t_2=\nu$. Здесь n_1и n_2параболические квантовые числа и равны

$$n_1=-\frac{|m+s|+\delta_1^{(s)}+1}{2}+\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\varepsilon\hbar}\Omega^{(s)}+\frac{1}{2r_0\varepsilon},\quad n_2-\frac{|m-s|+\delta_2^{(s)}+1}{2}-\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\varepsilon\hbar}\Omega^{(s)}+\frac{1}{2r_0\varepsilon},$$

где $\Omega^{(s)}$–постоянная разделения в параболических координатах и является собственным значением оператора

$$\widehat{\Omega}^{(s)}=\hat{I}_z+\frac{\mu_0}{\hbar^2}\left[\lambda_1\frac{r-z}{r(r+z)}-\lambda_2\frac{r+z}{r(r-z)}\right],$$

где $\hat{I}_z$ z-компонента анлога вектора Лапласа-Рунге-Ленца-Паули и имеет вид

$$\Omega^{(s)}=\frac{\hbar\varepsilon}{\sqrt{\mu_0}}\left(n_1-n_2+m_-+\frac{\delta_1^{(s)}-\delta_2^{(s)}}{2}\right).$$

Параболические квантовые числа n_1 и n_2 связаны с главным квантовым числом n следующим образом $n = n_1 + n_2 + m_+ + 1$.

И, наконец, в конце этого подпараграфа приведены явные выражения коэффициентов связывающие сферические и параболические волновые функции обобщенной задачи МИК-Кеплера. Они выражаются через коэффициенты Клебша-Гордана группы $SU(2)$ и имеют вид

$$W_{nn_1ms}^{j} = (-1)^{n_1 + \frac{m-s+|m-s|}{2}} C^{j+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}, \frac{m_1+m_2}{2}}_{\frac{n_1+n_2+m_2}{2}, \frac{n_2-n_1+m_2}{2}; \frac{n_1+n_2+m_1}{2}, \frac{n_1-n_2+m_1}{2}}$$

$$\widetilde{W}_{njms}^{n_1} = (-1)^{n_1 + \frac{m-s+|m-s|}{2}} C^{j,m_+}_{\frac{n-m_-+\delta_1^{(s)}-1}{2}, \frac{n-m_-+\delta_1^{(s)}-1}{2}-n_1; \frac{n+m_-+\delta_1^{(s)}-1}{2}, \frac{m_++|m+s|+\delta_1^{(s)}-n+1}{2}}.$$

В §1.3 приведен явный вид добавочного интеграла движения обобщенной задачи МИК-Кеплера в вытянутых сфероидальных координатах

$$\hat{\Lambda} = \hat{M} + \frac{R\sqrt{\mu_0}}{\hbar}\hat{\Omega}^{(s)}$$

собственной функцией которого является сфероидальный базис и выведены трехчленные рекуррентные соотношения для коэффициентов разложений сфероидального базиса по сферическому и параболическому базисам.

В конце следует отметить также, что обобщенная задача МИК-Кеплера при некоторых значениях квантового числа s и параметров λ_1 и λ_2 переходит в следующие системы:

- Задачу Кеплера-Кулона, при $s = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
- Обобщенную систему Кеплера-Кулона, при $s = 0$, а $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$.
- Потенциал Хартман, при $s = 0$, а $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.
- Задачу МИК-Кеплера, при $s \neq 0$, а $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

В §2 показано, что обобщенная задача МИК-Кеплера (11) дуальна четырехмерному двойному сингулярному осциллятору с гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu_0}\frac{\partial^2}{\partial u_\mu^2} + \frac{\mu_0\omega^2 u^2}{2} + \frac{c_1}{u_0^2+u_1^2} + \frac{c_2}{u_2^2+u_3^2}, \qquad (12)$$

и, что преобразованием дуальности является обобщенная версия преобразования Кустаанхеймо-Штифеля (KS-преобразование)

$$x + iy = (u_0 + iu_1)(u_2 + iu_3), \quad z = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \gamma = \frac{i}{2}\ln\frac{(u_0 - iu_1)(u_2 + iu_3)}{(u_0 + iu_1)(u_2 - iu_3)}$$

