

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Խաչատրյան Հրանտ Հարությունի

**Գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների
հետազոտում**

Ատենախոսություն

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիրեռնետիկա և մաթեմատիկական
տրամաբանություն» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների
թեկնածուի գիտական աստիճանի համար

Գիտական ղեկավար՝

Ֆիզ. մաթ. գիտությունների թեկնածու

Պ. Ա. Պետրոսյան

Երևան - 2017

Բովանդակություն

Ներածություն	4
Սահմանումներ և նշանակումներ	11
Խնդրի դրվածքը	16
1 Ընդհանուր արդյունքներ և հատուկ տիպի ֆակտորիզացիաներ	17
1.1 Միջակայքային ներկելիության անհրաժեշտ պայմաններ	17
1.2 Մուլտիգրաֆների $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի գնահատականներ	19
1.3 Միջակայքային ներկման և հատուկ տիպի ֆակտորիզացիայի համարժեքությունը լրիվ գրաֆների համար	26
1.4 Լրիվ գրաֆի միջակայքային ներկման առավելագույն գույների քանակի գնահատականներ	33
1.4.1 Ստորին գնահատականներ	33
1.4.2 Վերին գնահատականներ	42
1.5 Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային ներկումներ	52
2 Գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային ներկումներ	64
2.1 Գրաֆների դեկարտյան արտադրյալի միջակայքային ներկելիությունը	64
2.2 Համասեռ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալներ	65
2.3 Երկկողմանի գրաֆների դեկարտյան արտադրյալներ	74
2.4 Հարթ դեկարտյան արտադրյալներ	78
2.4.1 Արտաքին հարթ գրաֆների ներկումներ	85
2.5 Տոռերի միջակայքային ներկումներ	94
2.6 Հեմիմիսի գրաֆների միջակայքային ներկումներ	98
3 Միջակայքային ներկում չունեցող գրաֆներ և գրաֆների դեֆիցիտ	101
3.1 $w_{def}(G)$ և $W_{def}(G)$ պարամետրերի գնահատականներ	101
3.2 Որոշ գրաֆների դեֆիցիտի ճշգրիտ արժեքներ	109
3.3 Միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի գրաֆների ընտանիքներ	113
3.3.1 Շեննոնի գրաֆներով հակաօրինակներ	115

3.3.2	Վերջավոր պրոյեկտիվ երկրաչափություններով հակաօրինակներ	117
3.3.3	Ծառերով հակաօրինակներ	119
3.3.4	Ենթատրոհումներով հակաօրինակներ	121
3.4	Փոքրաթիվ գագաթներով երկկողմանի գրաֆների միջակայքային ներկումներ	128
3.5	Միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի մուլտիգրաֆներ	132
	Եզրակացություն	137
	Գրականություն	140

Ներածություն

Թեմայի արդիականությունը

Դիսկրետ մաթեմատիկայում մեծ ուշադրություն է հատկացվում ներկումների խնդիրների հետազոտություններին: Պատմականորեն ներկումների հանդեպ հետաքրքրությունը պայմանավորված էր «Չորս գույների հիպոթեզ» հանրահայտ խնդրով [2, 3], համաձայն որի ամեն մի աշխարհագրական քարտեզ հնարավոր է ներկել չորս գույների միջոցով այնպես, որ յուրաքանչյուր երկրի տարածք ներկված լինի մեկ գույնով, իսկ ընդհանուր սահման ունեցող երկրները ներկված լինեն տարբեր գույներով: Դիսկրետ մաթեմատիկայի հետագա զարգացումը ցույց տվեց, որ դա պայմանավորված է ինչպես ներկումների խնդիրների՝ մի շարք կարևոր կիրառական խնդիրների հետ առկա սերտ կապով, այնպես էլ նրանով, որ դիսկրետ մաթեմատիկայում առկա են բազմաթիվ խնդիրներ, որոնք կարելի է ձևակերպել որպես ներկումների խնդիրներ (ֆակտորիզացիայի խնդիրներ, տրոհման խնդիրներ, Ռամսեյի տեսության խնդիրներ և այլն): Մասնավորապես, նշանակալի փոխադարձ կապ կա կարգացուցակների տեսության խնդիրների և գրաֆների ներկումների խնդիրների միջև: Օրինակ, քննաշրջանի օպտիմալ կարգացուցակ կառուցելու խնդիրը բերվում է գրաֆի քրոմատիկ թվի որոշմանը: Գրաֆի քրոմատիկ դասը գտնելու խնդիրն բերվում է սպորտային մրցումների կարգացուցակ կազմելու խնդիրը:

Կարգացուցակների տեսության բազմաթիվ խնդիրներ կարելի է բերել ոչ միայն գրաֆների դասական ներկումների խնդիրներին, այլև լրացուցիչ պայմաններով ճիշտ գազաթային և կողային ներկումների գոյության ու կառուցման խնդիրներին: Օրինակ, գրաֆների ցուցակային ներկումները [23, 72], որոնք այնպիսի ճիշտ գազաթային ներկումներ են, երբ յուրաքանչյուր գազաթի գույնը ընտրվում է թույլատրելի գույների ցուցակից, օգտագործվում են այնպիսի կարգացուցակների մոդելավորման համար, երբ յուրաքանչյուր աշխատանք կարող է կատարվել միայն ժամանակի որոշակի պահերին կամ միայն որոշակի մեքենաների կողմից: Մեկ այլ հետաքրքիր օրինակ է գրաֆների գումարային ներկումը [44, 64]: Գումարային ներկումը ճիշտ գազաթային ներկում է

նվազագույն գույների գումարով, և կարգացուցակների տեսության մեջ այն կիրառվում է աշխատանքների ընդհանուր տևողության միջին ժամանակը մինիմիզացնելու նպատակով: Մյուս կողմից, կարգացուցակների տեսության որոշ խնդիրներ բերվում են երկկողմանի մուլտիգրաֆներում հատուկ տիպի կողային ներկումների գոյության և կառուցման խնդիրներին [24, 27, 19, 21]: Օրինակ, Ջ. Ֆոլկմանը և Դ. Ֆակերսոնը [27] դիտարկել են երկկողմանի մուլտիգրաֆը r գույներով ճիշտ կողային ներկման գոյության խնդիրը, երբ i գույնով ներկված կողերի քանակը n_i է, $i = 1, \dots, r$: Այս խնդիրը համապատասխանում է r ժամ ընդհանուր տևողություն ունեցող այնպիսի ուսումնական դասացուցակի կառուցմանը, երբ i -րդ ժամի ընթացքում զբաղված է ճիշտ n_i լսարան, $i = 1, \dots, r$: [4, 20, 22]-ում ստացվել են պահանջվող ներկման գոյության համար որոշ բավարար պայմաններ: [24]-ում դիտարկվել է այնպիսի ուսումնական դասացուցակների կառուցումը, որտեղ հաշվի են առնվում ուսուցիչների նախապատվությունները: Ցույց է տրվել, որ ընդհանուր դեպքում խնդիրը NP-լրիվ է: Գրաֆների տեսության տերմիններով այս խնդիրը համապատասխանում է G երկկողմանի մուլտիգրաֆի այնպիսի ճիշտ կողային ներկման կառուցմանը, որտեղ G -ի կողմերից մեկի յուրաքանչյուր գագաթի համար տրված են գույների բազմություններ, որոնցից պետք է ընտրվեն այդ գագաթին կից կողերի գույները: [19]-ում դիտարկվել են երկկողմանի մուլտիգրաֆների կողային ներկումների գոյության և կառուցման խնդիրները, երբ յուրաքանչյուր գագաթի համար այդ գագաթին կից ցանկացած երկու գույնով ներկված կողերի քանակների տարբերությունը մեծ չէ մեկից: Ցույց է տրվել, որ կամայական G երկկողմանի մուլտիգրաֆի և k բնական թվի համար G -ի կողերը կարելի է ներկել k գույներով՝ բավարարելով նշված պայմանին: Այս խնդիրը համապատասխանում է այնպիսի դասացուցակներին, երբ ուսուցիչների և դասարանների ծանրաբեռնվածությունները բաշխվում են հավասարաչափ: «Պատուհան» չունեցող դասացուցակների գոյության և կառուցման խնդիրներին համապատասխանող գրաֆների ներկումների խնդիրների հետազոտման նպատակով Ա. Հասրաթյանի և Ռ. Քամալյանի կողմից սահմանվել է գրաֆի միջակայքային կողային ներկման [68] գաղափարը: G գրաֆի ճիշտ կողային ներկումը $1, \dots, t$ գույներով կոչվում է G -ի միջակայքային կողային t -ներկում, եթե յուրաքանչյուր գագաթին կից կողերը ներկված են հաջորդական գույներով: [6, 30, 31, 35, 46, 52, 56, 73, 74, 76] աշխատանքներում հետազոտվել են երկկողմանի գրաֆների որոշ դասերի միջակայքային կողային ներկումները, որոնցից են լրիվ երկկողմանի

