МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

МАРА ПЕТРОСЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ В РАМКАХ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Л.Г. Мардоян

ЕРЕВАН 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

До недавного времени генерация таких топологически не тривиальных объектов какими являются анионы, монополи и дионы являлась прерогативой квантового теория поля [1-27]. Напомним, что дион это гипотетическая частица введенная Швингером [2], которая в отличие монополя Дирака [1] наделена не только магнитным, но электрическим зарядом, а анион – частица введенная Вилчеком [15], которая наделена спином принимающее любое дробное значение лежащее в интевале [0, 1]. Однако, начиная с 80-ых годов прошлого, двадцатого века, после появления работ [28-72], в которых предлогались методы генерации выше названных топологически не тривиальных объектов уже в рамках нерелятивисткой квантовой механики. Методы, предложенные в этих работах, основаны на, так называемых, билинейно небиективных преобразованиях, которые принято называть преобразваниями Леви-Чивиты [73], Кустаанхеймо-Штифеля [74] и Гурвица [75]. Суть этих методов заключается в том, что из двух-, трех- и восьмимерного изотрпного осциллятора с помощью соответствующего билинейного небиективного преобразования генерируется либо двумерный анион (преобразование Леви-Чивиты) [53], либо система заряд-дион (преобразование Кустаанхеймо-Штифеля) [42, 45, 46], либо *SU(2)* монополь Янга-Кулона (преобразование Гурвица) [49, 52]. Все эти теории, и генерация двумерного аниона, и генерация *U(1)* диона с монополем Дирака или как принято называть система МИК-Кеплера, и, наконец, генерация *SU(2)* монополя Янга-Кулона, можно считать, что являются аналитическим продолжением работ [35, 76-83], в которых впервые, в рамках квантовой механики, была установлена связь между волновыми функциями атома водорода и четырехмерного изотропного осциллятора.

Генерация вышеназванных топологически не тривиальных объектов из двумерного, четырехмерного и восьмимерного изотропного осциллятора принято называть дион-осцилляторной дуальностью [59], а в специальных частных случаях, когда из двух-, трех- и восьмимерного изотрпного осциллятора генерируются двумерный, трехмерный и пятимерный задачи Кеплера-Кулона принято называть кулон-осцилляторной дуальностью или кулон-осцилляторной аналогией.

В классической механике оба потенциала, как осцилляторный, так и потенциал Кеплера-Кулона отличаются от других потенциалов тем, что при финитном движении частицы, согласно теореме Бертрана [84], только в этих полях траектории частицы являются замкнутыми кривыми. Этот факт (замкнутость траектории) в квантовой механике оборачивается случайным вырождением энергетических спектров по орбитальному квантовому числу l. Это свойство связано с наличием группы скрытой симметрии, т.е.

симметрии, более высокой, чем группа геометрической симметрии системы, которая непосредственно связана с симметрией физического пространства. Примером последней является группа трехмерных вращений для уравнения Шредингера с любым центрально-симметричным потенциалом.

Развитие теории систем со скрытой симметрией можно сяитать, что начинается с работы Лапласа [85], в которой было показано, что в задаче Кеплера наряду с моментом импульса сохраняется еще одна векторная величина, по модулю равная эксцентриситету эллипса, лежащая в плоскости орбиты и направленная по большой оси эллипса. Именно этот добавочный интеграл движения является причиной замкнутости траекторий движения в кеплеровской задаче. Лапласовский добавочный интеграл движения со значительным опозданием был переоткрыт Рунге [86] и вслед за ним и Ленцем [87]. Обобщение интеграла движения Лапласа-Рунге-Ленца на случай квантовой механики было использовано Паули [88] для вычисления энергетического спектра атома водорода [89]. Объяснение случайного вырождения энергетического спектра атома водорода привело Фока к понятию о скрытой симметрии атома водорода. Фок показал [90, 91], что уравнение Шредингера атома водорода при переходе к импульсному представлению и стереографическом проецировании переходит в интегральное уравнение описывающий свободное движение частицы на трехмерной сфере и инвариантное относительно группы четырехмерных вращений $O(4)$. В исходном уравнении Шредингера эта симметрия не видна и поэтому она была названа скрытой, или динамической симметрией. Эта $O(4)$ симметрия, содержащая в качестве подгруппы группу трехмерных вращений $O(3)$ объясняет, почему в кулоноском поле наряду с орбитальным моментом должен существовать еще один векторный интеграл движения. Связь между подходами Паули и Фока была установлена Баргманом [92]. Он показал, что нормированный должным образом вектор Лапласа-Рунге-Ленца-Паули $\hat{A}_i$ и оператор орбитального момента $\hat{l}_i$ вместе подчиняются коммутационным соотношениям для алгебры $o(4)$. Для непрерывного спектра вместо трехмерной сферы нам приходиться иметь дело с трехмерным гипеболоидом, а вместо конечномерных превставлений группы $O(4)$ - с бесконечноменрными предсталениями группы Лоренца $O(3,1)$ [93, 94, 95]. Скрытая симметрия многомерной $(n > 3)$ задачи Кеплера-Кулона рассматривалась в работах [96, 97], а группа динамической симметрии одномерной задачи Кеплера-Кулона впервые была найдена в работах [98, 99]. Отличительной чертой задачи МИК-Кеплера является в том, что группа скрытой симметрии этой системы полностью совпадает с группой скрытой симметрии задачи Кеплера-Кулона [100, 101]. Для изотропного гармонического осциллятора, кроме

углового момента $\hat{\vec{l}}$, сохраняется тензорная величина $\hat{T}_{ik} = \hat{p}_i\,\hat{p}_k + x_i\,x_k$ [102]. Случайное вырождение энергетического спектра изотропного осциллятора в терминах группы скрытой симметрии $U(n)$ было объяснено также в работах [103, 104, 105].

Замечательным является тот факт, что связь между группами скрытой симметрии задачи МИК-Кеплера $O(n+1)$ и изотропного осциллятора $U(n)$ приводит в квантовой механике к понятию дион-осцилляторной дуальности [59]. Дион-осцилляторная дуальность уравнения Шредингера заключается в следующем. Уравнение Шредингера для изотропного осциллятора имеет два параметра – энергия ε и циклическая частота ω. Квантование приводит к ограничению $\varepsilon = \hbar\omega\left(N + D/2\right)$, где $N = 0,1,2,\ldots$, а D - размерность конфигурационного пространства изотропного осциллятора. Если ω фиксирована, тогда квантуется энергия ε, и это стандартная ситуация. Представим теперь, что фиксирована энергия ε. Тогда квантаванию подлежит циклическая частота ω и мы находимся в нестандартной сиуации. Вопрос в том, что нестандартная ситуация соответствует какой-то физике, т.е. возможно ли найти такое преобразование, которое изотропный осциллятор переводит в физическую систему с константой связи α, как функция от ε, и с энергией E, зависящий от ω. Если такое преобразование существует, то мы можем утверждать, что ”нестандартный осциллятор” идентичен с этой физической системой, а исходный осциллятор и конечная система дуальны друг к другу. Как ”стандартный” так и ”нестандартный” режимы взаимно исключающие, исходный осциллятор и конечная система ”заряд-дион” дуальны друг к другу, и этим объясняется значимость термина ”дион-осцилляторой дуальности”. Отметим также, что в исходной системе энегетический спектр принимает только дискретные значения, т.е. частица совершает финитное движение (в этих случаях обычно говорят, что мы имеем модель с конфайментом). Вообще говоря конечная система имеет как дискретный так и непрерывный спектр, т.е. в этой модели нет конфаймента. Однако, в отличие от исходной осцилляторной модели в конечной модели присутствуют монополи или дионы. Имеется некотрая аналогия между дион-осцилляторной дуальностью и дуальностью Зейберга-Виттена, согласно которой калибровочные теории с сильной связью эквивалентны теориям, в которых с одной стороны действует слабая связь, с другой – присутствуют топологически нетривиальные объекты в виде монополей и дионов [106].

Рассматриваемые в диссертасии системы являются подклассом интегрируемых систем и их принято называть суперинтегрируемыми [107]. Известно [108, 109], что классическая система с N степенями свободы является полностью интегрируемой в смысле Лиувилля

(или интегрируемой в квадратурах), если известны N функцианально независимых интегралов движения находящиеся в инволюции, т.е. для которых скобки Пуассона равны нулю. В квантовой механике систеиу называют интегрируемой, если известны $N-1$ алгебраически независимых операторов коммутирующие как с гамильтонианом системы, так и между собой. Для суперинтегрируемых систем число независимых интегралов движения может быть равно как $2N-1$ [110], так и $2N-2$ [111, 112, 113]. В первом случае систему называют максимально, а во втором – минимально суперинтегрируемой системой. Отметим также, что эти дополнительные интегралы движения не объязательно должны коммутировать между собой. Суперинтегрируемые системы обладают исключительно важным свойстом: они допускают разделение переменных в уравнениях Гамильтона-Якоби и Шредингера в нескольких ортогональных системах координат. Известно, что задача Кеплера-Кулона методом разделения переменных решается в четырех (сферческие, параболические, вытянутые сфероидальные и сфероконические), а изотропный осциллятор – в восьми (декартовые, цилиндрические, сферические, вытянутые сфероидальные, сплюснутые сфероидальные, эллиптические цилиндрические и эллипсоидальные) системах координат. С точки зрения физики важность разделения переменных в нескольких системах координат очевидна. В спектроскопических задачах водородоподобных систем используется сферическая система координат, при рассмотрении эффекта Штарка – параболическая система координат, а в двухцентровой задаче – вытянутые сфероидальные координаты. Таким образом, выбор конкретного базиса диктуется соображениями удобства и часто возникает необходимость в переходе от одного базса к другому. Первым межбазисным переходом можно считать известное разложение Рэлея, т.е. разложение плоской волны по сферическим волнам. В теории атома водорода первым межбазисным разложением является результат Стоуна [114], который получил разложение параболического базиса по сферическому базису в импульсном представлении. Далее, Парк [115], в рамках теоретико-группового метода, а Тартер [116] чисто аналитическим путем, получили результат Стоуна в конфигурационном пространстве. Представляя сфероидальный базис атома водорода в виде разложения по сферическому базису Коулсон и Джозеф задачу разложения свели к решению алгебраической системы однородных уравнений [117]. Разложение параболического базиса по сферическому базису в непрерывном спектре было рассмотрено Маюндаром и Безу [118]. Межбазисные разложения в изотропном осцилляторе впервые обсуждались в работах [119, 120], а дальше развивались в работах [121, 122, 123]. На примерах квантовых систем с кулоновским и осцилляторным взаимодействиями в работах [125-147] были разработаны эффективные методы вычисления коэффициентов межбазисных разложений (метод

асимптотик и ортогональность радиальных волновых функций по орбитальному моменту). Эти методы и полученные на их основе многие результаты теории межбазисных разложений простейших систем со скрытой симметрией собраны воедино в монографии Л.Г.Мардояна, Г.С.Погосяна, А.Н.Сисакяна и В.М.Тер-Антоняна [159], которая написана на основе работ авторов [32, 35, 59, 125-133, 138, 139, 141, 142, 144-158].

Последные годы возрос интетрес изучения суперинтегрируемых систем в пространствах постоянной кривизны. Исследование суперинтегрируемых систем в пространствах постоянной кривизны, как положительной, так и отрицательной, как и в эвклидовом пространстве, имеет достаточно богатую историю.

Впервые Шредингером была предложена модель суперинтегрируемой системы с гармоническим потенциалом $V(\chi;R)=-\frac{\alpha}{R}\cot\chi$ - решение уравнения Лапласа на трехмерной сфере $S^3(\chi,\theta,\varphi)$ с радиусом R, и которая является аналогом кулоновского потенциала. Шредингер в работах [160, 161, 162] пользуясь методом факторизации нашел энергетический спектр кулоновского потенциала на сфере $S^3(\chi,\theta,\varphi)$ и показал, что, как и в случае плоского пространства, имеет место полное вырождение энергетического спектра по орбитальному и азимутальному квантовым числам. Чуть позже Стивенсон [163] путем прямого решения уравнения Шредингера на трехмерной сфере $S^3(\chi,\theta,\varphi)$ повторил результат Шредингера и нашел энергетический спектр и ненормированную квазирадиальную волновую функцию атома водорода. В случае пространства отрицательной кривизны аналогичные результаты былы получены в работах Инфельда [164] и Инфельда и Шилда [165]. В 1979 году Хиггсом [166] была предложена модель (сферический осциллятор Хиггса), которая является аналогом трехмерного изотропного осциллятора на трехмерной сфере $S^3(\chi,\theta,\varphi)$ и былы изучены квантово-механические свойства этой модели. Далее, в работе [167] Лимоном была решена задача сферического осциллятора Хиггса в рамках классической механики. В этих работах, как Хиггсом (квантово-механическая задача), так и Лимоном (классическая задача), было показано, что вырождение энергетического спектра (замкнутость траекторий) сферического осциллятора Хиггса в трехмерном пространстве Лобачевского связано с существованием дополнительного интеграла движения, который является аналогом тензора Демкова [102]. В работах Курочкина и Отчика [168], и Курочкина, Отчика и Богуша [169] было показано, что случайное вырождение энергетического спектра по орбитальному моменту кулоновской задачи в трехмерном пространстве Лобачевского связано с наличием аналога вектора Лапласа-Рунге-Ленца-Паули. Однако, как оказалась, коммутационные соотношения для компонент операторов,

являющимся аналогами тензора Демкова и вектора Лапласа-Рунге-Ленца-Паули, вместе с компонентами углового момента имеют нелинейный характер, и следовотельно, не образают конечномерную алгебру Ли. Это и есть существенное различие кулоновской и осцилляторной задач на сфере (и гиперболоиде) от случая плоского пространства, когда в качестве группы скрытой симметрии выступают группы $SO(4)$ для атома водорода и $SU(3)$ - для изотропного осциллятора. Несмотря на указанные особенности, оказывается, что имеющиеся коммутационные соотношения все же достаточны для получения формулы энергетического спектра и кратности вырождения атома водорода и изотропного осциллятора на трехмерной сфере [166, 168]. Дальнейшее развитие кулоновской и осцилляторной задачи на сферах и гиперболоидах получили в работах [170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180] и нашли применение при построении могочастичной волновой функции [181], решении задачи двух центров с кулоновским взаимодействием [182], описании спектра кваркониев [183] и экситонов в квантовых точках [184].

В данной диссертации рассматриваются следующие суперинтегрируемые системы:

1. Максимально суперинтегрируемые системы:
   - четырехмерный и восьмимерный изотропные осцилляторы,
   - трехмерная задача МИК-Кеплера,
   - SU(2)-монополь Янга-Кулона.
2. Минимально суперинтегрируемые системы:
   - Обобщенная задача МИК-Кеплера,
   - альтернативная модель сферического осциллятора.

Диссертация написана на основе пяти работ [185-189], состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Вопросы, рассмотренные в диссертации, расположены по главам следующим образом.

Первая глава посвящена задаче МИК-Кеплера в однородном электрическом поле [185], которая и является основным результатом этой главы. Для решения выше поставленной задачи в первых двух параграфах этой главы приведены определение максимально суперинтегрируемой задачи МИК-Кеплера или системы заряд-дион и полная информация о сферическом и параболическом базисах задачи МИК-Кеплера. Для предоставления полной информации о задаче МИК-Кеплера в третьем параграфе приведены результаты полученные в работе [51], в которой пользуясь добавочным условием ортогональности радиальной волновой функции по орбитальному найдены как коэффициенты прямого разложения параболического базиса по сферическому базису системы заряд-дион, так и коэффициенты обратного разложения, т.е. разложения сферического базиса по параболическому базису

задачи МИК-Кеплера. В четвертом параграфе пользуясь мэжбазиысными разложениями парабола-сфера и сфера-парабола, полученные в третьем параграфе настоящей главы, построена сфероидальная волновая функция системы МИК-Кеплера. В пятом параграфе рассмотрен линейный эффект Штарка и показано, что постоянное однородное электрическое поле полностья снимает вырождение энергетических уровней задачи МИК-Кеплера по азимутальному квантовому числу. В шестом параграфе дается краткий анализ линейного эффекта Штарка для задачи МИК-Кеплера, являющимся основным результатом этой главы.

Вторая глава данной диссертации написана на основе работ [186, 187]. Эта глава посвящена некоторым аспектам минимально суперинтегрируемой модели предложенной Л.Г. Мардояном в работе [190], которая является обобщением задачи МИК-Кеплера. Эта динамическая система была названа обобщенной задачей МИК-Кеплера. С целью дальнейшего исследования обобщенной задачей МИК-Кеплера в первом параграфе этой главы приведены результаты полученные в работах [190, 191], в которых показано, что переменные в уравнение Шредингера для обобщенной задачи МИК-Кеплера разделяются в сферических, параболических и вытянутых сфероидальных координатах, найдены интегралы движения, отвечающие за разделение переменных в указанных системах координат и получены ортонормированные сферические и параболические волновые функции. Далее, пользуясь условием ортогональности радиальной волновой функции по орбитальному квантовому числу, найдены коэффициенты разложения связывающие между собой сферический и параболический базисы обобщенной задачи МИК-Кеплера и установлены трехчленные рекуррентные соотношения на коэффициенты разложений сфероидального базиса по сферическому и параболическому базисам обобщенной задачи МИК-Кеплера. В параграфах два и три, которые написаны на основе работы [186], показано, что обобщенная задача МИК-Кеплера дуальна четырехмерному двойному сингулярном осциллятору, и, что преобразованием дуальности является обобщенная версия KS-преобразования. В параграфе четыре, в основе которого лежит работа [187], найдены интегралы движения четырехмерного двойного сингулярного осциллятора, ответственные за разделение переменных в уравнение Шредингера в эйлеровых, двойных полярных и сфероидальных координатах. Получены волновые функции четырехмерного двойного сингулярного осциллятора, факторизованные в эйлеровых и двойных полярных системах координат. Детально изучены коэффициенты межбазного разложения между эйлеровым и двойным полярным базисами. Найдено, что коэффициенты разложения двойного полярного базиса по эйлеровому базису и обратно могут быть выражены через коэффициенты Клебша-Гордана для группы $SU(2)$, аналитически продолженные на реальные значения по своим индексам. Показано, что

коэффициенты разложения сфероидального базиса четырехмерного двойного сингулярного осциллятора в терминах эйлерового и двойного полярного базисов удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям, которые и генерируют сфероидальный базис четырехмерного двойного сингулярного осциллятора. В пятом парарграфе перечислены основные результаты полученные во второй главе.

В третьей главе нами рассмотрены задача рассеяния электронов в поле $SU(2)$ - монополя Янга-Кулона [188] и альтернативная модель сферического осциллятора Хиггса [189]. Для полноты изложения вначале этой главы приводятся результаты полученные ранее в работах [32, 47, 49, 52, 54, 60, 63, 64, 65], в которых рассмотрены как задача Кулон-осцилляторной дуальности, в следствие которого в рамках аналитического подхода с помощью обобщенной версии преобразования Гурвица из восьмимерного изотропного осциллятора сконструирована пятимерная связанная система, составленная из монополя Янга и изоспиновой частицы, скрепленных друг с другом $SU(2)$ и кулоновским взаимодействиями, названная $SU(2)$ - монополем Янга-Кулона, так и пятимерные базисы $SU(2)$ - монополя Янга-Кулона в пятимерных гиперсферических и параболических ситемах координат как в дискретном, так и непрерывном спектре. В четвертом параграфе третьей главы нами рассмотрена квантовомеханическая задача рассеяния заряженных частиц на $SU(2)$ - монополе Янга-Кулона и получена формула для дифференциального сечения рассеяния электронов в поле $SU(2)$ - монополем Янга-Кулона. И, наконец, в пятом параграфе нами рассмотрена альтернативная модель сферического осциллятора Хиггса. Найдены квазирадиальные волновые функции и энергетические спектры альтернативной модели сферического осциллятора на D-мерной сфере и на D-мерном двухполостном гиперболоиде. Показано, что энергетический спектр альтернативной модели сферического осциллятора на двухполостном гиперболоиде принимает как дискретные, так и непрерывние значения. В параграфе шесть перечислены основные результаты полученные в этой главе и обозначены задачи, в которых можно применить эти результаты.

.

Заключение диссертации содержит перечень выдвинутых к защите результатов.

Работы [185-189], составившие основу диссертации, докладывались на семинарах кафедры теоретической физики им. академика Г.С. Саакяна Ереванского государственного университета, Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований и на следующих международных конференциях:

- Second International Workshop on Superintegrable Systems in Classical and Quantum Mechanics, June 27 – July 1, 2005, Dubna, Russia;
- XII International Conference on Symmetry Methods in Physics, July 3 – 8, 2006, Yerevan, Armenia;
- XVII Colloquium on Intgrable Systems and Quantum Symmetries, June 14-16, 2007, Prague, Czech Republic.

В заключнии мне приятно выразить свою благодарность моему научному руководителю, доктору физико-математических наук Л.Г. Мардояну за руководство работой и за всемерную поддержку как в период учебы в аспирантуре, так и в период написнии данной диссертации.

Я также хочу поблагодарить моему соавтору, доктору физико-математических наук А.П. Нерсесяну, сотрудничество с которым было весьма познавательным и плодотворным.

Я искренно благодарна сотрудникам кафедры теоретической физики им. академика Г.С. Саакяна Э.В. Чубаряну, Р.М. Авакяну и Г.Г. Арутюнян за внимание и всемерную поддержку в период работы над диссертацией.

Глава 1

Задача МИК-Кеплера в одородном электрическом поле

1. Задача МИК-Кеплера

Суперинтегрируемая система МИК-Кеплера, или система заряд-дион, была построена Цванзигером [100], а потом была переоткрыта МакИнтошем и Кизнеросом [101]. Эта система описывается гамильтонианом

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2\mu_0}\left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}^{(\pm)}\right)^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2\mu_0 r^2} - \frac{e^2}{r}, \qquad (1.1.1)$$

где

$$\vec{A}^{(\pm)} = \frac{g}{r(r \mp z)}(\pm y, \mp x, 0). \qquad (1.1.2)$$

Здесь векторные потенциалы $\vec{A}^{(\pm)}$ соответствуют монополю Дирака [1] с магнитным зарядом

$$g = \frac{\hbar c s}{e}, \quad \text{где} \quad s = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \ldots,$$

и с осью сингулярности при $z > 0$ и $z < 0$ соответственно.

Легко заметить, что векторные потенциалы $\vec{A}^{(+)}$ и $\vec{A}^{(-)}$ связаны между собой калибровочным преобразованием

$$\vec{A}^{(-)} = \vec{A}^{(+)} + grad\, f, \quad \text{где} \quad f = 2g \arctan\frac{y}{x},$$

а напряженность магнитного поля созданное дионом имеет вид

$$\vec{B} = rot\, \vec{A}^{(\pm)} = g\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Далее, все вычисления мы будем проводить только для векторного потенциала $\vec{A}^{(+)}$ и для краткости в дальнейшем опустим знак $(+)$.

Отличительной особенностью задачи МИК-Кеплера является наличие скрытой симметрии, как и в случае задачи Кеплера-Кулона. Кроме гамильтониана $(1.1.1)$ имеют место и следующие интегралы движения

$$\hat{\vec{J}} = \vec{r} \times \left(-i\vec{\nabla} + \frac{e}{\hbar c}\vec{A}\right) + s\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (1.1.3)$$

$$\hat{\vec{I}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0}}\left[\hat{\vec{J}} \times \left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) - \left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) \times \hat{\vec{J}}\right] + \frac{e^2}{\hbar\sqrt{\mu_0}}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (1.1.4)$$

где $\hat{\vec{J}}$ определяет вращательный момент системы, а оператор $\hat{\vec{I}}$ является аналогом вектора Лапласа-Рунге-Ленца-Паули [85-91, 110].

При фиксированных отрицательных значениях энергии интегралы движения $(1.1.3)$ и $(1.1.4)$ образуют алгебру $so(4)$, а при положительных значениях энергии - $so(3,1)$ [100]. В силу скрытой симметрии задача МИК-Кеплера, как и задача Кеплера-Кулона, является суперинтегрируемой системой, и вследствие этого переменные в уравнение Шредингера разделяются не только в сферических и в параболических, но и в вытянутых сфероидальных координатах. Таким образом система МИК-Кеплера является естественным обобщением задачи Кеплер-Кулона в присутствие Дираковского диона.

Задачу МИК-Кеплера можно построить редукцией четырехмерного изотропного осциллятора с помощью так называемого преобразования Кустаанхеймо-Штифеля [74] на классическом и квантовом уровнях [33, 42, 45]. Имеются также обобщения системы МИК-Киплера на трехмерную сферу [61] и гиперболоид [62].

При целочисленных значениях s задача МИК-Кеплера описывает относительное движение двух дираковских дионов. Для этого надо положить

$$s = \frac{eG - gQ}{\hbar c}, \qquad \alpha = eQ + gG, \tag{1.1.5}$$

где (e, g) и (Q, G) – электрические и магнитные заряды соответственно первого и второго дионов. Параметр μ_0 в $(1.1.1)$ играет роль приведенной массы, а вектор $\vec{r}$ определяет положение второго диона относительно первого [100]. При полуцелых s предполагается также наличие магнитного поля соленоида, наделяющего систему спином $1/2$ [46, 53]. Отметим, что система МИК-Кеплера описывает как относительное движение двух дираковских дионов, так и двух удаленных монополей или дионов Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (БПЗ). Система, описывающая относительное движение удаленных БПЗ-дионов [8], задается гамильтонианом

$$\hat{H}_{BPS} = \frac{1}{4\mu_0}\left(1 - \frac{2\mu_0}{r}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(i\vec{\nabla} + s\vec{A}\right)\left(1 - \frac{2\mu_0}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(i\vec{\nabla} + s\vec{A}\right) + \frac{eg}{r}, \tag{1.1.6}$$

где e есть относительный электрический заряд БПЗ-монополей. Легко заметить, что уравнение Шредингера гамильтониана $(1.1.6)$ сводится к уравнению Шредингера задачи МИК-Кеплера. Наличие в упомянутой системе кулоновской симметрии является хорошо известным фактом, а ее эквивалентность задаче МИК-Кеплера была замечена в работе [66].

Далее, для простоты мы рассмотрим частный случай движения зарядя в поле дираковского диона – систему, наиболее близкую атому водорода. Иными словами, мы в дальнейшем полагаем, что $G = 0, Q = e$, т.е. $\alpha = e^2$.

2. Базисы задачи МИК-Кеплера

В сылу $SO(4)$ скрытой симметрии задачи МИК-Кеплера [100] переменные в уравнение Шредингера для этой системы разделяются в сферических, параболических и вытянутых сфероидальных системах координат. Здесь мы рассмотрим только сферические и параболические волновые функции задачи МИК-Кеплера.

2.1. Сферический базис

В сферических координатах

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta, \tag{1.2.1}$$

где $r \in [0,\infty), \quad \theta \in [0,\pi], \ \varphi \in [0,2\pi)$, решение спектральной задачи

$$\hat{H}_0\psi = E^{(0)}\psi, \qquad \hat{J}^2\psi = j(j+1)\psi, \qquad \hat{J}_z\psi = -\left(s + i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi = m\psi, \tag{1.2.2}$$

которое описывает связанную систему МИК-Кеплера с энергией $E^{(0)}$, вращательным моментом j и z - компонентой вращательного момента m, можно записать в виде [45]

$$\psi_{njm}^{(s)}(r,\theta,\varphi) = \left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} R_{nj}^{(s)}(r) d_{ms}^{j}(\theta) e^{i(m+s)\varphi}. \tag{1.2.3}$$

Здесь $d_{ms}^{j}(\theta)$ есть d-функция Вигнера [190], а радиальная волновая функция $R_{nj}^{(s)}(r)$ определяется выражением

$$R_{nj}^{(s)}(r) = \frac{2e^{-\frac{r}{nr_0}}}{n^2 r_0^{3/2}(2j+1)!}\sqrt{\frac{(n+j)!}{(n-j-1)!}}\left(\frac{2r}{r_0 n}\right)^j F\left(-n+j+1; 2j+2; \frac{2r}{r_0 n}\right), \tag{1.2.4}$$

где $r_0 = \hbar^2/\mu_0 e^2$ – радиус Бора, а $F(a;c;z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Теперь пользуясь формулой [190]

$$d_{MM'}^{J}(\beta) = (-1)^{\frac{M-M'+|M-M'|}{2}}\left[\frac{k!(k+a+b)!)}{(k+a)!(k+b)!}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^a\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^b P_k^{(a,b)}(\cos\beta), \tag{1.2.5}$$

где индексы полинома Якоби [193] k, a, b связаны с J, M, M' соотношениями

$$a = |M - M'|, \qquad b = |M + M'|, \qquad k = J - \frac{1}{2}(a+b),$$

угловую волновую функцию можно представить с помощью полинома Якоби $P_k^{(a,b)}(\cos\theta)$:

$$Z_{jm}^{(s)}\ (\theta,\varphi)=(-1)^{\frac{m-s+|m-s|}{2}}\left[\frac{(2j+1)(j-m_+)!\,(j+m_+)!}{4\pi\ \ (j-m_-)!\,(j+m_-)!}\right]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{|m-s|}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{|m+s|}\ P_{j-m_+}^{(|m-s|,|m+s|)}(\cos\theta)e^{i(m+s)\varphi}\,. \tag{1.2.6}$$

Здесь мы ввели обозначения

$$m_\pm=\frac{|m+s|+|m-s|}{2}\,. \tag{1.2.7}$$

Угловую функцию $Z_{jm}^{(s)}(\theta,\varphi)$ называют монопольными гармониками Тамма [191].

Спектр задачи МИК-Кеплера определяется условиями:

$$E_n^{(0)}=-\frac{\mu_0\,e^4}{2\hbar^2\,n^2},\qquad \text{где}\quad n=|s|+1,|s|+2,\ldots, \tag{1.2.8}$$

а $j=|s|,|s|+1,\ldots,n-1$, $m=-j,-j+1,\ldots,j-1,j$. Квантовые числа j и m характеризуют полный момент системы и его проекцию на ось z. При целом s система имеет целый спин, а при полуцелом s - полуцелый. При $s=0$ задача МИК-Кеплера переходит в водородноподобную систему.

При тождественном преобразования $\varphi\to\varphi+2\pi$ волновая функция связанной системы МИК-Кеплера однозначна при целом s и меняет знак при полуцелом s. Во втором случае неоднозначность волновой функции можно истолковать как присутсвие магнитного поля бесконечно тонкого соленоида, направленного вдоль оси z, порождающего в системе спин $1/2$ [46, 53].

2.2. Параболический базис

Теперь рассмотрим задачу МИК-Кеплера в параболических координатах. В параболических координатах $\mu,\nu\in[0,\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi)$, которые определяются формулами [89]

$$x=\sqrt{\mu\nu}\cos\varphi,\qquad y=\sqrt{\mu\nu}\sin\varphi,\qquad z=\frac{1}{2}(\mu-\nu), \tag{1.2.9}$$

кулоновский потенциал, дифференциальные элементы длины, объема и оператор Лапласа имеют вид

$$V = -\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{2e^2}{\mu+\nu}, \qquad (1.2.10)$$

$$d\,l^2 = \frac{\mu+\nu}{4}\left(\frac{d\mu^2}{\mu}+\frac{d\nu^2}{\nu}\right)+\mu\nu\,d\varphi^2, \qquad dv = \frac{1}{4}(\mu+\nu)d\mu\,d\nu\,d\varphi, \qquad (1.2.11)$$

$$\Delta = \frac{4}{\mu+\nu}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right]+\frac{1}{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (1.2.12)$$

После подстановки

$$\psi(\mu,\nu,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Phi_1(\mu)\Phi_2(\nu)e^{i(m+s)\varphi},$$

переменные в уравнение Шредингера с гамильтонианом $(1.1.1)$ разделяются, и мы приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [51]

$$\frac{d}{d\mu}\left(\mu\frac{d\Phi_1}{d\mu}\right)+\left[\frac{\mu_0 E^{(0)}}{2\hbar^2}\mu-\frac{(m+s)^2}{4\mu}+\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\hbar}\Omega+\frac{1}{2r_0}\right]\Phi_1(\mu)=0, \qquad (1.2.13)$$

$$\frac{d}{d\nu}\left(\nu\frac{d\Phi_2}{d\nu}\right)+\left[\frac{\mu_0 E^{(0)}}{2\hbar^2}\nu-\frac{(m-s)^2}{4\nu}-\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\hbar}\Omega+\frac{1}{2r_0}\right]\Phi_2(\nu)=0, \qquad (1.2.14)$$

где Ω - постоянная разделения, являющаяся собственным значением z - компоненты аналога вектора Лапласа-Рунге-Ленца-Паули $(1.1.4)$.

При $s=0$ эти уравнения совпадают с уравнениями для атома водорода в параболических координатах [89]. Поэтому полную, нормированную на единицу, волновую функцию задачи МИК-Кеплера в параболических координатах можно записать в следующем виде

$$\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}(\mu,\nu,\varphi) = \frac{1}{n^2\sqrt{\pi r_0^3}}\Phi_{n_1,m+s}(\mu)\Phi_{n_2,m-s}(\nu)e^{i(m+s)\varphi}, \qquad (1.2.15)$$

где

$$\Phi_{pq}(x) = \frac{1}{|q|!}\sqrt{\frac{(p+|q|)!}{p!}}\,e^{-x/2nr_0}\left(\frac{x}{nr_0}\right)^{|q|/2}F\left(-p;|q|+1;\frac{x}{nr_0}\right). \qquad (1.2.16)$$

В $(1.2.15)$ n_1 и n_2 неотрицательные целые числа, причем

$$n_1 = -\frac{|m+s|+1}{2}+\frac{\Omega}{2\sqrt{-2E^{(0)}}}+\frac{e^2}{2\hbar}\sqrt{-\frac{\mu_0}{2E^{(0)}}}, \qquad (1.2.17)$$

$$n_2 = -\frac{|m-s|+1}{2}-\frac{\Omega}{2\sqrt{-2E^{(0)}}}+\frac{e^2}{2\hbar}\sqrt{-\frac{\mu_0}{2E^{(0)}}}. \qquad (1.2.18)$$

Из последних соотношений с учетом $(1.2.8)$ получим, что параболические квантовые числа n_1 и n_2 связаны с главным квантовым числом n следующим образом

$$n = n_1 + n_2 + \frac{|m+s| + |m-s|}{2} + 1. \qquad (1.2.19)$$

И, наконец, из соотношений $(1.2.18)$ и $(1.2.19)$ с учетом $(1.2.8)$ для постоянной разделения Ω получим, что

$$\Omega = \frac{e^2\sqrt{\mu_0}}{n\hbar}(n_1 - n_2 + m_-). \qquad (1.2.20)$$

Таким образом мы решили следующую спекральную задачу

$$\begin{aligned}
&\hat{H}_0\,\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}(\mu,\nu,\varphi) = -\frac{\mu_0\, e^4}{2\hbar^2 n^2}\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}(\mu,\nu,\varphi),\\
&\hat{J}_z\,\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}(\mu,\nu,\varphi) = m\,\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}(\mu,\nu,\varphi), \qquad .\\
&\hat{I}_z\,\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}(\mu,\nu,\varphi) = \frac{e^2\sqrt{\mu_0}}{n\hbar}(n_1 - n_2 + m_-)\,\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}(\mu,\nu,\varphi),
\end{aligned} \qquad (1.2.21)$$

где операторы $\hat{H}_0$, $\hat{J}_z$ и $\hat{I}_z$ определяются соотношениями $(1.1.1)$, $(1.1.3)$ и $(1.1.4)$.