с анзацом $s \to -i\,\partial/\partial\gamma$ и со связами $\epsilon = 4e^2$, $E = -\mu_0\omega^2/8$, $c_i = 2\lambda_i$. В §3 приведены некоторые полезные формулы из теории KS -преобразования. В §4.1 показано, что переменные в уравнение Шредингера для четырехмерного двойного сингулярного осциллятора разделяются в эйлеровых координатах

$$u_0 + iu_1 = u\cos\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \qquad u_2 + iu_3 = u\sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}},$$

где $u \in [0,\infty), \beta \in [0,\pi], \alpha \in [0,2\pi), \gamma \in [0,4\pi)$, и, что эйлеровый базис является собственной функцией системы коммутирующих операторов $\widehat{H}, \hat{A}, \hat{L}_3, \widehat{L'}_3$, т.е. имеют место следующие спектральные задачи:

$$\widehat{H}\,\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2) = \hbar\omega(N+\delta_1+\delta_2+2)\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2),$$

$$\hat{A}\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2) = \left(L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\left(L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}+1\right)\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2),$$

$$\hat{L}_3\,\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2) = -i\frac{\partial\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2)}{\partial\alpha} = M\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2),$$

$$\widehat{L'}_3\,\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2) = -i\frac{\partial\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2)}{\partial\gamma} = M'\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2),$$

где

$$\hat{A} = \hat{L}^2 + \frac{\mu_o}{\hbar^2}\left(\frac{c_1}{1+\cos\beta}+\frac{c_2}{1-\cos\beta}\right).$$

Найдено явное выражение волновой функции четырехмерного двойного сингулярного осциллятора в эйлеровых координатах и она имеет вид:

$$\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2) = R_{NL}(u;\delta_1,\delta_2)Z_{LMM'}(\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2),$$

где

$$R_{NL}(u;\delta_1,\delta_2) = C_{NL}(\delta_1,\delta_2)(au)^{2L+\delta_1+\delta_2}e^{-\frac{a^2u^2}{2}}F\left(-\frac{N}{2}+L;2L+\delta_1+\delta_2+2;a^2u^2\right),$$

$$Z_{LMM'}(\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2) = \overline{N}_{LMM'}(\delta_1,\delta_2)\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{M_1}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{M_2}P_{L-M_+}^{(M_2,M_1)}(\cos\beta)e^{iM\alpha}e^{iM'\gamma}.$$

Здесь $a = \sqrt{\mu_0\omega/\hbar}, M_{1,2} = |M \pm M'| + \delta_{1,2} = \sqrt{(M\pm M')^2 + 2\mu_0 c_{1,2}/\hbar^2}$, а

$$M_\pm = \frac{|M+M'|\pm|M-M'|}{2},$$

$$C_{NL}(\delta_1,\delta_2) = \frac{a^2\sqrt{2}}{\Gamma(2L+\delta_1+\delta_2+2)}\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+L+\delta_1+\delta_2+2\right)}{\left(\frac{N}{2}-L\right)!}},$$

$$\overline{N}_{LMM'}(\delta_1,\delta_2) = (-1)^{\frac{M-M'+|M-M'|}{2}}\sqrt{\frac{(2L+\delta_1+\delta_2+2)(L-M_-)!\Gamma(L+M_++\delta_1+\delta_2+1)}{16\pi^2\Gamma(L+M_-+\delta_1+1)\Gamma(L-M_-+\delta_2+1)}}.$$

В §4.2 решено уравнение Шредингера для четырехмерного двойного сингулярного осциллятора в двойных полярных координатах $\rho_1,\rho_2 \in [0,\infty)$, $\varphi_1,\varphi_2 \in [0,\ 2\pi)$

$$u_0 + iu_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \qquad u_2 + iu_3 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$$

найдены волновые функции, которые имеют вид

$$\psi_{N_1N_2p_1p_2}(\rho_1,\rho_2,\varphi_1,\varphi_2;\bar{\delta}_1,\bar{\delta}_2) = \frac{1}{2\pi}\Phi_{N_1p_1}(a^2\rho_1^2;\bar{\delta}_1)\Phi_{N_2p_2}(a^2\rho_2^2;\bar{\delta}_2)e^{ip_1\varphi_1}e^{ip_2\varphi_2},$$