գրաֆները, ծառերը, n -չափանի խորանարդը, ցանցերը, երկակի ուռուցիկ երկկողմանի գրաֆները, արտաքին հարթ երկկողմանի գրաֆները և (a, b) -երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆները: Հայտնի է, որ ոչ բոլոր երկկողմանի գրաֆները ունեն միջակայքային կողային ներկում: Այդ փաստը առաջին անգամ նշվել է Ա. Միրումյանի կողմից: Հետագայում այդպիսի օրինակներ կառուցվել են Ս. Սեվաստյանովի [79], Պ. Էրոյոշի [40], Ա. Հերցի, Դ. դե Վերրայի [32, 40], Կ. Գիարոյի, Մ. Կուբալի և Մ. Մալաֆիյսկու [32], ինչպես նաև Քամալյանի [75] կողմից: [79]-ում ապացուցվել է, որ երկկողմանի գրաֆների դասում միջակայքային կողային ներկման գոյության խնդիրը հանդիսանում է NP-լրիվ խնդիր: Նշենք նաև, որ [40]-ում առաջարկվել է հիպոթեզ, համաձայն որի բոլոր (a, b) -երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆները ունեն միջակայքային կողային ներկում: Այս հիպոթեզի ապացույցի ուղղությամբ Ա. Հասրաթյանը, Կ. Կասսելգրենը, Պ. Պետրոսյանը, Զ. Վանդենբուշեն, Դ. Վեստը, Ա. Պյատկինը, Բ. Տոֆտը, Ֆ. Յանգը և Ք. Լին հասել են որոշ հաջողությունների [7, 8, 16, 17, 59, 67]:

Կիրառական խնդիրների մոդելավորման ժամանակ հաճախ հետազոտման օբյեկտներ են հանդիսանում ոչ միայն հասարակ գրաֆները, այլև մուլտիգրաֆները: Այսպես, օրինակ, ուսումնական դասացուցակների կառուցման խնդիրներում հաճախ առաջանում են իրավիճակներ, երբ ուսուցիչը միևնույն խմբի հետ անցկացնում է մեկից ավելի դասաժամ: Միջակայքային կողային ներկումներին նվիրված հետազոտությունները վերջին երեք տասնամյակներում հիմնականում վերաբերում էին պատիկ կողեր չպարունակող գրաֆներին, մինչդեռ մուլտիգրաֆները մնում են քիչ հետազոտված: Մյուս կողմից՝ վերոհիշյալ աշխատանքներում հիմնականում ուսումնասիրվել են միջակայքային ներկումների գոյության և կառուցման խնդիրները, սակայն քիչ է անդրադարձ կատարվել ներկումների թվային պարամետրերի գնահատման հարցերին: Միջակայքային ներկումների հետազոտություններում անարդարացիորեն քիչ է ուշադրություն հատկացված այդպիսի ներկումների կայունության հարցերին տարբեր գրաֆային գործողությունների նկատմամբ, ինչպիսիք են, օրինակ, գրաֆների գումարումը, դեկարտյան արտադրյալը, գրաֆից գազաթների, կողերի կամ զուգակցումների հեռացումը, կողերի տրոհումը և այլն: Նման դրվածքով խնդիրների կարևորությունը հատկապես մեծ է այնպիսի համակարգերի մոդելավորման դեպքում, որոնցում ժամանակի ազդեցության տակ կարող են կատարվել նկարագրող գրաֆի (մուլտիգրաֆի) չնախատեսված փոփոխություններ:

Աշխատանքի հիմնական նպատակը և նրանում դիտարկված խնդիրները

Աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների և մուլտիգրաֆների միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման, ինչպես նաև այդպիսի ներկումների՝ գրաֆային տարբեր գործողությունների նկատմամբ կայունության խնդիրներ: Աշխատանքում նաև դիտարկվել են այդ ներկումների տարբեր բնույթի ընդհանրացումներ և ուսումնասիրվել են դրանց պարամետրերը: Աշխատանքի հիմնական նպատակն է վերոհիշյալ խնդիրների հետազոտումը գրաֆների և մուլտիգրաֆների տարբեր դասերի համար:

Հետազոտության օբյեկտները

Աշխատանքում հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում գրաֆների և մուլտիգրաֆների տարբեր դասեր, գրաֆների հատուկ տիպի ֆակտորիզացիաներ, միջակայքային կողային ներկումներ, այդպիսի ներկումներում մասնակցող գույների քանակներ: Հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում նաև միջակայքային ներկումներ չունեցող գրաֆներ և մուլտիգրաֆներ, ինչպես նաև այդպիսի գրաֆների՝ միջակայքային ներկվող գրաֆների դասից հեռավորության որոշ տեսակներ:

Հետազոտության մեթոդները

Հետազոտությունն իրականացվել է դիսկրետ մաթեմատիկայի, գրաֆների տեսության և դիսկրետ օպտիմիզացիայի մեթոդների օգնությամբ: Որոշ արդյունքների ստացման համար կիրառվել են համակարգչային հաշվարկների բաշխված համակարգեր:

Գիտական նորույթը

Աշխատանքում առաջին անգամ ուսումնասիրվել են մուլտիգրաֆների միջակայքային կողային ներկումների պարամետրեր, ներմուծվել է լրիվ գրաֆների հատուկ տիպի ֆակտորիզացիա (բաժանված) և նշվել է դրա կապը լրիվ գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների հետ, տրվել է սեպարաբել միջակայքային կողային ներկման սահմանումը և կիրառվել է գրաֆների արտադրյալների վերաբերյալ մի շարք

արդյունքների ստացման համար, ներմուծվել է միջակայքային ներկում չունեցող գրաֆների կառուցման ենթատրոհումների վրա հիմնված եղանակ, որի օգնությամբ կառուցվել է մինչ այժմ հայտնի այդպիսի ներկում չունեցող ամենավոքոր գրաֆը:

Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը

Աշխատանքում օգտագործված հետազոտության մեթոդները և նրանում ստացված արդյունքներն ունեն ոչ միայն տեսական կարևոր նշանակություն գրաֆների քրոմատիկ հատկությունների հետազոտման համար, այլև կարող են ունենալ գործնական կիրառություններ: Մասնավորապես, գրաֆների միջակայքային ներկումները կիրառվում են կոմպակտ կարգացուցակների գոյության և կառուցման, համակարգիչների և ծրագրերի հիշողության օպտիմալ բաշխման, անընդհատ պրոցեսների մաթեմատիկական մոդելավորման խնդիրներում և այլն:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները

Պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական դրույթները.