3. Обобщенное разложение Парка-Тартера

Вначале докажем, что для радиальных волновых функций систем со скрытой симметрией выполняется следующее “добавочное” условие ортогональности по орбитальному моменту l [132]

$$J_{ll'} = \int_0^\infty R_{nl}(r)R_{nl'}(r)dr = \left(\frac{\partial E_n}{\partial l}\right)_{n_r}\frac{2\mu_0\,\delta_{ll'}}{\hbar^2(2l+1)}. \qquad (1.3.1)$$

Запишем радиальное уравнение Шредингера в поле $U(r)$ в виде

$$\hat{H}_r\,R_{El}(r) = E\,R_{El}(r), \qquad (1.3.2)$$

где через обозначен $\hat{H}_r$ эрмитовый оператор

$$\hat{H}_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu_0 r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu_0 r^2} + U(r). \qquad (1.3.3)$$

Из соотношений $(1.3.2)$ и $(1.3.3)$ для дискретного спектра получим

$$(l-l')(l+l'+1)\int_0^\infty R_{E'l'}(r)R_{El}(r)dr = \frac{2\mu_0}{\hbar^2}(E-E')\int_0^\infty R_{E'l'}(r)R_{El}(r)r^2\,dr. \qquad (1.3.4)$$

Если энергетический спектр системы вырожден по l, то при $E' = E$ и $l' \neq l$ имеем, что

$$\int_0^\infty R_{E'l'}(r) R_{El}(r) dr = 0. \qquad (1.3.5)$$

Известно [89], что для эрмитового оператора $\hat{F}$, зависящего от некоторого параметра λ, справедливо тождество

$$\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \lambda}\right)_{nn} = \frac{\partial F_n}{\partial \lambda},$$

где усреднение проводится по собственным функциям оператора $\hat{F}$. Применяя это тождество к оператору $(1.3.3)$ и выбирая в качестве параметра λ орбитальный момент l, получим

$$\int_0^\infty R_{nl'}(r) R_{nl}(r) dr = \left(\frac{\partial E_n}{\partial l}\right)_{n_r} \frac{2\mu_0}{\hbar^2 (2l+1)}, \qquad (1.3.6)$$

где производная по l берется при фиксированном радиальном квантовом числе n_r. Объединяя $(1.3.5)$ и $(1.3.6)$, окончательно получим, что

$$\int_0^\infty R_{nl'}(r) R_{nl}(r) dr = \left(\frac{\partial E_n}{\partial l}\right)_{n_r} \frac{2\mu_0 \delta_{ll'}}{\hbar^2 (2l+1)}. \qquad (1.3.7)$$

Согласно $(1.3.7)$ условие ортогональности радиальных волновых функций задачи МИК-Кеплера по орбитальному моменту будет иметь вид:

$$\int_0^\infty R_{nj}^{(s)}(r) R_{nj'}^{(s)}(r) dr = \frac{2}{r_0^2 n^3} \frac{\delta_{jj'}}{2j+1}. \qquad (1.3.8)$$

Для многомерного аналога атома водорода [96] и изотропного осциллятора [105] роль оператора $(1.3.3)$ выполняет эрмитовый оператор

$$\hat{H}_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu_0 r^{D-1}} \frac{d}{dr}\left(r^{D-1} \frac{d}{dr}\right) + \frac{\hbar^2 L(L+D-2)}{2\mu_0 r^2} + U(r), \qquad (1.3.9)$$

в котором $D \geq 3$ - целое число, определяющее размерность пространства, а L - так называемый глобальный момент [192], который может принимать как целые, так и полуцелые неотрицательные значения.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что в многомерном случае выполняется условие ортогональности

$$\int_0^\infty R_{nL'}(r) R_{nL}(r) dr = \left(\frac{\partial E_n}{\partial L}\right)_{n_r} \frac{2\mu_0 \delta_{LL'}}{\hbar^2 (2L+D-2)}. \qquad (1.3.10)$$

В справедливости этого условия убеждает и прямое вычисление, основанное на использовании явного вида радиальных волновых функций многомерного атома водорода [96] и изотропного осциллятора [138] (в параграфе 4.2. главы 2 эту ортогональность мы продемонстрируем на примере четырехмерного двойного сингулярного осциллятора).

Теперь рассмотрим задачу разложения параболического базиса по сферическому базису системы МИК-Кеплера. Искомое межбазисное разложение, при фиксированном значении энергии, запишем в виде [51]

$$\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}(\mu,\nu,\varphi)=\sum_{j=m_+}^{n-1} W^{j}_{nn_1 ms}\,\psi^{(s)}_{m}(r,\theta,\varphi), \qquad (1.3.11)$$

Переходя в левой части соотношения $(1.3.11)$ от параболических координат к сферическим координатам согласно формулам

$$\mu=r(1+\cos\theta), \qquad \nu=r(1-\cos\theta),$$

положив $\theta=0$ и учитывая, что для полинома Якоби имеет место соотношение [193]

$$P_n^{(a,b)}(1)=\frac{(a+1)_n}{n!},$$

где

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

символ Похгаммера [194], мы установим равенство, в которое входит только радиальная переменная r. Затем, пользуясь услпвием ортогональности радиальной волновой функции задачи МИК-Кеплера по вращательному моменту $(1.3.10)$, получим

$$W^{j}_{nn_1 ms}=(-1)^{\frac{m-s+|m-s|}{2}}\frac{\sqrt{(2j+1)(n+j)!}}{|m+s|!(2j+1)!}E^{jms}_{nn_{12}n_2}\,K^{nn_1}_{jms}, \qquad (1.3.12)$$

где

$$E^{jms}_{nn_1 n_2}=\left[\frac{(n_1+|m+s|)!(n_2+|m-s|)!(j+m_-)!(j-m_+)!}{(n_1)!(n_2)!(n-j-1)!(j+m_+)!(j-m_-)!}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.3.13)$$

$$K^{nn_1}_{jms}=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{j+m_+}\,F(-n_1;|m+s|+1;x)F(-n+j+1;2j+2;x)\,dx,$$

а $x=2r/r_0 n$. Для вычисления интеграла $K^{nn_1}_{jms}$ запишем вырожденную гипергеометричвскую функцию $F(-n_1;|m+s|+1;x)$ в виде многочлена

$$F(-n_1;|m+s|+1;x)=\sum_{s=0}^{n_1}\frac{(-n_1)_s\,x^s}{s!(|m+s|+1)_s},$$

произведем интегрирование согласно формуле [89]

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^\nu F(\alpha;\gamma;kx)dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}}\ {}_2F_1\left(\alpha,\nu+1;\gamma;\frac{k}{\lambda}\right) \tag{1.3.14}$$

и, учитывая соотношение [194]

$${}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \tag{1.3.15}$$

где ${}_2F_1(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция, то получим

$$.\ K_{jms}^{nn_1} = \frac{(2j+1)(j+m_+)!(n-m_--1)!}{(j-m_+)!(n+j)!}\ {}_3F_2\left\{\begin{matrix}-n_1,-j+m_+,\ j+m_++1\\ |m+s|+1,-n+m_++1\end{matrix}\middle|1\right\} \tag{1.3.16}$$

Отметим, что согласно [194] гипергеометрическая функция ${}_2F_1(a,b;c;1)$ сходится при условии $\Re e\,c > \Re e\,a > 0$ и $\Re e(c-a-b) > 0$. В нашем случае это условие соблюдается.

Подстановка (1.3.13) и (1.3.16) в (1.3.12) дает

$$W_{nn_1ms}^{j} = (-1)^{\frac{m-s+|m-s|}{2}}\sqrt{\frac{(2j+1)(n_1+|m+s|)!\,(n_2+|m-s|)!\,(j+m_+)!\,(j+m_-)!}{(n_1)!\,(n_2)!\,(n-j-1)!\,(n+j)!\,(j-m_+)!\,(j-m_-)!}}\times$$

$$\times\frac{(n-m_+-1)!}{|m+s|!}\ {}_3F_2\left\{\begin{matrix}-n_1,-j+m_+,\ j+m_++1\\ |m+s|+1,-n+m_++1\end{matrix}\middle|1\right\}. \tag{1.3.17}$$

Известно [190], что коэффициенты Клебша-Гордана группы $SU(2)$ имеют следующее представление

$$C_{a,\alpha;b,\beta}^{c,\gamma} = (-1)^{a-\alpha}\left[\frac{(2c+1)(a+\alpha)!(c+\gamma)!}{(a-\alpha)!(c-\gamma)!(a+b+c+1)!(a+b-c)!(a-b+c)!\,(b-a+c)!}\right]^{\frac{1}{2}}\delta_{\gamma,\alpha+\beta}\times$$

$$\times\frac{(a+b-\gamma)!\,(b+c-\alpha)!}{\sqrt{(b-\beta)!\,(b+\beta)!}}\ {}_3F_2\left\{\begin{matrix}-a-b-c-1,-a+\alpha,-c+\gamma\\ -a-b+\gamma,-b-c+\alpha\end{matrix}\middle|1\right\}. \tag{1.3.18}$$

Далее, пользуясь формулой [194]

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}s,s',-N\\ t',1-N-t\end{matrix}\middle|1\right\} = \frac{(t+s)_N}{(t)_N}\ {}_3F_2\left\{\begin{matrix}s,t'-s',-N\\ t',t+s\end{matrix}\middle|1\right\} \tag{1.3.19}$$

соотношение $(1.3.18)$ можно записать в виде

$$C^{c,\gamma}_{a,\alpha;b,\beta} = (-1)^{a-\alpha}\left[\frac{(2c+1)(b-a+c)!\,(a+\alpha)!(b+\beta)!\,(c+\gamma)!}{(a-\alpha)!\,(b-\beta)!(c-\gamma)!(a+b+c+1)!(a+b-c)!(a-b+c)!}\right]^{\frac{1}{2}}\delta_{\gamma,\alpha+\beta}\times \tag{1.3.20}$$

$$\times\frac{(a+b-\gamma)!}{(b-a+\gamma)!}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}-a+\alpha,\,c+\gamma+1,\,-c+\gamma\\ -a-b+\gamma,\,b-a+\gamma+1\end{matrix}\middle|\,1\right\}.$$

Наконец, сравнивая $(1.3.17)$ с $(1.3.20)$, приходим к следующему представлению для коэффициента $W^{j}_{nn_1ms}$

$$W^{j}_{nn_1ms} = (-1)^{n_1+\frac{m-s+|m-s|}{2}}\,C^{j,m_+}_{\frac{n_1+n_2+|m-s|}{2},\frac{n_2-n_1+|m-s|}{2};\frac{n_1+n_2+|m+s|}{2},\frac{n_1-n_2+|m+s|}{2}}\;. \tag{1.3.21}$$

Обратное преобразование, т.е. разложение сферического базиса по параболическим волновым функциям задачи МИК-Кеплера, имеет вид

$$\psi^{(s)}_{m}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n_1=0}^{n-m_+-1}\tilde{W}^{n_1}_{njms}\,\psi^{(s)}_{n_1n_2m}(\mu,\nu,\varphi), \tag{1.3.22}$$

Теперь пользуясь условием ортонормируемостью коэффициентов Клебша-Гордана группы $SU(2)$ [190]

$$\sum_{c=|\gamma|}^{a+b} C^{c\gamma}_{a\alpha;b\beta}\;C^{c\gamma}_{a\alpha';b\beta'} = \delta_{\alpha\alpha'}\;\delta_{\beta\beta'} \tag{1.3.23}$$

получим

$$\tilde{W}^{n_1}_{njms} = (-1)^{n_1+\frac{m-s+|m-s|}{2}}\,C^{j,m_+}_{\frac{n-m_--1}{2},\frac{n-m_--1}{2}-n_1;\frac{n+m_--1}{2},\frac{m_++|m+s|-n+1}{2}+n_1}\;. \tag{1.3.24}$$

Очевидно, что с помощью соотношения $(1.3.20)$ коэффициент межбазисного разложения сфера – парабола $(1.3.24)$ можно выразить через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$ от единичного аргумента.

В конце отметим, что при $s=0$ формулы $(1.3.17)$ и $(1.3.21)$ переходят в соответствующие соотношения полученные Парком [115] и Тартером [116].

4. Сфероидальный базис задачи МИК-Кеплера

Сфероидальные координаты являются естественным средством исследования многих задач математической физики [195]. В квантовой механике эти координаты используются

при описании поведения заряженной частицы в поле двух кулоновских центров. Расстояние R между центрами характеризует сфероидальные координаты и входит в выражение для энергетического спектра, т.е. имеет динамический смысл. Если заряд одного из центров положить равным нулю, то задача переходит в одноцентровую и параметр R становится чисто кинематическим. Однако математическая структура сфероидальных уравнений во многом остается прежней, так как энергия входит как в радиальное, так и в угловое уравнение. В связи с этим сфероидальный анализ обычной (обобщенной) задачи МИК-Кеплера приобретает смысл первого шага к исследованию двухцентовой задачи обычной (обобщенной) задачи МИК-Кеплера.

В вытянутых сфероидальных координатах ξ, η, φ которые определяются следующим образом

$$x = \frac{R}{2}\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}\cos\varphi, \qquad y = \frac{R}{2}\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}\sin\varphi, \qquad z = \frac{R}{2}\left(\xi\eta+1\right), \quad (1.4.1)$$

где $\xi \in [1,\infty)$, $\eta \in [-1,1]$, $\varphi \in [0,2\pi)$, $R \in [0,\infty)$, дифференциальные элементы длины, объема и оператор Лапласа имеют вид

$$d\,l^2 = \frac{R^2}{4}\left[\left(\xi^2-\eta^2\right)\left(\frac{d\,\xi^2}{\xi^2-1}+\frac{d\,\eta^2}{1-\eta^2}\right)+\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)d\,\varphi^2\right],$$

$$d\,v = \frac{R^3}{8}\left(\xi^2-\eta^2\right)d\xi\,d\eta\,d\varphi, \qquad (1.4.2)$$

$$\Delta = \frac{4}{R^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\right]+\frac{4}{R^2\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Параметр R есть межфокусное расстояние и при $R \to 0$ и $R \to \infty$ вытянутые сфероидальные координаты переходят в сферические и параболические координаты соответственно [195].

После подстановки

$$\psi^{(s)}\left(\xi,\eta,\varphi;R\right) = X^{(s)}\left(\xi;R\right)Y^{(s)}\left(\eta;R\right)\frac{e^{i(m+s)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad (1.4.3)$$

переменные в уравнение Шредингера задачи МИК-Кеплера в сфероидальных координатах $(1.4.1)$ разделяются и мы приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left[\frac{d}{d\,\xi}\left(\xi^2-1\right)\frac{d}{d\,\xi}+\frac{(m+s)^2}{2(\xi+1)}-\frac{(m-s)^2}{2(\xi-1)}+\frac{\mu_0 R^2 E^{(0)}}{2\hbar^2}\left(\xi^2-1\right)+\frac{R}{r_0}\xi-\Lambda^{(0)}(R)\right]X^{(s)}(\xi;R)=0,$$

$$(1.4.4)$$

$$\left[\frac{d}{d\eta}\left(1-\eta^2\right)\frac{d}{d\eta}-\frac{(m+s)^2}{2(1+\eta)}-\frac{(m-s)^2}{2(1-\eta)}+\frac{\mu_0 R^2 E^{(0)}}{2\hbar^2}\left(1-\eta^2\right)-\frac{R}{r_0}\eta+\Lambda^{(0)}(R)\right]Y^{(s)}(\eta;R)=0,$$

где $\Lambda^{(0)}$ - постоянная разделения.

Далее, следуя методу предложенного Миллером [205], т.е. исключая энергию $E^{(0)}$ из системы уравнений $(1.4.4)$, мы получим сфероидальный интеграл движения

$$\hat{\Lambda}^{(0)}=\frac{1}{\xi^2-\eta^2}\left[\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial}{\partial\xi}-\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\xi^2+\eta^2-2}{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]+$$

$$+\frac{2s}{(\xi-1)(1-\eta)}\left(\xi+\mu-1-\frac{\xi\eta+1}{\xi+\eta}\right)\left(s+i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)+\frac{R}{r_0}\frac{\xi\eta+1}{\xi+\eta},$$

собственные значения которого является постоянная разделения $\Lambda^{(0)}$, а собственные функции – сфероидальные волновые функции $(1.4.3)$.

Теперь, переходя в последнем выражении к декартовым координатам и учитывая, что квадрат оператора вращательного момента $(1.1.3)$ $\hat{J}^2$ и z - компонента аналога вектора Лапласа-Рунге-Ленца-Паули $(1.1.4)$ $\hat{I}_z$ в декартовых координатах имеют вид:

$$\hat{J}^2=-\left(r^2\Delta-x_i x_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-2x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)-\frac{2isr}{r-z}\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)+\frac{2s^2 r}{r-z},$$

$$\hat{I}_z=\frac{\hbar}{\mu_0}\left[z\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}+is\frac{r+z}{r(r-z)}\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}+is\right)-\frac{\partial}{\partial z}+\frac{z}{r_0 r}\right],$$

получим, что

$$\hat{\Lambda}^{(0)}=\hat{J}^2+\frac{R\sqrt{\mu_0}}{\hbar}\hat{I}_z. \qquad (1.4.5)$$

Итак, имеем

$$\hat{\Lambda}^{(0)}\psi_{nqm}^{(s)}(\xi,\eta,\varphi;R)=\Lambda_q^{(0)}(R)\psi_{nqm}^{(s)}(\xi,\eta,\varphi;R). \qquad (1.4.6)$$

Здесь индекс q нумерует собственные значения оператора $\hat{\Lambda}^{(0)}$ и принимает значения в пределах $1\le q\le n-m_+-1$.

Теперь перейдем к построению сфероидального базиса задачи МИК-Кеплера. Представим сфероидальный базис в виде разложения по сферическому $(1.2.3)$ и параболическому $(1.2.15)$ базисам:

$$\psi_{nqm}^{(s)}(\xi,\eta,\varphi;R)=\sum_{j=m_+}^{n-1}U_{nqms}^{j}(R)\psi_{njm}^{(s)}(r,\theta,\varphi), \tag{1.4.7}$$

$$\psi_{nqm}^{(s)}(\xi,\eta,\varphi;R)=\sum_{n_1=0}^{n-m_+-1}V_{nqms}^{n_1}(R)\psi_{n_1n_2m}^{(s)}(\mu,\nu,\varphi). \tag{1.4.8}$$

Действуя оператором (1.4.5) на (1.4.7) и (1.4.8) и пользуясь спектральными уравнениями для операторов $\hat{J}^2$ (1.2.2), $\hat{I}_z$ (1.2.21) и $\hat{\Lambda}^{(0)}$ (1.4.6) и ортонормированностью сферического и параболического базисов, получим

$$\left[\Lambda_q^{(0)}(R)-j(j+1)\right]U_{nqms}^{j}(R)=\frac{R\sqrt{\mu_0}}{\hbar}\sum_{j'}U_{nqms}^{j'}(R)\left(\hat{I}_z\right)_{jj'}, \tag{1.4.9}$$

$$\left[\Lambda_q^{(0)}(R)-\frac{R}{nr_0}(n_1-n_2+m_-)\right]V_{nqms}^{n_1}(R)=\sum_{n_1'}V_{nqms}^{n_1'}(R)\left(\hat{J}^2\right)_{n_1n_1'}, \tag{1.4.10}$$

где

$$\left(\hat{I}_z\right)_{jj'}=\int\psi_{njm}^{(s)*}(r,\theta,\varphi)\hat{I}_z\psi_{nj'm}^{(s)*}(r,\theta,\varphi)d\nu, \tag{1.4.11}$$

$$\left(\hat{J}^2\right)_{n_1n_1'}=\int\psi_{n_1n_2m}^{(s)*}(\mu,\nu,\varphi)\hat{J}^2\psi_{n_1'n_2'm}^{(s)}(\mu,\nu,\varphi)d\nu. \tag{1.4.12}$$

Вначале рассмотрим, матричный элемент (1.4.11). Для вычисления матричного элемента (1.4.11) мы используем разложение сферического базиса по параболическому базису (1.3.22), учитываем уравнение на собственные значения и собственные функции оператора $\hat{I}_z$ (1.2.21) и соотношение (1.2.19). Тогда вместо соотношения (1.4.11) получим

$$\left(\hat{I}_z\right)_{jj'}=\frac{e^2\sqrt{\mu_0}}{n\hbar}\sum_{n_1=0}^{n-m_+-1}\left(2n_1-n-|m+s|+1\right)\tilde{W}_{njms}^{n_1}\tilde{W}_{njms}^{n_1'}.$$

Далее, пользуясь явным видом коэффициентов $\tilde{W}_{njms}^{n_1}$ и $\tilde{W}_{njms}^{n_1'}$ (1.3.24), рекуррентным соотношением

$$C_{a\alpha;b\beta}^{c\gamma}=-\left[\frac{4c^2(2c+1)(2c-1)}{(c+\gamma)(c-\gamma)(b-a+c)(a-b+c)(a+b-c+1)(a+b+c+1)}\right]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{(c-\gamma-1)(c+\gamma-1)(b-a+c-1)(a-b+c-1)(a+b+c)(a+b-c+2)}{4(c-1)^2(2c-3)(2c-1)}\right]^{\frac{1}{2}}C_{a\alpha;b\beta}^{c-2,\gamma}-\right. \tag{1.4.13}$$

$$\left.-\frac{c(c-1)(\alpha-\beta)-\gamma\left[a(a+1)-b(b+1)\right]}{2c(c-1)}C_{a\alpha;b\beta}^{c-1,\gamma}\right\}$$

и условием ортогональности

$$\sum_{\alpha+\beta=\gamma} C^{c\gamma}_{a\alpha;b\beta}\, C^{c'\gamma'}_{a\alpha;b\beta} = \delta_{c'c}\ \delta_{\gamma'\gamma} \tag{1.4.14}$$

коэффициентов Клебша-Гордана, для матричного элемента $\left(\hat{I}_z\right)_{j\,j'}$ получим выражение

$$\left(\hat{I}_z\right)_{j\,j'} = \frac{e^2\sqrt{\mu_0}}{n\hbar}\left(A_{j+1}\,\delta_{j',j+1} + B_j\,\delta_{j\,j'} + A_j\,\delta_{j',j-1}\right), \tag{1.4.15}$$

где

$$A_j = -\sqrt{\frac{\left(j^2-m_+^2\right)\left(j^2-m_-^2\right)\left(n^2-j^2\right)}{j^2\left(2j-1\right)\left(2j+1\right)}}, \qquad B_j = \frac{n\,m_+\,m_-}{j\left(j+1\right)}. \tag{1.4.16}$$

Теперь, подставляя $(1.4.15)$ в $(1.4.9)$, для коэффициена $U^{j}_{nqms}(R)$ следующее трехчленное рекуррентное соотношение

$$A_{j+1}U^{j+1}_{nqms}(R) + \left\{B_j - \frac{n\,r_0}{R}\left[\Lambda^{(0)}_q(R) - j\left(j+1\right)\right]\right\}U^{j+1}_{nqms}(R) + A_j U^{j}_{nqms}(R) = 0\,. \tag{1.4.17}$$

Теперь перейдем к вычислению матричного элемента $(1.4.12)$. Применяя технику вычисления, подобную при вычисления матричного элемента $\left(\hat{I}_z\right)_{j\,j'}$, т.е. пользуясь разложением параболического базиса задачи МИК-Кеплера по сферическому, учитывая уравнение на собственные значения и собственные функции оператора $\hat{J}^2$ $(1.2.2)$, тогда получим

$$\left(\hat{J}^2\right)n_1 n_1' = \sum_{j=m_+}^{n-1} j\left(j+1\right)W^{j}_{nn_1ms}\,W^{j}_{nn_1'ms}\,.$$

Далее, пользуясь следующим трехчленным рекуррентным соотношением коэффициентов Клебша-Гордана группы $SU(2)$ [201]

$$\begin{aligned}&\left[c\left(c+1\right)-a\left(a+1\right)-b\left(b+1\right)-2\alpha\beta\right]C^{c\gamma}_{a\alpha;b\beta} = \\ &= \sqrt{\left(a+\alpha\right)\left(a-\alpha+1\right)\left(b-\beta\right)\left(b+\beta+1\right)}\,C^{c\gamma}_{a,\alpha-1;b,\beta+1} + \\ &+ \sqrt{\left(a-\alpha\right)\left(a+\alpha+1\right)\left(b+\beta\right)\left(b-\beta+1\right)}\,C^{c\gamma}_{a,\alpha+1;b,\beta-1}\end{aligned} \tag{1.4.18}$$

и условием ортогональности $(1.3.23)$, для матричного элемента $\left(\hat{J}^2\right)_{n_1 n_1'}$ получим выражение

$$\left(\hat{J}^2\right)_{n_1 n_1'} = C_{n_1+1}\,\delta_{n_1',n_1+1} + D_{n_1}\,\delta_{n_1',n_1} + C_{n_1}\,\delta_{n_1',n_1-1}\,, \tag{1.4.19}$$

где

$$C_{n_1} = -\sqrt{n_1\left(n_1+|m+s|\right)\left(n-n_1+m_-\right)\left(n-n_1-m_-\right)}\,,$$

$$(1.4.20)$$

$$D_{n_1} = n_2\left(n_1+1\right)+\left(n_1+|m+s|\right)\left(n_2+|m-s|\right)+m_-\left(m_--1\right).$$

Теперь подставляя $(1.4.19)$ в $(1.4.10)$, для коэффициента $V_{nqms}^{n_1}(R)$ получим трехчленное рекуррентное соотношение

$$C_{n_1+1}V_{nqms}^{n_1+1}(R)+\left[D_{n_1}-\frac{R}{nr_0}\left(n_1-n_2+m_-\right)-\Lambda_q^{(0)}(R)\right]V_{nqms}^{n_1}(R)+C_{n_1}V_{nqms}^{n_1-1}(R)=0\,. \qquad (1.4.21)$$

Следует отметить, что трехчленные рекуррентные соотношения $(1.4.17)$ и $(1.4.21)$ нужно решить совместно с условиями нормировки

$$\sum_{j=m_+}^{n-1}\left|U_{nqms}^{j}(R)\right|^2=1, \qquad \sum_{n_1=0}^{n-m_+-1}\left|V_{nqms}^{n_1}(R)\right|^2=1. \qquad (1.4.22)$$

И, наконец, для иллюстрации метода построения сфероидальных волновых функций задачи МИК-Кеплера подробно рассмотрим один частный случай. Пусть $n=2, m=s=0$, тогда согласно разложения $(1.4.7)$ имеем

$$\psi_{2q0}^{(0)}=U_{2q00}^{0}(R)\psi_{200}^{(0)}+U_{2q00}^{1}(R)\psi_{210}^{(0)}. \qquad (1.4.23)$$

Из трехчленного рекуррентного соотношения $(1.4.17)$ для коэффициентов $U_{2q00}^{0}(R)$ и U_{2q00}^{1} получим следующую систему алгебраических уравнений

$$U_{2q00}^{1}(R)+\frac{2r_0}{R}\Lambda_q^{(0)}(R)U_{2q00}^{0}(R)=0\,,$$

$$\frac{2r_0}{R}\left(\Lambda_q^{(0)}(R)-2\right)U_{2q00}^{1}(R)+U_{2q00}^{0}(R)=0\,.$$

Приравнивая к нулю детерминант системы алгебраических уравнений для сфероидальной постоянной разделения $\Lambda_q^{(0)}(R)$ получим следующее квадратичное уравнение:

$$\Lambda_q^{(0)}(R)\left(\Lambda_q^{(0)}(R)-2\right)=\frac{R^2}{4r_0^2}\,,$$

откуда следует, что

$$\Lambda_{1,2}^{(0)}(R)=1\pm\sqrt{1+\frac{R^2}{4r_0^2}}\,.$$

После этого, с учетом условия нормировки коэффициента $U_{nqms}^{j}(R)$ $(1.4.22)$, получим

$$U^{0}_{2q00}(R)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Lambda^{(0)}_{1,2}-2}{\Lambda^{(0)}_{1,2}-1}\right)^{1/2}, \qquad U^{1}_{2q00}(R)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Lambda^{(0)}_{1,2}}{\Lambda^{(0)}_{1,2}-1}\right)^{1/2}.$$

Далее, подставляя полученные выражения коэффициентов $U^{0}_{2q00}(R)$ и U^{1}_{2q00} в $(1.4.23)$ и пользуясь явным выражением сферического базиса задачи МИК-Кеплера $(1.2.3)$, имеем

$$\psi^{(0)}_{2q0}(\xi,\eta,\varphi;R)=\frac{e^{-\frac{R}{4r_0}(\xi+\eta)}}{4\sqrt{\pi r_o^3}}\left(\frac{\Lambda^{(0)}_{1,2}-2}{\Lambda^{(0)}_{1,2}-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{2r_0\Lambda^{(0)}_{1,2}}{R+2r_0\Lambda^{(0)}_{1,2}}(\xi-1)\right]\left[1+\frac{2r_0\Lambda^{(0)}_{1,2}}{R-2r_0\Lambda^{(0)}_{1,2}}(1+\eta)\right].$$

Этот результат также можно получить пользуясь разложением $(1.4.8)$.

5. Эффект Штарка

В основном состоянии $(n=|s|+1,\ j=|s|)$ сферическая волновая функция задачи МИК-Кеплера $(1.2.3)$ имеет вид

$$\psi^{(s)}_{m}(r,\theta,\varphi)=const\, r^{|s|}\, e^{-r/r_0(|s|+1)}\, d^{j}_{ms}(\theta)e^{i(m+s)\varphi}, \qquad (1.5.1)$$

где $m=-|s|,-|s|+1,\ldots,|s|-1,|s|$. Как видно, сферическая волновая функция основного состояния $(1.5.1)$ вырождена по азимутальному квантовому числу m и не является сферически-симметричным. Задача МИК-Кеплера даже в основном состоянии имеет отличный от нуля дипольный момент, и в присутствие внешнего электрического поля возможен линейный эффект Штарка. Радиальная волновая функция основного состояния имеет при $r=0$ узел. Поэтому имеет смысл провести более аккуратное исследование поведения связанной системы МИК-Кеплера во внешнем однородном электрическом поле с целью исследования эффекта Штарка и нахождения дипольного момента системы. Изучение этих вопросов и является целью настоящего параграфа.

Гамильтониан системы МИК-Кеплера во внешнем постоянном однородном электрическом поле имеет вид [185]

$$\hat{H}=\frac{1}{2\mu_0}\left(-i\hbar\vec{\nabla}+\frac{e}{c}\vec{A}^{(\pm)}\right)^2+\frac{\hbar^2 s^2}{2\mu_0 r^2}-\frac{e^2}{r}+|e|\,\varepsilon\, z. \qquad (1.5.2)$$

Мы приняли, что электрическое поле $\vec{\varepsilon}$ направлено в положительном, а действующая на электрон сила – в отрицательном направлении оси z. Поскольку гамильтониан $(1.5.2)$ обладает аксиальной симметрией, уравнение Шредингера системы заряд-дион во внешнем постоянном однородном электрическом поле удобно рассмотреть в параболических координатах. Таким образом, для вычисления матричных элементов

переходов между взаимно вырожденных состояний, удобно выбрать в качестве невозмущенных волновых функций параболические волновые функции $(1.2.15)$ системы МИК-Кеплера.

Нас будет интересовать матричные элементы переходов $(n_1, n_2, m) \to (n'_1, n'_2, m')$ при фиксированном значении главного квантового числа n. Так как оператор возмущения есть

$$\hat{V} = |e|\,\varepsilon\, z = \frac{1}{2}|e|\,\varepsilon(\mu - \nu), \qquad (1.5.3)$$

то согласно формулам теории возмущения, поправка первого приближения к собственному значению энергии $E_н^{(0)}$ $(1.2.8)$ есть

$$E_n^{(1)} = \int \psi_{n_1 n_2 m}^{(s)*}(\mu,\nu,\varphi)\,\hat{V}\,\psi_{n_1 n_2 m}^{(s)}(\mu,\nu,\varphi)\,dv.$$

Теперь учитывая формулы $(1.2.11)$, $(1.2.15)$ и $(1.5.3)$ имеем

$$E_n^{(1)} = \frac{|e|\,\varepsilon}{4r_0^3\, n^4}\left(\Im_{n_1, m+s}\, I_{n_2, m-s} - I_{n_1, m+s}\, \Im_{n_2, m-s}\right),$$

где

$$I_{p,q} = \int_0^\infty \left|\Phi_{p,q}(x)\right|^2 dx, \qquad \Im_{p,q} = \int_0^\infty x^2 \left|\Phi_{p,q}(x)\right|^2 dx.$$

Для вычисления приведенных интегралов мы воспользуемся формулами $(1.3.14)$ и $(1.3.15)$. В результате мы получим для интегралов $I_{p,q}$ и $\Im_{p,q}$ следующие выражения:

$$I_{p,q} = r_0\, n, \qquad \Im_{p,q} = 2(r_0\, n)^3\left[3p(p + |q| + 1) + \frac{1}{2}|q|(|q| + 3) + 1\right].$$

Теперь, пользуясь вычисленными значениями интегралов, можно найти поправку первого приближения к собственному значению энергии $(1.1.4)$

$$E_n^{(1)} = \frac{3\hbar^2 |e|\,\varepsilon}{2\mu_0\, e^2}\left[n(n_1 - n_2 + m_-) - \frac{m\,s}{3}\right]. \qquad (1.5.4)$$

Как и в случае атома водорода, линейный по n член пропорционален z – компоненте вектора Лапласа-Рунге-Ленца-Паули $(1.1.4)$. Однако имеется дополнительная, линейная по m поправка, снимающая вырождение по z – компоненте вращательного момента.

Итак, в системе заряд-дираковский дион имеется линейный эффект Штарка, полностью снимающий вырождение по азимутальному квантовому числу m.

При фиксированном значении s, согласно формуле $(1.2.19)$ две крайные компоненты расщепившегося уровня соответствуют следующие значения параболических

квантовых чисел: $n_1 = n - |s| - 1,\ n_2 = 0$ и $n_1 = 0,\ n_2 = n - |s| - 1$. Согласно $(1.5.4)$ расстояние между этими крайними уровнями есть

$$\Delta E_n = \frac{3\hbar^2 |e| \varepsilon}{\mu_0 e^2} n(n - |s| - 1),$$

т.е., как и в случае атома водорода, общее расщепление энергетического уровня при эффекте Штарка примерно пропорционально n^2.