где $\bar{\delta}_a = \sqrt{p_a^2 + 2\mu_0 c_a/\hbar^2}$, $a = 1,2$, N_1, N_2 целые неотрицательные числа, а $p_1, p_2 = 0, \pm1, \pm2, \dots$ и

$$\Phi_{N_ap_a}(x;\bar{\delta}_a) = \sqrt{\frac{2\Gamma(N_a+|p_a|+\bar{\delta}_a+1)}{(N_a)!}}\frac{ae^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{|p_a|+\bar{\delta}_a}{2}}}{\Gamma(|p_a|+\bar{\delta}_a+1)}F(-N_a;|p_a|+\bar{\delta}_a+1;x).$$

Далее, найдено явное выражение добавочного интеграла движения

$$\widehat{\Omega} = \frac{\hbar}{4\mu_0\omega}\left(\frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial u_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\right) + \frac{\mu_0\omega}{4\hbar}(u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) + $$
$$+ \frac{1}{2\mu_0\hbar\omega}\left(\frac{c_1}{u_0^2 + u_1^2} - \frac{c_2}{u_2^2 + u_3^2}\right)$$
и показано, что имеет место следующая спектральная задача
$$\widehat{\Omega}\,\psi_{N_1N_2p_1p_2} = \left(N_1 - N_2 + \frac{|p_1| - |p_2| + \overline{\delta}_1 - \overline{\delta}_2}{2}\right)\psi_{N_1N_2p_1p_2}.$$
В конце этого подпараграфа установлено, что волновые функции четырехмерного двойного сингулярного осциллятора, с точностью до постоянного множителя, можно получить из сферического и параболического базисов обобщенной задачи МИК-Кеплера соответственно, с помощью следующих замен квантовых чисел:

- для эйлерового базиса $n \to \frac{N}{2} + 1, j \to L, m \to M, s \to M'$;
- для двойного полярного базиса $n_1 \to N_1, n_2 \to N_2, m \to \frac{p_1+p_2}{2}, s \to \frac{p_1-p_2}{2}$.

В §4.3 получены явные выражения коэффициентов связывающие между собой эйлеровый и двойной полярный базисы четырехмерного двойного сингулярного осциллятора, а в §4.4 с помощью этих разложений построен сфероидальный базис четырехмерного двойного сингулярного осциллятора. И, наконец, в §5 дается краткий перечень результатов полученных во второй главе.

В третьей главе рассмотрены топологически нетривиальные объекты высокой размерности, а именно, пятимерная $SU(2)$ -монополь Янга-Кулона и D -мерная альтернативная модель сферического осциллятора Хиггса. §1 посвящен преобразованию Гурвица и Кулон-осцилляторной аналогии. Показано, что радиальное уравнение Шредингера для D –мерного ($D \geq 2$) изотропного осциллятора
$$\frac{d^2R}{du^2} + \frac{D-1}{u}\frac{dR}{du} - \frac{L(L+D-2)}{u^2}R + \frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(E - \frac{\mu_0\omega^2u^2}{2}\right)R = 0 \qquad (13)$$
после подстановки $r = u^2$ переходит в уравнение
$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{l(l+d-2)}{r^2}R + \frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)R = 0, \qquad (14)$$
где $d = D/2 + 1, l = L/2,$ а $\varepsilon = -\mu_0\omega^2/8$, $\alpha = E/4$.Если $D - 2,4,6,8,...$то $d = 2,3,4,5,...$ то уравнение (14) по форме совпадает с радиальным уравнением d- мерной задачи Кеплера-Кулона. Условие $r = u^2$ в декартовых координатах имеет вид
$$\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{d-1}^2} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{D-1}^2, \qquad (15)$$
которое называют тождеством Эйлера. Согласно теореме Гурвица [75], если x_i $(i = 0,1,\dots,d-1)$ есть билинейная комбинация u_μ $(\mu = 0,1,\dots,D-1)$, то тождество Эйлера (15) справедлива только для следующих пар чисел $(D,d) = (1,1),(2,2),(4,3),(8,5)$. Преобразование $(D,d) = (1,1)$ связывает задачу линейного осциллятора с задачей одномерного кулоновского аниона. Преобразование $(D,d) = (2,2)$ есть известное из небесний механики преобразование Леви-Чивита, и является преобразование дуальности, которое задачу кругового осциллятора переводит в задачу двумерного аниона.