1) Միջակայքային ներկումներ ունեցող գրաֆների և մուլտիգրաֆների պարամետրերի ընդհանուր գնահատականներ և որոշ դասերի գրաֆների համար այդ պարամետրերի ճշգրիտ արժեքներ,

2) Լրիվ գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների և այդ գրաֆների հատուկ տիպի ֆակտորիզացիաների համարժեքության հիման վրա ստացված արդյունքներ այդպիսի ներկումներում մասնակցող գույների հնարավոր քանակի վերաբերյալ,

3) Լրիվ, լրիվ բազմակողմանի, արտաքին հարթ գրաֆների, ցանցերի, գլանների, տոռերի և Հեմինգի գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատականներ և ճշգրիտ արժեքներ,

4) Կապակցված գրաֆների, համասեռ գրաֆների և երկկողմանի գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների ինչպես նաև հարթ դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման, պարամետրերի գնահատման վերաբերյալ մի շարք արդյունքներ,

5) Միջակայքային կողային ներկումների ընդհանրացումների հետ կապված որոշ պարամետրերի հասանելի գնահատականներ,

6) Փոքրաթիվ գագաթներով երկկողմանի գրաֆների միջակայքային ներկումների կառուցման վերաբերյալ արդյունքներ, ինչպես նաև այդպիսի ներկում չունեցող փոքրագույն երկկողմանի գրաֆների և մուլտիգրաֆների կառուցման մի շարք եղանակներ, Ջենսեն-Տոֆտի միջակայքային ներկում չունեցող փոքրագույն երկկողմանի գրաֆի մասին պրոբլեմի մասնակի լուծում,

7) Միջակայքային կողային ներկում չունեցող որոշ գրաֆների դեֆիցիտի ճշգրիտ արժեքներ, Բորովիցկա-Օլշեվսկայի, Դրգաշ-Բուրչարդտի և Հալուշչակի հիպոթեզի ապացույց:

Ստացված արդյունքների գրաքննությունը և փորձարկումը

Ստացված արդյունքները զեկուցվել են մի շարք գիտաժողովներում Հայաստանում և եվրոպական երկրներում.

1. Пятая годовичная научная конференция РАУ, Ереван, Армения, 6-10 декабря 2010г.,
2. 14th Workshop on Graph Theory, Colourings, Independence and Domination, Szklarska Poreba, Poland, September 18-23, 2011,
3. 8th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 26-30, 2011,
4. 15th Workshop on Graph Theory, Colourings, Independence and Domination, Szklarska Poreba, Poland, September 15-20, 2013,
5. 9th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 23-27, 2013,
6. 7th Cracow Conference on Graph Theory, Rytro, Poland, September 14-19, 2014,
7. 5th Polish Combinatorial Conference, Bedlewo, Poland, September 22-26, 2014,
8. 8th Slovenian Conference on Graph Theory, Kranjska Gora, Slovenia, June 21-27, 2015,
9. 10th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 28 - October 2, 2015

Աշխատանքի առանձին հատվածները մանրամասն քննարկվել են ավելի քան մեկ տասնյակ սեմինարների ընթացքում՝ Երևանի պետական համալսարանում, ՀՀ ԳԱԱ ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում և Յագիլոնյան համալսարանում:

Հրապարակումները

Հետազոտության թեմայի վերաբերյալ տպագրվել են 15 գիտական աշխատանքներ:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը

Աշխատանքի ծավալը կազմում է 146 էջ: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից: Աշխատանքը ներառում է 31 նկար և 7 աղյուսակ:

Սահմանումներ և նշանակումներ

Աշխատանքում դիտարկվում են ոչ կողմնորոշված հասարակ գրաֆներ՝ առանց պատիկ կողերի և օղերի, ինչպես նաև մուլտիգրաֆներ, որտեղ թույլատրվում են պատիկ կողեր: G գրաֆի (մուլտիգրաֆի) գագաթների և կողերի բազմությունները նշանակենք, համապատասխանաբար, $V(G)$ -ով և $E(G)$ -ով: Ցանկացած $v \in V(G)$ -ի համար $d_G(v)$ -ով նշանակենք այդ գագաթի *աստիճանը* G -ում, $\delta(G)$ -ով և $\Delta(G)$ -ով նշանակենք գրաֆի (մուլտիգրաֆի) նվազագույն և առավելագույն աստիճանները: e կողի պատիկությունը մուլտիգրաֆում նշանակում ենք $\mu(e)$ -ով:

Ցանկացած a և b բնական թվերի համար ($a \leq b$) $[a, b]$ -ով կնշանակենք $[a, b] = \{a, a+1, \dots, b\}$ բազմությունը: a և b բնական թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կնշանակենք (a, b) -ով:

Ցանկացած $u, v \in V(G)$ գագաթների համար $d(u, v)$ -ով նշանակենք u և v գագաթների միջև հեռավորությունը G գրաֆում (մուլտիգրաֆում): $v \in V(G)$ գագաթի համար սահմանենք $\epsilon(v)$ թիվը հետևյալ կերպ.

$$\epsilon(v) = \max_{u \in V(G)} d(u, v) ,$$

իսկ G գրաֆի (մուլտիգրաֆի) *տրամագիծը*՝

$$\text{diam}(G) = \max_{v \in V(G)} \epsilon(v):$$

G գրաֆում (մուլտիգրաֆում) ամենամեծ ցիկլի երկարությունը կոչվում է *պարագիծ* և նշանակվում է $c(G)$ -ով: Երկու կողերի միջև *հեռավորությունը*՝ $d(e, e')$, սահմանվում է որպես այդ կողերի ծայրակետերի միջև հեռավորություններից նվազագույնը:

Ցիկլը կոչվում է *էլեբրյան*, եթե այն անցնում է մուլտիգրաֆի բոլոր գագաթներով և կողերով, ընդ որում՝ յուրաքանչյուր կողով ճիշտ մեկ անգամ: Էլեբրյան ցիկլ ունեցող գրաֆը (մուլտիգրաֆը) կոչվում է *էլեբրյան գրաֆ* (*էլեբրյան մուլտիգրաֆ*): Ցիկլը կոչվում է *համիլտոնյան*, եթե այն անցնում է գրաֆի յուրաքանչյուր գագաթով ճիշտ մեկ անգամ:

Գրաֆը կոչվում է *հարթ*, եթե այն հնարավոր է պատկերել հարթության վրա այնպես, որ գրաֆի կողերը հատվեն միայն գագաթներում: Հարթության վրա պատկերված հարթ գրաֆը հարթությունը տրոհում է տիրույթների, որոնք կոչվում են *նիստեր*: Հարթ գրաֆը կոչվում է *արտաքին հարթ*, եթե այն հնարավոր է հարթության վրա պատկերել այնպես, որ նրա բոլոր գագաթները պատկանեն արտաքին (անվերջ) նիստին:

Կողերի M բազմությունը կոչվում է *զուգացկուն*, եթե M -ի ցանկացած երկու կող հարևան չեն: Կասենք, որ M զուգացկունը ծածկում է v գագաթը, եթե v -ն կից է M -ի կողերից որևէ մեկին: M -ը կոչվում է *կախարյալ զուգացկուն*, եթե այն ծածկում է G մուլտիգրաֆի բոլոր գագաթները: $\alpha'(G)$ -ով կնշանակենք G մուլտիգրաֆի ամենաշատ կողեր պարունակող զուգակցման հզորությունը: $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ կատարյալ զուգակցումների բազմությունը կանվանենք G մուլտիգրաֆի *1-ֆակտորիզացիա*, եթե G -ի կամայական կող պատկանում է \mathcal{F} -ի զուգակցումներից ճիշտ մեկին:

G և H գրաֆների $G \square H$ *դեկարտյան արտադրյալը* սահմանվում է հետևյալ կերպ. Դիցուք $V(G) = \{u_1, \dots, u_m\}$, իսկ $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$: Այդ դեպքում $G \square H$ դեկարտյան արտադրյալն է.

$$V(G \square H) = \{(u_i, v_j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

$$E(G \square H) = \bigcup_{i=1}^m \{(u_i, x)(u_i, y) : xy \in E(H)\} \cup \bigcup_{j=1}^n \{(x, v_j)(y, v_j) : xy \in E(G)\}$$

Երբ G -ն և H -ը կապակցված գրաֆներ են, ապա $G \square H$ -ն ևս կապակցված է: Ընդ որում, $\Delta(G \square H) = \Delta(G) + \Delta(H)$ և $\text{diam}(G \square H) = \text{diam}(G) + \text{diam}(H)$: Պարզ է, որ ցանկացած G , H և F գրաֆների համար՝

$$G \square H \cong H \square G \text{ և } (G \square H) \square F \cong G \square (H \square F):$$

$\alpha : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ֆունկցիան կոչվում է G մուլտիգրաֆի *ճիշտ կողային ներկում*, եթե $\forall v \in V(G)$ գագաթին կից կողերը ներկված են զույգ առ զույգ տարբեր գույներով: Եթե α ճիշտ կողային ներկումը օգտագործում է միայն $1, \dots, t$ գույները, ընդ որում՝ $\forall i$ թվի համար, $1 \leq i \leq t$, գոյություն ունի $e_i \in E(G)$ այնպիսին, որ $\alpha(e_i) = i$, ապա α -ն կանվանենք G մուլտիգրաֆի *ճիշտ կողային t -ներկում*:

Եթե α -ն G -ի ճիշտ կողային ներկում է, ապա կամայական v գագաթի *սպեկտրը*՝ $S(v, \alpha)$, այդ գագաթին կից կողերի գույների բազմությունն է: Պարզ է, որ երբ α -ն ճիշտ ներկում է, $|S(v, \alpha)| = d_G(v)$ ցանկացած $v \in V(G)$ գագաթի համար: Սպեկտրի նվազագույն և առավելագույն թվերը կնշանակենք, համապատասխանաբար, $\underline{S}(v, \alpha)$ -ով և $\overline{S}(v, \alpha)$ -ով:

Դիցուք $V' \subseteq V(G)$ G մուլտիգրաֆի գագաթների ենթաբազմություն է: $G[V']$ -ով կնշանակենք V' բազմության գագաթներով ծնված ենթագրաֆը: Մեզ պետք կգան նաև հետևյալ նշանակումները.

$$S_{\cup}(V', \alpha) = \bigcup_{v \in V'} S(v, \alpha)$$

$$S_{\cap}(V', \alpha) = \bigcap_{v \in V'} S(v, \alpha)$$

Ակնհայտ է, որ կամայական մուլտիգրաֆ ունի ճիշտ կողային ներկում (տարբեր կողեր կարող ենք ներկել տարբեր գույներով): Տրված G մուլտիգրաֆի ճիշտ կողային ներկումներում անհրաժեշտ գույների նվազագույն քանակը կոչվում է *քրոմատիկ դաս* և նշանակվում է $\chi'(G)$ -ով: Ըստ Վիզինգի հայտնի թեորեմի՝

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G),$$

որտեղ $\mu(G)$ -ն G գրաֆում կողերի առավելագույն պատիկությունն է [70]: Մասնավորապես, սովորական գրաֆների համար քրոմատիկ դասը կամ հավասար է առավելագույն աստիճանին, կամ առավելագույն աստիճանից մեծ է մեկով:

α ճիշտ կողային t -ներկումը կանվանենք *միջակայքային կողային t -ներկում*, եթե ցանկացած $v \in V(G)$ գագաթին կից կողերը ներկված են $d_G(v)$ հաջորդական գույներով: Երբ α -ն միջակայքային կողային t -ներկում է, բոլոր $v \in V(G)$ գագաթների համար $\overline{S}(v, \alpha) - \underline{S}(v, \alpha) = d_G(v) - 1$:

Նկատենք, որ եթե G -ն կապակցված մուլտիգրաֆ է, ապա միջակայքային կողային ներկման սահմանման երկրորդ կետը կարելի է չստուգել:

Լեմմա 0.0.1. *Եթե α -ն G կապակցված գրաֆի ճիշտ կողային t -ներկում է, այնպիսին որ ցանկացած $v \in V(G)$ գագաթին կից կողերը ներկված են հաջորդական գույներով, ընդ որում՝ $\min_{e \in E(G)} \{\alpha(e)\} = 1$, $\max_{e \in E(G)} \{\alpha(e)\} = t$, ապա α -ն G -ի միջակայքային t -ներկում է:*

Ապացույց. Լեմման ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ G -ի α ներկման մեջ օգտագործվում են բոլոր գույները:

Դիցուք u -ն և w -ն այնպիսի գագաթներ են, որ $1 \in S(u, \alpha)$ և $t \in S(w, \alpha)$: Ենթադրենք $P = v_1, \dots, v_k$ -ն (որտեղ $u = v_1$ և $v_k = w$) u, w -շղթան է G -ում: Երբ $k = 1$, ապա $t \in S(u, \alpha)$ և բոլոր գույները u -ին կից կողերին են: Ենթադրենք $k \geq 2$. $v_i \in V(P)$ գագաթների համար $S(v_i, \alpha)$ բազմությունները միջակայքեր են, ընդ որում ցանկացած $2 \leq i \leq k$ -ի համար $S(v_{i-1}, \alpha)$ և $S(v_i, \alpha)$ միջակայքերը ունեն ընդհանուր գույն: Այսպիսով, $S(v_1, \alpha), \dots, S(v_k, \alpha)$ բազմությունները ծածկում են $[1, t]$ միջակայքը: □

Նշանակենք \mathfrak{N}_t -ով այն մուլտիգրաֆների բազմությունը, որոնք ունեն միջակայքային կողային t -ներկում, իսկ \mathfrak{N} -ով՝ $\mathfrak{N} = \bigcup_{t \geq 1} \mathfrak{N}_t$ բոլոր միջակայքային կողային ներկելի մուլտիգրաֆների բազմությունը:

Երբ $G \in \mathfrak{N}$, G -ի միջակայքային կողային ներկման մեջ օգտագործվող գույների նվազագույն և առավելագույն քանակները նշանակենք, համապատասխանաբար, $w(G)$ -ով և $W(G)$ -ով:

Ոչ բոլոր գրաֆներն ունեն միջակայքային ներկումներ: Ամենապարզ օրինակը K_3 -ն է: Եթե G -ն միջակայքային ներկելի չէ, ապա կարելի է սահմանել չափեր, թե որքանով է G -ն «հեռու» միջակայքային ներկելի լինելուց: Այսպիսի չափերից ամենաշատը ուսումնասիրվել է գրաֆի *դեֆիցիտը*, որը ներմուծվել է Գիառոյի, Կուբալի և Մալաֆիյսկու կողմից [32]:

Եթե α -ն G -ի ճիշտ կողային ներկում է, ապա $v \in V(G)$ գագաթի դեֆիցիտը հետևյալ թիվն է.

$$def(v, \alpha) = \overline{S}(v, \alpha) - \underline{S}(v, \alpha) - |S(v, \alpha)| + 1:$$

G մուլտիգրաֆի ճիշտ α ներկման դեֆիցիտը բոլոր գագաթների դեֆիցիտների գումարն է. $def(G, \alpha) = \sum_{v \in V(G)} def(v, \alpha)$: G մուլտիգրաֆի դեֆիցիտը G -ի բոլոր ճիշտ ներկումների դեֆիցիտներից փոքրագույնն է. $def(G) = \min_{\alpha} def(G, \alpha)$, որտեղ մինիմումը վերցվում է ըստ G -ի բոլոր ճիշտ ներկումների: Պարզ է, որ $def(G)$ -ն կախված կողերի նվազագույն թիվն է, որն անհրաժեշտ է ավելացնել G -ին այն միջակայքային ներկելի դարձնելու համար:

Կամայական G մուլտիգրաֆի համար $w_{def}(G)$ -ով և $W_{def}(G)$ -ով կնշանակենք t -ի ամենափոքր և ամենամեծ արժեքները, որոնց համար G -ն ունի α ճիշտ կողային t -ներկում $def(G, \alpha) = def(G)$ դեֆիցիտով:

Մուլտիգրաֆի՝ միջակայքային ներկելիությունից «հեռավորության» մեկ այլ չափ է *անցքերի թիվը*: Եթե α -ն G -ի ճիշտ կողային ներկում է, ապա նրա անցքերի թիվը գրաֆի բոլոր գագաթների դեֆիցիտների մաքսիմումն է. $gn(G, \alpha) = \max_{v \in V(G)} def(v, \alpha)$: G մուլտիգրաֆի անցքերի թիվը G -ի բոլոր ճիշտ ներկումների անցքերի թվերից փոքրագույնն է. $gn(G) = \min_{\alpha} gn(G, \alpha)$, որտեղ մինիմումը վերցվում է ըստ G -ի բոլոր ճիշտ կողային ներկումների:

Անցքերի թվի գաղափարը անմիջականորեն կապված է միջակայքային (t, h) -

ներկումների հետ, որոնք ներմուծվել են [51]-ում: $\alpha : E(G) \rightarrow \{1, \dots, t\}$ ճիշտ կողային ներկումը կոչվում է G մուլտիգրաֆի միջակայքային (t, h) -ներկում, եթե բոլոր գույները օգտագործված են և կամայական $v \in V(G)$ գագաթի համար, $def(v, \alpha) \leq h$:

\mathfrak{N}_t^h -ով նշանակում ենք բոլոր այն գրաֆների բազմությունը, որոնք ունեն միջակայքային (t, h) -ներկումներ: $\mathfrak{N}^h = \bigcup_{t \geq 1} \mathfrak{N}_t^h$: Պարզ է, որ G գրաֆի անցքերի թիվը G այն նվազագույն h -ն է, որի համար $G \in \mathfrak{N}^h$: Եթե $G \in \mathfrak{N}^h$, կասենք, որ G -ն միջակայքային h -անցք-ներկելի է:

Եթե $G \in \mathfrak{N}^h$, ապա $w^h(G)$ -ով և $W^h(G)$ -ով կնշանակենք t -ի ամենափոքր և ամենամեծ արժեքները, որոնց համար G -ն ունի միջակայքային (t, h) -ներկում:

Հետևյալ անհավասարությունները անմիջապես բխում են սահմանումներից.

$$gn(G) \leq def(G) \leq gn(G)|V(G)|:$$

Չսահմանված հասկացությունները և նշանակումները կարելի է գտնել [6, 36, 43, 66, 83]-ում:

Խնդրի դրվածքը

Այս աշխատանքում մեր կողմից դիտարկվել են հետևյալ խնդիրները.

Խնդիր 1: Դիցուք տրված է G գրաֆը (մուլտիգրաֆը): Պատկանում է արդյոք G -ն \mathfrak{N} դասին:

Խնդիր 2: Դիցուք $G \in \mathfrak{N}$: Գտնել $w(G)$ -ի ճշգրիտ արժեքը կամ տալ գնահատական նրա համար:

Խնդիր 3: Դիցուք $G \in \mathfrak{N}$: Գտնել $W(G)$ -ի ճշգրիտ արժեքը կամ տալ գնահատական նրա համար:

Խնդիր 4: Դիցուք $G \in \mathfrak{N}$ և $w(G) \leq t \leq W(G)$: Գոյություն ունի՞ արդյոք գրաֆի միջակայքային t -ներկում:

Խնդիր 5: Ինչպիսի՞ պայմանների պետք է բավարարեն G և H գրաֆները, որպեսզի $G \square H \in \mathfrak{N}$:

Խնդիր 6: Ինչպիսի՞ պայմանների պետք է բավարարի G գրաֆը, որպեսզի $G \notin \mathfrak{N}$:

Խնդիր 7: Եթե $G \notin \mathfrak{N}$, պարզել միջակայքային ներկվող գրաֆների դասից G -ի հեռավորությունը:

1 Ընդհանուր արդյունքներ և հատուկ տիպի ֆակտորիզացիաներ

1.1 Միջակայքային ներկելիության անհրաժեշտ պայմաններ

Հայտնի է, որ ոչ բոլոր գրաֆները և մուլտիգրաֆները ունեն միջակայքային ներկումներ: Մուլտիգրաֆների միջակայքային ներկելիության առաջին անհրաժեշտ պայմանը ստացել են Հասրաթյանը և Քամալյանը [5, 68]:

Թեորեմ 1.1.1. *Եթե G մուլտիգրաֆը ունի միջակայքային ներկում, ապա $\chi'(G) = \Delta(G)$:*

Նրանք նաև ցույց են տվել, որ այս պայմանը ոչ միայն անհրաժեշտ, այլև բավարար պայման է համասեռ մուլտիգրաֆների համար:

Թեորեմ 1.1.2. *Եթե G -ն համասեռ մուլտիգրաֆ է, ապա*

(1) *$G \in \mathfrak{N}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\chi'(G) = \Delta(G)$,*

(2) *եթե $G \in \mathfrak{N}$ և $w(G) \leq t \leq W(G)$, ապա G -ն ունի միջակայքային t -ներկում:*

Այսպիսով, եթե մուլտիգրաֆի քրոմատիկ դասը մեծ է առավելագույն աստիճանից, ապա այն չի կարող լինել միջակայքային ներկելի: Սակայն կան նաև մուլտիգրաֆների այլ ընտանիքներ, որոնք չունեն միջակայքային ներկումներ:

Հաշվարկային դատողություններով կարելի է ցույց տալ, որ որպեսզի մուլտիգրաֆը ունենա միջակայքային ներկում, անհրաժեշտ է, որ մուլտիգրաֆի բոլոր գագաթների աստիճանների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հանդիսանա նաև մուլտիգրաֆի կողերի քանակի ընդհանուր բաժանարար:

Թեորեմ 1.1.3. *Եթե G մուլտիգրաֆի համար գոյություն ունի d թիվ, որը G -ի բոլոր գագաթների աստիճանների ընդհանուր բաժանարար է, սակայն $|E(G)|$ -ի բաժանարար չէ, ապա $G \notin \mathfrak{N}$:*