Наличие линейного эффекта Штарка означает, что в невозмущенном состоянии связанная система заряд-дираковский дион обладает дипольным моментом со средным значением

$$\bar{d}_z = -\frac{3\hbar^2 |e|}{2\mu_0 e^2}\left[n(n_1 - n_2 + m_-) - \frac{ms}{3} \right].$$

Из выражения для среднего значения дипольного момента естественно следует следующее определение оператора дипольного момента:

$$\hat{\vec{d}} = -\frac{3\hbar^2 |e|}{2\mu_0 e^2}\left(n^2 \hat{\vec{I}} - \frac{1}{3} s \hat{\vec{J}} \right) = |e| \left(\frac{3e^2}{4E_n^{(0)}} \hat{\vec{I}} + \frac{\hbar^2 s}{2\mu_0 e^2} \hat{\vec{J}} \right).$$

В конце отметим, что все полученные нами результаты при $s = 0$ переходят в соответствующие формулы для атома водорода.

4. Заключение к первой главе

В этой главе мы рассмотрели эффект Штарка в задаче МИК-Кеплера, описывающей взаимодействие заряда с дираковским дионом. Мы нашли, что, несмотря на глубокое сходство системы заряд-дион с атомом водорода, отношение первой к эффекту Штарка качественно иное. Именно, в задаче МИК-Кеплера имеет место линейный эффект Штарка полностью снимающий вырождение по азимутальному квантовому числу m.

Заметим также, что эффект Штарка для системы заряд-дион не может быть непосредственно перенесен на систему состоящей из двух дираковсеих дионов. Во втором случае мы должны учитывать взаимодействие внешнего поля с магнитным зарядом, т.е. в случае системы двух дираковских дионов к гамильтониану $(1.3.2)$ нужно добавить возмущение обусловленное внешним магнитном полем. Иными словами, эффект Штарка системы двух дираковских дионов должен быть суперпозицией эффектов Штарка и Зеемана задачи МИК-Кеплера.

Конечно же, наличие как линейного эффкта Штарка, так и ненулевого дипольного момента системы является следствием присутствия магнитного монополя. Очевидно, что

качественно схожим поведением должна обладать и система состоящей из двух БПЗ-дионов. При этом преобразовывая уравнение Шредингера, отвечающее гамильтониану (1.3.2), в уравнение Шредингера двух БПЗ-дионов, мы получим систему возмущенную нелинейным электрическим полем. Кроме того, формальное соответствие задач МИК-Кеплера и двух БПЗ-дионов предполагает завысимость константы взаимодействия второй системы как от константы взаимодействия, так и от энергии первой.

Глава 2

Дион-осцилляторная дуальность

1. Обобщенная задача МИК-Кеплера

Модель минимально суперинтегрируемой системы, обобщенной задачи МИК-Кеплера была предложена в работе [190] и она описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu_0}\left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2\mu_0 r^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{\lambda_1}{r(r+z)} + \frac{\lambda_2}{r(r-z)}, \qquad (2.1.1)$$

где λ_1 и λ_2 неотрицательные постоянные, а векторный потенциал $\vec{A} \equiv \vec{A}^{(+)}$ определяется выражением $(1.1.2)$. Переменные в уравнение Шредингера для обобщенной задачи МИК-Кеплера разделяются в сферических, параболических и вытянутых сфероидальных координатах.

В этом параграфе мы кратко приведем основные результаты полученые в работах [190, 191], так как они нам необходимы для дальнейшего изложения результатов полученные диссертации.

1.1. Сферический базис

Сферический базис обобщенной задачи МИК-Кеплера $(2.1.1)$ имеет вид

$$\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right) = R_{nj}^{(s)}\left(r;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right) Z_{jm}^{(s)}\left(\theta,\varphi;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right), \qquad (2.1.2)$$

где нормированные условиями

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, Z_{j'm'}^{(s)*}\left(\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right) Z_{jm}^{(s)}\left(\theta,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right) d\theta\, d\varphi = \delta_{jj'}\,\delta_{mm'}, \qquad (2.1.3)$$

$$\int_0^{\infty} r^2 \left[R_{nj}^{(s)}\left(r;\,\delta_1^{(s)},\,\delta_2^{(s)}\right)\right]^2 dr = 1 \qquad (2.1.4)$$

угловая и радиальная волновые функции имеют вид

$$Z_{jm}^{(s)}\left(\theta,\varphi;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right) = N_{jm}\left(\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{m_1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{m_2} P_{j-m_+}^{(m_2,m_1)}(\cos\theta)e^{i(m+s)\varphi}, \qquad (2.1.5)$$

$$R_{nj}^{(s)}\left(r;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right) = C_{nj}\left(\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right)(2\varepsilon r)^{j+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}} e^{-\varepsilon r} F\left(-n+j+1;2j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)};2\varepsilon r\right). \qquad (2.1.6)$$

Здесь

$$m_1 = |m+s| + \delta_1^{(s)} = \sqrt{(m+s)^2 + \frac{4\mu_0\lambda_1}{\hbar^2}}, \qquad (2.1.7)$$

$$m_2 = |m-s| + \delta_2^{(s)} = \sqrt{(m-s)^2 + \frac{4\mu_0 \lambda_2}{\hbar^2}}\,, \qquad (2.1.8)$$

$$N_{jm}\left(\delta_1^{(s)}, \delta_2^{(s)}\right) = (-1)^{\frac{m-s+|m-s|}{2}} \sqrt{\frac{\left(2j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}+1\right)(j-m_+)!\,\Gamma\left(j+m_+ +\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}+1\right)}{4\pi\,\Gamma\left(j+m_- +\delta_1^{(s)}+1\right)\Gamma\left(j-m_- +\delta_2^{(s)}+1\right)}}\,, \qquad (2.1.9)$$

$$C_{nj}\left(\delta_1^{(s)}, \delta_2^{(s)}\right) = \frac{2\varepsilon^2\sqrt{r_0}}{\Gamma\left(2j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}+2\right)} \sqrt{\frac{\Gamma\left(n+j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}+1\right)}{(n-j-1)!}}\,, \qquad (2.1.10)$$

$$\varepsilon = \sqrt{-\frac{2\mu_0 E}{\hbar^2}} = \frac{1}{r_0\left(n+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)}\,, \qquad (2.1.11)$$

а обозначение $m_\pm$ определено соотношением (1.2.7).

Собственные значения энергии E обобщенной задачи МИК-Кеплера определяется формулой

$$E \equiv E_n^{(s)} = -\frac{\mu_0 e^4}{2\hbar^2\left(n+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)^2}\,. \qquad (2.1.12)$$

Квантовые числа n, j и m принимают следующие значения: $n = |s|+1, |s|+2, \ldots,$ $j = m_+, m_+ +1, \ldots, n-1$, а $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$.

Квантовые числа j и m характеризуют полный момент системы и его проекция на ось z. Для (полу)целых s j и m также (полу)целые числа.

Отметим также, что сферическая волновая функция обобщенной задачи МИК-Кеплера $(2.1.2)$ является собственной функцией системы коммутирующих операторов $\left\{\hat{H}, \hat{M}, \hat{J}_z\right\}$ и имеют место следующие спектральные задачи:

$$\hat{H}\,\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right) = -\frac{\mu_0 e^4}{2\hbar^2\left(n+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)^2}\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right), \qquad (2.1.13)$$

$$\hat{M}\,\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right) = \left(j+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)\left(j+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}+1\right)\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right), \qquad (2.1.14)$$

$$\hat{J}_z\,\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right) = -\left(s+i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right) = m\,\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\delta_1^{(s)};\delta_2^{(s)}\right), \qquad (2.1.15)$$

где

$$\hat{M} = \hat{J}^2 + \frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\frac{\lambda_1}{1+\cos\theta} + \frac{\lambda_2}{1-\cos\theta}\right). \qquad (2.1.16)$$

Здесь $\hat{J}^2$ квадрат оператора полного момента $(1.1.3)$.

1.2. Параболический базис

Нормированая на единицу полную волновую функцию обобщенной системы МИК-Кеплера в параболических координатах можно представить в виде [190]

$$\psi^{(s)}_{n_1 n_2 m}\left(\mu,\nu,\varphi;\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right) = \varepsilon^2\sqrt{\frac{r_0}{\pi}}\;\Phi^{(s)}_{n_1 m_1}\left(\mu;\delta_1^{(s)}\right)\Phi^{(s)}_{n_2 m_2}\left(\nu;\delta_2^{(s)}\right)e^{i(m+s)\varphi}, \qquad (2.1.17)$$

где

$$\Phi^{(s)}_{n_i m_i}\left(t_i,\delta_i^{(s)}\right) = \sqrt{\frac{\Gamma(n_i+m_i+1)}{(n_i)!}}\,\frac{e^{-\frac{\varepsilon t_i}{2}}\left(\varepsilon t_i\right)^{\frac{m_i}{2}}}{\Gamma(m_i+1)}F\left(-n_i;\,m_i+1;\,\varepsilon t_i\right), \qquad (2.1.18)$$

причем $i = 1, 2$ и $t_1 = \mu$ а $t_2 = \nu$. Здесь n_1 и n_2 неотрицательные целые числа и равны

$$n_1 = -\frac{|m+s| + \delta_1^{(s)} + 1}{2} + \frac{\sqrt{\mu_0}}{2\varepsilon\hbar}\Omega^{(s)} + \frac{1}{2r_0\varepsilon}, \qquad (2.1.19)$$

$$n_2 = -\frac{|m-s| + \delta_2^{(s)} + 1}{2} - \frac{\sqrt{\mu_0}}{2\varepsilon\hbar}\Omega^{(s)} + \frac{1}{2r_0\varepsilon}. \qquad (2.1.20)$$

Здесь $\Omega^{(s)}$ - постоянная разделения в параболических координатах. Теперь учитывая $(2.1.12)$, из последных соотношений получим, что параболические кватнтовые числа n_1 и n_2 связаны с главным квантовым числом n, как и в случае задачи МИК-Кеплера (см. $(1.2.19)$), следующим образом

$$n = n_1 + n_2 + m_+ + 1. \qquad (2.1.21)$$

В конце отметим, что параболический базис $(2.1.17)$ является собственной функцией как оператора Гамильтон $(2.1.1)$ и z-компоненты полного момента $(1.1.3)$, так и оператора

$$\hat{\Omega}^{(s)} = \hat{I}_z + \frac{\mu_0}{\hbar^2}\left[\lambda_1\frac{r-z}{r(r+z)} - \lambda_2\frac{r+z}{r(r-z)}\right], \qquad (2.1.22)$$

где $\hat{I}_z$ z-компонента аналога вектора Лапласа-Рунге-Ленца-Паули $(1.1.4)$. Собственным значением оператора $(2.1.22)$ является параболическая постоянная разделения Ω, явный вид которого есть

$$\Omega^{(s)} = \frac{\hbar\varepsilon}{\sqrt{\mu_0}}\left(n_1 - n_2 + m_- + \frac{\delta_1^{(s)} - \delta_2^{(s)}}{2}\right). \qquad (2.1.23)$$

Выражение $(2.1.23)$ получается из соотношений $(2.1.19)$ и $(2.1.20)$ с учетом соотношения $(2.1.11)$.

В конце отметим, что все формулы полученные выше указывают на то, что они могут быть получены из соответствующих формул для задачи МИК-Кеплера с помощью следующих анзацов:

$$n \to n + \frac{\delta_1^{(s)} + \delta_2^{(s)}}{2}, \qquad j \to j + \frac{\delta_1^{(s)} + \delta_2^{(s)}}{2},$$
$$|m+s| \to |m+s| + \delta_1^{(s)} \equiv m_1, \qquad |m-s| \to |m-s| + \delta_2^{(s)} \equiv m_2. \tag{2.1.24}$$

Тогда взаимные разложения параболического и сферического базисов обобщенной задачи МИК-Кеплера будут иметь вид

$$\psi_{n_1 n_2 m}^{(s)}\left(\mu,\nu,\varphi;\, \delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right) = \sum_{j=m_+}^{n-1} W_{nn_1ms}^{j}\left(\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\, \delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right),$$

$$\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\, \delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right) = \sum_{n_1=0}^{n-m_+-1} \widetilde{W}_{nn_1ms}^{j}\left(\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)\psi_{n_1 n_2 m}^{(s)}\left(\mu,\nu,\varphi;\, \delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right),$$

где согласно формулам $(2.1.24)$, $(1.3.21)$ и $(1.3.24)$ для коэффициентов $W_{nn_1ms}^{j}\left(\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)$ и $\widetilde{W}_{nn_1ms}^{j}\left(\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)$ получим выражения

$$W_{nn_1ms}^{j}\left(\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right) = (-1)^{n_1+\frac{m-s+|m-s|}{2}}\, C_{\frac{n_1+n_2+m_2}{2},\frac{n_2-n_1+m_2}{2};\frac{n_1+n_2+m_1}{2},\frac{n_1-n_2+m_1}{2}}^{j+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2},\frac{m_1+m_2}{2}},$$

$$\widetilde{W}_{nn_1ms}^{j}\left(\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right) = (-1)^{n_1+\frac{m-s+|m-s|}{2}}\, C_{\frac{n-m_-+\delta_2^{(s)}-1}{2},\frac{n-m_-+\delta_2^{(s)}-1}{2}-n_1;\frac{n+m_-+\delta_1^{(s)}-1}{2},\frac{m_++|m+s|+\delta_1^{(s)}-n+1}{2}+n_1}^{j,m_+},$$

которые с точностью до фазового множителя $(-1)^{n_1+\frac{m-s+|m-s|}{2}}$ совпадают с коэффициентами Клебша-Гордана группы $SU(2)$, по своим индексам аналитически продолженные в область реальных чисел [136].

1.3. Сфероидальный базис

Поступая аналогичным образом, что и, в четвертом параграфе первой главы, при построении сфероидального базиса задачи МИК-Кеплера, получим, что сферодальный базис обобщенной задачи МИК-Кеплера является собственной функцией оператора

$$\hat{\Lambda} = \hat{M} + \frac{R\sqrt{\mu_0}}{\hbar}\,\hat{\Omega}^{(s)}, \tag{2.1.25}$$

т.е.

$$\hat{\Lambda}\psi_{nqm}^{(s)}\left(\xi,\eta,\varphi;R,\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)=\Lambda_q\left(R,\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)\psi_{nqm}^{(s)}\left(\xi,\eta,\varphi;R,\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right), \qquad (2.1.26)$$

где операторы $\hat{M}$ и $\hat{\Omega}^{(s)}$ определяются выражениями $(2.1.16)$ и $(2.1.22)$, индекс q нумерует собственные значения оператора $\hat{\Lambda}$ и меняется в области $0\le q\le n-m_+-1$. Сфероидальный базис обобщенной задачи МИК-Кеплера, при фиксированном значении энергии, можно представить как квантовую смесь сферического и параболического базисов:

$$\psi_{nqm}^{(s)}\left(\xi,\eta,\varphi;R,\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)=\sum_{j=m_+}^{n-1}U_{nqms}^{j}\left(R,\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)\psi_{njm}^{(s)}\left(r,\theta,\varphi;\ \delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right), \qquad (2.1.27)$$

$$\psi_{nqm}^{(s)}\left(\xi,\eta,\varphi;R,\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)=\sum_{n_1=0}^{n-m_+-1}V_{nqms}^{n_1}\left(R,\delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right)\psi_{n_1n_2m}^{(s)}\left(\mu,\nu,\varphi;\ \delta_1^{(s)},\delta_2^{(s)}\right), \qquad (2.1.28)$$

Коэффициенты разложений $(2.1.27)$, $(2.1.28)$ U_{nqms}^{j} и $V_{nqms}^{n_1}$ определяются из следующих трехчленных рекуррентных соотношений

$$\left[\left(j+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}\right)\left(j+\frac{\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}{2}+1\right)+\frac{R\left(m_1+m_2\right)\left(m_1-m_2\right)}{r_0\left(2j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}\right)\left(2j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}+2\right)}-\right.$$

$$(2.1.29)$$

$$\left.-\Lambda_q\left(R,\ \delta_1^{(s)},\ \delta_2^{(s)}\right)\right]U_{nqms}^{j}=\frac{2R}{r_0\left(2n+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}\right)}\left[A_{nm}^{j+1}\,U_{nqms}^{j+1}+A_{nm}^{j}\,U_{nqms}^{j-1}\right],$$

$$\left[\left(n_1+|m+s|+\delta_1^{(s)}\right)\left(n_2+|m-s|+\delta_2^{(s)}+1\right)+m_-\left(m_-+\delta_1^{(s)}-\delta_2^{(s)}-1\right)+n_2\left(n_1+1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\delta_1^{(s)}-\delta_2^{(s)}\right)\left(\delta_1^{(s)}-\delta_2^{(s)}-2\right)+\frac{R\left(2n_1-2n_2+m_1-m_2\right)}{r_0\left(2n+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}\right)}-\Lambda_q\left(R,\ \delta_1^{(s)},\ \delta_2^{(s)}\right)\right]V_{nqms}^{n_1}=$$

$$(2.1.30)$$

$$=\sqrt{n_2\left(n_1+1\right)\left(n_1+|m+s|+\delta_1^{(s)}+1\right)\left(n_2+|m-s|+\delta_2^{(s)}\right)}\,V_{nqms}^{n_1+1}+$$

$$+\sqrt{n_1\left(n_2+1\right)\left(n_1+|m+s|+\delta_1^{(s)}\right)\left(n_2+|m-s|+\delta_2^{(s)}+1\right)}\,V_{nqms}^{n_1-1},$$

где

$$A_{nm}^{j}=\frac{2\sqrt{\left(j-m_+\right)\left(n-j\right)\left(j+m_++\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}\right)}}{2j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}}\times$$

$$(2.1.31)$$

$$\times\left[\frac{\left(j+m_{-}+\delta_1^{(s)}\right)\left(j-m_{-}+\delta_2^{(s)}\right)\left(n+j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}\right)}{\left(2j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}-1\right)\left(2j+\delta_1^{(s)}+\delta_2^{(s)}+1\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Рекуррентные соотношения $(2.1.30)$ и $(2.1.31)$ нужно решить совместно с условиями

$$\sum_{j=m_+}^{n-1}\left|U_{nqms}^{j}\left(R,\,\delta_1^{(s)},\,\delta_2^{(s)}\right)\right|^2=1,\qquad \sum_{n_1=0}^{n-m_+-1}\left|V_{nqms}^{n_1}\left(R,\,\delta_1^{(s)},\,\delta_2^{(s)}\right)\right|^2=1. \qquad (2.1.32)$$

В конце следует отметить, что обобщенная задача МИК-Кеплера при некоторых значениях квантового числа s и параметров λ_1 и λ_2 переходит в следующие системы:

- Задачу Кеплера-Кулона, при $s=\lambda_1=\lambda_2=0$.
- Обобщенную систему Кеплера-Кулона [136], при $s=0$, а $\lambda_1\neq\lambda_2\neq 0$.
- Потенциал Хартмана [196, 197, 198], при $s=0$, а $\lambda_1=\lambda_2\neq 0$.
- Задачу МИК-Кеплера [100, 101], при $s\neq 0$, а $\lambda_1=\lambda_2=0$.

2. Дион-осцилляторная дуальность

В этом параграфе мы покажем, что обобщенная задача МИК-Кеплера дуальна четырехмерному двойному сингулярному осциллятору [186]. Уравнение Шредингера обобщенной задачи МИК-Кеплера $(2.1.1)$ в сферических координатах $(1.2.1)$ имеет вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi^{(s)}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi^{(s)}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi^{(s)}}{\partial\varphi^2}\right]-\frac{2is}{r^2(1-\cos\theta)}\frac{\partial\psi^{(s)}}{\partial\varphi}-$$

$$-\frac{2s^2}{r^2\left(1-\cos\theta\right)}\psi^{(s)}+\frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{r}-\frac{\lambda_1}{r^2\left(1+\cos\theta\right)}-\frac{\lambda_2}{r^2\left(1-\cos\theta\right)}\right]\psi^{(s)}=0. \qquad (2.2.1)$$

Теперь, если в уравнение $(2.2.1)$ совершить следующие замены

$$\psi^s\left(\vec{r}\right)\to\psi\left(\vec{r},\gamma\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\psi^{(s)}\left(\vec{r}\right)e^{is(\gamma-\varphi)},\qquad s\to -i\frac{\partial}{\partial\gamma}, \qquad (2.2.2)$$

где $\gamma\in[0,4\pi)$, то уравнение $(2.2.1)$ перейдет в уравнение

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\hat{L}^2}{r^2}\right]\psi+\frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{r}-\frac{\lambda_1}{r^2\left(1+\cos\beta\right)}-\frac{\lambda_2}{r^2\left(1-\cos\beta\right)}\right]\psi=0, \qquad (2.2.3)$$

где

$$\hat{L}^2=-\left[\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{\sin^2\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\right]. \qquad (2.2.4)$$

Здесь мы ввели следующие обозначения: $\beta = \theta$, а $\alpha = \varphi$. Далее, переходя от координат r, α, β и γ к координатам

$$u_0 + iu_1 = u\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \qquad u_2 + iu_3 = u\sin\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \qquad (2.2.5)$$

так, что $u^2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3{}^2 = r$ и учитывая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial u_\mu^2} = \frac{1}{u^3}\frac{\partial}{\partial u}\left(u^3\frac{\partial}{\partial u}\right) - \frac{4}{u^2}\hat{L}^2, \qquad (2.2.6)$$

где $\mu = 0, 1, 2, 3$ и вводя обозначения

$$\in = 4e^2, \quad E = -\frac{\mu_0\omega^2}{8}, \quad c_i = 2\lambda_i \qquad (2.2.7)$$

то уравнение $(2.2.3)$ перейдет в уравнение

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u_\mu^2} + \frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\in - \frac{\mu_0\omega^2 u^2}{2} - \frac{c_1}{u_0^2 + u_1^2} - \frac{c_2}{u_2^2 + u_3^2}\right)\right]\psi(u) = 0. \qquad (2.2.8)$$

Квантовомеханическую систему, которую описывает четырехмерное уравнение Шредингера $(2.2.8)$ и дуальная обобщенной задаче МИК-Кеплера в дальнейшем назовем четырехмерным двойным сингулярным осциллятором.

Теперь установим связь между декартовыми координатам x, y, z и координатами u_0, u_1, u_2 и u_3. Из определения координат u_μ $(2.2.5)$ и учитывая, что $r = u^2$, $\theta = \beta$, и $\varphi = \alpha$, получим следующие соотношения

$$\cos\theta = \frac{u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2}{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \qquad \sin\theta = \frac{2\sqrt{(u_0^2 + u_1^2)(u_2^2 + u_3^2)}}{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{u_0u_2 - u_1u_3}{\sqrt{(u_0^2 + u_1^2)(u_2^2 + u_3^2)}}, \qquad \sin\varphi = \frac{u_0u_3 + u_1u_2}{\sqrt{(u_0^2 + u_1^2)(u_2^2 + u_3^2)}}.$$

Далее, подставляя последние соотношения в $(1.2.1)$ и запоминая тождетство Эйлера $r = u^2$, получим

$$\begin{aligned} x + iy &= (u_0 + iu_1)(u_2 + iu_3), \\ z &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \\ \gamma &= \frac{i}{2}\ln\frac{(u_0 - iu_1)(u_2 + iu_3)}{(u_0 + iu_1)(u_2 - iu_3)}. \end{aligned} \qquad (2.2.9)$$

Первые два соотношения $(2.2.9)$ представляют преобразование $IR^4 \to IR^3$, использованные Кустаанхеймо и Штифелем для регуляризации уравнений небесной механики [79], и

называются преобразованием Кустанхеймо и Штифеля (KS-преобразование), а соотношения $(2.2.9)$ мы назавем обобщенной версией KS-преобразования.

Таким образом мы доказали, что связанная обобщенная система МИК-Кеплера дуальна четырехмерному двойному сингулярному осциллятору.

3. О преобразовании Кустаанхеймо-Штифеля

В предыдущем параграфе мы показали, что обобщенная задача МИК-Кеплера дуальна четырехмерному двойному сингулярному осциллятору и, что преобразованием дуальности является обобщенная версия KS-преобразования $(2.2.9)$, дополненное анзацем $\psi^{(s)}(\vec{r}) \to \psi(\vec{r}, \gamma)$, $s \to -i\,\partial/\partial\gamma$. Теперь, прежде чем перейти к исследованию уравнения Шредингера четырехмерного двойного сингулярного осциллятора, рассмотрим некоторые свойства KS-преобразования.

Первые два уравнения соотношения $(2.2.9)$ из себя представляют небиективное квадратичное преобразование $IR^4 \to IR^3$, которое каждой точке (u_0, u_1, u_2, u_3) четырехмерного пространства IR^4 ставит в соответствие точку (x, y, z) трехмерного пространства IR^3 и можно записать в виде [74]:

$$X = H(u; 4)U\,, \tag{2.3.1}$$

где через X и U обозначены векторы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{pmatrix}, \tag{2.3.2}$$

а матрица $H(u; 4)$ имеет вид

$$H(u; 4) = \begin{pmatrix} u_2 & -u_3 & u_0 & -u_1 \\ u_3 & u_2 & u_1 & u_0 \\ u_0 & u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_1 & -u_0 & -u_3 & u_0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.3}$$

Легко проверить, что матрица $H(u; 4)$ удовлетворяет следующему условию

$$H_{\mu\lambda}(u; 4)\, H^T_{\lambda\nu}(u; 4) = u^2\ \delta_{\mu\nu}\,, \tag{2.3.4}$$

которое гарантирует соблюдение тождества Эйлера $r = u^2$. Действительно, из соотношения

$$X^T\ X = U^T\ H^T(u;4)\,H(u;4)\,U$$

с учетом $(2.3.3)$ имеем, что

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \left(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)^2 = u^4.$$

Для дифференциальных элементов имеем

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 & -u_3 & u_0 & -u_1 \\ u_3 & u_2 & u_1 & u_0 \\ u_0 & u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_1 & -u_0 & -u_3 & u_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_0 \\ du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix}. \qquad (2.3.5)$$

Из $(2.3.4)$ и $(2.3.5)$ следует, что

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 4u^2\left(du_0^2 + du_1^2 + du_2^2 + du_3^2\right).$$

Для частных производных имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \\ \hat{X}/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 & -u_3 & u_0 & -u_1 \\ u_3 & u_2 & u_1 & u_0 \\ u_0 & u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_1 & -u_0 & -u_3 & u_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial u_0 \\ \partial/\partial u_1 \\ \partial/\partial u_2 \\ \partial/\partial u_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.3.6)$$

где

$$\hat{X} = u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} - u_0 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_3}. \qquad (2.3.7)$$

Из $(2.3.6)$ получим следующую связь между оператором Лапласа Δ в IR^3 и оператором Лапласа Δ_4 в IR^4:

$$\Delta = \frac{1}{4u^2}\Delta_4 - \frac{1}{4u^4}\hat{X}^2. \qquad (2.3.8)$$

Теперь установим связь между дифференциальными элементами объемов в пространствах IR^4 и IR^3. Это удобнее всего сделать в эйлеровых координатах, которые определяютсз следующим образом:

$$u_0 + i\,u_1 = u\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \qquad u_2 + i\,u_3 = u\sin\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}, \qquad (2.3.9)$$

где $u \in [0,\infty)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in [0, \pi]$, $\gamma \in [0, 4\pi)$. Дифференциальные элементы длины и объема в эйлеровых координатах инеют вид:

$$d\,l_4^2 = d\,u^2 + \frac{u^2}{4}\left(d\,\alpha^2 + d\,\beta^2 + d\,\gamma^2 + 2\cos\beta\,d\,\alpha\,d\,\gamma\right),$$

$$(2.3.10)$$

$$d\,v_4 = \frac{u^3}{8}\sin\beta\, du\; d\alpha\; d\beta\; d\gamma.$$

Из определения эйлеровых координат $(2.3.9)$ непосредственно следует, что

$$\gamma = \frac{i}{2}\ln\frac{(u_0 - iu_1)(u_2 + iu_3)}{(u_0 + iu_1)(u_2 - iu_3)}.$$

Исходя из последнего соотношения мы получим, что оператор $\hat{X}$ $(2.3.7)$ в эйлеровых координатах принимает простой вид

$$\hat{X} = -2\frac{\partial}{\partial\gamma}. \qquad (2.3.11)$$

Теперь пользуясь KS-преобразованием $(2.2.9)$ легко установить, что эйлеровые координаты u, α, β и γ связаны с трехмерными сферическими координатами r, θ и φ следующим образом:

$$r = u^2, \qquad \theta = \beta, \qquad \varphi = \alpha. \qquad (2.3.12)$$

Тогда дифференциальный элемент четырехмерного объема $(2.3.10)$ можно записать в виде

$$d\,v_4 = \frac{u^3}{8}\sin\beta\, du\; d\alpha\; d\beta\; d\gamma = \frac{r}{16}\sin\theta\, dr\; d\theta\, d\varphi\, d\gamma.$$

Далее, сравнивая последнее соотношение с формулой для трехмерного объема в сферических координатах $(1.2.1)$

$$dv_3 = r^2\sin\theta\; dr\, d\theta\, d\varphi$$

установим, что

$$dv_4 = \frac{1}{16r}dv_3\; d\gamma. \qquad (2.3.13)$$

Формула $(2.3.13)$ позволяет также установить связь между объемными интегралами в пространствах IR^4 и IR^3. Интегрирование по переменной γ от 0 до 4π приводит к соотношению

$$\int_{IR^4}\cdots dv_4 = \frac{\pi}{4}\int_{IR^3}\cdots\frac{1}{r}dv_3. \qquad (2.3.14)$$

Теперь напишем вид четырехмерного оператора Лапласа Δ_4 в координатах (x, y, z, γ). Для этого воспользуемся явным видом оператора Δ_4 в эйлеровых координатах $(2.2.6)$. С учетом $(2.3.11)$ легко установить, что

$$\frac{1}{u^3}\frac{\partial}{\partial u}\left(u^3\frac{\partial}{\partial u}\right)=4u^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right],$$

$$\hat{L}^2=\hat{l}^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\gamma}-\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right),$$

где

$$\hat{l}^2=-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

есть квадрат оператора орбитального момента. Таким образом, для четырехмерного оператора Лапласа Δ_4 получим выражение

$$\Delta_4=4u^2\left[\Delta_3-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\gamma}-\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\right]. \qquad (2.3.15)$$

Далее, учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$$

соотношение $(2.3.15)$ можно записать в виде

$$\frac{1}{4u^2}\Delta_4=\left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{yz}{r\left(r^2-z^2\right)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial y}-\frac{xz}{r\left(r^2-z^2\right)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right]^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}.$$

Таким образом мы нашли явное выражение четырехмерного оператора Лапласа Δ_4 в координатах (x, y, z, γ), которые являются координами четырехмерного пространства IR^4 представленное в виде прямого произведения трехмерного пространства IR^3 и одномерной сферы S^1, т.е. $IR^4=IR^3\otimes S^1$.

4. Четырехмерный двойной сингулярный осциллятор

Теперь приступим к исследованию четырехмерного двойного сингулярного осциллятора $(2.2.8)$ в эйлеровых, двойных полярных и сфероидальных координатах.

4.1. Эйлеровый базис

Решение уравнения Шредингера четырехмерного двойного сингулярного осциллятора $(2.2.8)$ в эйлеровых координатах $(2.2.5)$ будем искать в виде

$$\psi(u,\ \alpha,\beta,\gamma)=R(u)\,Z(\alpha,\beta,\gamma). \qquad (2.4.1)$$

После подстановки $(2.4.1)$ переменные в уеавнение Шредингера $(2.2.8)$ разделяются и мы получаем следующую, связанную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{2(1+\cos\beta)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^2-\frac{2\mu_0 c_1}{\hbar^2}\right]Z+$$

$$(2.4.2)$$

$$+\frac{1}{2(1-\cos\beta)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^2-\frac{2\mu_0 c_2}{\hbar^2}\right]Z=-\lambda(\lambda+1)Z,$$

$$\frac{1}{u^3}\frac{d}{du}\left(u^3\frac{dR}{du}\right)-\frac{4}{u^2}\lambda(\lambda+1)R+\frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\varepsilon-\frac{\mu_0\omega^2u^2}{2}\right)R=0, \qquad (2.4.3)$$

где неотрицательная постоянная разделения в эйлеровых координатах $\lambda(\lambda+1)$ есть собственное значение оператора

$$\hat{A}=\hat{L}^2+\frac{\mu_0}{\hbar^2}\left(\frac{c_1}{1+\cos\beta}+\frac{c_2}{1-\cos\beta}\right), \qquad (2.4.4)$$

где оператор $\hat{L}^2$ определен выражением $(2.2.4)$, а оператор $\hat{A}$ в четырехмерных декартовых координатах u_i имеет вид

$$\hat{A}=-\frac{1}{4}\left(u^2\Delta_4-u_i u_j\frac{\partial^2}{\partial u_i\,\partial u_j}-3u_i\frac{\partial}{\partial u_i}\right)+\frac{\mu_0 u^2}{2\hbar^2}\left(\frac{c_1}{u_0^2+u_1^2}+\frac{c_2}{u_2^2+u_3^2}\right). \qquad (2.4.5)$$

Таким образом мойно сказать, что полная волновая функция четырехмерного двойного сингулярного осциллятора $(2.4.1)$ является собственной функцией следующих коммутирующих операторов $\{\hat{H},\ \hat{A},\ \hat{L}_3,\ \hat{L}_3'\}$. Операторы $\hat{L}_3$ и $\hat{L}_3'$ определяются следующим образом:

$$\hat{L}_3\psi=-i\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=M\psi, \qquad \hat{L}_3'\psi=-i\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=M'\psi, \qquad (2.4.6)$$

где квантовые числа M и M' одновременно принимают целые или полуцелые значения, в противном случае при одновременном преобразованиях $\alpha\to\alpha+2\pi$ и $\gamma\to\gamma+2\pi$ полная волновая функция меняла бы знак.