Преобразование $(D, d) = (4,3)$ в небесной механике называют преобразованием Кустаанхеймо-Штифеля и оно связывает четырехмерный изотропный осциллятор со связью с задачей атома водорода. Наконец, преобразование Гурвица, которое соответствует случаю $(D, d) = (8,5)$, переводит задачу о восьмимерном изотропном осцилляторе в пятимерную задачу Кеплера-Кулона. В §2 показано, что опреобразование Гурвица

$$\begin{gathered}
x_0 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2, \\
x_1 = 2(u_0 u_4 + u_1 u_3 - u_2 u_6 - u_3 y_7), \\
x_2 = 2(u_0 u_5 - u_1 u_4 + u_2 u_7 - u_3 y_6), \\
x_3 = 2(u_0 u_6 + u_1 u_7 + u_2 u_4 + u_3 y_5), \\
x_4 = 2(u_0 u_7 - u_1 u_6 - u_2 u_5 + u_3 y_4)
\end{gathered}$$

дополненное следующими, не зависящими от координат x_j, тремя углами

$$\begin{gathered}
\alpha_T = \frac{i}{2} \ln \frac{(u_4 - iu_5)(u_6 + iu_7)}{(u_4 + iu_5)(u_6 - iu_7)} \in [0, 2\pi), \\
\beta_T = 2arctan \left(\frac{u_4^2 + u_5^2}{u_6^2 + u_7^2} \right)^{\frac{1}{2}} \in [0\,, \pi], \\
\gamma_T = \frac{i}{2} \ln \frac{(u_4 + iu_5)(u_6 + iu_7)}{(u_4 - iu_5)(u_6 - iu_7)} \in [0, 4\pi),
\end{gathered}$$

уравнение Шредингера для восьмимерного изотропного осциллятора переводит в уравнение

$$\frac{1}{2\mu_0} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} - \hbar A_j^{a(+)} \hat{T}_a \right)^2 \psi + \frac{\hbar^2}{2\mu_0 r^2} \hat{T}^2 \psi - \frac{e^2}{r} \psi = \varepsilon \psi, \qquad (16)$$

которое описывает связанную систему, состоящая из пятимерного $SU(2)$-монополя Янга и изоспиновой частицы. Здесь $\hat{T}_a$ $(a = 1,2,3)$ - генераторы группы $SU(2)$, а триплет пятимерных вектор-потенциалов $\vec{A}^{a(+)}$ имеет вид

$$\begin{gathered}
\vec{A}^{1(+)} = \frac{1}{r(r - x_0)} (0, -x_4, x_3, -x_2, x_1), \\
\vec{A}^{2(+)} = \frac{1}{r(r - x_0)} (0, -x_3, -x_4, x_1, x_2), \\
\vec{A}^{3(+)} = \frac{1}{r(r - x_0)} (0, x_2, -x_1, -x_4, x_3).
\end{gathered}$$

В §3 приведены явные выражения волновых функций $SU(2)$-монополя Янга-Кулона в пятимерных сферических и параболических координатах как для дискретного, так и непрерывного спектра. В §4 нами рассмотрена квантовомеханическая задача рассеяния заряженных частиц в поле $SU(2)$- монополя Янга-Кулона и для дифференциального сечения рассеяния получена формула

$$d\sigma = \frac{(1 + k^2 r_0^2 T^2)[1 + k^2 r_0^2 (T+1)^2]}{k^8 r_0^4 (1 + \cos\theta)^4} d\Omega\,,$$