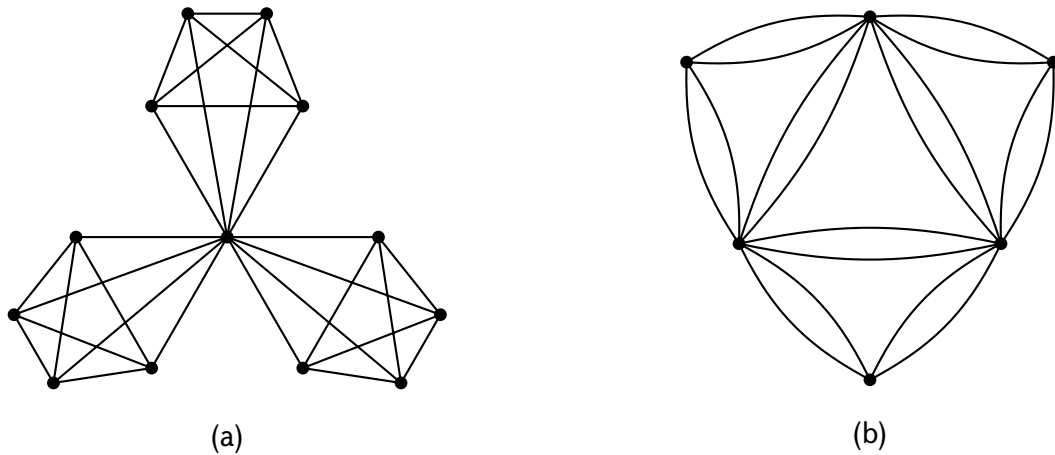
Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը, որ G -ն ունի α միջակայքային t -ներկում որևէ $t \geq \Delta(G)$ թվի համար: $e \in E(G)$ կողը անվանենք d -կող եթե $\alpha(e) = d \cdot l$ որևէ $l \in \mathbb{N}$ թվի համար: Քանի որ գոյություն ունի d թիվ այնպես, որ ցանկացած $v \in V(G)$ գագաթի համար d -ն $d_G(v)$ -ի բաժանարար է, իսկ α -ն միջակայքային ներկում է, ունենք, որ ցանկացած

$v \in V(G)$ գագաթի համար $S(v, \alpha)$ բազմությունը պարունակում է ճիշտ $\frac{d_G(v)}{d}$ d -կողեր: m_d -ով նշանակենք G -ում d -կողերի քանակը: Էյլերի թեորեմից ստանում ենք, որ $m_d = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \frac{d_G(v)}{d} = \frac{|E(G)|}{d}$: Ուստի, d -ն $|E(G)|$ -ի բաժանարար է, ինչը հակասություն է: \square

Հետևանք 1.1.4. Եթե G -ն էյլերյան մուլտիգրաֆ է և $|E(G)|$ կենտ է, ապա $G \notin \mathfrak{N}$:

Այս հետևանքը առաջին անգամ ստացվել է [49]-ում:

Կարևոր է նկատել, որ Թեորեմ 1.1.3-ի պայմաններին բավարարող գրաֆների դասը ավելի լայն է Հետևանք 1.1.4-ի պայմաններին բավարարող գրաֆների դասից: Մասնավորապես, K_5 լրիվ գրաֆը էյլերյան է և ունի զույգ թվով կողեր, սակայն միջակայքային ներկելի չէ համաձայն Թեորեմ 1.1.3-ի: Հարկ է նշել, որ Թեորեմ



Նկ. 1.1: Միջակայքային ներկում չունեցող մուլտիգրաֆների օրինակներ, որոնք բավարարում են Թեորեմ 1.1.1-ի անհրաժեշտ պայմանին, սակայն չեն բավարարում Թեորեմ 1.1.3-ի անհրաժեշտ պայմանին:

1.1.3-ի անհրաժեշտ պայմանը չի հանդիսանում Թեորեմ 1.1.1-ի մասնավոր դեպք: Դիտարկենք Նկ. 1.1a-ում պատկերված գրաֆը, որը ստացվում է երեք օրինակ K_5 գրաֆներից մեկական գագաթ նույնացնելով: Այս գրաֆի առավելագույն աստիճան ունեցող գագաթը միակն է, ուստի, համաձայն Վիզինգի հայտնի թեորեմի ([71]), նրա քրոմատիկ դասը հավասար է առավելագույն աստիճանին: Մյուս կողմից՝ այն ունի 30 կող, իսկ բոլոր գագաթների աստիճանները բաժանվում են չորսի, հետևաբար այն չունի միջակայքային ներկում ըստ Թեորեմ 1.1.3-ի: Գոյություն ունեն այսպիսի հատկություններով անվերջ թվով մուլտիգրաֆներ: Մասնավորապես, եթե վերցնենք կամայական էյլերյան մուլտիգրաֆ G , որի համար $\chi'(G) = \Delta(G)$, և բոլոր կողերի

պատիկությունը մեծացնենք $2r$ անգամ ($r \in \mathbb{N}$), ապա ստացված էյլերյան մուլտիգրաֆը կունենա զույգ թվով կողեր, կունենա ճիշտ կողային ներկում առավելագույն աստիճանին հավասար գույներով, սակայն չի ունենա միջակայքային ներկում ըստ Թեորեմ 1.1.3-ի (Նկ. 1.1b):

1.2 Մուլտիգրաֆների $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի գնահատականներ

Գրաֆների և մուլտիգրաֆների միջակայքային կողային ներկումների ուսումնասիրության մեջ կարևոր դեր ունի $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի հետազոտումը: Ի տարբերություն գրաֆների տեսության մեջ հաճախ ուսումնասիրվող բազմաթիվ այլ ներկումների, միջակայքային կողային ներկման դեպքում տրիվիալ չէ ոչ միայն ներկման մեջ մասնակցող գույների փոքրագույն թվի որոշումը, այլև գույների առավելագույն թվի որոշումը: Այս պարագրաֆում կամփոփենք գրաֆների լայն դասերի համար հայտնի գնահատականները և կապացուցենք մի շարք նոր արդյունքներ: Սկսենք $W(G)$ պարամետրի գնահատականներից:

$W(G)$ պարամետրի առաջին գնահատականները ստացել են Հասրաթյանը և Քամալյանը եռանկյուն չպարունակող գրաֆների համար [68, 5, 74]

Թեորեմ 1.2.1. *Եթե G -ն եռանկյուն չպարունակող գրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq |V(G)| - 1:$$

$W(G)$ -ի առաջին գնահատականը արտահայտված գրաֆի գագաթների քանակի միջոցով ստացվել է Քամալյանի կողմից [74].

Թեորեմ 1.2.2. *Եթե G -ն կապակցված գրաֆ է, $G \in \mathfrak{N}$ և $|V(G)| \geq 2$, ապա*

$$W(G) \leq 2|V(G)| - 3:$$

Գիառոն, Կուբալը և Մալաֆիյսկին [33] փոքր ինչ լավացրել են այս գնահատականը, երբ գրաֆի գագաթների քանակը առնվազն երեք է:

Թեորեմ 1.2.3. *Եթե G -ն կապակցված գրաֆ է, $G \in \mathfrak{N}$ և $|V(G)| \geq 3$, ապա*

$$W(G) \leq 2|V(G)| - 4:$$

Այուս կողմից, Պետրոսյանը [46] ցույց է տվել հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 1.2.4. Յանկացած $\epsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի G գրաֆ այնպիսին, որ $G \in \mathfrak{X}$ և

$$W(G) \geq (2 - \epsilon)|V(G)|:$$

Հասարթյանը և Քամալյանը [5] ստացել են $W(G)$ -ի վերին գնահատականներ արտահայտված գրաֆի առավելագույն աստիճանով և տրամագծով.