Из выше сказанного следует, что решение уравнения $(2.4.2)$ надо искать в следующем виде:

$$Z(\alpha,\beta,\gamma)=\Phi(\beta)e^{iM\alpha}\,e^{iM\gamma}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение $(2.4.2)$ и учитывая спектральные задачи $(2.4.6)$ для функции $\Phi(\beta)$получим уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{d\beta^2}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\frac{d\Phi}{d\beta}-\frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{1+\cos\beta}+\frac{M_2^2}{1-\cos\beta}\right)\Phi+\lambda(\lambda+1)\Phi=0, \qquad (2.4.7)$$

где

$$M_{1,2}=|M\pm M'|+\delta_{1,2}=\sqrt{(M\pm M')^2+\frac{2\mu_0}{\hbar^2}c_{1,2}}. \qquad (2.4.8)$$

В уравнение $(2.4.7)$ удобно перейти к новой переменной $y=(1-\cos\beta)/2\in[0,1]$ и решение искать в виде

$$\Phi(y)=y^{\frac{M_2}{2}}(1-y)^{\frac{M_1}{2}}\,W(y).$$

Подставляя последнее соотношение в $(2.4.7)$ получим гипергеометрическое уравнение

$$y(1-y)\frac{d^2W}{du^2}+[c-(a+b+1)y]\frac{dW}{dy}-abW=0 \qquad (2.4.9)$$

с

$$a=-\lambda+\frac{M_1+M_2}{2}, \qquad b=\lambda+\frac{M_1+M_2}{2}+1, \qquad c=M_2+1.$$

Таким образом находим, что

$$\Phi(\beta)=\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{M_1}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{M_2}{}_2F_1\left(-\lambda+\frac{M_1+M_2}{2},\lambda+\frac{M_1+M_2}{2}+1;M_2+1;\frac{1-\cos\beta}{2}\right).$$

Эта функция является регулярным решением уравнения $(2.4.7)$ при $\beta=\pi$, ряд ${}_2F_1$ конечный, т.е.

$$-\lambda+\frac{M_1+M_2}{2}=-\lambda+M_++\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)=-n_\beta,$$

где $n_\beta=0,1,2,\ldots$. Далее, после обозначения

$$L=n_\beta+M_+=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots,$$

мы получим, что

$$\lambda=L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}, \qquad (2.4.10)$$

а нормированные условием

$$\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{4\pi}\sin\beta\,\left|Z_{LMM'}(\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2)\right|^2\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma=1$$

угловаз волновая функция $Z_{LMM'}(\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2)$ будет иметь вид

$$Z_{LMM'}(\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2)=N_{LMM'}(\delta_1,\delta_2)\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{M_1}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{M_2}\times$$

$$\times\ {}_2F_1\left(-L+M_+,\, L+M_++\delta_1+\delta_2+1;\, M_2+1;\, \frac{1-\cos\beta}{2}\right) e^{iM\alpha}\ e^{iM'\gamma}\,, \tag{2.4.11}$$

где

$$N_{LMM'}(\delta_1,\delta_2)=(-1)^{\frac{M-M'+|M-M'|}{2}}\ \sqrt{\frac{(2L+\delta_1+\delta_2+2)\,\Gamma(L+M_++\delta_1+\delta_2+1)\,\Gamma(L-M_-+\delta_2+1)}{16\,\pi^2\ (L-M_+)!\,\Gamma(L+M_-+\delta_2+1)}}\,,$$

а

$$M_\pm=\frac{|M+M'|\pm|M-M'|}{2}. \tag{2.4.12}$$

Далее, пользуясь формулой [199]

$${}_2F_1\left(-n,\, n+a+b+1;\, a+1;\, \frac{1-y}{2}\right)=\frac{n!\,\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)}\,P_n^{(a,\,b)}(y), \tag{2.4.13}$$

где $P_n^{(a,\,b)}(y)$- полином Якоби, угловую волновую функцию $(2.4.11)$ можно записать в следующем виде

$$Z_{LMM'}(\alpha,\,\beta,\,\gamma;\,\delta_1,\,\delta_2)=\overline{N}_{LMM'}(\delta_1,\,\delta_2)\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{M_1}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{M_2}P_{L-M_+}^{(M_2,\,M_1)}(\cos\beta)\,e^{iM\alpha}\ e^{iM'\gamma}. \tag{2.4.14}$$

Здесь постоянная нормировки $\overline{N}_{LMM'}(\delta_1,\,\delta_2)$ имеет вид

$$\overline{N}_{LMM'}(\delta_1,\,\delta_2)=(-1)^{\frac{M-M'+|M-M'|}{2}}\ \sqrt{\frac{(2L+\delta_1+\delta_2+2)\,(L-M_-)!\,\Gamma(L+M_++\delta_1+\delta_2+1)}{16\,\pi^2\ \Gamma(L+M_-+\delta_1+1)\,\Gamma(L-M_-+\delta_2+1)}}\,. \tag{2.4.15}$$

Теперь вернемся к радиальному уравнению $(2.4.3)$. После подстановки $(2.4.10)$ в $(2.4.3)$ получим уравнение

$$\frac{d^2R}{du^2}+\frac{3}{u}\frac{dR}{du}-\frac{4}{u^2}\left(L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\left(L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}+1\right)R+\frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\varepsilon-\frac{\mu_0\,\omega^2\,u^2}{2}\right)R=0. \tag{2.4.16}$$

Решение уравнения $(2.4.16)$ ищем в следующем виде

$$R(u)=(a\,u)^{2L+\delta_1+\delta_2}\ e^{-\frac{a^2u^2}{2}}\ f(u), \tag{2.4.17}$$

где $a=\sqrt{\mu_0\,\omega/\hbar}$. Теперь подставляя $(2.4.17)$ в $(2.4.16)$, мы для функции $f(u)$ получим уравнение вырожденной гипергеометрической функции:

$$z\frac{d^2f}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{df}{dz}-\alpha\ f(z)=0, \tag{2.4.18}$$

где $z=a^2\,u^2$, а

$$\alpha = L + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \frac{\varepsilon}{2\hbar\omega} + 1, \qquad \gamma = 2L + \delta_1 + \delta_2 + 2.$$

Далее, вводя радиальное квантовое число

$$n_u = \frac{\varepsilon}{2\hbar\omega} - L - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - 1,$$

где $n_u = 0, 1, 2, \ldots,$ для энергетического спекра четырехмерного двойного сингулярного осциллятора получим следующее выражение

$$\varepsilon_N(\delta_1, \delta_2) = \hbar\,\omega\,(N + \delta_1 + \delta_2 + 2). \tag{2.4.19}$$

Здесь $N = 2(n_u + L) = 0, 1, 2, \ldots$ есть главное квантовое число.

Тогда, нормированное условием

$$\int_0^\infty u^3\, R_{N'L}(u, \delta_1, \delta_2)\, R_{NL}(u\,\delta_1, \delta_2)\, du = \delta_{NN'} \tag{2.4.20}$$

радиальная волновая функция будет иметь вид

$$R_{NL}(u, \delta_1, \delta_2) = C_{NL}(\delta_1, \delta_2)\,(a\,u)^{2L+\delta_1+\delta_2}\, e^{-\frac{a^2 u^2}{2}}\, F\left(-\frac{N}{2} + L;\, 2L + \delta_1 + \delta_2 + 2;\, a^2 u^2\right), \tag{2.4.21}$$

где постоянная нормировки определяется выражением

$$C_{NL}(\delta_1, \delta_2) = \frac{a^2\sqrt{2}}{\Gamma(2L + \delta_1 + \delta_2 + 2)} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + L + \delta_1 + \delta_2 + 2\right)}{\left(\frac{N}{2} - L\right)!}}\,. \tag{2.4.22}$$

Таким образом, нормированную на единицу

$$\int \left|\psi_{NLMM'}(u, \alpha, \beta, \gamma; \delta_1, \delta_2)\right|^2 d\,v = 1$$

полную волновую функцию четырехмерного двойного сингулярного осциллятора в эйлеровых координатах можно записать в виде

$$\psi_{NLMM'}(u, \alpha, \beta, \gamma; \delta_1, \delta_2) = R_{NL}(u; \delta_1, \delta_2)\, Z_{LMM'}(\alpha, \beta, \gamma; \delta_1, \delta_2), \tag{2.4.23}$$

где радиальная $R_{NL}(u; \delta_1, \delta_2)$ и угловая $Z_{LMM'}(\alpha, \beta, \gamma; \delta_1, \delta_2)$ волновые функции определены соотношениями $(2.4.14)$, $(2.4.15)$, $(2.4.21)$ и $(2.4.22)$.

В конце, для полноты изложения, приведем явное выражение проблемы на собственные функции и собственные значения оператора $\hat{A}$ $(2.4.4)$, т.е.

$$\hat{A}\psi_{NLMM'} = \lambda(\lambda + 1)\,\psi_{NLMM'} = \left(L + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)\left(L + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + 1\right)\psi_{NLMM'}, \tag{2.4.24}$$

где значение постоянной λ определено соотношением $(2.4.10)$.

4.2. Двойной полярный базис

Теперь рассмотрим четырехмерный двойной сингулярный осциллятор в двойных полярных координатах. Двойные полярные координаты $\rho_1, \rho_2 \in [0, \infty)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ определяются следующим образом [159]

$$u_0 + i u_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \qquad u_2 + i u_3 = \rho_2 e^{i\varphi_2}. \tag{2.4.25}$$

Дифференциальные элементы длины, объема и оператор Лапласа в двойных полярных координатах имеют вид

$$d l^2 = d\rho_1^2 + d\rho_2^2 + \rho_1^2 d\varphi_1^2 + \rho_2^2 d\varphi_2^2, \qquad d v = \rho_1 \rho_2 d\rho_1 d\rho_2 d\varphi_1 d\varphi_2,$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\rho_1 \frac{\partial}{\partial\rho_1}\right) + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\rho_2 \frac{\partial}{\partial\rho_2}\right) + \frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}.$$

Решение уравнения Шредингера $(2.2.8)$ в двойных полярных координатах будем искать в виде

$$\psi(\rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi}\Phi_1(\rho_1)\Phi_2(\rho_2)\, e^{i p_1 \varphi_1} e^{i p_2 \varphi_2}, \tag{2.4.26}$$

где $p_1,\ p_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. После подстановки $(2.4.26)$ в $(2.2.8)$ переменные разделяются и мы приходим к следующей паре обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{d}{d\rho_1}\left(\rho_1 \frac{d\Phi_1}{d\rho_1}\right) - \frac{\left(|p_1| + \bar{\delta}_1\right)^2}{\rho_1^2}\Phi_1 + \frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\hbar^2}{4\mu_0}\Omega - \frac{\mu_0 \omega^2 \rho_1^2}{2}\right)\Phi_1 = 0, \tag{2.4.27}$$

$$\frac{1}{\rho_2}\frac{d}{d\rho_2}\left(\rho_2 \frac{d\Phi_2}{d\rho_2}\right) - \frac{\left(|p_2| + \bar{\delta}_2\right)^2}{\rho_2^2}\Phi_2 + \frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\hbar^2}{4\mu_0}\Omega - \frac{\mu_0 \omega^2 \rho_2^2}{2}\right)\Phi_2 = 0, \tag{2.4.28}$$

где Ω - постоянная разделения в двойных полярных координатах, а

$$\bar{\delta}_a = \sqrt{p_a^2 + \frac{2\mu_0 c_a}{\hbar^2}} - |p_a|, \qquad \text{где} \quad a = 1, 2. \tag{2.4.29}$$

Уравнения $(2.4.27)$ и $(2.4.28)$ по виду совпадают с радиальным уравнением кругового осциллятора [215]. Таким образом мы получим, что

$$\psi_{N_1 N_2 p_1 p_2}(\rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2; \bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2) = \frac{1}{2\pi}\Phi_{N_1 p_1}\left(a^2 \rho_1^2; \bar{\delta}_1\right)\Phi_{N_2 p_2}\left(a^2 \rho_2^2; \bar{\delta}_2\right) e^{i p_1 \varphi_1} e^{i p_2 \varphi_2}, \tag{2.4.30}$$

где

$$\Phi_{N_a p_a}\left(x; \bar{\delta}_a\right) = \sqrt{\frac{2\Gamma\left(N_a + |p_a| + \bar{\delta}_a + 1\right)}{(N_a)!}}\, \frac{a e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{|p_a| + \bar{\delta}_a}{2}}}{\Gamma\left(|p_a| + \bar{\delta}_a + 1\right)} F\left(-N_a; |p_a| + \bar{\delta}_a + 1; x\right). \tag{2.4.31}$$

Здесь N_1 и N_2 целые неотрицательные числа, причем

$$N_1 = -\frac{|p_1| + \bar{\delta}_1 + 1}{2} + \frac{\varepsilon}{4\hbar\omega} + \frac{\Omega}{8a^2}, \qquad N_2 = -\frac{|p_2| + \bar{\delta}_2 + 1}{2} + \frac{\varepsilon}{4\hbar\omega} - \frac{\Omega}{8a^2}. \tag{2.4.32}$$

Из последних соотношений для энергетического спектра четырехмерного двойного сингулярного осциллятора в двойных полярных координатах получим выражение

$$\varepsilon_{N_1 N_2 p_1 p_2}(\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2) = \hbar\omega(2N_1 + 2N_2 + |p_1| + |p_2| + \bar{\delta}_1, + \bar{\delta}_2 + 2). \tag{2.4.33}$$

Далее, из сравнения выражений для энергетического спектра $(2.4.19)$ и $(2.4.33)$ получим, что двойные полярные квантовые числа N_1 и N_2 связаны с главным квантовым числом N следующим образом:

$$N = 2N_1 + 2N_2 + |p_1| + |p_2|. \tag{2.4.34}$$

Из выражения энергетического спектра $(2.4.33)$ следует, что энергетический спектр четырехмерного двойного сингулярного осциллятора вырожден и, следовательно существует некоторый интеграл движения, который является причиной этого вырождения. Чтобы найти этот дополнительный интеграл движения поступим следующим образом. Исключая энергию ε из системы уравнений $(2.4.27)$ и $(2.4.28)$, заменяя азимутальные квантовые числа p_1 и p_2 операторами $-i\partial/\partial\varphi_1$ и $-i\partial/\partial\varphi_2$, приходим к следующей проблеме на собственные и собственные значения:

$$\hat{\Omega}\psi_{N_1 N_2 p_1 p_2}(\rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2; \bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2) = \Omega\psi_{N_1 N_2 p_1 p_2}(\rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2; \bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2), \tag{2.4.35}$$

где оператор $\hat{\Omega}$ в двойных полярных координатах имеет вид

$$\hat{\Omega} = \frac{\hbar}{4\mu_0\omega}\left[\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\rho_2\frac{\partial}{\partial\rho_2}\right) - \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\rho_1\frac{\partial}{\partial\rho_1}\right) + \frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2}\right] + \tag{2.4.36}$$

$$+\frac{\mu_0\omega}{4\hbar}(\rho_1^2 - \rho_2^2) + \frac{1}{2\mu_0\hbar\omega}\left(\frac{c_1}{\rho_1^2} - \frac{c_2}{\rho_2^2}\right).$$

Из системы уравнений $(2.4.32)$ следует, что

$$\Omega = N_1 - N_2 + \frac{|p_1| - |p_2| + \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}{2}. \tag{2.4.37}$$

Здесь приведем также выражение оператора $\hat{\Omega}$ в декартовых координатах u_i:

$$\hat{\Omega} = \frac{\hbar}{4\mu_0\omega}\left(\frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial u_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\right) + \tag{2.4.38}$$

$$+\frac{\mu_0\,\omega}{4\hbar}\left(u_0^2+u_1^2-u_2^2-u_3^2\right)+\frac{1}{2\mu_0\hbar\,\omega}\left(\frac{c_1}{u_0^2+u_1^2}-\frac{c_2}{u_2^2-u_3^2}\right).$$

Здесь следует отметить, что волновые функции четырехмерного двойного сингулярного осциллятора $(2.4.23)$ и $(2.4.30)$, с точностью до постоянного множителя, можно получить бз сферического $(2.1.2)$ и параболического $(2.1.17)$ базисов обобщенной задачи МИК-Кеплера соответственно, с помощью следующих замен квантовых чисел:

- для эйлерового базиса

$$n\to\frac{N}{2}+1,\qquad j\to L,\qquad m\to M,\qquad s\to M';$$

- для двойного полярного базиса

$$n_1\to N_1,\qquad n_2\to N_2,\qquad m\to\frac{p_1+p_2}{2},\qquad s\to\frac{p_1-p_2}{2}.$$

Для полного исследования двойного сингулярного осциллятора нам осталось найти решение уравнения Шредингера в четырехмерных сфероидальных координатах. Для нахождения четырехмерного сфероидального базиса двойного сингулярного осциллятора мы будем следовать методу предложенную в работах [132, 136, 137, 142], которые воедино собраны в монографии [159]. Согласно этому методу нам вначале неоходимо решить задачу о межбазисных разложений между двойными поярными и эйлеровыми волновыми функциями четырехмерного двойного сингулярного осциллятора.

4.3. Связь между эйлеровым и двойным полярным базисами

Прежде чем перейти к задаче о межбазисном разложении в четырехмерном двойном сингулярном осцилляторе, докажем, что для радиальной волновой функции $(2.4.21)$ наряду с условием ортонормировки $(2.4.20)$ имеет место и следующее дополнительное условие ортогональности по четырехмерному моменту L

$$\Im_{LL'}=\int_0^\infty u\,R_{NL'}\left(u;\delta_1,\delta_2\right)R_{NL}\left(u;\delta_1,\delta_2\right)d\,u=\frac{a^2\,\delta_{LL'}}{2L+\delta_1+\delta_2+1}.\qquad(2.4.39)$$

Для доказательства поставим в $(2.4.39)$ нормированную радиальную волновую функцию четырехмерного двойного сингулярного осциллятора $(2.4.21)$, запишем вырожденную гипергеометрическую функцию в $R_{NL}(u;\delta_1,\delta_2)$ в виде многочлена

$$F\left(-\frac{N}{2}+L;\,2L+\delta_1+\delta_2+2;\,a^2\,u^2\right)=\sum_{s=0}^{\frac{N}{2}-L}\frac{\left(-\frac{N}{2}+L\right)_s\,(a\,u)^{2s}}{s!\left(2L+\delta_1+\delta_2+2\right)_s},$$

прозведем интегрирование согласно формуле $(1.3.14)$ и, учитывая соотношение $(1.3.15)$ для интеграла $(2.4.39)$ получим следующее соотношение

$$\Im_{LL'} = \frac{a^2\,\Gamma(L+L'+\delta_1+\delta_2+1)}{\Gamma(2L+\delta_1+\delta_2+2)}\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+L+\delta_1+\delta_2+2\right)}{\left(\frac{N}{2}-L\right)!\left(\frac{N}{2}-L'\right)!\Gamma\left(\frac{N}{2}+L'+\delta_1+\delta_2+2\right)}}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{\frac{N}{2}-L}\frac{\left(\frac{N}{2}-L\right)_s\,(L+L'+\delta_1+\delta_2+1)_s}{s!\,(2L+\delta_1+\delta_2+2)_s}\,\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}-L-s+1\right)}{\Gamma(L'-L-s+1)}.$$

Далее, применяя к гамм-функциям под знаком суммирования формулу [194]

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)} = (-1)^n\,\frac{\Gamma(-z+n+1)}{\Gamma(-z+1)}, \qquad (2.4.40)$$

замечем, что сумма по s сворачивается в гипергеометрическую функцию типа $(1.3.15)$ и поэтому имеем

$$\Im_{LL'} = \frac{a^2}{L+L'+\delta_1+\delta_2+1}\,\frac{1}{\Gamma(L'-L+1)\,\Gamma(L'-L+1)}\sqrt{\frac{\left(\frac{N}{2}-L\right)!\Gamma\left(\frac{N}{2}+L+\delta_1+\delta_2+2\right)}{\left(\frac{N}{2}-L'\right)!\Gamma\left(\frac{N}{2}+L'+\delta_1+\delta_2+2\right)}}.$$

Последнее соотношение обращется в ноль при $L' \neq L$ за счет произведения гамм-функции от $(L-L'+1)$ и $(L'-L+1)$, что и приводит к условию ортогональности $(2.4.39)$.

Теперь вернемся к задаче о межбазисном разложении в четырехмерном двойном сингулярном осцилляторе.

При фиксированном значении энергии мы можем двойные полярные связанные состояния $(2.4.30)$ представить как когерентную квантовую смесь эйлеровых связанных состояний $(2.4.33)$, т.е.

$$\psi_{N_1 N_2 p_1 p_2}(\rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2; \bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2) = \sum_{LMM'} W^{NLMM'}_{N_1 N_2 p_1 p_2}\,\psi_{NLMM'}(u, \alpha, \beta, \gamma; \delta_1, \delta_2). \qquad (2.4.41)$$

Наша цель заключается в нахождении явного вида коэффициента $W^{NLMM'}_{N_1 N_2 p_1 p_2}$. Вначале заметим, что из сравнения соотношений $(2.2.5)$ и $(2.4.25)$ имеем следующие связи между двойными полярными и эйлеровыми координатами:

$$\rho_1 = u\cos\frac{\beta}{2}, \qquad \rho_2 = u\sin\frac{\beta}{2}, \qquad \varphi_1 = \frac{\alpha+\gamma}{2}, \qquad \varphi_2 = \frac{\alpha-\gamma}{2}. \qquad (2.4.42)$$

Согласно $(2.4.42)$ в левой части соотношения $(2.4.41)$ перейдем от двойных полярных координат к эйлеровым координатам. далее, подставляя $\beta = 0$, и учитывая, что

$$P_n^{(a,b)}(1)=\frac{(a+1)_n}{n!},$$

и пользуясь дополнительным условием ортогональности радиальной волновой функции четырехмерного двойного сингулярного осциллятора по четырехмерному моменту L $(2.4.39)$, для коэффициента разложения $(2.4.41)$ $W_{N_1 N_2 p_1 p_2}^{N L M M'}$ получим следующее интегральное представление:

$$W_{N_1 N_2 p_1 p_2}^{N L M M'}=\frac{\sqrt{(2L+\delta_1+\delta_2+1)(L-M_+)!}}{\Gamma(M_2+1)\Gamma(2L+\delta_1+\delta_2+2)}E_{N_1 N_2}^{L M M'}\,K_{L M M'}^{N N_1}\,\delta_{p_1,M+M'}\,\delta_{p_2,M-M'}. \qquad (2.4.43)$$

Здесь

$$E_{N_1 N_2}^{L M M'}=\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+L+\delta_1+\delta_2+2\right)\Gamma(L-M_-+\delta_1+1)\Gamma(N_1+M_1+1)\Gamma(N_2+M_2+1)}{(N_1)!(N_2)!\left(\frac{N}{2}-L\right)!\Gamma(L+M_-+\delta_2+1)\Gamma(L+M_++\delta_1+\delta_2+1)}}, \qquad (2.4.44)$$

а

$$K_{L M M'}^{N N_1}=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{L+M_1+M_2+\delta_1+\delta_2}\,F\left(-\frac{N}{2}+L;2L+\delta_1+\delta_2+2;x\right)F(-N_1;M_1+1;x)dx, \qquad (2.4.45)$$

где $x=a^2u^2$. Далее, в интеграле $(2.4.45)$ зписывая вырожденную гипергеометрическую функцию $F(-N_1;M_1+1;x)$ в виде многочлена, производя интегрирование согласно формуле $(1.3.14)$ и учитывая $(1.3.15)$, получим

$$K_{L M M'}^{N N_1}=\frac{\left(\frac{N}{2}-L\right)!\Gamma(2L+\delta_1+\delta_2+2)\Gamma(L+M_++\delta_1+\delta_2+1)}{(L-M_+)!\,\Gamma\left(\frac{N}{2}+L+\delta_1+\delta_2+1\right)}\times$$

$$\times{}_3F_2\left\{\begin{matrix}-N_1,-L+M_+,L+M_++\delta_1+\delta_2+1\\ M_1+1,-\frac{N}{2}+M_++1\end{matrix}\middle|\,1\right\}. \qquad (2.4.46)$$

После подстановки $(2.4.44)$ и $(2.4.46)$ в $(2.4.43)$ имеем

$$W_{N_1 N_2 p_1 p_2}^{N L M M'} = \frac{\left(\frac{N}{2} - M_+\right)!}{\Gamma(M_1+1)} \sqrt{\frac{(2L+\delta_1+\delta_2+1)\Gamma(N_1+M_1+1)\Gamma(N_2+M_2+1)}{(N_1)!(N_2)!\left(\frac{N}{2}-L\right)!(L-M_+)!\Gamma(L+M_-+\delta_2+1)}}\, \delta_{p_1,M+M'}\, \delta_{p_2.M-M'} \times$$

$$(2.4.47)$$

$$\times \sqrt{\frac{\Gamma(L-M_-+\delta_1+1)\Gamma(L+M_++\delta_1+\delta_2+1)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+L+\delta_1+\delta_2+1\right)}}\; {}_3F_2\left\{\begin{matrix} -N_1, -L+M_+, L+M_++\delta_1+\delta_2+1 \\ M_1+1, -\frac{N}{2}+M_++1 \end{matrix}\middle| 1\right\}.$$

Наконец, сравнивая $(2.4.47)$ с $(1.3.20)$ приходим к следующему представлению для коэффициентов $W_{N_1 N_2 p_1 p_2}^{N L M M'}$:

$$W_{N_1, N_2, p_1, p_2}^{N\ L\ M\ M'} = (-1)^{N_1 + \frac{M-M'+|M-M'|}{2}}\, \delta_{p_1,\, M+M'}\, \delta_{p_2,\, M-M'} \times$$

$$(2.4.48)$$

$$\times C_{\frac{N+2M_-+2\delta_2-2}{4}, \frac{M_2+N_2-N_1}{2}; \frac{N-2M_-+2\delta_1-2}{4}, \frac{M_2+N_1-N_2}{2}}^{L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}, \frac{M_1+M_2}{2}}.$$

Соотношение $(2.4.48)$ указывает на то, что коэффициенты разложения двойного полярного базиса по эйлеровому базису четырехмерного двойного сингулярного осциллятора $W_{N_1 N_2 p_1 p_2}^{N L M M'}$ являются коэффициентами Клебша-Гордана группы $SU(2)$, которые по своим индексам аналитически продолжены в область реальных чисел.

Обратное разложение, т.е. разложение эйлерового базиса по двойному полярному базису базису четырехмерного двойного сингулярного осциллятора, имеет вид

$$\psi_{N L M M'}(u, \alpha, \beta, \gamma; \delta_1, \delta_2) = \sum_{N_1 p_1 \cdot p_2} \widetilde{W}_{N L M M'}^{N_1 N_2 p_1 p_2}\, \psi_{N_1 N_2 p_1 p_2}(\rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2; \bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2). \qquad (2.4.49)$$

Далее, пользуясь условием ортонормируемости коэффициентов Клебша-Гордана группы $SU(2)$ $(1.3.23)$ получим

$$\widetilde{W}_{N\ L\ M\ M'}^{N_1, N_2, p_1, p_2} = (-1)^{N_1 + \frac{M-M'+|M-M'|}{2}}\, \delta_{p_1,\, M+M'}\, \delta_{p_2,\, M-M'} \times$$

$$(2.4.50)$$

$$\times C_{\frac{N+2M_-+2\delta_2-2}{4}, \frac{N+2M_-+2\delta_2-2}{4}-N_1; \frac{N-2M_-+2\delta_1-2}{4}, N_1+|M_1-M_2|-\frac{N-2M_-+2\delta_1-2}{4}}^{L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}, \frac{M_1+M_2}{2}}.$$

В конце отметим, что коэффициенты $(2.4.50)$ с помощью формул $(1.3.18)$ или $(1.3.20)$ могут быть выражены через обобщенную функцию ${}_3F_2$ единичного аргумента.

4.4. Сфероидальный базис

Теперь пользуясь межбазисными разложениями полученные нами жыше, построим сфероидальный базис четырехмерного двойного сингулярного осциллятора.

Четырехмерные сфероидальные координаты определим следующим образом

$$u_0 + i\,u_1 = \frac{d}{2}\sqrt{(\xi+1)(1+\eta)}\,e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \qquad u_2 + i\,u_3 = \frac{d}{2}\sqrt{(\xi-1)(1-\eta)}\,e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}, \qquad (2.4.51)$$

где $\xi \in [1,\infty)$, $\eta \in [-1,1]$. Параметр d - межфокусное расстояние и в пределах $d \to 0$ и $d \to \infty$ четырехмерные сфероидальные координаты $(2.4.51)$ переходят в эйлеровые и двойные полярные координаты соответственно.

В сфероидальной сисреме координат потенциал четырехмерного двойного сингулярного осциллятора имеет вид

$$V = \frac{\mu_0\, d^2\, \omega^2}{2}(\xi+\eta) + \frac{4}{d^2}\left[\frac{c_1}{(\xi+1)(1+\eta)} + \frac{c_2}{(\xi-1)(1-\eta)}\right].$$

В координатах $(2.4.51)$ дифференциальные элементы длины, объема и оператор Лапласа записываются в следующем виде

$$d\,l_4^2 = \frac{d^2}{8}\left[(\xi-\eta)\left(\frac{d\,\xi^2}{\xi^2-1} + \frac{d\,\eta^2}{1-\eta^2}\right) + (\xi+\eta)\left(d\,\alpha^2 + d\,\gamma^2\right) + (\xi\,\eta+1)\,d\alpha\, d\gamma\right],$$

$$d\,v_4 = \frac{d^4}{64}(\xi-\eta)\,d\xi\, d\eta\, d\alpha\, d\gamma,$$

$$\Delta_4 = \frac{8}{d^2(\xi-\eta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi+1} - \frac{1}{1+\eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi-1} - \frac{1}{1-\eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^2\right\}.$$

После подстановки

$$\psi(\xi,\,\eta,\,\alpha,\,\gamma;\,d) = \psi_1(\xi;\,d)\,\psi_2(\eta;\,d)\,e^{iM\alpha}\,e^{iM'\gamma} \qquad (2.4.52)$$

переменные в уравнение Шредингера $(2.2.8)$ разделяются и мы приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left[\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2-1\right)\frac{d}{d\xi} + \frac{M_1^2}{2(\xi+1)} - \frac{M_2^2}{2(\xi-1)} - \frac{a^4 d^4}{16}\left(\xi^2-1\right) + \frac{\mu_0\,\varepsilon\, d^2}{4\hbar^2}\,\xi\right]\psi_1(\xi;d) = Q\,\psi_1(\xi;d), \quad (2.4.53)$$

$$\left[\frac{d}{d\eta}\left(1-\eta^2\right)\frac{d}{d\eta}-\frac{M_1^2}{2(1+\eta)}-\frac{M_2^2}{2(1-\eta)}-\frac{a^4d^4}{16}\left(1-\eta^2\right)-\frac{\mu_0\varepsilon d^2}{4\hbar^2}\eta\right]\psi_2(\eta;d)=-Q\psi_2(\eta;d),\quad (2.4.54)$$

где $Q(d)$ - постоянная разделения в четырехмерных сфероидальных координатах, величины M_1 и M_2 определены соотношением $(2.4.8)$.

После исключения энергии ε из уравнений $(2.4.53)$ и $(2.4.54)$ мы получим эрмитовый оператор

$$\hat{Q}=-\frac{1}{\xi-\eta}\left\{\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\right]+\xi\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\right]\right\}-$$

$$-\frac{\xi+\eta+1}{2(\xi+1)(1+\eta)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^2-\frac{\xi+\eta-1}{2(\xi-1)(1-\eta)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^2+\quad (2.4.55)$$

$$+\frac{a^4d^4}{16}(\xi\eta+1)+\frac{c_1(\xi-\eta)}{2(\xi+1)(1+\eta)}+\frac{c_2(\xi-\eta)}{2(\xi-1)(1-\eta)},$$

собственные значения которого являются $Q(d)$, а собственные функции - $\psi(\xi,\,\eta,\,\alpha,\,\gamma;\,d)$. В операторе $(2.4.55)$ переходя к декартовым координатам и учитывая соотношения $(2.4.4)$ и $(2.4.38)$ получим, что

$$\hat{Q}=\hat{A}+\frac{a^2d^2}{4}\hat{\Omega}.\quad (2.4.56)$$

Таким образом сфероидальный базис четырехмерного двойного сингулярного осциллятора является собственной функцией коммутирующих операторов $\left\{\hat{H},\,\hat{Q},\,\hat{L}_3,\,\hat{L}_3'\right\}$ и имеет место следующая спектральная задача

$$\hat{Q}\psi_{NqMM'}(\xi,\eta,\alpha,\gamma;d,\delta_1,\delta_2)=Q_q\,\psi_{NqMM'}(\xi,\eta,\alpha,\gamma;d,\delta_1,\delta_2),\quad (2.4.57)$$

где индекс q нумерует собственные значения оператора $\hat{Q}$.

Теперь перейдем к построению сфероидального базиса четырехмерного двойного сингулярного осциллятора с помощью эйлерового и двойного полярного базисов. Для этого сфероидальный базис четырехмерного двойного сингулярного осциллятора, при фиксированном значении энергии, представим как квантовую смесь эйлерового и двойного полярного базисов:

$$\psi_{NqMM'}(\xi,\eta,\alpha,\gamma;d,\delta_1,\delta_2)=\sum_{L=M_+}^{N/2}U^L_{NqMM'}(d,\delta_1,\delta_2)\psi_{NLMM'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2),\quad (2.4.58)$$

$$\psi_{N\,q\,M\,M'}(\xi,\eta,\alpha,\gamma;d,\delta_1,\delta_2)=\sum_{N_1=0}^{(N-|p_1|-|p_2|)/2}V_{N\,q\,M\,M'}^{N_1}(d,\delta_1,\delta_2)\psi_{N_1\,N_2\,p_1\,p_2}(\rho_1,\rho_2,\varphi_1,\varphi_2;\bar{\delta}_1,\bar{\delta}_2). \qquad (2.4.59)$$

Вначале рассмотрим разложение $(2.4.58)$. Действуя оператором $\hat{Q}$ на обе стороны уравнения $(2.4.58)$, пользуясь соотношениями $(2.4.56)$, $(2.4.57)$, $(2.4.24)$ и условием ортонормировки

$$\int\psi^*_{N_1\,L_1\,M_1\,M_1'}(u,\alpha,\,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2)\,\psi_{N\,L\,M\,M'}(u,\alpha,\,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2)\,d\,v_4=\delta_{N\,N_1}\,\delta_{L\,L_1}\,\delta_{M\,M_1}\,\delta_{M'\,M_1'}$$

эйлерового базиса, получим следующее алгебраическое уравнение

$$\left[Q_q-\left(L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\left(L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}+1\right)\right]U_{N\,q\,M\,M'}^{L}=\frac{a^2\,d^2}{4}\sum_{L'}U_{N\,q\,M\,M'}^{L}\left(\hat{\Omega}\right)_{L\,L'}, \qquad (2.4.60)$$

где

$$\left(\hat{\Omega}\right)_{L\,L'}=\int\psi^*_{N\,L\,M\,M'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2)\hat{\Omega}\psi_{N\,L'\,M\,M'}(u,\alpha,\beta,\gamma;\delta_1,\delta_2)dv_4. \qquad (2.4.61)$$

Вычисление матричного элемента $\left(\hat{\Omega}\right)_{L\,L'}$ можно провести используя разложение эйлерового базиса по двойному полярному базису четырехмерного двойного сингулярного осциллятора $(2.4.48)$ и учитывая уравнение на собственные значения оператора $\hat{\Omega}$ $(2.4.35)$. Тогда вместо соотношения $(2.4.61)$ получим

$$\left(\hat{\Omega}\right)_{L\,L'}=\sum_{N_1=0}^{(N-|p_1|-|p_2|)/2}\left(2\,N_1+|p_1|-\frac{N-\delta_1+\delta_2}{2}\right)\tilde{W}_{N\,L\,M\,M'}^{N_1\,N_2\,p_1\,p_2}\,\tilde{W}_{N\,L'\,M\,M'}^{N_1\,N_2\,p_1\,p_2}.$$

Далее, пользуясь явным выражением коэффициента $\tilde{W}_{N\,L\,M\,M'}^{N_1\,N_2\,p_1\,p_2}$ $(2.4.56)$, рекуррентным соотношением $(1.4.13)$ и условием ортогональности коэффициентов Клебша-Гордана $(1.4.14)$ для матричного элемента $\left(\hat{\Omega}\right)_{L\,L'}$ получим выражение

$$\left(\hat{\Omega}\right)_{L\,L'}=\frac{(M_1+M_2)(M_1-M_2)}{(2\,L+\delta_1+\delta_2)(2\,L+\delta_1+\delta_2+2)}\,\delta_{L'\,L}-\frac{2\left(A_{N\,M\,M'}^{L+1}\,\delta_{L',L+1}+A_{N\,M\,M'}^{L}\,\delta_{L',L-1}\right)}{2\,L+\delta_1+\delta_2}, \qquad (2.4.62)$$

где

$$A_{N\,M\,M'}^{L}=\sqrt{(N-2\,L)(N+2\,L+2\delta_1+2\delta_2)}\times$$
$$\times\left[\frac{(L-M_+)\,(L-M_-+\delta_1)(L+M_-+\delta_2)(L+M_++\delta_1+\delta_2)}{4\left(L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)^2(2L+\delta_1+\delta_2-1)(2L+\delta_1+\delta_2-1)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь, подставляя $(2.4.62)$ в $(2.4.60)$ мы приходим к следующему трехчленному рекуррентному соотношению для коэффициентов $U_{N\,q\,M\,M'}^{L}$

$$A^{L+1}_{N\,M\,M'}\,U^{L+1}_{N\,q\,M\,M'}+A^{L}_{N\,M\,M'}\,U^{L-1}_{N\,q\,M\,M'}=\left\{\frac{4}{a^2\,d^2}\left[Q_q-\left(L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\left(L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{(M_1+M_2)(M_1-M_2)}{(2L+\delta_1+\delta_2)(2L+\delta_1+\delta_2+2)}\right\}U^{L}_{N\,q\,M\,M'}. \qquad (2.4.63)$$

Трехчленное рекуррентное соотношение $(2.4.63)$ это $\frac{N}{2}-M_{+}+1$ линейные однородные уравнения, которые могут быть решены совместно с условием нормировки

$$\sum_{L=M_{+}}^{\frac{N}{2}}\left|U^{L}_{N\,q\,M\,M'}\right|^2=1.$$

Собственные значения $Q(d)$ оператора $\hat{Q}$ можно найти из условия равенства нулю детерминанта системы уравнения $(2.4.63)$.