которая, как и все полученные формулы для $SU(2)$- монополя Янга-Кулона при $T = 0$ переходят в соответствующие формулы для пятимерной задачи Кеплера-Кулона. В §5 нами рассмотрена альтернативная модель сферического осциллятора Хиггса, которая на D-мерной сфере определяется потенциалом

$$V_S^D = 2\omega^2 r_0^2 \frac{r_0 - x_0}{r_0 + x_0},$$

а на D -мерном двухполосном гиперболоиде потенциалом

$$V_S^D = 2\omega^2 r_0^2 \frac{x_0 - r_0}{x_0 + r_0},$$

где x_0 и x_μ $(\mu = 1,2,\dots,D)$ эвклидовые координаты объемяющего пространства $\mathbb{R}^{D+1}$, причем $x_0^2 + x_\mu^2 = r_0^2$ для D-мерной сферы и $x_0^2 + x_\mu^2 = r_0^2$ для D -мерного двухполостного гиперболоида. (Здесь мы пользуемся системой единиц в которой приведенная масса m и постоянная Планка $\hbar$ определены следующим образом: $m = \hbar = 1.$) На D-мерной сфере квазирадиальная волновая функция альтернативной модели сферического осциллятора с точностью до постоянной нормировки имеет вид

$$R_{n_r L\nu}^D(\chi) = \left(\sin\frac{\chi}{2}\right)^L \left(\cos\frac{\chi}{2}\right)^{\nu - \frac{D}{2}+1} {}_2F_1\left(-n_r, n_r + L + \nu + \frac{D}{2};\ L + \nu + \frac{D}{2}; \frac{1+\cos\chi}{2}\right),$$

а энергетический спектр определяется выражением

$$E_{ND}^s = \frac{1}{8r_0^2}\left[(N+1)(N+D) + (2\nu - 1)\left(N + \frac{D}{2}\right) + L(L+D-2) - \frac{D}{2}(D-1)\right],$$

где $N = 0,1,2\dots$ главное квантовое число, а

$$\nu = \sqrt{\left(L + \frac{D}{2}\right)^2 + 16\omega^2 r_0^4}.$$

На D -мерном двухполостном гиперболоиде показано, что задача осцилляторе описывается модефицированным уравнением Пешля-Теллера и в отличие от задачи на сфере, которая иммет только дискретный спектр, на двухполостном гиперболоиде энергетический спектр принимает как дискретные, так и непрерывние значения. Энергетический спектр альтернативной модели осциллятора на D -мерном двухполостном гиперболоиде иммет вид:

$$E_{ND}^H = \frac{1}{8r_0^2}\left[(2\nu - 1)\left(N + \frac{D}{2}\right) - N(N+D-1) - L(L+D-2) + \frac{D}{2}(D-1)\right].$$

Здесь N главное квантовое число, и связанные состояния возможны лишь для следующих значений главного квантового числа $0 \le N \le [\nu - D/2]$,

где $[\nu - D/2]$ это целое значение числа $\nu - D/2$. Квазирадиальная функция имеет вид:

$$R_{NL\nu}^H(\tau) = \left(\sinh\frac{\tau}{2}\right)^L \left(\cosh\frac{\tau}{2}\right)^{\nu - \frac{D}{2}+1} {}_2F_1\left(-n_r, n_r + L + \nu + \frac{D}{2};\ L + \nu + \frac{D}{2}; \frac{1+\cosh\tau}{2}\right).$$

В §6 перечислены основные результаты полученные в этой главе и обозначены задачи, в которых можно применить эти результаты.

В заключение перечислены основные результаты, полученные в диссерации.

Основные результаты работы

1. Показано, что в суперинтегрируемой системе МИК-Кеплера имеет место линейный эффект Штарка и, что постоянное однородное электрическое поле полностью снимает вырождение энергетических уровней по азимутальному квантовому числу.

2. Показано, что обобщенная задача МИК-Кеплера дуальна четырехмерному двойному сингулярному осциллятору и, что преобразованием дуальности является обобщенная версия преобразования Кустаанхеймо-Штифеля. Установлено соответствия между квантовыми числами обобщенной задачи МИК-Кеплера и четырехмерного двойного сингулярного осциллятора.
3. Показано, что переменные в уравнение Шредингера для четырехмерного двойного сингулярного осциллятора разделяются в эйлеровой, двойной полярной и сфероидальной системах координат. Получены явные выражения волновых функций этой системы в эйлеровых и двойных полярных координатах. Найдено, что коэффициенты разложения двойного полярного базиса по эйлеровому базису и обратно выражаются через коэффициенты Клебша-Гордана группы $SU(2)$ аналитически продолженные на реальные значения аргументов. Получен интеграл движения, ответственный за разделение переменных в сфероидальной системе координат и выведены трехчленные рекуррентные соотношения, которым подчиняются коэффициенты разложений сфероидального базиса четырехмерного двойного сингулярного осциллятора по эйлеровому и двойному полярному соответственно.
4. Решена квантовомеханическая задача рассеяния заряженных частиц в поле $SU(2)$-монополя Янга-Кулона и получена формула для дифференциального сечения рассеяния.
5. Рассмотрена модель альтернативной модели сферического осциллятора Хиггса, найдены квазирадиальные волновые функции и энергетические спектры альтернативной модели сферического осциллятора на D-мерной сфере и на D-мерном двухполостном гиперболоиде.