Թեորեմ 1.2.5. Եթե G -ն կապակցված գրաֆ է և $G \in \mathfrak{X}$, ապա

$$W(G) \leq (\text{diam}(G) + 1)(\Delta(G) - 1) + 1:$$

Թեորեմ 1.2.6. Եթե G -ն կապակցված երկկողմանի գրաֆ է և $G \in \mathfrak{X}$, ապա

$$W(G) \leq \text{diam}(G)(\Delta(G) - 1) + 1.$$

Հետագայում Պետրոսյանը և Քամալյանը [41] ցույց են տվել, որ այս վերին գնահատականները հնարավոր չէ էապես լավացնել:

Աքսենովիչը ցույց է տվել, որ հարթ գրաֆների համար հնարավոր է ստանալ ավելի լավ վերին գնահատական [9]:

Թեորեմ 1.2.7. Եթե G -ն կապակցված հարթ գրաֆ է և $G \in \mathfrak{X}$, ապա

$$W(G) \leq \frac{11}{6}|V(G)|:$$

Նույն հոդվածում Աքսենովիչը առաջարկել է հիպոթեզ, ըստ որի բոլոր միջակայքային ներկելի կապակցված հարթ գրաֆների համար այս գնահատականը հնարավոր է իջեցնել մինչև $\frac{3}{2}|V(G)|$:

Նախ, ապացուցենք $W(G)$ -ի մի նոր վերին գնահատական՝ արտահայտված G մուլտիգրաֆի պարագծով:

Թեորեմ 1.2.8. Եթե G -ն 2-կապակցված մուլտիգրաֆ է և $G \in \mathfrak{X}$, ապա

$$W(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{c(G)}{2} \right\rfloor (\Delta(G) - 1):$$

Ապացույց. Դիտարկենք G գրաֆի α միջակայքային $W(G)$ -ներկումը: Դիտարկենք 1 և $W(G)$ գույներով ներկված կողերը: Դիցուք $e = uv$, $e' = u'v'$ և $\alpha(e) = 1$, $\alpha(e') = W(G)$: Քանի որ G -ն 2-կապակցված է, գոյություն ունի C ցիկլ, որը պարունակում է e և e' կողերը: Դիտարկենք C ցիկլը: Ունենք, որ $|V(C)| \leq c(G)$: C ցիկլի գագաթները համարակալենք երկու ուղղություններով՝ u -ից u' և v -ից v' : Դիցուք $P = u_1, \dots, u_s$ և $Q = v_1, \dots, v_t$ համապատասխանաբար u -ից u' և v -ից v' շղթաներն են, որտեղ $u_1 = u, u_s = u'$ և $v_1 = v, v_t = v'$ ($s, t \geq 1$): Պարզ է, որ $\min\{s, t\} \leq \left\lfloor \frac{c(G)}{2} \right\rfloor$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $s \leq \left\lfloor \frac{c(G)}{2} \right\rfloor$:

Քանի որ α -ն G -ի միջակայքային $W(G)$ -ներկում է, ունենք, որ

$$\begin{aligned} \alpha(u_1u_2) &\leq d_G(u_1), \\ \alpha(u_2u_3) &\leq \alpha(u_1u_2) + d_G(u_2) - 1, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha(u_iu_{i+1}) &\leq \alpha(u_{i-1}u_i) + d_G(u_i) - 1, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha(u_{s-1}u_s) &\leq \alpha(u_{s-2}u_{s-1}) + d_G(u_{s-1}) - 1, \\ W(G) = \alpha(e') &= \alpha(u'v') \leq \alpha(u_{s-1}u_s) + d_G(u_s) - 1. \end{aligned}$$

Գումարելով այս անհասավարությունները կստանանք.

$$W(G) \leq 1 + \sum_{i=1}^s (d_G(u_i) - 1) \leq 1 + \left\lfloor \frac{c(G)}{2} \right\rfloor (\Delta(G) - 1).$$

□

Հետևանք 1.2.9. Եթե G -ն 2-կապակցված մուլտիգրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա

$$W(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor (\Delta(G) - 1):$$

Այս հետևանքը հնարավորություն է տալիս լավացնել $W(G)$ -ի հայտնի վերին գնահատականները փոքր առավելագույն աստիճան ունեցող մուլտիգրաֆների համար:

Հետևանք 1.2.10. Եթե G -ն 2-կապակցված մուլտիգրաֆ է, $\Delta(G) \leq 4$ և $G \in \mathfrak{N}$, ապա

$$W(G) \leq 3 \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor + 1:$$

Հետևանք 1.2.11. Եթե G -ն 2-կապակցված հարթ գրաֆ է, ընդ որում $\Delta(G) \leq 4$ և $G \in \mathfrak{N}$, ապա

$$W(G) \leq \frac{3}{2}|V(G)|:$$

Ապացույց. Նախ նկատենք, որ ըստ Հետևանք 1.2.10-ի, այս պնդումը ճիշտ է կենտ թվով գագաթներ ունեցող հարթ գրաֆների համար: Ավելին, ունենք, որ $W(G) \leq \frac{3}{2}|V(G)| + 1$: Ենթադրենք, որ $|V(G)| = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$): Դիտարկենք G -ի α միջակայքային $(3n + 1)$ -ներկումը: Ինչպես Թեորեմ 1.2.8-ի ապացույցում, կդիտարկենք 1 և $3n + 1$ գույներով ներկված կողերը: Դիցուք $e = uv$, $e' = u'v'$ և $\alpha(e) = 1$, $\alpha(e') = 3n + 1$: Քանի որ G -ն 2-կապակցված է, գոյություն ունի ցիկլ C , որը պարունակում է e և e' կողերը: Պարզ է, որ $|V(C)| \leq 2n$: C -ի գագաթները համարակալենք երկու ուղղություններով. u -ից դեպի u' և v -ից դեպի v' : Դիցուք $P = u_1, \dots, u_s$ և $Q = v_1, \dots, v_t$ C -ին պատկանող երկու շղթաներն են, համապատասխանաբար u -ից u' և v -ից v' , որտեղ $u_1 = u, u_s = u'$ և $v_1 = v, v_t = v'$ ($s, t \geq 1$): Հեշտ է տեսնել, որ $s = t = \frac{|V(G)|}{2} = n$ (հակառակ դեպքում, դիտարկելով կարճագույն շղթան, կստանանք $W(G) \leq 3n$): Հետևաբար, ունենք, որ

$$\begin{aligned} \alpha(u_1u_2) &= \alpha(v_1v_2) = 4, \\ \alpha(u_2u_3) &= \alpha(v_2v_3) = 7, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha(u_iu_{i+1}) &= \alpha(v_iv_{i+1}) = 3i + 1, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha(u_{s-1}u_s) &= \alpha(v_{t-1}v_t) = 3n - 2, \\ \alpha(e') &= \alpha(u'v') = \alpha(u_sv_t) = \alpha(u_nv_n) = 3n + 1: \end{aligned}$$

Այստեղից հետևում է, որ $\bar{S}(u_i, \alpha) = \bar{S}(v_i, \alpha) = 3i + 1$, երբ $i = 1, \dots, n$: Դիտարկենք $3n$ գույնով ներկված կողերը: Այս կողերը կարող են կից լինել միայն u_n -ին և v_n -ին, քանի որ $\bar{S}(w, \alpha) < 3n$ կամայական $w \in V(G) \setminus \{u_n, v_n\}$ գագաթի համար: Այստեղից հետևում է, որ $3n$ և $3n + 1$ գույներով ներկված կողերը պետք է զուգահեռ լինեն, ինչը հակասություն է: □