Теперь перейдем к рассмотрению разложения сфероидального базиса по двойному полярному базису. Применяя технику, подобную при нахождении соотношения $(2.4.60)$, т.е. действуя оператором $\hat{Q}$ на обе стороны уравнения $(2.4.59)$, пользуясь соотношениями $(2.4.56)$, $(2.4.57)$, $(2.4.35)$, $(2.4.37)$ и условием ортонормировки

$$\int\psi^{*}_{N_1'\,N_2'\,p_1'\,p_2'}\left(\rho_1,\rho_2,\,\varphi_1,\varphi_2;\bar{\delta}_1,\bar{\delta}_2\right)\psi_{N_1\,N_2\,p_1\,p_2}\left(\rho_1,\rho_2,\,\varphi_1,\varphi_2;\bar{\delta}_1,\bar{\delta}_2\right)d\,v_4=\delta_{N_1'\,N_1}\,\delta_{N_2'\,N_2}\,\delta_{p_1'\,p_1}\,\delta_{p_2'\,p_2}$$

двойного полярного базиса четырехмерного двойного сингулярного осциллятора, получим следующую систеу алгебраических уравнений

$$\left[Q_q-\frac{a^2\,d^2}{4}\left(N_1-N_2+\frac{M_1-M_2}{2}\right)\right]V^{N_1}_{N\,q\,M\,M'}=\sum_{N_1'}V^{N_1'}_{N\,q\,M\,M'}\left(\hat{A}\right)_{N_1\,N_1'}, \qquad (2.4.64)$$

где

$$\left(\hat{A}\right)_{N_1\,N_1'}=\int\psi^{*}_{N_1'\,N_2'\,p_1'\,p_2'}\left(\rho_1,\rho_2,\varphi_1,\varphi_2;\bar{\delta}_1,\bar{\delta}_2\right)\hat{A}\psi_{N_1\,N_2\,p_1\,p_2}\left(\rho_1,\rho_2,\varphi_1,\varphi_2;\bar{\delta}_1,\bar{\delta}_2\right)dv_4. \qquad (2.4.65)$$

Для вычисления матричного элемента $\left(\hat{A}\right)_{N_1\,N_1'}$ пользуемся разложением двойного полярного базиса по эйлеровому базису четырехмерного двойного сингулярного осциллятора $(2.4.43)$. Далее, учитывая уравнение на собственые значения и собственные функции оператора $\hat{A}$ $(2.4.24)$, то вместо соотношения $(2.4.65)$ получим

$$\left(\hat{A}\right)_{N_1\,N_1'}=\sum_{L}\left(L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\left(L+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}+1\right)W^{N\,L\,M\,M'}_{N_1'\,N_2'\,p_1\,p_2}\;\;W^{N\,L\,M\,M'}_{N_1'\,N_2\,p_1\,p_2}.$$

Теперь пользуясь явным выражением коэффициента $W_{N_1 N_2 p_1 p_2}^{N L M M'}$ $(2.4.48)$, рекуррентным соотношением $(1.4.18)$ и условием ортонормировки коэффициентов Клебша-Гордана $(1.3.23)$, для матричного элемента $\left(\hat{A}\right)_{N_1 N_1'}$ получим следующее выражение

$$\left(\hat{A}\right)_{N_1 N_1'} = \left[(N_1+1)(N_2+M_-) + \left(\frac{N}{2} - N_1 + \delta_2\right)\left(N_2 + |M-M'| + \delta_2\right) + M_-(M_+ + \delta_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_2 - 2)\right] \delta_{N_1', N_1} - \sqrt{N_2 (N_1+1)(N_1+M_1+1)(N_2+M_2)}\, \delta_{N_1', N_1+1} - \quad (2.4.66)$$

$$- \sqrt{N_1 (N_2+1)(N_1+M_1)(N_2+M_2+1)}\, \delta_{N_1', N_1-1}.$$

Наконец, подставляя $(2.4.66)$ в $(2.4.63)$ для коэффициентов $V_{N q M M'}^{N_1}$ получим следующее трехчленное рекуррентное соотношение

$$\left[(N_1+1)(N_2+M_-) + (N - N_1 + \delta_2)(N_1+M_2) + \frac{1}{4}(\delta_1-\delta_2)(\delta_1-\delta_2-2) + \right.$$

$$\left. + M_-(M_+ + \delta_2) + \frac{a^2 d^2}{2}\left(N_1 - N_2 + \frac{M_1+M_2}{2}\right) - Q_q \right] V_{N q M M'}^{N_1} =$$

$$(2.4.67)$$

$$= \sqrt{N_2 (N_1+1)(N_1+M_1+1)(N_2+M_2)}\, V_{N q M M'}^{N_1+1} +$$

$$+ \sqrt{N_1 (N_2+1)(N_1+M_1)(N_2+M_2+1)}\, V_{N q M M'}^{N_1-1}.$$

Эту систему однородных алгебраических уравнений, как и в предыдущем случае, нужно решить совместно с условием нормировки

$$\sum_{N_1=0}^{(N-|p_1|-|p_2|)/2} \left| V_{N q M M'}^{N_1} \right|^2 = 1.$$

Здесь опять собственные значения $Q(d)$ оператора $\hat{Q}$ должны найти из условия равенства нулю детерминанта системы уравнения $(2.4.67)$.

В конце приведем следующие четыре предельных соотношения

$$\lim_{d\to 0} U_{N q M M'}^{L}(d) = \delta_{qL}, \qquad \lim_{d\to\infty} U_{N q M M'}^{L}(d) = W_{N_1 N_2 p_1 p_2}^{N L M M'},$$

$$\lim_{d\to\infty} V_{N q M M'}^{N_1}(d) = \delta_{q N_1}, \qquad \lim_{d\to 0} V_{N q M M'}^{N_1}(d) = \widetilde{W}_{N L M M'}^{N_1 N_2 p_1 p_2},$$

которые являются хорошим тестом для проверки вычислений проведенные в разделе 4.3.

5. Заключение ко второй главе

В заключении мы хотим отметить, что в этой главе нами была рассмотрена обобщенная система МИК-Кеплера и дуальная ей задача четырехмерного двойного сингулярного осциллятора. Была показана, что преобразованием дуальности является обобщенная версия KS-преобразования. Найдены интегралы движения четырехмерного двойного сингулярного осциллятора, отвечающие за разделение переменных в эйлеровых, двоных полярных и сфероидальных системах координат. Приведены явные выражения эйлерового и двойного полярного базисов, а также трехчленные рекуррентные соотношения генерыруемые сфероидальный базис четырехмерного двойного сингулярного осциллятора. Также установлены соответствия между квантовыми числами обобщенной задачи МИК-Кеплера и четырехмерного двойного сингулярного осциллятора.

Глава 3.

Топологически нетривиальные объекты высокой размерности

1. Кулон-осцилляторная аналогия

В предыдущей главе нами было показано, что обобщенная задача МИК-Кеплера дуальна четырехмерному двойному сингулярному осциллятору, и, что преобразованием дуальности является обобщенная версия KS-преобразования. Более ранных работах [34, 76-83] было показано, что KS-преобразование задачу четырехмерного изотропного осциллятора переводит в трехмерную задачу Кеплера-Кулона, что и принято называть Кулон-осцилляторной аналогией, или Кулон-осцилляторной дуальностью. Здесь мы хотим выяснить, неужели Кулон-осцилляторной аналогия присуще только для этих размерностях, или существуют другие размерности тоже.

Для этого рассмотрим радиальное уравнение Шредингера для D- мерного ($D \geq 2$) изотропного осциллятора

$$\frac{d^2 R}{d u^2} + \frac{D-1}{u}\frac{d R}{d u} - \frac{L(L+D-2)}{u^2} R + \frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(E - \frac{\mu_0 \omega^2 u^2}{2}\right) R = 0, \qquad (3.1.1)$$

где R - радиальная часть волновой функции D- мерного изотропного осциллятора, а $L = 0,1,2,\ldots$ - собственные значения оператора глобального момента.

После подстановки $r = u^2$ уравнение $(3.1.1)$ переходит в уравнение

$$\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{d R}{d r} - \frac{l(l+d-2)}{r^2} R + \frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) R = 0, \qquad (3.1.2)$$

где $d = \frac{D}{2} + 1, \quad l = \frac{L}{2}$, а

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 \omega^2}{8}, \qquad \alpha = \frac{E}{4}. \qquad (3.1.3)$$

Это весьма неожиданный результат. Если $D = 2,4,6,8,\ldots,$ то $d = 2,3,4,5,\ldots,$ то уравнение $(3.1.2)$ по форме совпадает с радиальным уравнением d- мерной задачи Кеплера-Кулона. При нечетных $D \geq 2$ величина d пробегает полуцелые значения и поэтому не может иметь смысл размерности пространства в общепринятом понимании. Далее, l принимает не только целые, но и полуцелые значения, а это значит, что l имеет смысл полного момента и возникает вопрос о том, откуда берется фермионная степень свободы. На этот вопрос мы

дадим ответ чуть позднее. Наконец, как отмечалось выше, уравнения $(3.1.1)$ и $(3.1.2)$ дуальны друг к другу, а преобразованием дуальности является преобразование $r = u^2$.

Выше речь шла лишь о радиальной части волновой функции изотропного осциллятора. При переходе к самому уравнению Шредингера мы должны рассмотреть наряду с радиальным уравнением также уравнение, связанное с угловыми переменными. В этом смысле, преобразование дуальности должно включить в себя также преобрасзование угловых переменных. Если замену $r = u^2$ трактовать как механизм генерации электрического заряда, то (как мы убедимся в дальнейшем) с преобразованием угловых переменных связан механизм генерации магнитных зарядов.

Условие $r = u^2$ в декартовых координатах имеет вид

$$\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{d-1}^2} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \cdots u_{D-1}^2 , \qquad (3.1.4)$$

которое называют тождеством Эйлера. Согласно теореме Гурвица [75], если x_i $(i = 0,1,\ldots,d-1)$ есть билинейная комбинация u_μ $(\mu = 0,1,\ldots,D-1)$, то тождество Эйлера $(3.1.4)$ справедлива только для следующих пар чисел

$$(D, d) = (1, 1),\ (2, 2),\ (4, 3),\ (8, 5).$$

Преобразование $(D, d) = (1, 1)$ связывает задачу линейного осциллятора с задачей одномерного кулоновского аниона [9, 13, 201].

Преобразование $(D, d) = (2, 2)$ есть известное из небесний механики преобразование Леви-Чивита [73]. Это преобразование есть преобразование дуальности, которое задачу кругового осциллятора переводит в задачу двумерного аниона [46, 50, 53].

Далее, преобразование, соответствующее паре чисел $(D, d) = (4, 3)$ в небесной механике называют преобразованием Кустаанхеймо-Штифеля (KS-преобразование) [74]. KS-преобразование переводит задачу четырехмерного изотропного осциллятора в систему МИК-Кеплер [33, 36, 40-42, 45], некоторые свойства которого были исследовани нами во второй главе настоящей диссертации. Суперинтегрируемая система МИК-Кеплера является обобщением задачи Кеплера-Кулона в присутствие монополя Дирака [1] и была рассмотрена с разных точек зрения в работах [28-31, 38, 39, 55-58, 66, 67].

Наконец, преобразование Гурвица, которое соответствует случаю $(D, d) = (8, 5)$, переводит задачу о восьмимерном изотропном осцилляторе в пятимерную задачу Кеплера-Кулона [32, 65]. Преобразование Гурвица, согласно работе [32], можно представить в следующем виде

$$X = H(u; 8)U, \qquad (3.1.5)$$

где

$$X=\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix} u_0\\ u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6\\ u_7 \end{pmatrix},\qquad H(u;8)=\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & -u_4 & -u_5 & -u_6 & -u_7\\ u_4 & u_5 & -u_6 & -u_7 & u_0 & u_1 & -u_2 & -u_3\\ u_5 & -u_4 & u_7 & -u_6 & -u_1 & u_0 & -u_3 & u_2\\ u_6 & u_7 & u_4 & u_5 & u_2 & u_3 & u_0 & u_1\\ u_7 & -u_6 & -u_5 & u_4 & u_3 & -u_2 & -u_1 & u_0\\ u_1 & -u_0 & u_3 & -u_2 & u_5 & -u_4 & u_7 & -u_6\\ u_2 & -u_3 & -u_0 & u_1 & -u_6 & u_7 & u_4 & -u_5\\ u_3 & u_2 & -u_1 & -u_0 & -u_7 & -u_6 & u_5 & u_4 \end{pmatrix}. \qquad (3.1.6)$$

Матрица $H(u;8)$ отличается от известной в математике матрицы Кели [202] лишь перестановкой строк (см. также [34]). Легко проверить, что для матрицы $H(u;8)$ имеет место условие

$$H_{\mu\lambda}\, H^T_{\lambda\nu} = u^2\, \delta_{\mu\nu}\,, \qquad (3.1.7)$$

гарантирующее соблюдение тождества Эйлера.

Из уравнения $(3.1.5)$, с учетом соотношений $(3.1.6)$, преобразование Гурвица можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2-u_5^2-u_6^2-u_7^2\,,\\ x_1 &= 2(u_0\,u_4+u_1\,u_5-u_2\,u_6-u_3\,u_7),\\ x_2 &= 2\,(u_0\,u_5-u_1\,u_4+u_2\,u_7-u_3\,u_6),\\ x_3 &= 2\,(u_0\,u_6+u_1\,u_7+u_2\,u_4+u_3\,u_5),\\ x_4 &= 2\,(u_0\,u_7-u_1\,u_6-u_2\,u_5+u_3\,u_4). \end{aligned} \qquad (3.1.8)$$

Подчеркнем, что каждому элементу в IR^5 соответствует не один элемент, а целое множество элементов в IR^8, называемое слоем. В этом и состоит свойство небиективности преобразования $IR^8(\vec{u})\to IR^5(\vec{x})$.

Таким образом небиективное преобразование Гурвица $IR^8(\vec{u})\to IR^5(\vec{x})$ устанавливает связь между задачей восьмимерного изитропного осциллятора и пятимерной системы Кеплера-Кулона. Возникает очень простой вопрос, а в какую систему будет переводить биективное, т.е. взаимооднозначное, $IR^8(\vec{u})\leftrightarrow IR^5(\vec{x})$, преобразование Гурвица, которое можно сконструировать дополнением соотношений $(3.1.8)$ дополнительными тремя координатами. Эту проблему мы будем исследовать в следующем параграфе.

2. $SU(2)$ монополь Янга-Кулона

Как и обещали в конце предыдущего параграфа, здесь мы выясним в какую систему переводит задачу восьмимерного изотропного осциллятора биективное, билинейное преобразовзние, которое получается добавлением к преобразованию Гурвица $(3.1.8)$ трех углов, не зависящие от координат x_j пространства $IR^5(\vec{x})$.

Следуя работе [37] эти углы выбирем следующим образом:

$$\alpha_T = \frac{i}{2}\ln\frac{(u_4 - i u_5)(u_6 + i u_7)}{(u_4 + i u_5)(u_6 - i u_7)} \in [0, 2\pi),$$

$$\beta_T = 2\arctan\left(\frac{u_4^2 + u_5^2}{u_6^2 + u_7^2}\right)^{\frac{1}{2}} \in [0, \pi], \qquad (3.2.1)$$

$$\gamma_T = \frac{i}{2}\ln\frac{(u_4 + i u_5)(u_6 + i u_7)}{(u_4 - i u_5)(u_6 \_ i u_7)} \in [0, 4\pi).$$

Добавление углов $(3.2.1)$ к преобразованиям $(3.1.8)$ фактически означает, что мы получаем преобразование, которое пространство $IR^8(\vec{u})$ переводит в прямое произведение $IR^5 \otimes S^3$ пространства $IR^5(\vec{x})$ и $S^3(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$.

Для полноты дальнейшего изложения здесь приведем некоторые полезные формулы.

Вначале напишем как координаты u_μ $(\mu = 0,1,\ldots,7)$ выражаются через координаты x_j $(j = 0,1,\ldots,4)$ и α_T, β_T, γ_T.

$$u_0 + i u_1 = \frac{1}{\sqrt{2(r - x_0)}}\left[(x_1 - i x_2)\sin\frac{\beta_T}{2}\, e^{\frac{i}{2}(\alpha_T - \gamma_T)} + (x_3 - i x_4)\cos\frac{\beta_T}{2}\, e^{-\frac{i}{2}(\alpha_T + \gamma_T)}\right],$$

$$u_2 + i u_3 = \frac{1}{\sqrt{2(r - x_0)}}\left[-(x_1 + i x_2)\cos\frac{\beta_T}{2}\, e^{-\frac{i}{2}(\alpha_T + \gamma_T)} + (x_3 + i x_4)\sin\frac{\beta_T}{2}\, e^{\frac{i}{2}(\alpha_T - \gamma_T)}\right],$$

$$u_4 + i u_5 = \sqrt{\frac{r - x_0}{2}}\,\sin\frac{\beta_T}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha_T - \gamma_T)}, \qquad u_6 + i u_7 = \sqrt{\frac{r - x_0}{2}}\,\cos\frac{\beta_T}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha_T + \gamma_T)}.$$

Теперь пользуясь определением метрического тензора

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\nu},$$

где $\mu, \nu = 0, 2, \ldots, 7$, а $x_5 = \alpha_T$, $x_6 = \beta_T$, $x_7 = \gamma_T$, для ковариантных и контравариантных компонент метрического терзора получим выражения

$$g_{0\mu}=\frac{1}{4r}\delta_{0\mu},\quad g_{i\mu}=\sum_{k=1}^{4}g_{ik}\,\delta_{k\mu}+\sum_{a=5}^{7}g_{ia}\,\delta_{ka},\quad g_{ik}=\frac{2r\left(r-x_0\right)-x_i\,x_k}{4r\left(r-x_0\right)^2},$$

$$g_{5\mu}=\frac{4}{r-x_0}\left(x_2\,\delta_{1\mu}-x_1\,\delta_{2\mu}-x_4\,\delta_{3\mu}+x_3\,\delta_{4\mu}\right)+\frac{r}{4}\left(\delta_{5\mu}+\delta_{7\mu}\cos\beta_T\right),$$

$$g_{6\mu}=\frac{1}{4\left(r-x_0\right)}\Big[-\left(x_3\cos\alpha_T-x_4\sin\alpha_T\right)\delta_{1\mu}-\left(x_3\sin\alpha_T+x_4\cos\alpha_T\right)\delta_{2\mu}+$$
$$+\left(x_1\cos\alpha_T+x_2\sin\alpha_T\right)\delta_{3\mu}-\left(x_1\sin\alpha_T-x_2\cos\alpha_T\right)\delta_{4\mu}\Big],$$

$$g_{7\mu}=\frac{\cos\beta_T}{4\left(r-x_0\right)}\Big\{\left[x_2-\left(x_3\sin\alpha_T+x_4\cos\alpha_T\right)tg\beta_T\right]\delta_{1\mu}-\left[x_1-\left(x_3\cos\alpha_T-x_4\sin\alpha_T\right)tg\beta_T\right]\delta_{2\mu}-$$
$$-\left[x_4-\left(x_1\sin\alpha_T-x_2\cos\alpha_T\right)tg\,\beta_T\right]\delta_{3\mu}+\left[x_3+\left(x_1\cos\alpha_T+x_2\sin\alpha_T\right)tg\,\beta_T\right]\delta_{4\mu}\Big\},$$

$$g^{i\mu}=4r\,\delta^{i\mu}+\sum_{a=5}^{7}g^{ia}\,\delta^{a\mu},$$

$$g^{5\mu}=\frac{4}{r-x_0}\Big\{\left[-x_2+\left(x_3\sin\alpha_T+x_4\cos\alpha_T\right)ctg\,\beta_T\right]\delta^{1\mu}+\left[x_1+\left(x_3\cos\alpha_T-x_4\sin\alpha_T\right)ctg\,\beta_T\right]\delta^{2\mu}+$$
$$+\left[x_4+\left(x_1\sin\alpha_T-x_2\cos\alpha_T\right)ctg\,\beta_T\right]\delta^{3\mu}-\left[x_3-\left(x_1\cos\alpha_T+x_2\sin\alpha_T\right)ctg\,\beta_T\right]\delta^{4\mu}\Big\},$$

$$g^{6\mu}=\frac{4}{r-x_0}\Big[\left(x_3\cos\alpha_T-x_4\sin\alpha_T\right)\delta^{1\mu}+\left(x_3\sin\alpha_T+x_4\cos\alpha_T\right)\delta^{2\mu}-$$
$$-\left(x_1\cos\alpha_T+x_2\sin\alpha_T\right)\delta^{3\mu}+\left(x_1\sin\alpha_T-x_2\,\cos\alpha_T\right)\delta^{4\mu}\Big],$$

$$g^{7\mu}=\frac{4}{\left(r-x_0\right)\sin\beta_T}\Big[\left(x_3\sin\alpha_T+x_4\cos\alpha_T\right)\delta^{1\mu}-\left(x_3\cos\alpha_T-x_4\sin\alpha_T\right)\delta^{2\mu}-$$
$$-\left(x_1\sin\alpha_T-x_2\,\cos\alpha_T\right)\delta^{3\mu}-\left(x_1\cos\alpha_T+x_4\,\sin\alpha_T\right)\delta^{4\mu}\Big].$$

Детерминант метрического тензора $g_{\mu\nu}$ имеет вид

$$g=\det g_{\mu\nu}=\frac{\sin^2\beta_T}{65536\,r^2},\qquad \sqrt{g}=\frac{\sin\beta_T}{256\,r}.$$

Теперь пользуясь приведенными выше формулами и определением оператора Лапласа

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{g}\;g^{\mu\nu}\;\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right),$$

где $\mu,\ \nu=0,\ 1,\ldots,\ 7,$ $g^{\mu\nu}$ - контравариантные компоненты метрического тензора, g - детерминант метричского тензора $g_{\mu\nu}$, восьмимерный оператор Лапласа в координатах $x_j\ \left(j=0,1,\ldots,4\right)$ и α_T, β_T, γ_T запишется в следующем виде

$$\Delta_8 = 4\,r\left(\Delta_5 - 2\,i\,A_j^{a(+)}\,\hat{T}_a\,\frac{\partial}{\partial\,x_j} - \frac{2}{r\,(r-x_0)}\,\hat{T}^2\right). \qquad (3.2.2)$$

Здесь $r = (x_i\ x_i)^{1/2} = u^2$, а операторы $\hat{T}_a$ $(a = 1, 2, 3)$ есть генераторы группы $SU(2)$ и имеют вид (см. например [196])

$$\hat{T}_1 = i\left(\cos\alpha_T\,\cot\beta_T\,\frac{\partial}{\partial\alpha_T} + \sin\alpha_T\,\frac{\partial}{\partial\,\beta_T} - \frac{\cos\alpha_T}{\sin\beta_T}\,\frac{\partial}{\partial\,\gamma_T}\right),$$

$$\hat{T}_2 = i\left(\sin\alpha_T\,\cot\beta_T\,\frac{\partial}{\partial\alpha_T} - \cos\alpha_T\,\frac{\partial}{\partial\,\beta_T} - \frac{\sin\alpha_T}{\sin\beta_T}\,\frac{\partial}{\partial\,\gamma_T}\right), \qquad (3.2.3)$$

$$\hat{T}_3 = -i\,\frac{\partial}{\partial\,\alpha_T}, \qquad \hat{T}_{3'} = -i\,\frac{\partial}{\partial\,\gamma_T}.$$

Триплет пяримерных векторов $\vec{A}^{a(+)}$ имеет вид

$$\vec{A}^{1(+)} = \frac{1}{r\,(r-x_0)}\,(0, -x_4, x_3, -x_2, x_1),$$

$$\vec{A}^{2(+)} = \frac{1}{r\,(r-x_0)}\,(0, -x_3, -x_4, x_1, x_2), \qquad (3.2.4)$$

$$\vec{A}^{3(+)} = \frac{1}{r\,(r-x_0)}\,(0, x_2, -x_1, -x_4, x_3).$$

Легко заметить, что векторы $\vec{A}^{a(+)}$ ортогональны как друг к другу

$$A_j^{a(+)}\,A_j^{b(+)} = \frac{r+x_0}{r^2\,(r-x_0)}\,\delta_{a\,b}, \qquad (3.2.5)$$

так и к радиус-вектору $\vec{r} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Теперь пользуясь формулой $(3.2.2)$ и условием ортогональности $(3.2.5)$ уравнение Шредингера для восьмимерного изотропного осциллятора

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\,\mu_0}\Delta_8 + \frac{\mu_0\,\omega^2\,u^2}{2}\right)\psi(\vec{u}) = E\,\psi(\vec{u}) \qquad (3.2.6)$$

можем записать в следующем виде

$$\frac{1}{2\,\mu_0}\left(-i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial\,x_j} - \hbar\,A_j^{a(+)}\,\hat{T}_a\right)^2\psi + \frac{\hbar^2}{2\,\mu_0\,r^2}\,\hat{T}^2\,\psi - \frac{e^2}{r}\,\psi = \varepsilon\,\psi, \qquad (3.2.7)$$

где $\varepsilon = -\mu_0\,\omega^2/8$, а $e^2 = E/4$.

Таким образом мы получили уравнение тождественное уравнению Паули и поэтому триплету пятимерных векторов $\vec{A}^{a(+)}$ мы можем придать смысл вектор-потенциалов с осью сингулярностью, направленной вдоль положительной части оси x_0.

Для дальнейшего удобно записать вектор-потенциалы $\vec{A}^{a(+)}$ в следующем виде:

$$A_i^{a(+)} = \frac{2\,i}{r\,(r - x_0)}\,\tau_{i\,j}^{a}\;x_j\,. \tag{3.2.8}$$

Здесь τ^a это 5×5 матрицы и имеют вид

$$\tau^1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau^2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau^3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для τ^a матриц имеют место следующие соотношения

$$\left[\tau^a, \tau^b\right] = i\,\varepsilon_{a\,b\,c}\;\tau^c\,, \quad \left\{\tau^a\,, \tau^b\right\} = \frac{1}{2}\,\delta_{a\,b}\,,$$

$$4\,\tau_{i\,j}^{a}\;\tau_{j\,k}^{b} = \delta_{a\,b}\left(\delta_{i\,k} - \delta_{i\,0}\;\delta_{k\,0}\right) + 2\,i\,\varepsilon_{a\,b\,c}\;\tau^c\,, \tag{3.2.9}$$

$$\varepsilon_{a\,b\,c}\;\tau_{i\,j}^{b}\;\tau_{j\,m}^{c} = \frac{i}{2}\Big[\left(\delta_{i\,0}\;\delta_{k\,0} - \delta_{i\,k}\right)\tau_{j\,m}^{a} - \left(\delta_{i\,0}\;\delta_{m\,0} - \delta_{i\,m}\right)\tau_{j\,k}^{a} +$$

$$+\left(\delta_{j\,0}\;\delta_{m\,0} - \delta_{j\,m}\right)\tau_{i\,k}^{a} - \left(\delta_{j\,0}\;\delta_{k\,0} - \delta_{j\,k}\right)\tau_{i\,m}^{a}\Big]. \tag{3.2.10}$$

Здесь скобки $[\,,\,]$ и $\{\,,\,\}$ означают коммутатор и антикоммутатор, соответственно.

Теперь нам надо выяснить какую систему описывает уравнение $(3.2.7)$. Для этого мы должны знать топологический заряд создающий поле описываемое триплетом вектор-потенциалов $(3.2.4)$. Чтобы вычислить значение топологического заряда необходимо знать явный вид тензора поля. Пользуясь определением тензора поля Янга-Милса

$$F_{i\,k}^{a(+)} = \frac{\partial\,A_k^{a(+)}}{\partial\,x_i} - \frac{\partial\,A_i^{a(+)}}{\partial\,x_k} + \varepsilon_{a\,b\,c}\;A_i^{b(+)}\;A_k^{c(+)}$$

и соотношениями $(3.2.8)$, $(3.2.10)$ получим

$$F_{i\,k}^{a(+)} = \frac{1}{r^2}\left[\left(x_k + r\,\delta_{k\,0}\right)A_i^{a(+)} - \left(x_i + r\,\delta_{i\,0}\right)A_k^{a(+)} - 2\,i\,\tau_{i\,k}^{a}\right]. \tag{3.2.11}$$

Теперь учитывая условие ортогональности $x_i\;A_i^{a(+)} = 0$ и явный вид тензора поля $(3.2.11)$ легко показать, что $x_i\;F_{ik}^{a(+)} = 0$, т.е. как и вектор-потенциал, так и тензор поля ортогонален радиус-вектору частицы.

Отметим также, что из соотношений $(3.2.5)$, $(3.2.8)$, $(3.2.9)$ и $(3.2.11)$ следует, что

$$F_{i\,j}^{a(+)}\;F_{j\,k}^{b(+)} = \frac{1}{r^6}\left(x_i\;x_k - r^2\;\delta_{i\,k}\right)\delta_{a\,b} + \frac{1}{r^2}\,\varepsilon_{a\,b\,c}\;F_{i\,k}^{c(+)}\,,$$

или

$$F_{ik}^{a(+)}\, F_{ik}^{b(+)} = \frac{4}{r^2}\, \delta_{ab}\,. \qquad (3.2.12)$$

Из потенциалов $\vec{A}^{a(+)}$ с помощью калибровочного преобразования

$$B_j^{(+)} = S_+\, A_j^{(+)}\, S_+^{-1} + i\, S_+ \frac{\partial S_+^{-1}}{\partial x_j},$$

где $A_j^{(+)} = A_j^{a(+)}\, \hat{T}_a$, $B_j^{(+)} = B_j^{a(+)}\, \hat{T}_a$, а

$$S_+ = e^{i\,\alpha\, T_3}\, e^{i\,\beta\, T_2}\, e^{i\,\gamma\, T_3}\,, \qquad (3.2.13)$$

Можно сконструировать потециалы $B_j^{a(+)}$, сингулярность которых направлена вдоль отрицательной части оси x_0 и оны имеют вид

$$\vec{B}^{1(+)} = \frac{1}{r\,(r+x_0)}\,(0,\, x_4\,,\, x_3\,,\, -x_2\,,\, -x_1),$$

$$\vec{B}^{2(+)} = \frac{1}{r\,(r+x_0)}\,(0,\, -x_3\,,\, x_4\,,\, x_1\,,\, -x_2), \qquad (3.2.14)$$

$$\vec{B}^{3(+)} = \frac{1}{r\,(r+x_0)}\,(0,\, x_2\,,\, -x_1\,,\, -x_4\,,\, -x_3).$$

Эйлеровы углы α, β и γ в $(3.2.13)$ определены следующим образом

$$\alpha = \frac{i}{2}\ln\frac{(x_2 - i\,x_1)(x_4 - i\,x_3)}{(x_2 + i\,x_1)(x_4 + i\,x_3)} \in [0,\, 2\pi),$$

$$\beta = 2\arctan\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2 + x_4^2}\right)^{\frac{1}{2}} \in [0,\, \pi], \qquad (3.2.15)$$

$$\gamma = \frac{i}{2}\ln\frac{(x_2 + i\,x_1)(x_4 - i\,x_3)}{(x_2 - i\,x_1)(x_4 + i\,x_3)} \in [0,\, 4\pi).$$

Тензор поля для векторного потенциала $B_j^{a(+)}$ обозначим через $\widetilde{F}_{ij}^{a(+)}$.

Теперь зная явный вид тензора поля и его некоторые свойства, вычислим топологический заряд являющимся источником поля описываемое тензором $F_{ij}^{a(+)}$. Вычисление величины топологического заряда удобно произвести в пятимерных гиперсферических координатах, которые определим следующим образом:

$$x_0 = r\cos\theta\,, \qquad x_2 + i\,x_1 = r\sin\theta\sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}\,, \qquad x_4 + i\,x_3 = r\sin\theta\cos\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\,. \qquad (3.2.16)$$

Здесь $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [o, \pi]$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in [0, \pi]$, $\gamma \in [0, 4\pi)$.