Список опубликванных работ

[1] Л.Г. Мардоян, А.П. Нерсесян, М.Г. Петросян. *Эффект Штарка в системе заряд-дион*. ТМФ, **140**, 78-85, (2004).

[2] L.G. Mardoyan and M.G. Petrosyan. *Four-Dimensional Singular Oscillator and Generalized MIC-Kepler System*. ЯФ.,**70**, 600-603, (2007).

[3] M.G. Petrosyan. *Four-Dimensional Double-Singular Oscillator*. ЯФ, **71**, 1121-1128, (2008).

[4] Л.Г. Мардоян, М.Г. Петросян. *Рассеяние электронов на $SU(2)$- монополе Янга-Кулона*. Изв. НАН Армении, Физика, **39**, 283-287, (2004).

[5] Л.Г. Мардоян, М.Г. Петросян. *Альтернативная модель сферического осциллятора*. Изв. НАН Армении, Физика, 48,105-110, (2013).

Պետրոսյան Մարա Գասիկի
Տոպոլոգիապես ոչ զրոյական որոշ օբյեկտների ուսումնասիրությունը քվանտային մեխանիկայի շրջանակներում

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Ատենախոսությունը նվիրված է ոչ ռելյատիվիստական քվանտային մեխանիկայի Շրջանակներում տոպոլոգիապես ոչ զրոյական որոշ ինտեգրվող համակարգերի ուսումնասիրությանը: Մինչև անցյալ դարի 80-ական թվականների սկիզբը տոպոլոգիապես ոչ զրոյական օբյեկտների, ինչպիսին են անիոնը դիոնը (մասնիկ, որի սպինը [0, 1] միջակայքում կարող է ունենալ ցանկացած կոտորակային արժեք), մագնիսական մոնոպոլը և դիոնը (մասնիկ, որը օժտված է ինչպես էլեկտրական, այնպես էլ մագնիսական լիցքով), գեներացիան հանդիսանում էր դաշտի քվանտային տեսության մենաշնորհը: Ոչ ռելյատիվիստական քվանտային մեխանիկայի շրջանակներում վերոնշյալ տոպոլոգիապես ոչ զրոյական համակարգերի գեներացիան հիմնված է այսպես կոչված երկգծային ոչ բիյեկտիվ ձևափոխությունների վրա: Այդ ձևափոխությունների էությունը կայանում է նրանում, որ երկու, երեք և ութ չափանի իզոտրոպ օսցիլյատորներից համապատասխանաբար ստացվում է երկչափ անիոն (Լևի- Չիվիտայի ձևափոխություն), ՄԻԿ-Կեպլերի կամ լիցք-դիոն ինտեգրվող համակարգ (Կուստաանհեյմո-Շտիֆելի ձևափոխություն) և Յանգ-Կուլոնի $SU(2)$ մոնոպոլ (Հուրվիցի ձևափոխություն): Տոպոլոգիապես ոչ զրոյական վերոնշյալ օբյեկտների գեներացիան երկու, երեք և ութ չափանի իզոտրոպ օսցիլյատորներից ընդունված է անվանել դիոն-օսցիլյատորային դուալություն, իսկ հատուկ դեպքերում, երբ երկու, երեք և ութ չափանի իզոտրոպ օսցիլյատորներից գեներացվում են երկչափ, եռաչափ և հինգ չափանի Կեպլեր-Կուլոնի խնդիրները, անվանում են կուլոն օսցիլյատորային դուալություն կամ կուլոն-օսցիլյատորային անալոգիա:

Ատենախոսության մեջ դիտարկվող օբյեկտները հանդիսանում են ինտեգրվող համակարգերի ենթադաս, որոնց ընդունված է անվանել սուպերինտեգրվող համակարգեր: N ազատության աստիճան ունեցող դասական համակարգը ըստ Լիուվիլի հանդիսանում է լրիվ ինտեգրվող, եթե հայտնի են N ֆունկցիոնալ անկախ շարժման ինտեգրալներ, որոնց համար Պուասոնի փակագծերը զրո են: Քվանտային մեխանիկայում համակարգը կոչվում է ինտեգրվող, եթե գոյություն ունեն N-1 հատ հանրահաշվորեն անկախ օպերատորներ, որոնք կոմուտատիվ եմ ինչպես համիլտոնիանի, այնպես էլ միմյանց հետ: Սուպերինտեգրվող համակարգերի համար անկախ շարժման ինտեգրալների թիվը կարող է լինել ինչպես 2N-1, այնպես 2N-2:

Առաջին դեպքում համակարգը անվանում են առավելագույն, իսկ երկրորդ դեպքում նվազագույն սուպերինտեգրվող համակարգեր: Ընդ որում լրացուցիչ շարժման

ինտեգրալները պարտադիր չէ որ կոմուտատիվ լինեն միմյանց հետ: Սուպերինտեգրվող համակարգերը ունեն շատ կարևոր մի հատկություն՝ Համիլտոն Յակոբիի և Շրեդինգերի հավասարումները փոփոխականների բաժանման մեթոդով ճշգրիտ լուծվում են մի քանի օրթոգոնալ կոորդինատային համակարգերում:

Ատենախոսության մեջ ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

Ցույց է տրվել, որ սուպերինտեգրվող ՄԻԿ-Կեպլերի համակարգում տեղի ունի Շտարկի գծային էֆեկտ և, որ հաստատուն համասեռ էլեկտրական դաշտը ամբողջությամբ վերացնում է էներգետիկ մակարդակների այլսեռումը ըստ ազիմուտալ քվանտային թվի:

Ցույց է տրվել, որ ընդհանրացված ՄԻԿ-Կեպլերի խնդիրը դուալ է քառաչափ կրկնակի սինգուլյար օսցիլյատորին և, որ դուալության ձևափոխությունը հանդիսանում է Կուստաանհեյմո-Շտիֆելի ձևափոխության ընդհանրացված տարբերակը: Հաստատվել է համապատասխանություն ընդհանրացված ՄԻԿ-Կեպլերի խնդրի և քառաչափ կրկնակի սինգուլյար օսցիլյատորի քվանտային թվերի միջև: Ցույց է տրվել, որ քառաչափ կրկնակի սինգուլյար օսցիլյատորի Շրեդինգերի հավասարման մեջ փոփոխականները բաժանվում են էյլերյան, կրկնակի բևեռային և սֆերոիդալ կոորդինատներում: Ստացվել են այդ համակարգի ալիքային ֆունկցիաների բացահատ արտահայտությունները են էյլերյան և կրկնակի բևեռային կոորդինատներում: Գտնվել է, որ կրկնակի բևեռային բազիսը ըստ էյլերյան բազիսի և հակադարձ վերլուծության գործակիցները արտահայտվում են SU(2) խմբի Կլեբշ-Գորդանի գործակիցներով, որոնց արգումենտներն անալիտիկորեն շարունակված են իրական արժեքների բազմության վրա: Ստացվել է շարժման ինտեգրալը, որը պատասխանատու է սֆերոիդալ կոորդինատներում փոփոխականների բաժանման համար և դուրս են բերվել եռանդամ ռեկուրենտ առընչություններ, որոնց բավարարում են քառաչափ կրկնակի սինգուլյար օսցիլյատորի սֆերոիդալ բազիսը ըստ էյլերյան և կրկնակի բևեռային բազիսների վերլուծության գործակիցները:

Լուծված է լիցքավորված մասնիկների ցրման քվանտամեխանիկական խնդիրը Յանգ-Կուլոնի $SU(2)$մոնոպոլի դաշտում և ստացված է ցրման դիֆերենցիալ կտրվածքի բանաձևը:

Դիտարկված է Հիգսի սֆերիկ օսցիլյատորի մոդելի ալտերնատիվ մոդելը, գտնված են սֆերիկ օսցիլյատորի ալտերնատիվ մոդելի քվազիշառավղային ալիքային ֆունկցիաները և էներգետիկ սպեկտրները D-չափանի սֆերայի և D –չափանի երկխոռոչ հիպերբոլոիդի վրա:

Petrosyan Mara Gasik

Study of some topographically non-trivial objects within the framework of quantum mechanics

S U M M A R Y

The thesis is dedicated to the study of some topographic non-trivial integral systems within the framework of non-relativistic quantum mechanics. Up to the early 80s of the last century, the generation of topologically non-trivial objects, such as the anyon and dyon (a particle whose spin can have any fractional value in the range [0.1]), magnetic monopole and a dyon (a particle that has both electrical and magnetic charge) was considered as monopoly of quantum field theory. The generation of above-mentioned topologically non-trivial systems within the framework of non-relativistic quantum mechanics is based on so called non-bijective bilinear transformations. The essence of those transformations is that two-, three-, and eight-dimensional isotropic oscillators transform into two-dimensional anyon (Levi- Civita transformation), MIC-Kepler or charge-dyon integrated system (Kustaanheimo-Stiefel transformation) and Yang-Coulomb SU (2) monopole (Hurwitz transformation), respectively. The generation of above-mentioned topologically non-trivial objects from two-, three-, and eight-dimensional isotropic oscillators is generally called dyon-oscillator duality, and in specific cases, when two-, three-, and eight-dimensional isotropic oscillators generate two-, three-, and five-dimensional Kepler-Coulomb problems, they are called Coulomb-oscillator duality or Coulomb-oscillator analogy.

The objects studied in given thesis are a subclass of integrated system, and they are generally called super-integrated systems. A classical system with an N degree of freedom, according to Liouville, is fully integrated, if there are N functionally independent integrals of motion, having zero Poisson brackets. In quantum mechanics, the system is called integrated if there is a N-1 number of algebraically independent operators which are commutative to both Hamiltonian system and in respect to each other. For super-integrated systems the number of independent motion integrals can be both 2N-1 and 2N-2. For the first case, the system can be referred to as maximum, and in the second case, minimum super-integrated systems. Moreover, additional motion integrals are not necessarily commutative in respect to each other. Super-integrated systems have a very important feature: the equations of Hamilton–Jacobi and Shrewdinger are precisely solved in several orthogonal coordinate systems by the method of variable splitting.

The main results of this thesis are as follows:

1. It is shown that there is a linear Stark effect in a superintegrable MIC-Kepler system, and a constant homogeneous electric field completely removes the degeneracy of energy levels according to the azimuthal quantum number.
2. It is shown that the generalized MIC-Kepler problem is dual to the four-dimensional double-singular oscillator, and the duality transformation is a generalized version of the Kustaanheimo-Stiefel transformation. A correspondence is established between the

quantum numbers of the generalized MIC-Kepler problem and the four-dimensional double-singular oscillator.

3. It is shown that the variables in the Schrödinger equation for the four-dimensional double-singular oscillator are separated in Eulerian, double polar and spheroidal coordinate systems. Explicit expressions of the wave functions of this system in Eulerian and double polar coordinates are obtained. It is found that the coefficients of the decomposition of the double polar basis in terms of the Eulerian basis and vice versa are expressed in terms of the Clebsch-Gordan coefficients of the $SU(2)$ group, whose arguments are analytically extended to the number of real values. The integral of motion responsible for the separation of variables in a spheroidal coordinate system, is obtained, and three-term recurrence relations are derived, being complied with by the coefficients of the expansioan of the spheroidal basis of the four-dimensional double-singular oscillator in terms of the Eulerian and double polar basis, respectively.
4. The quantum-mechanical problem of scattering of charged particles in the field of $SU(2)$ Yang-Coulomb monopole is solved and a formula is derived for the differential scattering cross-section.
5. An alternative model of Higgs spherical oscillator is considered; the quasiradial wave functions and energy spectra of the alternative model of a spherical oscillator on a D-dimensional sphere and D -dimensional two-sheeted hyperboloid are found.