Прямые вычисления показывают, что все $F^{a(+)}_{rk} \equiv 0$, где $k = r, \theta, \alpha, \beta, \gamma$, а остальные компоненты имеют вид

$$F^{1(+)}_{\theta\beta} = -\frac{1}{2}\sin\theta\sin\gamma, \quad F^{1(+)}_{\theta\alpha} = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta\cos\gamma, \quad F^{1(+)}_{\theta\gamma} = 0,$$

$$F^{1(+)}_{\beta\alpha} = -\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\beta\cos\alpha, \quad F^{1(+)}_{\beta\gamma} = -\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\gamma, \quad F^{1(+)}_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{4}\sin^2\theta\sin\beta\sin\gamma.$$

$$F^{2(+)}_{\theta\beta} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\gamma, \quad F^{2(+)}_{\theta\alpha} = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta\sin\gamma, \quad F^{2(+)}_{\theta\gamma} = 0,$$

$$F^{2(+)}_{\beta\alpha} = -\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\beta\sin\lambda, \quad F^{2(+)}_{\beta\gamma} = -\frac{1}{4}\sin^2\theta\sin\gamma, \quad F^{2(+)}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{4}\sin^2\theta\sin\beta\cos\gamma.$$

$$F^{3(+)}_{\theta\beta} = F^{3(+)}_{\beta\gamma} = F^{3(+)}_{\alpha\gamma} = 0, \quad F^{3(+)}_{\theta\alpha} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\beta, \quad F^{3(+)}_{\theta\gamma} = \frac{1}{2}\sin\theta, \quad F^{3(+)}_{\beta\alpha} = -\frac{1}{2}\sin^2\theta\sin\beta.$$

Соответствующие компоненты тензора $\tilde{F}^{a(+)}_{ij}$ имеют вид

$$\tilde{F}^{1(+)}_{\theta\beta} = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\alpha, \quad \tilde{F}^{1(+)}_{\theta\alpha} = 0, \quad \tilde{F}^{1(+)}_{\theta\gamma} = -\frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta\cos\alpha,$$

$$\tilde{F}^{1(+)}_{\beta\alpha} = -\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\alpha, \quad \tilde{F}^{1(+)}_{\beta\gamma} = -\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\beta\cos\alpha, \quad \tilde{F}^{1(+)}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{4}\sin^2\theta\sin\beta\sin\alpha.$$

$$\tilde{F}^{2(+)}_{\theta\beta} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\alpha, \quad \tilde{F}^{2(+)}_{\theta\alpha} = 0, \quad \tilde{F}^{2(+)}_{\theta\gamma} = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta\sin\alpha,$$

$$\tilde{F}^{2(+)}_{\beta\alpha} = \frac{1}{4}\sin^2\theta\sin\alpha, \quad \tilde{F}^{2(+)}_{\beta\gamma} = \frac{1}{4}\sin^2\theta\cos\beta\sin\alpha, \quad \tilde{F}^{2(+)}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{4}\sin^2\theta\sin\beta\cos\alpha.$$

$$\tilde{F}^{3(+)}_{\theta\beta} = \tilde{F}^{3(+)}_{\beta\alpha} = \tilde{F}^{3(+)}_{\alpha\gamma} = 0, \quad \tilde{F}^{3(+)}_{\theta\alpha} = \frac{1}{2}\sin\theta, \quad \tilde{F}^{3(+)}_{\theta\gamma} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\beta, \quad \tilde{F}^{3(+)}_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}\sin^2\theta\sin\beta.$$

Теперь пользуясь определением дуального тензора

$$^{*}f^{\mu\nu} = \frac{\sqrt{g}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} f_{\lambda\sigma},$$

где $\varepsilon^{1234} = 1$, g - детерминант метрического тензора $g_{\mu\nu}$, и точными выражениями гиперсферических компонент тензора $F^{a(+)ij}$, получим, что $F^{a(+)ij}$ самодуальный тензор, т.е.

$$^{*}F^{a(+)ij} = F^{a(+)ij}. \qquad (3.2.17)$$

Далее, ползуясь определением топологического заряда

$$q = \frac{1}{32\pi^2}\oint {}^{*}F^{a(+)ij} F^{a(+)}_{ij}\, dS,$$

где

$$dS = \frac{r^4}{8}\sin^3\theta\sin\beta\, d\theta\, d\beta\, d\alpha\, d\gamma$$

есть дифференциальный элемент поверхности четырехмерной сферы вложенная в пятимерное пространство, и учитывая уравнение самодуальности $(3.2.17)$ получим, что в нашем случае значение топологического заряда $q = +1$ [204].

Таким образом, уравнение $(3.2.7)$ описывает систему состоящая из заряженной частицы и $SU(2)$ монополя Янга [26] с топологическим зарядом $q = +1$, которую принято называть $SU(2)$ монополем Янга-Кулона [49, 52, 69, 204].

Если в первом уравнение преобразования Гурвица $(3.1.8)$ заменить $x_0 \to -x_0$, т.е. написать, что

$$x_0 = u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 - u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 ,$$

то из потенциалов $B_j^{a(+)}$ и $A_j^{a(+)}$ получим потенциалы $A_j^{a(-)}$ и $B_j^{a(-)}$ соответственно.

Тензоры $F_{ij}^{a(-)}$ и $\tilde{F}_{ij}^{a(-)}$ соответствующие потенциалам $A_j^{a(-)}$ и $B_j^{a(-)}$ антисамодуальны, т.е.

$$^{*}F^{a(+)ij} = -F^{a(+)ij} , \qquad ^{*}\tilde{F}^{a(+)ij} = -\tilde{F}^{a(+)ij} ,$$

и следовательно оны описывают пятимерную $SU(2)$ монополь Янга-Кулона с топологическим зарядом $q = -1$ и сингулярностями направленными вдоль отрицательных и положительных значениях координаты x_0 соответственно.

Компоненты тензоров $F_{ij}^{a(-)}$ и $\tilde{F}_{ij}^{a(-)}$ можно получить из компонент тензоров $\tilde{F}_{ij}^{a(+)}$ и $F_{ij}^{a(+)}$ соответственно с помощью замены $\theta \to \theta + \pi$.

Здесь также отметим, что в работе [26] Янг доказал, что расширение $U(1)$ монополя Дирака на группу $SU(2)$ возможно лишь только в пятимерном пространстве, и, что при этом, в отличие от монополя Дирака, $SU(2)$ монополь имеет топологический заряд $q = \pm 1$.

В заключении этого параграфа отметим также, что в исходной системе, т.е. в восьмимерном изотропном осцилляторе энергетический спектр принимает только дискретные значения, т.е. частица в таком поле совершает только финитное движение. В отличие от исходной системы, вообще говоря, энергетический спектр конечной системы может принимать как дискретные, так и непрерывные значения.

Далее, для полноты информации ниже мы приведем пятимерные гиперсферические и параболические волновые функции $SU(2)$ монополя Янга-Кулона, с осью сингулярностью направленной вдоль положителной части оси x_0, как для связанных состояний, так и для непрерывного спектра.

3. Базисы $SU(2)$ монополя Янга-Кулона

Переменные в уравнение Шредингера для $SU(2)$ монополя Янга-Кулона разделяются в пятимерных гиперсферических, параболических и сфероидальных координатах. Такое обильное разделение переменных в уравнение Шредингера обусловлено, как показано в работе [57], $SO(6)$ скрытой симметрией $SU(2)$ монополя Янга-Кулона.

Здесь мы рассмотрим только пятимерный гиперсферический и параболический базисы как дискретного, так и непрерывного спектра $SU(2)$ монополя Янга-Кулона.

3.1. Гиперсферический базис (дискретный спектр)

Теперь приступим к решению уравнения Шредингера для $SU(2)$ монополя Янга-Кулона $(3.2.7)$ в пятимерных гиперсферических координатах $(3.2.16)$. Пользуясь условием ортогональности $(3.2.5)$ для векторных потенциалов $A_j^{a(+)}$ мы можем преобразовать уравнение $(3.2.7)$ в уравнение

$$\left[\Delta_5 - 2i\,A_j^{a(+)}\hat{T}_a\,\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{2}{r(r-x_0)}\hat{T}^2\right]\psi + \frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\varepsilon + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0. \qquad (3.3.1)$$

Далее, учитывая, что

$$i\,A_j^{a(+)}\,\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{2}{r(r-x_0)}\hat{L}_a\,,$$

где

$$\hat{L}_1 = \frac{i}{2}\left(-x_4\,\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\,\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\,\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\,\frac{\partial}{\partial x_4}\right),$$

$$\hat{L}_2 = \frac{i}{2}\left(-x_3\,\frac{\partial}{\partial x_1} - x_4\,\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\,\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2\,\frac{\partial}{\partial x_4}\right),$$

$$\hat{L}_3 = \frac{i}{2}\left(x_2\,\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\,\frac{\partial}{\partial x_2} - x_4\,\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\,\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

уравнение $(3.3.1)$ запишем в виде

$$\left[\Delta_5 - \frac{4}{r(r-x_0)}\vec{L}\vec{T} - \frac{2}{r(r-x_0)}\hat{T}^2\right]\psi + \frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\varepsilon + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0. \qquad (3.3.2)$$

Мы видим, что уравнение $(3.3.2)$ содержит член $L\,T$ - взаимодействия, который указывает на то, что мы не можем полную волновую функцию разделить на произведение двух функций зависящие от координат $IR^5(\vec{x})$ и $S^3(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$ соответственно.

Теперь введем оператор $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{T}}$. Так как операторы $\hat{\vec{L}}$ и $\hat{\vec{T}}$ коммутируют, то

$$\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{T}^2 + 2\hat{L}_a \hat{T}_a ,$$

и следовательно уравнение $(3.3.2)$ в пятимерных гиперсферических координантах $(3.2.16)$ будет иметь вид

$$\left(\Delta_{r\theta} - \frac{\hat{L}^2}{r^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{\hat{J}^2}{r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \psi + \frac{2\mu_0}{\hbar^2} \left(\varepsilon + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0 . \qquad (3.3.3)$$

Здесь

$$\Delta_{r\theta} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Отметим также, что

$$\left[\hat{L}_a , \hat{L}_b \right] = i\, \varepsilon_{abc}\, \hat{L}_c , \qquad \left[\hat{J}_a , \hat{J}_b \right] = i\, \varepsilon_{abc}\, \hat{J}_c .$$

Представим полную гиперсферическую волновую функцию $SU(2)$ монополя Янга-Кулона в следующем виде

$$\psi \left(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma; \alpha_T , \beta_T , \gamma_T \right) = \Phi \left(r, \theta \right) \Im \left(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T , \beta_T , \gamma_T \right), \qquad (3.3.4)$$

где $\Im \left(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T , \beta_T , \gamma_T \right)$ - собственная функция операторов $\hat{L}^2, \hat{T}^2$ и $\hat{J}^2$ с собственными значениями $L(L+1), T(T+1)$ и $J(J+1)$ соответственно. После подстановки анзаца $(3.3.4)$ в уравнение $(3.3.3)$, то для функций $\Phi(r, \theta)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\left[\Delta_{r\theta} - \frac{L(L+1)}{r^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{J(J+1)}{r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right] \Phi + \frac{2\mu_0}{\hbar^2} \left(\varepsilon + \frac{e^2}{r} \right) \Phi = 0 . \qquad (3.3.5)$$

Ортонормированные условием

$$\int \Im^{JM*}_{LTm't'} \; \Im^{JM*}_{L_1 T_1 m_1' t_1'} \, d\Omega \, d\Omega_T = \delta_{J J_1} \, \delta_{L L_1} \, \delta_{T T_1} \, \delta_{M M_1} \, \delta_{m' m_1'} \, \delta_{t' t_1'}$$

функция $\Im \left(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T , \beta_T , \gamma_T \right)$ имеет вид [54]

$$\Im^{JM}_{LTm't'} = \sqrt{\frac{(2L+1)(2J+1)}{4\pi^4}} \sum_{M=m+t} C^{JM}_{Lm;Tt} \, D^L_{mm'} (\alpha, \beta, \gamma) \, D^T_{t t'} (\alpha_T , \beta_T , \gamma_T), \qquad (3.3.6)$$

где $C^{JM}_{Lm;Tt}$ - коэффициенты Клебша-Гордана группы $SU(2)$, $D^L_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$ и $D^T_{t t'} (\alpha_T , \beta_T , \gamma_T)$ функции Вигнера [192], а

$$d\,\Omega = \frac{1}{8}\sin\beta\; d\,\alpha\; d\,\beta\; d\,\gamma\,, \qquad d\,\Omega_T = \frac{1}{8}\sin\beta_T\; d\,\alpha_T\; d\,\beta_T\; d\,\gamma_T\,. \tag{3.3.7}$$

Теперь докажем, что в формуле (3.3.6) коэффициенты разложения $C^{J\,M}_{L\,m;\,T\,t}$ действительно являются коэффициентами Клебша-Гордана группы $SU(2)$.

Запишем разложение в следующем виде

$$\Im^{J\,M}_{L\,T\,m'\,t'}\left(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T\right) = \sum_{M=m+t}\left(J\,M\,\middle|\,L\,m;T\,t\right) D^{L}_{m\,m'}\left(\alpha,\beta,\gamma\right) D^{T}_{t\,t'}\left(\alpha_T,\beta_T,\gamma_T\right).$$

Подействуем на разложение оператором $\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{T}^2 + 2\,\hat{L}_a\,\hat{T}_a$, вспомним, что $\Im^{J\,M}_{L\,T\,m'\,t'}$ является собственной функцией операторов $\hat{J}^2$, $\hat{L}^2$ и $\hat{T}^2$ одновременно и пользуясь интегралом ортонормировки для D-функции Вигнера

$$\int D^{j_2\,*}_{m_2\,m_2'}\left(\alpha,\beta,\gamma\right) D^{j_2}_{m_2\,m_2'}\left(\alpha,\beta,\gamma\right) d\,\Omega = \frac{16\,\pi^2}{2\,j_1+1}\,\delta_{j_1\,j_2}\;\delta_{m_1\,m_2}\;\delta_{m_1'\,m_2'}\,, \tag{3.3.8}$$

Получим

$$\frac{2\,\pi^4}{(2\,J+1)(2\,L+1)}\left[J\,(J+1) - L\,(L+1) - T\,(T+1)\right]\left(J\,M\,\middle|\,L\,m;T\,t\right)\delta_{m'\,m_1'}\;\delta_{t'\,t_1'} =$$

$$= \sum_{M=m_1+t_1}\left(J\,M\,\middle|\,L_1\,m_1\,;T_1\,t_1\right)\left\langle L\,m\,m';T\,t\,t'\middle|\hat{L}_a\,\hat{T}_a\,\middle|L_1\,m_1\,m_1';T_1\,t_1\,t_1'\right\rangle, \tag{3.3.9}$$

где

$$\left\langle L\,m\,m';T\,t\,t'\middle|\hat{L}_a\,\hat{T}_a\,\middle|L_1\,m_1\,m_1';T_1\,t_1\,t_1'\right\rangle = \int D^{L\,*}_{m\,m'}\left(\alpha,\beta,\gamma\right) D^{T\,*}_{t\,t'}\left(\alpha_T,\beta_T,\gamma_T\right)\times$$

$$\times\,\hat{L}_a\,\hat{T}_a\;D^{L_1}_{m_1\,m_1'}\left(\alpha,\beta,\gamma\right) D^{T_1}_{t_1\,t_1'}\left(\alpha_T,\beta_T,\gamma_T\right) d\,\Omega\; d\,\Omega_T\,. \tag{3.3.10}$$

Теперь пользуясь определением циклических компонент вектора [192]

$$A_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_{-1} - A_{+1}\right), \qquad A_y = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(A_{+1} - A_{-1}\right), \qquad A_z = A_0$$

имеем

$$\hat{L}_a\;\hat{T}_a = \hat{L}_0\;\hat{T}_0 - \hat{L}_{-1}\;\hat{T}_{+1} - \hat{L}_{+1}\;\hat{T}_{-1}\,.$$

Далее, учитывая формулу [192]

$$\hat{J}_\nu\;D^{J}_{M\,M'}\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = \begin{cases} -M\;D^{J}_{M\,M'}\left(\alpha,\beta,\gamma\right), & \nu = 0 \\ \pm\sqrt{\dfrac{J\,(J+1) - M\,(M+1)}{2}}\,D^{J}_{M\pm1,\,M'}\left(\alpha,\beta,\gamma\right), & \nu = \pm1 \end{cases}$$

и интеграл ортонормировки (3.3.8), для матричного элемента (3.3.10) получим

$$\left\langle L\,m\,m';T\,t\,t'\middle|\hat{L}_a\,\hat{T}_a\,\middle|L_1\,m_1\,m_1';T_1\,t_1\,t_1'\right\rangle=\frac{2\,\pi^4}{(2\,J+1)(2\,L+1)}\,\delta_{L\,L_1}\,\delta_{T\,T_1}\,\delta_{m'\,m_1'}\,\delta_{t'\,t_1'}\times$$

$$\times\Big[2\,m\,t\,\delta_{m_1\,m}\,\delta_{t_1\,t}+\sqrt{(L+m)(L-m+1)(T-t)(T+t+1)}\,\delta_{m_1,\,m-1}\,\delta_{t_1\,t+1}+$$

$$\sqrt{(L-m)(L+m+1)(T+t)(T-t+1)}\,\delta_{m_1,\,m+1}\,\delta_{t_1\,t-1}\Big].$$

Подставляя полученное выражение для матричного элемента в формулу $(3.3.9)$, имеем

$$\begin{aligned}&\left[J\,(J+1)-L\,(L+1)-T\,(T+1)-2\,m\,t\right](J\,M\,|\,L\,m;T\,t)=\\&=\sqrt{(L+m)(L-m+1)(T-t)(T+t+1)}\,(J\,M\,|\,L,\,m-1;T,\,t+1)+\\&+\sqrt{(L-m)(L+m+1)(T+t)(T-t+1)}\,(J\,M\,|\,L\,,m-1;T,\,t+1).\end{aligned}$$

Сравнение последней формулы с трехчленным рекуррентным соотношением $(1.4.18)$ показывает, что действительно коэффициенты разложения $(3.3.6)$ являются коэффициентами Клебша-Гордана группы $SU(2)$.

Теперь, после установления явной зависимости волновой функции $SU(2)$- монополя Янга-Кулона от координат, связанные с “изоспин-орбитальным” взаимодействием, найдем полную волновую функцию. Для этого функцию $\Phi(r,\theta)$ в соотношении $(3.3.4)$ представим в виде

$$\Phi(r,\theta)=R(r)\,Z(\theta).$$

Тогда переменные в уравнение $(3.3.5)$ разделяются и мы приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{\sin^3\theta}\,\frac{d}{d\,\theta}\left(\sin^3\theta\,\frac{d\,Z}{d\,\theta}\right)-\frac{2\,L\,(L+1)}{1+\cos\theta}\,Z-\frac{2\,J\,(J+1)}{1-\cos\theta}\,Z+\lambda\,(\lambda+3)\,Z=0,\qquad(3.3.11)$$

$$\frac{1}{r^4}\,\frac{d}{d\,r}\left(r^4\,\frac{d\,R}{d\,r}\right)-\frac{\lambda\,(\lambda+3)}{r^2}\,R+\frac{2\,\mu_0}{\hbar^2}\left(\varepsilon+\frac{e^2}{r}\right)R=0.\qquad(3.3.12)$$

Вначале рассмотри, уравнение $(3.3.11)$. В уравнение $(3.3.11)$ удобно перейти к новой переменной

$$y=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

и решение искать в следующем виде

$$Z(y)=y^J\,(1-y)^L\,W(y).$$

Подставляя последнее соотношение в уравнение $(3.3.11)$ получим уравнение для гипергеометрической функции $(2.4.9)$ со следующими параметрами:

$$a=-\lambda+L+J\,,\qquad b=\lambda+L+J+3,\qquad c=2\,J+2.$$

Таким образом мы находим, что ненормированное решение уравнения $(3.3.11)$ имеет вид

$$Z(\theta)=(1-\cos\theta)^L\ (1+\cos\theta)^J\ {}_2F_1\left(-\lambda+L+J\,,\,\lambda+L+J+3;\quad 2J+2;\quad \frac{1-\cos\theta}{2}\right).$$

Это решение имеет хорошее поведение при $\theta=\pi$, если ряд ${}_2F_1$ конечный, т.е.

$$-\lambda+L+J=-n_\theta\,,\quad \text{где } n_\theta=0,1,\ldots.$$

Теперь пользуясь формулой $(2.4.13)$, и учитывая интеграл [199]

$$\int_{-1}^{1}(1-y)^a\ (1+y)^b\ \left[P_n^{(a,b)}(y)\right]^2\ d\,y=\frac{2^{a+b+1}}{2n+a+b+1}\,\frac{\Gamma(n+a+1)\,\Gamma(n+b+1)}{n!\,\Gamma(n+a+b+1)},$$

нормированные условием

$$\int_0^{\pi} Z_{\lambda' L J}(\theta)\,Z_{\lambda L J}(\theta)\sin^3\theta\,d\,\theta=\delta_{\lambda\lambda'}$$

функцию $Z_{\lambda L J}(\theta)$ можно записать в виде

$$Z_{\lambda L J}(\theta)=C^{\lambda}_{L J T}\ (1-\cos\theta)^J\ (1+\cos\theta)^L\ P^{(2J+1,\,2L+1)}_{\lambda-L-J}(\cos\theta), \tag{3.3.13}$$

где

$$C^{\lambda}_{L J T}=\sqrt{\frac{(2\lambda+3)(\lambda-L-J)!\,\Gamma(\lambda+L+J+3)}{2^{2L+2J+3}\ \Gamma(\lambda-L+J+2)\,\Gamma(\lambda+L-J+2)}}\,. \tag{3.3.14}$$

Функцию

$$\Phi^{\lambda J M}_{L T m' t'}(\theta,\,\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T)=Z_{\lambda L J}(\theta)\,\Im^{J M}_{L T m' t'}(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T)$$

называют $SU(2)$ монопольными гармониками Тамма [204].

Теперь вернемся к радиальному уравнению $(3.3.12)$. После подстановки в $(3.3.12)$ анзаца

$$R(r)=r^{\lambda}\ e^{-\kappa r}\ f(r)$$

для функции $f(r)$ получим уравнение вырожденной гипергеометрической функции $(2.4.18)$ от аргумента $z=2\kappa r$, и с параметрами $\alpha=\lambda+2-\dfrac{1}{\kappa r_0}$, $\gamma=2\lambda+4$, где $\kappa=\dfrac{\sqrt{-2\mu_0\,\varepsilon}}{\hbar}$, а $r_0=\dfrac{\hbar^2}{\mu_0\,e^2}$ - радиус Бора. Для связанных состояний $(\varepsilon<0)$, имеем

$$\alpha=\lambda+2-\frac{1}{\kappa r_0}=-n_r=0,-1,-2,\cdots,$$

откуда следует, что энергетический спектр $SU(2)$ монополя Янга-Кулона имеет вид

$$\varepsilon_N^T = -\frac{\mu_0\, e^4}{2\hbar^2\left(\frac{N}{2}+2\right)^2}, \qquad (3.3.15)$$

где $N = 2(n_r + \lambda) = 2(n_r + n_\theta + L + J)$.

Решение радиального уравнения $(3.3.12)$ нормированное условием

$$\int_0^\infty r^4\, R_{N'\lambda}(r)\, R_{N\lambda}(r)\, d\,r = \delta_{N\,N'}$$

имеет вид

$$R_{N\lambda}(r) = \frac{32}{r_0^{\frac{5}{2}}\,(N+4)!}\sqrt{\frac{\left(\frac{N}{2}+\lambda+3\right)!}{\left(\frac{N}{2}-\lambda\right)!}}\,\frac{(2\kappa r)^\lambda\, e^{-\kappa r}}{(2\lambda+3)!}\, F\left(-\frac{N}{2}+\lambda;\, 2\lambda+4; 2\kappa r\right). \qquad (3.3.16)$$

Полную волновую функцию, нормированное условием

$$\int \left|\psi^{hsp}\right|^2 d\,v_5 = 1,$$

где $d\,v_5 = r^4 \sin^3\theta\, d\,r\, d\,\theta\, d\,\Omega\, d\,\Omega_T$, можно записать в виде

$$\psi^{hsp} = R_{N\lambda}(r)\, Z_{\lambda L J}(\theta)\, \Im^{J\,M}_{L\,T\,m'\,t'}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T). \qquad (3.3.17)$$

3.2. Параболический базис (дискретный спектр)

Теперь рассмотрим пятимерную задачу $SU(2)$ монополя Янга-Кулона в параболических координатах.

В IR^5 опредилим параболические координаты следующим образом:

$$x_0 = \frac{1}{2}(\mu - \nu), \qquad x_2 + i\,x_1 = \sqrt{\mu\nu}\,\sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}, \qquad x_4 + i\,x_3 = \sqrt{\mu\nu}\,\cos\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \qquad (3.3.18)$$

где $\mu, \nu \in [0, \infty)$. В координатах $(3.3.18)$ кулоновский потенциал, дифференциальные элементы длины, объема и оператор Лапласа имеют вид

$$V = -\frac{e^2}{r} = -\frac{2\,e^2}{\mu+\nu},$$

$$d\,l_5^2 = \frac{\mu+\nu}{4}\left(\frac{1}{\mu}d\,\mu^2 + \frac{1}{\nu}d\,\nu^2\right) + \frac{\mu\nu}{4}\left(d\,\alpha^2 + d\,\beta^2 + d\,\gamma^2 + 2\cos\beta\, d\,\alpha\, d\,\gamma\right),$$

$$d\,v_5 = \frac{\mu\nu}{32}(\mu+\nu)\sin\beta\, d\,\mu\, d\,\nu\, d\,\alpha\, d\,\beta\, d\,\gamma,$$

$$\Delta_5 = \frac{4}{\mu+\nu}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu^2\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right]-\frac{4}{\mu\nu}\hat{L}^2,$$

где $\hat{L}^2$ есть квадрат оператора момента и определяется соотношением $(2.2.4)$.

В параболических координатах $(3.3.18)$ уравнение $(3.2.7)$ принимает вид

$$\left[\Delta_{\mu\nu}-\frac{4\hat{J}^2}{\nu(\mu+\nu)}-\frac{4\hat{L}^2}{\mu(\mu+\nu)}\right]\psi^{par}+\frac{2\mu_0}{\hbar^2}\left(\varepsilon+\frac{2e^2}{\mu+\nu}\right)\psi^{par}=0, \qquad (3.3.19)$$

где

$$\Delta_{\mu\nu}=\frac{4}{\mu+\nu}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu^2\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right].$$

После подстановки

$$\psi^{par}=\Phi_1(\mu)\Phi_2(\nu)\Im^{JM}_{LTm't'}(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T)$$

переменные в уравнение $(3.3.19)$ разделяются и мы приходим к следующей паре обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\mu}\left(\mu^2\frac{d\Phi_1}{d\mu}\right)+\left[\frac{\mu_0\varepsilon}{2\hbar^2}\mu-\frac{L(L+1)}{\mu}+\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\hbar}\Omega+\frac{\mu_0 e^2}{2\hbar^2}\right]\Phi_1=0,$$

$$(3.3.20)$$

$$\frac{1}{\nu}\frac{d}{d\nu}\left(\nu^2\frac{d\Phi_2}{d\nu}\right)+\left[\frac{\mu_0\varepsilon}{2\hbar^2}\nu-\frac{J(J+1)}{\nu}-\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\hbar}\Omega+\frac{\mu_0 e^2}{2\hbar^2}\right]\Phi_2=0,$$

где Ω - параболическая постоянная разделения. Решения уравнения $(3.3.20)$ ищем в виде

$$\Phi_1(y_1)=e^{-\frac{y_1}{2}}y_1^L f_1(y_1), \qquad \Phi_2(y_2)=e^{-\frac{y_2}{2}}y_2^J f_2(y_2),$$

где $y_1=\kappa\mu$, $y_2=\kappa\nu$. Тогда, после подстановки этих соотношений в уравнения $(3.3.20)$ для функций $f_1(y_1)$ и $f_2(y_2)$ получим уравнения

$$y_1\frac{d^2 f_1}{dy_1^2}+(2L+2-y_1)\frac{d f_1}{dy_1}-\left(L+1-\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar}\Omega-\frac{\mu_0 e^2}{2\kappa\hbar^2}\right)f_1=0,$$

$$y_2\frac{d^2 f_2}{dy_2^2}+(2J+2-y_2)\frac{d f_2}{dy_2}-\left(J+1+\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar}\Omega-\frac{\mu_0 e^2}{2\kappa\hbar^2}\right)f_2=0,$$

Решениями которых, согласно уравнению для вырожденной гипергеометрической функции $(2.4.18)$, есть

$$f_1(y_1) = F\left(L+1-\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar}\,\Omega-\frac{\mu_0\,e^2}{2\kappa\hbar^2};\,2L+2;\,y_1\right),$$

$$f_2(y_2) = F\left(J+1+\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar}\,\Omega-\frac{\mu_0\,e^2}{2\kappa\hbar^2};\,2J+2;\,y_2\right),$$

и следовательно

$$\Phi_1(\mu) = const\; e^{-\frac{\kappa\mu}{2}}\,(\kappa\mu)^L\; F\left(L+1-\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar}\,\Omega-\frac{\mu_0\,e^2}{2\kappa\hbar^2};\,2L+2;\,\kappa\mu\right),$$

$$\Phi_2(\nu) = const\; e^{-\frac{\kappa\nu}{2}}\,(\kappa\nu)^J\; F\left(J+1+\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar}\,\Omega-\frac{\mu_0\,e^2}{2\kappa\hbar^2};\,2J+2;\,\kappa\nu\right).$$

Чтобы функции $\Phi_1(\mu)$ и $\Phi_2(\nu)$ являлись регулярными решениями уравнений $(3.3.20)$ при $\mu,\nu\to\infty$, необходимо требовать выполнение следующих условий:

$$n_1 = -L-1+\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar}\,\Omega+\frac{1}{2\kappa r_0}, \qquad n_2 = -J-1-\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\kappa\hbar}\,\Omega+\frac{1}{2\kappa r_0}, \tag{3.3.21}$$

где параболические квантовые числа n_1 и n_2 неотрицательные целые числа. Из соотношений $(3.3.21)$ с учетом обозначения $\kappa = \frac{\sqrt{-2\mu_0\,\varepsilon}}{\hbar}$ для энергетического спекра $SU(2)$ монополя Янга-Кулона получим выражение

$$\varepsilon_N^T = -\frac{\mu_0\;e^4}{2\hbar^2\left(n_1+n_2+J+L+2\right)^2}. \tag{3.3.22}$$

Далее, из сравнения соотношений $(3.3.15)$ и $(3.3.22)$ для энергетического спектра $SU(2)$ монополя Янга-Кулона следует, что параболические квантовые числа n_1 и n_2 связаны с главным квантовым числом N следующим образом:

$$N = 2\left(n_1+n_2+J+L\right).$$

Таким образом, нормированный условием

$$\int\left|\psi^{par}\right|^2 d\,v_5 = 1$$

парабоческий базис $SU(2)$ монополя Янга-Кулона для дискретного спектра имеет вид

$$\psi^{par} = \kappa^3\,\sqrt{r_0}\;\Phi_{n_1 L}(\mu)\,\Phi_{n_2 J}(\nu)\,\Im^{JM}_{LTm't'}\left(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T\right), \tag{3.3.23}$$

где

$$\Phi_{pq}(x) = \frac{1}{(2q+1)!}\sqrt{\frac{(p+2q+1)!}{p!}}\,\exp\left(-\frac{\kappa x}{2}\right)(\kappa x)^q\;F(-p;\,2q+2;\,\kappa x). \tag{3.3.24}$$

И, наконец, из формулы (3.3.15) следует, что энергетический спектр $SU(2)$ монополя Янга-Кулона вырожден по квантовому числу λ. За это случайное вырождение энергетического спектра, как и в случае обычного атома водорода, должно быть связано с наличием дополнительного интеграла движения, подобного вектору Лапласа-Рунге-Ленца-Паули [85-92, 110]. Действительно, следуя методу предложенного в монографии [205], исключая энергию ε из системы уравнений (3.3.20) получим оператор

$$\hat{\Omega} = \frac{\hbar}{\sqrt{\mu_0}} \left\{ \frac{2}{\mu+\nu} \left[\frac{\mu}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\nu^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \right) - \frac{\nu}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{2(\mu+\nu)}{\mu\nu} \hat{L}^2 + \frac{4\nu}{\nu(\mu+\nu)} \hat{L}_a \hat{T}_a + \frac{2\nu}{\nu(\mu+\nu)} \hat{T}^2 + \frac{1}{r_0} \frac{\mu-\nu}{\mu+\nu} \right\}, \qquad (3.3.25)$$

Который и является тем дополнительным интегралом движения ответственный за случайное вырождения энергетического спектра $SU(2)$ монополя Янга-Кулона. Собственное значение оператора $\hat{\Omega}$ (3.3.25) является параболическая постоянная разделения Ω. Из определения параболических квантовых чисел n_1 и n_2 (3.3.21) следует, что

$$\Omega = \frac{2\hbar}{r_0 \sqrt{\mu_0}} \frac{n_1 - n_2 + L - J}{N+4}.$$

Теперь вычислим кратность вырождения энергетического спектра $SU(2)$ монополя Янга-Кулона при фиксирояанном значении квантового числа T. Полная кратность вырождения при фиксирояанном значении T равна

$$g_N^T = (2T+1) \sum_{n_1+n_2} \sum_L (2L+1) \sum_J (2J+1).$$

После некоторых длинных и утомительных вычислений мы получим следующий результат:

$$g_N^T = \frac{1}{12} (2T+1)^2 \left(\frac{N}{2} - T + 1 \right) \left(\frac{N}{2} - T + 2 \right) \left[\left(\frac{N}{2} - T + 2 \right) \left(\frac{N}{2} - T + 3 \right) + 2T(N+5) \right]. \qquad (3.3.26)$$

При $T = 0$ и $N = 2n$ (четное) мы получим

$$g_n^0 = \frac{1}{12} (n+1)(n+2)^2 (n+3),$$

т.е. кратность вырождения энергетических уровней пятимерной задачи Кеплер-Кулона.

Далее, производя суммирование формулы (3.3.26) по квантовому числу T имеем

$$g_N = \sum_{T=0,\frac{1}{2}}^{\frac{N}{2}} g_N^T = \frac{(N+7)!}{7!\,N!},$$

т.е. мы получили кратность вырождения энергетических уровней восьмимерного изотропного квантового осциллярора, как и следовало ожидать.

Итак, в последных двух параграфах мы рассмотрели задачу $SU(2)$ монополя Янга-Кулона для дискретного спектра в гиперсферических и параболических координатах.

3.3. Гиперсферический базис (непрерывный спектр)

Теперь определим гиперсферический базис $SU(2)$ монополя Янга-Кулона в непрерывном спектре, т.е. рассмотрим случай когда энергия системы положительна, $\varepsilon > 0$.

Решение уравнения $(3.2.7)$ можно представить в виде

$$\psi^{hsp} = R_{k\lambda}(r)\, Z_{\lambda L J}(\theta)\, \Im^{JM}_{LTm't'}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T), \qquad (3.3.27)$$

где функции $Z_{\lambda L J}(\theta)$ и $\Im^{JM}_{LTm't'}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$ определены соотношениями $(3.3.13)$ и $(3.3.6)$ соответственно. В случае непрерывного спектра радиальное волновое уравнение $(3.3.12)$ переходит в уравнение

$$\frac{1}{r^4}\frac{d}{dr}\left(r^4 \frac{dR}{dr}\right) - \frac{\lambda(\lambda+3)}{r^2} R + \left(k^2 + \frac{2}{r r_0}\right) R = 0, \qquad (3.3.28)$$

где $k = \sqrt{\dfrac{2\mu_0 \varepsilon}{\hbar^2}}$, а $r_0 = \dfrac{\hbar^2}{\mu_0 e^2}$ - радиус Бора. Решение уравнения $(3.3.28)$ представим в виде

$$R_{k\lambda}(r) = C_{k\lambda} \frac{(2ikr)^{\lambda}}{(2\lambda+3)!} e^{-ikr} F\left(\lambda + 2 + \frac{i}{k r_0}; 2\lambda + 4; 2ikr\right).$$

Далее, пользуясь следующим представлением вырожденной гипергеометрической функции [89]

$$F(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a}\, G(a; a-c+1; -z) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{z}\, z^{a-c}\, G(c-a; 1-a; z), \qquad (3.3.29)$$

где

$$G(a; c; z) = 1 + \frac{ac}{1!z} + \frac{a(a+1)c(c+1)}{2!z^2} + \ldots,$$

для радиальной волновой функции $R_{k\lambda}(r)$ получим выражение

$$R_{k\lambda}(r) = C_{k\lambda} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\left(\lambda + \frac{1}{k r_0}\right)}}{2k^2 r^2} \Re e\left\{ \frac{e^{-i\left[kr - \frac{\pi}{2}(\lambda+2) + \frac{1}{k r_0}\ln 2kr\right]}}{\Gamma\left(\lambda + 2 - \frac{i}{k r_0}\right)} G\left(\lambda + 2 - \frac{i}{k r_0}; \frac{i}{k r_0} - \lambda - 1; -2ikr\right)\right\}. \qquad (3.3.30)$$

Если радиальную волновую функцию нормировать условием

$$\int_0^\infty r^4\ R^*_{k'\lambda}(r)\,R_{k\lambda}(r)\,d\,r = 2\pi\,\delta\left(k-k'\right),$$

то для нормировочного коэффициента $C_{k\lambda}$ получим выражение

$$C_{k\lambda} = (-i)^\lambda\ 4k^2\,e^{\frac{\pi}{2k\,r_0}}\left|\Gamma\left(\lambda+2-\frac{i}{k\,r_0}\right)\right|. \qquad (3.3.31)$$

И, наконец, приведем асимптотическое выражение радиальной волновой функции $R_{k\lambda}(r)$ при больших r (первый член разложения (3.3.30)), которое имеет вид:

$$R_{k\lambda}(r) \approx \frac{2}{r^2}\sin\left[k\,r+\frac{1}{k\,r_0}\ln 2k\,r-\frac{\pi}{2}(\lambda+1)+\delta_\lambda\right],$$

где

$$\delta_\lambda = \arg\Gamma\left(\lambda+2-\frac{i}{k\,r_0}\right).$$

3.4. Параболический базис (непрерывный спектр)

Теперь рассмотрим пятимерную задачу $SU(2)$ монополя Янга-Кулона в параболичевских координатах для непрерывного спектра. Поскольку выражение энергии присутствует только в уравнениях зависящие от параболтческих координат μ и ν, следовательно полную параболическую волновую функцию $SU(2)$ монополя Янга-Кулона в непрерывном спектре, как и в случае дискретного спектра, можно представить в сдедующем виде:

$$\psi^{par} = \Phi(\mu,\nu)\,\Im^{JM}_{LTm't'}\left(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T\right) = \Phi_1(\mu)\,\Phi_2(\nu)\,\Im^{JM}_{LTm't'}\left(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T\right). \quad (3.3.32)$$

Тогда систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3.20) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\,\mu}\left(\mu^2\,\frac{d\,\Phi_1}{d\,\mu}\right)+\left[\frac{k^2}{4}\mu-\frac{L(L+1)}{\mu}+\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\hbar}\,\Omega+\frac{1}{2r_0}\right]\Phi_1 = 0,$$

$$(3.3.33)$$

$$\frac{1}{\nu}\frac{d}{d\,\nu}\left(\nu^2\,\frac{d\,\Phi_2}{d\,\nu}\right)+\left[\frac{k^2}{4}\nu-\frac{J(J+1)}{\nu}-\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\hbar}\,\Omega+\frac{1}{2r_0}\right]\Phi_2 = 0,$$

где Ω - параболическая посточнная разделения. Далее, если функцию $\Phi(\mu,\nu)$ нормировать условием

$$\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi^*_{k'\Omega' J L}(\mu,\nu)\,\Phi_{k\Omega J L}(\mu,\nu)\,\mu\nu(\mu+\nu)\,d\mu\,d\nu = 2\pi\,\delta(k-k')\,\delta(\Omega-\Omega'), \qquad (3.3.34)$$

то для параболического базиса $SU(2)$ монополя Янга-Кулона получим выражение:

$$\psi^{par} = C^{JL}_{k\Omega}\,\Phi^L_{k\Omega}(\mu)\,\Phi^J_{k,-\Omega}(\nu)\,\Im^{JM}_{LTm't'}(\alpha,\beta,\gamma;\alpha_T,\beta_T,\gamma_T), \qquad (3.3.35)$$

где

$$\Phi^q_{k\Omega}(x) = \frac{(ikx)^q}{(2q+1)!}\,e^{-\frac{i}{2}kx}\,F\left(q+1+\frac{i}{2kr_0}+\frac{i\hbar}{2k\sqrt{\mu_0}}\Omega;\,2q+2;\,ikx\right), \qquad (3.3.36)$$

а

$$C^{JL}_{k\Omega} = (-i)^{J+L}\sqrt{\frac{\hbar k^3}{2\pi\sqrt{\mu_0}}}\;\left|\Gamma\left(J+1-\frac{i}{2kr_0}+\frac{i\hbar}{2k\sqrt{\mu_0}}\Omega\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,\Gamma\left(L+1-\frac{i}{2kr_0}-\frac{i\hbar}{2k\sqrt{\mu_0}}\Omega\right)\right|\exp\left(\frac{\pi}{2kr_0}\right). \qquad (3.3.37)$$

В конце отметим, что при вычислении нормировочного интеграла $(3.3.34)$ мы также, как и при вычислении коэффициента нормировки гиперсферического базиса $C_{k\lambda}$ $(3.3.31)$, воспользовались представлением вырожденной гипергеометрической функции $(3.3.29)$.

4. Рассеяние электронов на $SU(2)$ монополе Янга – Кулона

Теперь рассмотрим рассеяние электронов в поле $SU(2)$ монополя Янга – Кулона. Так как $SU(2)$ монополь Янга – Кулона кулоновоподобная система, а движение в кулоновском поле произвольной размерности $d \geq 3$ является двумерной задачей, то волновая функция $SU(2)$ монополя Янга – Кулона не должна зависеть от углов α, β и γ, т.е. от квантового числа L, а это означает, что $L=0$, и следовательно, $J=T$. Тогда система уравнений $(3.3.33)$ принимает вид:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\mu}\left(\mu^2\frac{d\Phi_1}{d\mu}\right)+\left[\frac{k^2}{4}\mu+\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\hbar}\Omega+\frac{1}{2r_0}\right]\Phi_1 = 0,$$

$$\frac{1}{\nu}\frac{d}{d\nu}\left(\nu^2\frac{d\Phi_2}{d\nu}\right)+\left[\frac{k^2}{4}\nu-\frac{T(T+1)}{\nu}-\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\hbar}\Omega+\frac{1}{2r_0}\right]\Phi_2 = 0. \qquad (3.4.1)$$

Далее, мы должны найти такие решения системы уравнений $(3.4.1)$, чтобы решение уравнения Шредингера для $SU(2)$ монополя Янга – Кулона при отрицательных $x_0 \in (-\infty, 0)$ и больших $r \to \infty$ имело вид плоской волны:

$$\psi \sim e^{i k x_0}, \tag{3.4.2}$$

что соответствует частице, падающей в положительном направлении оси x_0.

В параболических координатах условие $(3.4.2)$ имеет вид

$$\psi \sim \exp\left[\frac{i k}{2}(\mu - \nu)\right],$$

при $\nu \to \infty$ и всех μ. Ему можно удовлетворить, только если

$$\Phi_1(\mu) = \exp\left(\frac{i k}{2}\mu\right), \tag{3.4.3}$$

а $\Phi_2(\nu)$ подчиняется условию

$$\Phi_2(\nu) \sim \exp\left(-\frac{i k}{2}\nu\right), \tag{3.4.4}$$

при $\nu \to \infty$. Подставляя $(3.4.3)$ в первое из уравнений $(3.4.1)$, убеждаемся, что эта функция действительно удовлетворяет уравнению, если параболическая постоянная разделения Ω равна:

$$\Omega = -\frac{\hbar}{r_0\sqrt{\mu_0}} - i\frac{2k\hbar}{\sqrt{\mu_0}}. \tag{3.4.5}$$

Тогда второе уравнение из уравнений $(3.4.1)$ принимает следующий вид

$$\frac{1}{\nu}\frac{d}{d\nu}\left(\nu^2\frac{d\Phi_2}{d\nu}\right) + \left[\frac{k^2}{4}\nu - \frac{T(T+1)}{\nu} + i k + \frac{1}{r_0}\right]\Phi_2 = 0. \tag{3.4.6}$$

Решение последнего уравнения ищем в следующем виде

$$\Phi_2(\nu) = (i k \nu)^T \exp\left(-\frac{i k}{2}\nu\right) w(\nu), \tag{3.4.7}$$

где функция $w(\nu)$ стремится к постоянному пределу при $\nu \to \infty$. После подстановки $(3.4.7)$ в уравнение $(3.4.6)$ для функции $w(\nu)$ получим уравнение

$$\nu\frac{d^2 w}{d\nu^2} + (2T + 2 - i k \nu)\frac{d w}{d\nu} - i k\left(T + \frac{i}{k r_0}\right)w = 0, \tag{3.4.8}$$

которое путем введения новой переменой $z = i k \nu$ приводится к уравнению вырожденной гипергеомуетрической функции $(2.4.18)$ с параметрами

$$\alpha = T + \frac{i}{k\,r_0}, \qquad \gamma = 2T + 2.$$

Мы должны выбрать то из решений $(3.4.8)$, которое умноженное на $\Phi_1(\mu)$, содержит в себе только расходящуюся (т.е. рассеянную), но не сходящуюся, сферическую волну. Таким решением будет функция

$$w(\nu) = const\, F\left(T + \frac{i}{k\,r_0};\, 2T + 2;\, i\,k\,\nu\right).$$

Таким образом, находим следующее решение уравнения Шредингера, которое описывает рассеяние электронов в поле $SU(2)$ монополя Янга – Кулона:

$$\psi(\mu, \nu;\, \alpha_T,\, \beta_T,\, \gamma_T) = \Phi_{kT}(\mu, \nu)\, D^T_{tt'}(\alpha_T,\, \beta_T,\, \gamma_T).$$

Здесь $D^T_{tt'}(\alpha_T,\, \beta_T,\, \gamma_T)$ - функция Вигнера, а

$$\Phi_{kT}(\mu, \nu) = C_{kT}\, (i\,k\,\nu)^T\, e^{\frac{ik}{2}(\mu-\nu)} F\left(T + \frac{i}{k\,r_0};\, 2T + 2;\, i\,k\,\nu\right), \qquad (3.4.9)$$

где C_{kT} - постоянная нормировки.

Для того, чтобы выделить в волновой функции $(3.4.9)$ падающую и рассеянную волны, надо рассмотреть ее поведение на больших расстояниях от рассеявающего центра. Пользуясь представлением вырожденной гипергеометорической функции $(3.3.29)$ и ограничиваясь первыми двумя членами, при больших ν получим

$$F\left(T + \frac{i}{k\,r_0};\, 2T + 2;\, i\,k\,\nu\right) \approx (i\,k\,\nu)^T \exp\left(-\frac{\pi}{2\,k\,r_0}\right) \left\{ \frac{e^{\frac{i}{2}\pi T}}{\Gamma\left(T + 2 - \frac{i}{k\,r_0}\right)} \left[1 + \frac{1 + i\,k\,r_0 + k^2 r_0^2\, T\,(T+1)}{i\,k^3\, r_0^2\, \nu} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1 + k^2\, r_0^2\, (T+1)^2}{2\,k^6\, r_0^4\, \nu^2} \right] \exp\left(-i\,\frac{\ln k\,\nu}{k\,r_0}\right) - \frac{\left(k\,r_0\, T\,(T+1)\left[k\,r_0\,(T+1) + i\right]\right)}{\Gamma\left(T + 2 - \frac{i}{k\,r_0}\right)} \frac{e^{i\,k\,\nu}}{k^4\, r_0^2\, \nu^2} \exp\left(i\,\frac{\ln k\,\nu}{k\,r_0}\right) \right\}.$$

Теперь подставляя последнее соотношение в волновую функцию $(3.4.9)$, постоянную нормировку выбирая в виде

$$C_{kT} = \frac{\Gamma\left(T + 2 - \frac{i}{k\,r_0}\right)}{(2T+1)!} \exp\left[\pi\left(\frac{1}{2\,k\,r_0} - i\,\frac{T}{2}\right)\right],$$

чтобы падающая плоская волна имела единичную амплитуду, переходя к гиперсферическим координатам $(3.2.16)$ согласно формулам

$$x_0 = \frac{1}{2}(\mu - \nu), \qquad \nu = r - x_0 = r(1-\cos\theta),$$

получим следующее окончательное выражение для функции $(3.4.9)$

$$\Phi_{kT}(\mu,\nu) = \left\{1 - \frac{1 + i\,k\,r_0 + k^2\,r_0^2\,T\,(T+1)}{k^3\,r_0^2\,r\,(1-\cos\theta)} - \frac{\left(1+k^2\,r_0^2\,T^2\right)\left[1+k^2\,r_0^2\,(T+1)^2\right]}{4\,k^6\,r_0^4\,r^2\,(1-\cos\theta)}\right\}\times$$

$$\times\exp\left[i\,k\,x_0 - \frac{i}{k\,r_0}\ln\left(2\,k\,r\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right] + \frac{f(\theta)}{r^2}\exp\left[i\,k\,r + \frac{i}{k\,r_0}\ln(2\,k\,r)\right], \tag{3.4.10}$$

где $f(\theta)$ - амплитуда рассеяния и имеет вид

$$f(\theta) = -\frac{(k\,r_0\,T + i)\left[k\,r_0\,T\,(T+1) + i\right]}{4\,k^4\,r_0^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\,\frac{\Gamma\left(T+2-\frac{i}{k\,r_0}\right)}{\Gamma\left(T+2+\frac{i}{k\,r_0}\right)}\exp\left(\frac{2\,i}{k\,r_0}\ln\frac{\theta}{2} - i\,\frac{\pi}{2}\,T\right). \tag{3.4.11}$$

Первый член в соотношении $(3.4.10)$ представляет собой падающую волну, а второй член – рассеянную волну.

Для дифференциального сечения рассеяния

$$d\,\sigma = \left|f(\theta)\right|^2\,d\,\Omega,$$

где $d\,\Omega = \frac{1}{8}\sin^3\theta\,\sin\beta\,d\,\theta\,d\,\alpha\,d\,\beta\,d\,\gamma$ - дифференциальный элемент телесного угла, получим следующую формулу

$$d\,\sigma = \frac{\left(1+k^2\,r_0^2\,T^2\right)\left[1+k^2\,r_0^2\,(T+1)^2\right]}{16\,k^8\,r_0^4\sin^8\frac{\theta}{2}}\,d\,\Omega. \tag{3.4.12}$$

В конце следует отметить, что все формулы, полученные в этом параграфе, при $T = 0$ переходят в соответствующие формулы работы [69].

5. Альтернативная модель сферического осциллятора

Впервые модель сферического осциллятора была предложена Хиггсом [166, 167]. D-мерный сферический осциллятор определяется потенциалом

$$V_{S^D} = \frac{\omega^2}{2}\frac{x_\mu\,x_\mu}{x_0^2}, \quad \mu = 1,2,\ldots,D, \tag{3.5.1}$$

где x_0 и x_μ эвклидовые координаты объемяющего пространства IR^{D+1}, причем $x_0^2 + x_\mu^2 = r_0^2$ для D-мерной сферы и $x_0^2 - x_\mu^2 = r_0^2$ для D-мерного двухполосного гиперболоида. (Здесь мы пользуемся системой единиц в которой приведенная масса m и постоянная Планка $\hbar$ определены следующим образом: $m = \hbar = 1$.) Задачи сферического осциллятора $(3.5.1)$ на D-мерной сфере и на D-мерном двухполосном гиперболоиде детально рассмотрены в работе [206].

Задача осциллятора на сферах и псевдосферах с разных точек зрения рассмотрены в работах [70, 207-213].

Альтернативная модель сферического осциллятора впервые была рассмотрена в работах [71, 72], и она определяется потенциалом

$$V_S^D = 2\,\omega^2\, r_0^2\, \frac{r_0 - x_0}{r_0 + x_0} \tag{3.5.2}$$

на D-мерной сфере, и

$$V_H^D = 2\,\omega^2\, r_0^2\, \frac{x_0 - r_0}{x_0 + r_0} \tag{3.5.3}$$

на D-мерном двухполосном гиперболоиде.

Рассматриваемая нами модель сферического осциллятора, в отличие осциллятора Хиггса, не имеет особенности на экваторе сферы, т.е. при $\chi = \dfrac{\pi}{2}$.

Двумерные случаи осцилляторных потенциалов $(3.5.2)$ и $(3.5.3)$ были рассмотрены в работах [66, 214].

5.1. Квазирадиальная волновая функция на D-мерной сфере

Уравнение Шредингера, описывающее квантовое движение нерелятивистской частицы в D-мерном искривленном пространстве, имеет следующий вид:

$$\hat{H}\,\psi = \left[-\frac{1}{2}\Delta_{LB} + V(\vec{x}) \right]\psi = E\,\psi\,, \tag{3.5.4}$$

где оператор Лапласа-Белтрами в произвольных криволинейных координатах ξ_μ имеет вид:

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi_\mu}\left(g^{\mu\nu}\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \right),$$

причем $g = \det g_{\mu\nu}$ и $g_{\alpha\mu}\, g^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta$.

В гиперсферических координатах

$$
\begin{aligned}
x_0 &= r_0 \cos\chi, \\
x_1 &= r_0 \sin\chi \cos\theta_1, \\
x_2 &= r_0 \sin\chi \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\
&\vdots \\
x_{D-1} &= r_0 \sin\chi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{D-2} \cos\varphi, \\
x_D &= r_0 \sin\chi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{D-2} \sin\varphi,
\end{aligned}
$$

где $r_0 \in [0,\infty)$, $\chi, \theta_1, \ldots, \theta_{D-2} \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, осцилляторный потенциал (3.5.2) имеет вид

$$V_S^D = 2\,\omega^2 r_0^2 \tan^2 \frac{\chi}{2}. \qquad (3.5.5)$$

Уравнение Шредингера (3.5.4) для потенциала (3.5.5) может быть решена путем поиска волновой функции в виде

$$\psi(\chi, \theta_1, \ldots, \theta_{D-2}, \varphi) = R(\chi)\, Y_{L l_1 l_2 \ldots l_{D-2}}(\theta_1, \ldots, \theta_{D-2}, \varphi),$$

где L - глобальный угловой момент, l_i - угловые гипермоменты, а гиперсферическая функция $Y_{L l_1 l_2 \ldots l_{D-2}}(\theta_1, \ldots, \theta_{D-2}, \varphi)$ является собственной функцией Лапласа-Белтрами на $(D-1)$-мерной сфере с собственными значениями $L(L+D-2)$. После разделения переменных в (3.5.4) мы получим следующее квазирадиальное уравнение

$$\frac{1}{(\sin\chi)^{D-1}} \frac{d}{d\chi}\left[(\sin\chi)^{D-1} \frac{dR}{d\chi}\right] + \left[2 r_0^2 E - \frac{L(L+D-2)}{\sin^2\chi} - 4\omega^2 r_0^2 \tan^2\frac{\chi}{2}\right] R = 0.$$

С помощью подстановки

$$R(\chi) = (\sin\chi)^{-\frac{D-1}{2}} Z(\chi)$$

мы приходим к уравнению типа Пешля-Теллера

$$\frac{d^2 Z}{d\zeta^2} + \left[\varepsilon_S - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2\zeta} - \frac{\left(L + \frac{D-2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2\zeta}\right] Z = 0, \qquad (3.5.6)$$

где $\zeta = \frac{\chi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, а

$$\varepsilon_S = 8 r_0^2 E + (D-1)^2 + 16\omega^2 r_0^4, \qquad \nu = \sqrt{\left(L + \frac{D-2}{2}\right)^2 + 16\omega^2 r_0^4}.$$

Решение уравнения (3.5.6), регулярное на отрезке $\zeta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и выраженное в терминах гипергеометрической функции, согласно [215], имеет вид

$$R_{n_r L \nu}^D(\chi) = C_{n_r L \nu}^D \left(\sin\frac{\chi}{2}\right)^L \left(\cos\frac{\chi}{2}\right)^{\nu - \frac{D}{2} + 1} {}_2F_1\left(-n_r, n_r + L + \nu + \frac{D}{2}; L + \frac{D}{2}; \sin^2\frac{\chi}{2}\right). \qquad (3.5.7)$$

При этом парарметр ε_S квантуется и принимает следующий вид:

$$\varepsilon_S = \left(2n_r + L + \nu + \frac{D}{2}\right)^2,$$

где $n_r = 0, 1, 2, \ldots$ “квазирадиальное” квантовое число. Тогда собственные значения энергии даются формулой

$$E_{ND}^S = \frac{1}{8r_0^2}\left[(N+1)(N+D) + (2\nu - 1)\left(N + \frac{D}{2}\right) + L(L+D-2) - \frac{D}{2}(D-1)\right], \qquad (3.5.8)$$

где $N = 2n_r + L = 0, 1, 2, \ldots$ является главным квантовым числом альтернативной модели сферического осциллятора.

Далее, выбирая для квазирадиальной волновой функции $(3.5.7)$ условие нормировки

$$r_o^D \int_o^\pi \left|R_{NL\nu}^D(\chi)\right|^2 (\sin\chi)^{D-1}\, d\chi = 1$$

находим, что постоянная нормировки $C_{NL\nu}^D$ имеет вид

$$C_{NL\nu}^D = \frac{1}{\Gamma\left(L + \frac{D}{2}\right)}\sqrt{\frac{\left(N + L + \frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+L+D}{2} + \nu\right)\Gamma\left(\frac{N+L+D}{2}\right)}{2^{D-1} r_0^D \left(\frac{N-L}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{N-L}{2} + \nu + 1\right)}}\,. \qquad (3.5.9)$$

В пределах $r_0 \to \infty$ и $\chi \to 0$, но при фиксированном $\chi r_0 \sim r$ мы видим, что

$$\lim_{r_0 \to \infty} E_{ND}^S = \omega\left(N + \frac{D}{2}\right), \qquad (3.5.10)$$

а

$$\lim_{r_0 \to \infty} R_{NL\nu}^D(\chi) = \frac{\omega^{\frac{L+D}{2}}}{\Gamma\left(L + \frac{D}{2}\right)}\sqrt{\frac{2\Gamma\left(\frac{N+L+D}{2}\right)}{\left(\frac{N-L}{2}\right)!}}\, r^L e^{-\frac{\omega r^2}{2}} F\left(-\frac{N-L}{2}; L + \frac{D}{2}; \omega r^2\right), \qquad (3.5.11)$$

где $F(a; c; x)$ - вырожденная гипергеометрическая функция. Формула $(3.5.11)$ совпадает с известной формулой для радиальной волновой функции D-мерного изотропного осциллятора в плоском пространстве [159].

5.2. Квазирадиальная волновая функция на D-мерном гиперболоиде

Псевдосферические координаты на D-мерном двухполостном гиперболоиде $\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_D^2 = r_0^2,\ x_0 \geq r_0\right)$ определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= r_0 \cosh\tau, \\
x_1 &= r_0 \sinh\tau \cos\theta_1, \\
x_2 &= r_0 \sinh\tau \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\
&\vdots \\
x_{D-1} &= r_0 \sinh\tau \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{D-2} \cos\varphi, \\
x_D &= r_0 \sinh\tau \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{D-2} \sin\varphi,
\end{aligned}
$$

где $\tau \in [0, \infty)$. Переменные в уравнение Шредингера $(3.5.4)$ для осцилляторного потенциала $(3.5.3)$, который в псевдосферических координатах имеет вид

$$V_S^D = 2\,\omega^2 r_0^2 \tanh^2 \frac{\tau}{2},$$

разделяются, если волновую функцию представить в виде

$$\psi(\tau, \theta_1, \ldots, \theta_{D-2}, \varphi) = R(\tau)\, Y_{L l_1 l_2 \ldots l_{D-2}}\,(\theta_1, \ldots, \theta_{D-2}, \varphi),$$

где, как и в предыдущем случае, l_i являются угловыми гипермоментами, L - глобальный угловой момент, а $Y_{L l_1 l_2 \ldots l_{D-2}}\,(\theta_1, \ldots, \theta_{D-2}, \varphi)$ - гиперсферическая функция, которая является решением уравнения Лапласа-Белтрами на $(D-1)$-мерной сфере. После разделения переменных в уравнение $(3.5.4)$ мы приходим к следующему квазирадиальному уравнению

$$\frac{1}{(\sinh\tau)^{D-1}} \frac{d}{d\tau}\left[(\sinh\tau)^{D-1} \frac{dR}{d\tau}\right] + \left[2 r_0^2 E - \frac{L(L+D\_2)}{\sinh^2\tau} - 4\omega^2 r_0^2 \tanh^2 \frac{\tau}{2}\right] R = 0.$$

Теперь, пользуясь подстановкой

$$R(\tau) = (\sinh\tau)^{-\frac{D-1}{2}} Z(\tau)$$

мы приходим к уравнению, имеющее вид одномерного уравнения Шредингера, т.е. к уравнению

$$\frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \left[\varepsilon_H - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\cos h^2 \rho} - \frac{\left(L + \frac{D-2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \rho}\right] Z = 0, \qquad (3.5.12)$$

где $\rho = \frac{\tau}{2} \in [0, \infty)$, а $\varepsilon_H = 8 r_0^2 E - (D-1)^2 - 16\omega^2 r_0^4$.

Таким образом, задача осциллятора на двухполостном гиперболоиде описывается модефицированным уравненеием Пешля-Теллера [215], и в отличие от задачи осциллятора на сфере, которая имеет только дискретный спектр, уравнение $(3.5.12)$ обладает как дискретными, так и непрерывными значениями энергетического спектра.

Нормированные условием

$$r_0^D \int_0^\infty \left| R_{n_r L \nu}(\tau) \right|^2 (\sinh\tau)^{D-1} d\tau = 1,$$

регулярное на отрезке $\tau \in [0, \infty)$, квазирадиалная волновая функция дискретного спектра имеет вид

$$R^D_{n_r L \nu}(\tau) = \frac{1}{\Gamma\left(L + \frac{D}{2}\right)} \sqrt{\frac{(2\nu - 4n_r - 2L - D)\Gamma(\nu - n_r)\Gamma\left(n_r + L + \frac{D}{2}\right)}{2^D r_0^D (n_r)!\Gamma\left(\nu - n_r - L - \frac{D}{2} + 1\right)}} \times$$
$$\times \left(\sin\frac{\chi}{2}\right)^L \left(\cos\frac{\chi}{2}\right)^{\nu - \frac{D}{2} + 1} {}_2F_1\left(-n_r, n_r + L + \nu + \frac{D}{2}; L + \frac{D}{2}; \sin^2\frac{\chi}{2}\right), \qquad (3.5.13)$$

где n_r - квазирадиальное квантовое число, и принимает следующие значения:

$$n_r = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{1}{2}\left(\nu - L - \frac{D}{2}\right)\right].$$

Здесь $\left[\frac{1}{2}\left(\nu - L - \frac{D}{2}\right)\right]$означает целое значение числа $\frac{1}{2}\left(\nu - L - \frac{D}{2}\right)$. Тогда квантованное выражение параметра ε_H дается формулой

$$\varepsilon_H = -\left(2n_r + L - \nu + \frac{D}{2}\right)^2 .$$

Теперь, пользуясь определением параметра ε_H для энергетического спектра альтернативной модели осциллятора на D-мерном двухполостном гиперболоиде получим выражение

$$E^H_{ND} = \frac{1}{8r_0^2}\left[(2\nu - 1)\left(N + \frac{D}{2}\right) - N(N + D - 1) - L(L + D - 2) + \frac{D}{2}(D - 1)\right]. \qquad (3.5.14)$$

Здесь $N = 2n_r + L$ - главное квантовое число, и связанные состояния возможны лишь для седующих значений главного квантового числа N:

$$0 \le N \le \left[\nu - \frac{D}{2}\right].$$

Здесь также под обозначением $\left[\nu - \frac{D}{2}\right]$ понимаем целое значение числа $\nu - \frac{D}{2}$.

Таким образом, вследствие ограниченности значений главного квантового числа N, в отличие от сферического осциллятора, число связанных состояний конечное.

В пределе $r_0 \to \infty$, $\tau \sim r/r_0$ и $\nu \sim 4\omega r_0^2$ непрерывный спектр осциллятора на двухполостном гиперболоиде исчезает, а дискретный спектр становится бесконечным, и

легко заметить, что энергетический спектр $(3.5.14)$ переходит в формулу $(3.5.10)$, а волновая функция $(3.5.13)$ в $(3.5.11)$.

Здесь следует отметить, что рассматриваемая модель сферического осциллятора сохраняет все симметрии при включении калибровочных полей соответствуючих монополей. Это дает возможность ее использования для построения теории квантового эффекта Холла в высших размерностях, наподобие четырехмерного эффекта Холла [216] и его восьмимерного аналога [217] (см. также обзор [218]).

6. Заключение к третьей главе

В этой главе нами была рассмотрена пятимерная модель $SU(2)$ монополя Янга – Кулона, состоящая из заряженной изоспиновой частицы и $SU(2)$ монополя Янга, и которая была сконструирована из восьмимерного изотрпного осциллятора с помощью обобщенной версии преобразования Гурвица. Были приведены пятимерные гиперсферический и параболический базисы, как в дискретном, так и в непрерывном спектре. Решена задача рассеяния электронов в поле $SU(2)$ монополя Янга – Кулона и получено явное выражение для дифференциального сечения рассеяния.

Рассмотрена модель альтернативная модели сферического осциллятора Хиггса, найдены квазирадиальные волновые функции и энергетические спектры алтернативной модели сферического осциллятора на D-мерной сфере и на D-мерном двухполостном гиперболоиде.

Полученные нами результаты могут быть применены для построения квантовой теории эффекта Холла в высших размерностях.

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации, сводятся к следующим:

1. Показано, что в суперинтегрируемой системе МИК-Кеплера имеет место линейный эффект Штарка и, что постоянное однородное электрическое поле полностью снимает вырождение энергетических уровней по азимутальному квантовому числу.
2. Показано, что обобщенная задача МИК-Кеплера дуальна четырехмерному двойному сингулярному осциллятору и, что преобразованием дуальности является обобщенная версия преобразования Кустаанхеймо-Штифеля. Установлено соответствия между квантовыми числами обобщенной задачи МИК-Кеплера и четырехмерного двойного сингулярного осциллятора.
3. Показано, что переменные в уравнение Шредингера для четырехмерного двойного сингулярного осциллятора разделяются в эйлеровой, двойной полярной и сфероидальной системах координат. Получены явные выражения волновых функций этой системы в эйлеровых и двойных полярных координатах. Найдено, что коэффициенты разложения двойного полярного базиса по эйлеровому базису и обратно выражаются через коэффициенты Клебша-Гордана группы $SU(2)$, аналитически продолженные на реальные значения аргументов. Получен интеграл движения, ответственный за разделение переменных в сфероидальной системе координат и выведены трехчленные рекуррентные соотношения, которым подчиняются коэффициенты разложений сфероидального базиса четырехмерного двойного сингулярного осциллятора по эйлеровому и двойному полярному соответственно.
4. Решена квантовомеханическая задача рассеяния заряженных частиц в поле $SU(2)$-монополя Янга-Кулона и получена формула для дифференциального сечения рассеяния.
5. Рассмотрена модель альтернативной модели сферического осциллятора Хиггса, найдены квазирадиальные волновые функции и энергетические спектры альтернативной модели сферического осциллятора на D-мерной сфере и на D-мерном двухполостном гиперболоиде.

Литература

[1] P.A.M. Dirac. *Quantised singularities in the Electromagnetic Field*. Proc. Roy. Soc., **A133**, 60-72, (1931).

[2] J. Schwinger. *A magnetic model of matter*. Science, **165**, 757-761, (1969).

[3] G. 't Hooft. *Magnetic monopoles in unified gauge theories*. Nucl. Phys., **B79**, 276-284, (1974).

[4] А.М. Поляков. *Спектр частиц в квантовой теории поля*. Письма ЖЭТФ, **20**, 430-433, (1974).

[5] B. Julia, A. Zee. *Poles with both magnetic and electric charges in non-abelian gauge theory*. Phys. Rev. **D11**, 2227-2232, (1975).

[6] M.K. Prasad, C.M. Sommerfield. *Exact classical solution for 't Hooft monopole and Julia Zee dyon*. Phys. Rev. Lett. **35**, 760-762, (1975)**.**

[7] T.T. Wu and C.N. Yang. *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge theories*. Phys. Rev. **D12**, 3845-3857, (1975).

[8] G.W. Gibbons and N.S. Manton. *Classical and quantum dynamics of BPS monopoles*. Nucl. Phys., **B274**, 183-224, (1986).

[9] A.P. Polichronakos. *Non-relativistic bosonization and fractional statistics*. Nucl. Phys., **B324**, 597-622, (1989).

[10] A.P. Balachandran. *Classical topology and quantum statistics*. Int. J. Mod. Phys., **B5**, 2585-2623, (1991).

[11] C.A. Anerisis and A.P. Balachandran. *Statistics in one dimenshion*. Int. J. Mod. Phys., **A5**, 4721-4751, (1991).

[12] S.B. Isakov. *Genaralization of quantum statistics in statistical-mechanics*. Int. J. Theor. Phys., **32**, 737-767, (1993).

[13] S.B. Isakov. *Fractional statistics in one dimension: Modeling by means of* $1/x^2$ *interaction and statistical mechanics*. Int. J. Mod. Phys., **A9**, 2563-2582, (1994).

[14] J.M. Leinaas and J. Myrheim. *On the theory of identical particles*. Nuovo Ciemento, **B37**, 1-23, (1977).

[15] F. Wilczek. *Quantum mechanics of fractional spin particles*. Phys. Rev. Lett., **49**, 957-962, (1982).

[16] R. Jackiw. *Dynamical symmetry of the magnetic* votex. Ann. Phys., **201**, 83-116, (1990).

[17] G.S. Canright and S.M. Girvin. *Fractional statistics: Quantum possibilities in two dimensions*. Science, **247**, 1197-1205, (1990).

[18] S. Forte. *Relativistic-particles with fractional spin and statistics*. Int. J. Mod. Phys., **A7**, 1025-1057, (1992).

[19] S. Forte. *Quantum mechanics and field theory with fractional spin and statistics*. Rev. Mod. Phys., **64**, 193-236, (1992).

[20] Alberto Lenda. *Anyons: Quantum mechanics of particles with fractional statistics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1992).

[21] M.S. Plyushchay. *Relativistic Particle with torsion, Majorana equation and fractional spin*. Phys. Lett., **B262**, 71-78, (1991).

[22] J.L. Cortes and M.S. Plyushchay. *Anyons: minimal and extended formulations*. Int. J. Mod. Phys., **A10**, 409-418, (1995).

[23] J.L. Cortes and M.S. Plyushchay. *Anyons as spining particles*. Int. J. Mod. Phys., **A11**, 3331-3362, (1996).

[24] M.S. Plyushchay. *Deformed Heisenberg algebra with reflection*. Nucl. Phys., **B491**, 619-634, (1997).

[25] M.S. Plyushchay. *R-deformed Heisenberg algebra, anyons and D=2+1supersymmetry*. Mod. Phys. Lett., **A12**, 1153-1164, (1997).

[26] C.N. Yang. *Generalization of Dirac's monopole to SU_2 gauge fields*. J. Math. Phys., **19**, 320-328, (1978).

[27] M. Minami. *Quaternionic Gauge Fields on S^7 and Yang's SU(2) Monopol*. Prog. Theor. Phys., **63**, 303-321, (1980).

[28] T. Iwai. *The symmetry group of the harmonic oscillator and its reduction*. J. Math. Phys., **23**, 1088-1092, (1982).

[29] T. Iwai. *Quantization of the conformal Kepler problem and application to the hydrogen atom*. J. Math. Phys., **23**, 1093-1099, (1982).

[30] T. Iwai, Y. Uwano. *The four-dimensional conformal Kepler problem reduces to the three-dimensional Kepler problem with a centrifugal potential and Dirac's monopole field. Classica ltheory*. J. Math. Phys., **27**, 1523-1529, (1986).

[31] I.M. Mladenov and V.V. Tsanov. *Geometric quantization of the MIC-Kepler problem*. J. Phys., **A20**, 5865-5871, (1987).

[32] L.S. Davtyan, L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. *Generalized KS-transformation: from five-dimensional hydrogen atom to eight-dimensional isotropic oscillator*. J. Phys., **A20**, 6121-6125, (1987).

[33] T. Iwai, Y. Uwano. *The quantized MIC-Kepler problem and its symmetry group for negative energies*. J. Phys., **A21**, 4083-4104, (1988).

[34] D. Lambert and M. Kibler. *An algebraic and geometric approach to nonbijective quadratic transformations*. J. Phys., **A21**, 307-343, (1988).

[35] L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. *KS-Transformation and Coulomb-Oscillator Interbasis Expansions*. In Proceedings: Schrödinger Operators: Standart and Non-Standart. Eds. Pavel Exner and Petr Šeba, World Scientific Publishing, 333-349, (1989).

[36] И.Е. Прись, Е.А. Толкачев. *Атом Диогена как четырехмерный изотропный осциллятор со связью*. ЯФ, **54**, 962-966, (1991).

[37] Le Van Hoang, Tony J. Viloria, Le anh Thu. *On the hydrogen-like atom in five-dimensional space*. J. Phys., **A24**, 3021-3030, (1991).

[38] Gh. Drăgănescu, C. Campigotto and M. Kibler. *On a generalized Aharonov-Bohm plus Coulomb system*. Phys. Lett., **A170**, 339-343, (1992).

[39] A. Inomata, G. Junker, R. Wilson. *Topological charge quantization via path integration: An zpplication of the Kustaanheimo-Stiefel transformation*. Found. Phys., **23**, 1073-1091, (1993).

[40] L.S. Davtyan. *The Hurwitz transformation and generalized Cayley-Klein parameterization*. J. Math. Phys., **34**, 4834-4839, (1993).

[41] И.Е. Прись, И.В. Сиваков, Е.А. Толкачев. *Ковариантное преобразование Кустанхеймо-Штифеля в кватернионах*. Доклады АН Беларуси, **37**, 135-139, (1993).

[42] A. Nersessian, V. Ter-Antonyan. *Charge-dyon system as the reduced oscillator*. Mod. Phys. Lett., **A9**, 2431-2435, (1994).

[43] А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Структура преобразования Гурвица*. Препринт ОИЯИ Р2-94-219, Дубна, (1994).

[44] А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Редукция Гурвица-Эйлера*. Препринт ОИЯИ Р5-94-220, Дубна, (1994).

[45] V.M. Ter-Antonyan and A. Nersessian. *Quantum oscillator and bound system of two dyons*. Mod. Phys. Lett., **A10**, 2633-2638, (1995).

[46] A. Nersessian, V. Ter-Antonyan, M.M. Tsulaia. *A note on Bohlin transformation*. Mod. Phys. Lett., **A11**, 1605-1610, (1996).

[47] L.G. Mardoyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. *The Eulerian parametrization of the Hurwitz transformatione*. In Proceedings: International Workshop Finite-Dimenshional Integrable Systems. Eds. A.N. Sissakian, G.S. Pogosyan, JINR Publishing Department, Dubna, E2-95-525, 137-142, (1995).

[48] M. Trunk. *The five-dimensional Kepler problem as an SU(2) gauge system: Algebraic constraint quantization*. Int. J. Mod. Phys., **A11**, 2329-2355, (1996).

[49] L.G. Mardoyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. *Oscillator as a hidden non-Abelian monopole*. Preprint JINR, E2-96-24, Dubna, (1996); hep-th/9601093.

[50] A. Maghakian, A.N. Sissakian and V. Ter-Antonyan. *Electromagnetic duality for anyons*. Phys. Lett., **A236**, 5-7, (1997).

[51] L.G. Mardoyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. *Park-Tarter matrix for a dyon-dyon system*. Int. J. Mod. Phys., **A12**, 237-242, (1997).

[52] L.G. Mardoyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. *8D Oscillator as a Hidden SU(2) - Monopole*. ЯФ, **61**, 1859-1863, (1998).

[53] A. Nersessian, V. Ter-Antonyan. *Anyons, monopole and Coulomb problem*. ЯФ, **61**, 1868-1872, (1998).

[54] L.G. Mardoyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. *Hidden symmetry of the Yang-Coulomb monopole*. Mod. Phys. Lett., **A14**, 1303-1307, (1999).

[55] I.M. Mladenov and V.V. Tsanov. *Reduction in stages and complete quantization of the MIC-Kepler problem*. J. Phys., **A32**, 3779-3791, (1999).

[56] M.V. Pletyukhov and E.A. Tolkachev. *SO(6,2) dynamical symmetry of the SU(2) MIC-Kepler problem*. J. Phys., **A32**, L249-L253, (1999).

[57] M.V. Pletyukhov and E.A. Tolkachev. *8D oscillator and 5D Kepler problem: The case of nontrivial constraints*. J. Math. Phys., **40**, 93-100, (1999).

[58] Michael Pletyukhov and Eugeny Tolkachev. *Hurwitz transformation and oscillator representation of a 5D "isospin" particle*. Rep. Math. Phys., **43**, 303-311, (1999).

[59] V. Ter-Antonyan. *Dyon-Oscillator Duality*. Proceedings of the Internatiomal School on Symmetries and Integrable Systems, Dubna, Russia, 8-11 June 1999: quant-ph/0003106.

[60] Л.Г.Мардоян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Базисы и межбасные преобразования для SU(2) монополя*. ТМФ, **123**, 44-56, (2000).

[61] V.V. Gristev, Yu.A. Kurochkin and V.S. Otchik. *Nonlinear symmetry of the MIC-Kepler problem on the sphere S^2*. J. Phys., **A33**, 4903-4910, (2000).

[62] A. Nersessian, G. Pogosyan. *On the relation of the oscillator and Coulomb systems on (pseudo)spheres*. Phys. Rev., **A63**, 020103(R), (2001).

[63] Kh.H. Karayan, L.G. Mardoyan, V.M. Ter-Antonyan. *The Eulerian Bound States: 8D Quantum Oscillator*. ЭЧАЯ, **33**, № 7, 106-113, (2002).

[64] L.G. Mardoyan. *The Five-Dimensional SU(2) – Monopole: Continuous Spectrum*. ЯФ, **65**, 1096-1102, (2002).

[65] Х.Г. Караян, Л.Г. Мардоян, В.М. Тер-Антонян. *Кулон-осцилляторная дуальность и 5-мерная задача Кулона*. Изв. НАН Армении, Физика, **38**, 78-86, (2003).

[66] S. Bellucci, A. Nersessian. *(Super)Oscillator on CP(N) and Costant Magnetic Field*. Phys. Rev., **D67**, 065013, (2003).

[67] L.G. Mardoyan, L.S. Petrosyan, H.A. Sarkisyan. *Charge-dyon bound system in the spherical quantum well*. Phys. Rev., **A68**, 014103(R), (2003).

[68] Л.Г. Мардоян. *Рассеяние электронов на дионе*. ТМФ, **140**, 246-256, (2003).

[69] Л.Г. Мардоян. *Кулон-осцилляторная дуальность и задача рассеяния в 5-мерном кулоновском поле*. Изв. НАН Армении, Физика, **39**, 99-106, (2004).

[70] L. Mardoyan and A. Nersessian. *Oscillator potential for the four-dimensional Hall effect*. Phys. Rev., **B72**, 233303, (2005).

[71] S. Bellucci, L. Mardoyan and A. Nersessian. *Hyperboloid, instanton, oscillator*. Phys. Lett., **B636**, 137-141, (2006).

[72] L. Mardoyan, A. Nersessian and A.Yeranyan. *Relationship between quantum-mechanical systems with and without monopoles*. Phys. Lett., **A366**, 30-35, (2007).

[73] T. Levi-Civita. *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*. Opere Mathematiche, Memorie e note **2**, 1901-1907, Nicola Zanicheli Editore, bologna, 411-417, (1956).

[74] P. Kustaanheimo, E. Stiefel. *Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularizations*. J. Reine Angew. Math., **218**, 204-219, (1965).

[75] A. Hurwitz. *Über die Zahlenthorie der Quaternionen*. Narch. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. **K1**, 313-340, (1896).

[76] A. Chen. *Hydrogen atom as a four-dimensional oscillator*. Phys. Rev., **A22**, 333-335, (1980).

[77] A. Chen. *Theoretical basis for Coulomb matrix elements in the oscillator representation*. J. Math. Phys., **23**, 412-416, (1982).

[78] M. Kibler, T. Negadi. *On the connection between the hydrogen atom and the harmonic oscillator*. Lett. Nuovo Cimento, **37**, 225-228, (1983).

[79] M. Kibler, T. Negadi. *On the connection between the hydrogen atom and the harmonic oscillator: the continuum case*. J. Phys., **A16**, 4265-4268, (1983).

[80] M. Kibler, T. Negadi. *Hydrogen atom in a uniform electromagnetic field as an anharmonic oscillator*. Lett. Nuovo Cimento, **39**, 319-329, (1984).

[81] M. Kibler, T. Negadi. *On the use of nonbijective caonical transformations in chemical physics*. Croatica Chemica Acta, **57**, 1509-1523, (1984).

[82] A. Chen, M. Kibler. *Connection between the hydrogen atom and four-dimensional oscillator*. Phys. Rev., **A31**, 3960-3963, (1985).

[83] M. Kibler, A. Ronveaux, T. Negadi. *On the hydrogen-oscillator connection: Passage formulas between wave functions*. J. Math. Phys., **27**, 1541-1548, (1986).

[84] J. Bertrand. *Théorime reltif au mouvement dún point vers un centre fixe*. Comptes Rendus, **77**, 849-853, (1873).

[85] M. Laplace. *Traite de mecanique celeste*. V. I, Ch. 3, Paris, Bachelier, (1829).

[86] C. Runge. *Vectoranalysis*. **1**, Hirtel, Leipzig, (1919).

[87] W. Lenz. *Über den Bewegungsverlauf und die Quantenzustände der gestörten Kepler bewegung*. Zs. Phys., **24**, 197-207, (1924).

[88] W. Pauli. *Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik.* Zs. Phys., **36**, 336-363, (1926).

[89] Л.Д. Ландау. *Квантовая механика*. Наука, М., (1974).

[90] V.A. Fock. *Zur Theorie des Wasserstoffatoms*. Zs. Phys., **98**, 145-154, (1935).

[91] В.А. Фок. *Начала квантовой механики.* Наука, М., (1976).

[92] V. Bargman. *Zur Theorie des Wasserstoffatoms*. Zs. Phys., **B39**, 576-582, (1936).

[93] А.М. Переломов и В.С. Попов. *Группа Лоренца как группа динамической симметрии атома водорода*. ЖЭТФ, **50**, 179-198, (1966).

[94] В.С. Попов. *О скрытой симметрии атома водорода*. Статья в сборнике «Физика высоких энергии и элементарных частиц». Наукова Думка, Киев, (1967).

[95] M. Bander and C. Itzykson. *Group Theory and the Hydrogen Atom*. I, II. Rev. Mod. Phys., **38**, 330- 345; 346-358, (1968).

[96] С. П. Аллилуев. *К вопросу о связи "случайного" вырождения со "скрытой симметрей системы"*. ЖЭТФ, **33**, 200-203, (1957).

[97] Г. Дьерди, Я. Реваи. *К теории скрытой симметрии задачи Кеплера*. ЖЭТФ, **48**, 1445-1447, (1965).

[98] L.S. Davtyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian and V.M. Ter-Antonyan. *On the Hidden Symmetry of a One-Dimensional Hydrogen Atom*. J. Phys. **A20**, 2765-2772, (1987).

[99] I.V. Lutsenko, L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian and V.M. Ter-Antonyan. *Non-Relativistic Coulomb Problem in a One-Dimensional Quantum Mechanics*. J. Phys. **A22**, 2739-2749, (1989).

[100] D. Zwanziger. *Exactly soluble nonrelativistic model of particles with both electric and magnetic charges*. Phys. Rev., **176**, 1480-1488, (1968).

[101] H. McIntosh, A. Cisneros. *Degeneracy in the presence of a magnetic monopole*. J. Math. Phys., **11**, 896-916, (1970).

[102] Ю.Н. Демков. *Группа симметрии изотропного осциллятора*. ЖЭТФ, **36**, 88-92,

(1959).

[103] J.M. Jauch. *Groups of quantum-mechanical contact transformations and the degeneracy of energy-levels*. Phys. Rev., **55**, 1132, (1939).

[104] J.M. Jauch and E.L Hill. *On the problem of degeneracy in quantum mechanics*. Phys. Rev., **57**, 641-645, (1940).

[105] G.A. Baker. *Degeneracy of the N-dimensional isotropic harmonic oscillator*. Phys. Rev., **103**, 1119-1120, (1956).

[106] N. Seiberg, E. Witten. *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in* $N=2$ *supersymmetric QSD*. Nucl. Phys., **B431**, 484-550, (1994).

[107] S. Wojciechowski. *Superintegrability of the Calogero-Moser System*. Phys. Lett., **A95**, 279-281, (1983).

[108] В.И. Арнольд. *Математические методы классической механики*. Наука, М., (1974).

[109] А.М. Переломов. *Ингегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*. Наука, М., (1990).

[110] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Механика*. Наука, М., (1973).

[111] N.W. Evans. *Superintegrability in classical mechanics*. Phys. Rev., **A41**, 5666-5676, (1990).

[112] N.W. Evans. *Super-integrability of the Wintenitz system*. Phys. Lett., **A147**, 483-486, (1990).

[113] N.W. Evans. *Group theory of the Smorodinsky-Wintenitz system*. J. Math. Phys.., **32**, 3369-3375, (1991).

[114] A.P. Stone. *Some Properties of Wigner Coefficients and Hyperspherical Harmonics*. Proc. Camb. Phil. Soc., **52**, 424-430, (1956).

[115] D. Park. *Relation between the parabolic and spherical eigenfunctions of hydrogen*. Z. Phys., **159**, 155-157, (1960).

[116] C.B. Tarter. *Coefficients connecting the Stark and field-free wavefunctions to hydrogen*. J. Math. Phys., **11**, 3192-3195, (1970).

[117] C.A. Coulson and A. Joseph. *Spheroidal wave functions for the hydrogen atom*. Prog. Phys. Soc., London, **90**, 887-893, (1967).

[118] S.D. Majundar and D. Basu. $O(3.1)$ *Symmetry of the Hydrogen Atom*. J. Phys., **A7**, 787-793, (1974).

[119] Z. Pluhar and J. Tolar. *Transformation Matrix for the Isotropic Harmonic Oscillator* $SU(3)$ *and Representations*. Czech. J. Phys., **B14**, 287-293, (1964).

[120] E. Chacon M. de Liano. *Transformation Brakets Between Cartesian and Angular Momentum Harmonig and Oscillator Basis Functions with and without Spin-Orbit Couling. Tables for the* $2s-1d$ *Nuclear Shell*. Rev. Mex. De Fisica, **12**, 57-68, (1963).

[121] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Изотропный осциллятор: Трехчленные рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения сфероидального базиса по сферическому и цилиндрическому*. Сообщения ОИЯИ, Р2-85-139, Дубна, (1985).

[123] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Изотропный осциллятор: Разложение сфероидального базиса по сферическому и цилиндрическому*. Сообщения ОИЯИ, Р2-85-140, Дубна, (1985).

[124] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Изотропный осциллятор: Сфероидальные волновые функции*. Сообщения ОИЯИ, Р2-85-141, Дубна, (1985).

[125] L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. *Spheroidal anlysis of hydrogen atom*. J. Phys., **A16**, 711-728, (1983).

[126] L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. *Interbasis Expansions in a Circular Oscillator*. Nuovo Cimento, **A86**, 324-336, (1985).

[127] L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. *Elliptic Basis of Circular Oscillator*. Nuovo Cimento, **B88**, 43-56, (1985).

[128] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Межбасные разложения в двумерном атоме водорода*. ТМФ, **63**, 406-416, (1985).

[129] L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. *Hidden symmetry, Separation of Variables and Interbasis Expansions in Two-Dimensional Hydrogen Atom*. J. Phys., **A18**, 455-466, (1985).

[130] Л.С. Давтян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Двухмерный атом водорода. Разложение полярного базиса по параболическому в непрерывном спектре*. ТМФ, **66**, 222-233, (1986).

[131] Л.С. Давтян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Преобразование между параболическими базисами для двумерного атома водорода в непрерывном спектре*. ТМФ, **74**, 240-246, (1988).

[132] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, В.М. Тер-Антонян. *К разложению сфероидального базиса атома водорода по сферическому*. Изв. АН Арм. ССР, Физика, **19**, 3-9, (1984).

[133] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *К проблеме межбасных разложений в квантовой механике*. Тезисы докладов мэжвузовской конференции “Вычислительная физика и математическое моделирование”, 65-73, Москва, (1989).

[134] Л.Г. Мардоян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян, Т.А. Чатрчян. *Разложение кольцеобразных функций по сферическому*. Препринт ОИЯИ, Р2-92-511, Дубна, (1992).

[135] L.G. Mardoyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan, T.A. Chatrchian. *Generalization of the Rayleigh Formula to the Model with Ring-Shepad Potentials.* In Proceedings: International Workshop Symmetry Methods in Physics, Ed. A.N. Sissakian, G.S. Pogosyan, S.I. Vinitsky, JINR Publishing Department, Dubna, vol. 2, 326-331 E2-94-347, (1994).

[136] M. Kibler, L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan. *On a Generalized Kepler-Coulomb System: Interbasis Expansions.* Int. J. Quant. Chem., **52**, 1301-1316, (1994).

[137] M. Kibler, L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan. *On a Generalized Oscillator System: Interbasis Expansions.* Int. J. Quant. Chem., **63**, 133-148, (1997).

[138] Г.С. Погосян, Я.А. Смородинский, В.М. Тер-Антонян. *Многомерный изотропный осциллятор: переход от декартового базиса к гиперсферическим*. Сообщение ОИЯИ, Р2-82-118, Дубна, (1982).

[139] Г.С. Погосян, В.М. Тер-Антонян. *Связь между сферическими и параболическими кулоновскими волновыми функциями в непрерывном спектре.* Препринт ОИЯИ, Р2-80-318, Дубна, (1980).

[140] Г.С. Погосян, В.М. Тер-Антонян. *Коэффициенты преобразования между декартовыми, цилиндрическими и сферическими волновыми функциями изотропного осциллятора.* Сообщение ОИЯИ, Р2-11962, Дубна, (1978).

[141] Г.С. Погосян, В.М. Тер-Антонян. *Связь между декартовыми и полярными волновыми функциями кругового осциллятора и динамическая симметрия* $O(3)$. Изв. АН Арм. ССР, Физика, **13**, 235-237, (1978).

[142] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Сфероидальные поправки к сферическому и параболическому базисам атома водорода*. ТМФ, **64**, 171-174, (1985).

[143] А.Н. Сисакян, И.В. Луценко, Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян. *Обобщение межбазисного осцилляторного разложения "цилиндр-сфера" в поле кольцеобразного потенциала.* Сообщение ОИЯИ, Р2-89-814, Дубна, (1989).

[144] М.Г. Арутюнян, Г.С. Погосян, В.М. Тер-Антонян. *К соотношению между параболическими и сферическими волновыми функциями атома водорода.* Изв. АН Арм. ССР, Физика, **13**, 152-154, (1978).

[145] Г.М. Арутюнян, М.Г. Арутюнян, Г.С. Погосян, В.М. Тер-Антонян. *Связь между волновыми функциями простейших квантовых систем со скрытой симметрией*. Препринт ПЛРФ-77-10, Ереван, (1977).

[146] Г.М. Арутюнян, Л.С. Давтян, Л.Г. Мардоян Г.С. Погосян, В.М. Тер-Антонян. *Связь между волновыми функциями двумерных квантовых систем со скрытой симметрией*. Препринт ПЛРФ-79-17, Ереван, (1979).

[147] G.S. Pogosyan, Ya.A. Smorodinsky, V.M. Ter-Antonyan. *Oscillator Wigner Functions*. J. Phys., **A14**, 769-776, (1981).

[148] Л.С. Давтян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Кинематические аспекты межбазисных разложений в системах со скрытой симметрией*. Сообщения ОИЯИ Р2-85-503, Дубна, (1985).

[149] Л.С. Давтян, Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *KS - преобразование трехмерных вытянутых сфероидальных координат*. Препринт ОИЯИ Р2-87-323, Дубна, (1987).

[150] Л.С. Давтян, Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Сфероидальный базис четырехмерного изотропного осциллятора*. Препринт ОИЯИ Р2-87-453, Дубна, (1987).

[151] Л.С. Давтян, Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Алгебраизация эллиптических кулоновских волновых функций в непрерывном спектре*. Препринт ОИЯИ Р2-87-454, Дубна, (1987).

[152] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Двухмерный атом водорода. I. Эллиптический базис*. ТМФ, **61**, 99-117, (1984).

[153] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *К эллиптическому базису кругового осциллятора*. ТМФ, **65**, 212-225, (1985).

[154] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *К эллиптическому базису двумерного атома водорода*. Препринт ОИЯИ Р2-84-110, Дубна, (1984).

[155] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Точное решение задачи Киблера-Ронвикса-Негади*. Сообщения ОИЯИ Р2-86-431, Дубна, (1986).

[156] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Некоторые межбазисные разложения в четырехмерном изотропном осцилляторе*. Сообщения ОИЯИ Р2-86-436, Дубна, (1986).

[157] Г.С. Погосян, В.М. Тер-Антонян, Г.Т. Торосян. *Связь между декартовыми и полярными волновыми функциями кругового осциллятора*. Препринт ПЛРФ-77-04, Ереван, (1977).

[158] Г.С. Погосян, В.М. Тер-Антонян. *Связь между декартовыми и полярными волновыми функциями нерелятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле*. ТМФ, **40**, 140-143, (1979).

[159] Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян. *Квантовые системы со скрытой симметрией*. Мэжбазисные разложения. Москва, ФизМатЛит, (2006).

[160] E. Schrödinger. *A method of Determining Quantum Mechanical Eigenvalues an Eigenfunctions*. Proc. Roy. Irish Soc., **46**, 9-16, (1941).

[161] E. Schrödinger. *Further Studies on Solving Eigenvalue Problems by Factorization*. Proc. Roy. Irish Soc., **46**, 183-206, (1941).

[162] E. Schrödinger. *The Factorization of the Hypergeometric Equation*. Proc. Roy. Irish Soc., **47**, 53-54, (1941).

[163] A.F. Stevenson. *Note on the "Kepler Problem" in a Spherical Space, and Factorization Method of Solving Eigenvalue Problem*. Phys. Rev., **59**, 842-843, (1941).

[164] L. Infeld. *On a New Treatment of Some Eigenvalue Problems*. Phys. Rev., **59**, 737-747, (1941).

[165] L. Infeld and A. Schild. *Note on the Kepler Problem in a Space of Constant Negative Curvature*. Phys. Rev., **67**, 121-122, (1945).

[166] P.W. Higgs. *Dynamical Symmetries in a Spherical Geometry I.* J. Phys., **A12**, 309-323, (1979).

[167] H.I. Leemon. *Dynamical Symmetries in a Spherical Geometry II.* J. Phys., **A12**, 489-501, (1979).

[168] Ю.Л. Курочкин, В.С. Отчик. *Аналог вектора Рунге-Ленца и спектр энергий в задаче Кеплера на трехмерной сфере.* ДАН БССР, XXIII, 987-990, (1979).

[169] Л.Л. Богуш, Ю.Л. Курочкин, В.С. Отчик. *О квантовомеханической задаче Кеплера в трехмерном пространстве Лобачевского.* ДАН БССР, XXIV, 19-22, (1980).

[170] Y. Nishino. *On quadratic first integrals in the 'central potential' problem for the configuration space of constant curvature*. Math. Japon., **17**, 59-67, (1972).

[171] M. Ikeda and N. Katayama. *On Generalization of Bertrand's theorem to spaces of constant curvature*. Tensor, N.S., **38**, 37-40, (1982).

[172] Л.Л. Богуш, В.С. Отчик, В.М. Редьков. *Разделение переменных в уравнении Шредингера и нормированные функции состояний задачи Кеплера в трехмерных пространствах постоянной кривизны.* Вестник АН БССР, **3**, 56-62, (1983).

[173] В.С. Отчик, В.М. Редьков. *Квантовомеханическая задача Кеплера в пространствах постоянной кривизны.* Препринт 298, ИН АН БССР, (1983).

[174] A.O. Barut, A. Inomata and G. Junker. *Path Integral Treatment of the Hydrogen Atom in a Curved Space of Constant Curvature.* J. Phys., **A20**, 6271-6281, (1987).

[175] A.O. Barut, A. Inomata and G. Junker. *Path Integral Treatment of the Hydrogen Atom in a Curved Space of Constant Curvature II.Hyperbolic Space.* J. Phys., **A23**, 1179-1190, (1990).

[176] C. Grosche. *The Path Integral for the Kepler Problem on the Pseudosphere*. Ann. Phys., **204**, 208-222, (1990).

[177] C. Grosche. *On the Path Integral in Imaginary Lobachevsky Space.* J. Phys., **A27**, 3475-3490, (1994).

[178] N. Katayama. *A Note on a Quantum-Mechanical Harmonic Oscillator in a Space of Constant Curvature*. Nuovo Cimento, **B107**, 763-768, (1992).

[179] С.И. Виницкий, Л.Г. Мардоян, Г.С. Погосян, А.Н. Сисакян и Т.А. Стриж. *Атом водорода в искривленном пространстве. Разложение по свободным решениям на трехмерной сфере.* ЯФ, **56**, 61-73, (1993).

[180] Е.М. Акопян, С.И. Виницкий, Г.С. Погосян и А.Н. Сисакян. *Изотропный осциллятор в пространстве постоянной положительной кривизны. Межбазисные разложения.* ЯФ, **62**, 623-637, (1999).

[181] N.Bessis and G. Bessis. *Electronic wavefunctions in a space of constant curvature.* J. Phys., **A12**, 1991-1997, (1979).

[182] A.A. Bogush and V.S. Otchik. *Problem on two Coulomb centres at large intercentre separation: asymptotic expansions from analytical solutions of the Heun equation*. J. Phys., **A30**, 559-571, (1997).

[183] А.А. Изместьев. *Точно решаемая потенциальная модель для кваркониев, глюонный пропагатор.* ЯФ, **53**, 1402-1409, (1997).

[184] V.V. Gritsev and Yu.A. Kurochkin. *Model of excitations in quantum dots on quantum mechanics in spaces of quantum curvature.* Irys. Rev., **B64**, 035308, (2001).

[185] Л.Г. Мардоян, А.П. Нерсесян, М.Г. Петросян. *Эффект Штарка в системе заряд-дион*. ТМФ, **140**, 78-85, (2004).

[186] L.G. Mardoyan and M.G. Petrosyan. *Four-Dimensional Singular Oscillator and Generalized MIC-Kepler System*. ЯФ, **70**, 600-603, (2007).

[187] M.G. Petrosyan. *Four-Dimensional Double-Singular*. ЯФ, **71**, 1121-1128, (2008).

[188] Л.Г. Мардоян, М.Г. Петросян. *Рассеяние электронов на* $SU(2)$ *- монополе Янга-Кулона*. Изв. НАН Армении, Физика, **39**, 283-287, (2004).

[189] Л.Г. Мардоян, М.Г. Петросян. *Альтернативная модель сферического осциллятора*. Изв. НАН Армении, Физика, 48, 105-110, (2013).

[190] L.G. Mardoyan. *The generalized MIC-Kepler system*. J. Math. Phys., **44**, 4981-4987, (2003).

[191] L.G. Mardoyan. *Spheroidal analysis of the generalized MIC-Kepler system*. ЯФ, **68**, 4981-1808-1816, (2005).

[192] Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. *Квантовая теория углового момента*. Наука, Ленинград, (1975).

[193] И.Е. Тамм. *Собрание научных трудов*. т. 2, Наука, Москва, (1962).

[194] Н.Я. Виленкин, Г.И. Кузнецов, Я.А. Смородинский. *Собственные функции оператора Лапласа, реализующие представления групп* $SU(2)$, $U(2)$, $SO(3)$, $U(3)$, $SU(3)$ *и символический метод*. ЯФ, **2**, 906-917, (1965).

[195] Г. Сеге. *Ортогональные многочлены*. ФизМатГиз, Москва, (1962).

[196] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции*. т. 1, Наука, Москва, (1965).

[197] И.В. Комаров, Л.И. Пономарев, С.Ю. Славянов. *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*. Наука, Москва, (1976).

[198] H. Hartmann, R.Schuch, and J. Radke. *Die Bewegung eines Körpers in einem ringförmigen Potentialfield*. Theor. Chim. Acta, **24**, 201-206, (1972).

[199] H. Hartmann, R.Schuch, and J. Radke. *Die diamagnetische Suszeptibilität eines nicht kugelsymmetrischen Systems*. Theor. Chim. Acta, **42**, 1-3, (1976).

[200] H. Hartmann and R.Schuch. *Spin-Orbit Couling for the Motion of a Particle in a Ring-Shaped Potential*. Int. J. Quant.. Chem., **18**, 125-141, (1980).

[201] M. Kibler and G. Grenet. *On the* SU_2 *unit tensor*. J. Math. Phys., **21**, 422-439, (1980).

[202] J. Camboa, J. Zanelli. *Anyons in* $1+1$ *dddimensions*. Phys. Lett., **B357**, 131-137, (1995).

[203] К.А. Жевлаков, А.М. Слинько, И.П. Шестаков, А.И. Ширшов. *Кольца, близкие к ассоциативным*. Наука, Москва, (1978).

[204] L.G. Mardoyan. *Dyon-Oscillator Duality. Hidden Symmetry of the Yang-Coulomb Monopole*. CRM Proceedings and Lecture Notes “Superintegrability in Classical and Quantum Systems”, **37**, 99-108,)2004); quant-ph/0302162.

[205] C.N. Yang. SU_2 *monopole harmonics*. J. Math. Phys., **19**, 2622-2627, (1978).

[206] У. Миллер. *Симметрия и разделение переменных*. Мир, Москва, (1981).

[207] E.G. Kalnins, W.J.Miller, G.S. Pogosyan. *The Coulomb-Oscillator Relation on n-Dimensional Spheres and Hyperboloid*. ЯФ, **65**, 1086-1094, (2002).

[208] D. Banatos, C. Daskaloyannis, K. Kokkotas. *Deformed Oscillator Algebras for Two-Dimensional Quantum Superintegrable Systems*. Phys. Rev., **A50**, 3700-3709, (1994).

[209] C. Grocshe, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian. *Path Integral Discussion for Smorodinsky-Wintenitz Potentialas: II Two – and Three Dimensional Sphere*. Fortschritte der Physik **43**, 523-563, (1995).

[210] C. Grocshe, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian. *Path Integral Approach to Superintegrable Potentialas. Two-Dimensional Hyperboloid.* ЭЧАЯ, **27**, 593-674, (1996).

[211] C. Grocshe, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian. *Path Integral Approach for the Superintegrable Potentialas on the Three-Dimensional Hyperboloid.* ЭЧАЯ, **28**, 1229-1294, (1997).

[212] E.G. Kalnins, W.J. Miller Jr. and G.S. Pogosyan. *Superintegrability and associated polynomial solutions. Euclidean soace and sphere in two-dimensions.* J. Math. Phys. **37**, 6439-6467 (1996).

[213] E.G. Kalnins, W. Miller Jr. and G.S. Pogosyan. *Superintegrability on the two dimensional hiperbolid*. J. Math. Phys., **38**, 5416-5433, (1997).

[214] Ye.M. Hakobyan, E.G. Kalnins, W. Miller Jr. and G.S. Pogosyan. Superintegrability in two dimensional hiperbolid II. J. Math. Phys., **40**, 2291-2306, (1999).

[215] S. Bellucci, A. Nersessian, A. Yeranyan. *Quatum Oscillator on CP^n in a constant magnetic field*. Phys. Rev. **D70**, 085013 (2004).

[216] З. Флюгге. *Задачи по квантовой механике*. Т. 1, 2. Мир, Москва, (1974).

[217] S.C. Zhang, J.P. Hu. *A Four-Dimensional Generalization of the Quantum Hall Effect*. Science, **294**, 823-828, (2001).

[218] B.A. Bernevig, J.P. Hu, N. Toumbas, S.C. Zhang. Eight-Dimensional Quantum Hall Effect and “Octonioin”. Phys. Rev. Lett., **91**, 236803, (2003).

[219] D. Karabali, V.P. Nair. Quantum Hall effect in higher dimensions, matrix models and fuzzy geometry. J. Phys. **A39,** 12735-12763, (2006).