Վերջին հետևանքը ցույց է տալիս, որ Աբսենովիչի հիպոթեզը ճիշտ է բոլոր միջակայքային ներկելի 2-կապակցված հարթ գրաֆների համար, որոնց առավելագույն աստիճանը չի գերազանցում 4-ը:

Հայտնի է, որ եթե G -ն կապակցված համասեռ մուլտիգրաֆ է, որն ունի միակցման կետ, ապա $\chi'(G) > \Delta(G)$: Մյուս կողմից, ըստ Թեորեմ 1.1.1-ի, եթե G -ն միջակայքային

ներկելի է, ապա $\chi'(G) = \Delta(G)$: Այսինքն, եթե կապակցված համասեռ G մուլտիգրաֆը միջակայքային ներկելի է, ապա այն նաև 2-կապակցված է: Այս փաստը հնարավորություն է տալիս ձևակերպել հետևյալ երկու պնդումները:

Հետևանք 1.2.12. *Եթե G -ն r -համասեռ կապակցված մուլտիգրաֆ է և $G \in \mathfrak{R}$, ապա*

$$W(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor (r - 1):$$

Հետևանք 1.2.13. *Եթե G -ն կապակցված խորանարդ մուլտիգրաֆ է և $G \in \mathfrak{R}$, ապա*

$$W(G) \leq |V(G)| + 1:$$

Այժմ ցույց տանք, որ նշված վերին գնահատականները հասանելի են:

Թեորեմ 1.2.14. *Յանկացած $n, r \geq 2$ ամբողջ թվերի համար գոյություն ունի 2-կապակցված G մուլտիգրաֆ, որի համար $|V(G)| = 2n$ և $\Delta(G) = r$, այնպես, որ $G \in \mathfrak{R}$ և $W(G) = 1 + n(r - 1)$:*

Ապացույց. Թեորեմն ապացուցելու համար կառուցենք նշված պայմաններին բավարարող $G_{n,r}$ մուլտիգրաֆը:

Սահմանենք $G_{n,r}$ մուլտիգրաֆը ($n, r \geq 2$) հետևյալ կերպ.

- 1) $V(G_{n,r}) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$,
- 2) $E(G_{n,r})$ կազմված է $\{u_1, v_1\}$ և $\{u_n, v_n\}$ գագաթների զույգերից, որտեղ յուրաքանչյուր զույգը միացված է $r - 1$ կողերով, $\{u_i, v_i\}$ գագաթների զույգից, որոնք միացած են $r - 2$ կողերով, որտեղ $2 \leq i \leq n - 1$, և $u_j u_{j+1}, v_j v_{j+1}$ կողերից, որտեղ $1 \leq j \leq n - 1$:

Պարզ է, որ $G_{n,r}$ -ը 2-կապակցված մուլտիգրաֆ է, որի համար $|V(G_{n,r})| = 2n$ և $\Delta(G_{n,r}) = r$:

Այժմ ցույց տանք, որ $G_{n,r}$ -ը ունի միջակայքային $(1 + n(r - 1))$ -ներկում: Սահմանենք $G_{n,r}$ -ի α ներկումը հետևյալ կերպ. նախ $E(u_1 v_1)$ կողերը ներկենք $1, \dots, r - 1$ գույներով, իսկ $E(u_n v_n)$ կողերը՝ $(n - 1)(r - 1) + 2, \dots, n(r - 1) + 1$ գույներով: Այնուհետև, $E(u_i v_i)$ կողերը ներկենք $(i - 1)(r - 1) + 2, \dots, i(r - 1)$ գույներով, որտեղ $2 \leq i \leq n - 1$: Վերջապես, $u_j u_{j+1}$ և $v_j v_{j+1}$ կողերը ներկենք $j(r - 1) + 1$ գույնով, որտեղ $1 \leq j \leq n - 1$: Դժվար չէ տեսնել, որ α -ն $G_{n,r}$ մուլտիգրաֆի միջակայքային $(1 + n(r - 1))$ -ներկում է: Այսպիսով, $G_{n,r} \in \mathfrak{R}$ և $W(G_{n,r}) \geq 1 + n(r - 1)$: Մյուս կողմից, ըստ Հետևանք 1.2.9-ի ունենք, որ $W(G_{n,r}) \leq 1 + n(r - 1)$, ուստի $W(G_{n,r}) = 1 + n(r - 1)$: \square

Այժմ անդրադառնանք $w(G)$ պարամետրի գնահատականներին: Հանսոնը և Լոտենը [34] ստացել են (a, b) -երկհամասեռ գրաֆների միջակայքային ներկումներում մասնակցող գույների թվի համար ստորին գնահատական: Այստեղ կապացուցենք համանման գնահատական բոլոր կապակցված մուլտիգրաֆների համար:

Թեորեմ 1.2.15. Եթե G -ն կապակցված մուլտիգրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա

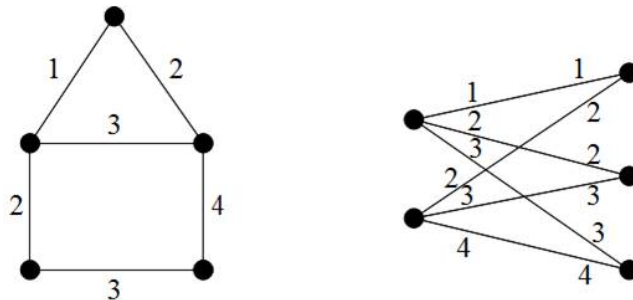
$$w(G) \geq \left\lceil \frac{|V(G)|}{2 \cdot \alpha'(G)} \right\rceil \delta(G):$$

Ապացույց. Դիցուք $\delta = \delta(G)$: Դիտարկենք G -ի որևէ α միջակայքային $w(G)$ -ներկում: α ներկման մեջ դիտարկենք $\delta, 2\delta, \dots, k\delta$ գույներով ներկված կողերը, որտեղ k -ն այն առավելագույն ամբողջ թիվն է, որի համար գոյություն ունի $k\delta$ գույնով ներկված կող: Պարզ է, որ $k\delta \leq w(G)$: Քանի որ G -ի ցանկացած v գագաթ կից է $\delta, 2\delta, \dots, k\delta$ գույներով ներկված որևէ կողի, ունենք, որ

$$|V(G)| \leq \sum_{i=1}^k 2|M_{\alpha}(i \cdot \delta)| \leq 2k \cdot \alpha'(G),$$

որտեղ $M_{\alpha}(i \cdot \delta) = \{e \in E(G) : \alpha(e) = i \cdot \delta\}$, $1 \leq i \leq k$:

Հետևաբար, $k \geq \left\lceil \frac{|V(G)|}{2 \cdot \alpha'(G)} \right\rceil$: Մյուս կողմից, քանի որ $k\delta \leq w(G)$, ստանում ենք $w(G) \geq \left\lceil \frac{|V(G)|}{2 \cdot \alpha'(G)} \right\rceil \delta(G)$: □



Նկ. 1.2: 3 առավելագույն աստիճանով գրաֆներ, որոնք չունեն միջակայքային 3-ներկում:

Նկար 1.2-ում պատկերված գրաֆները ցույց են տալիս, որ Թեորեմ 1.2.15-ի ստորին գնահատականները հասանելի են:

Հետևանք 1.2.16. Եթե G կապակցված մուլտիգրաֆը չունի կադարյալ զուգակցում և $G \in \mathfrak{N}$, ապա

$$w(G) \geq \max\{\Delta(G), 2\delta(G)\}:$$

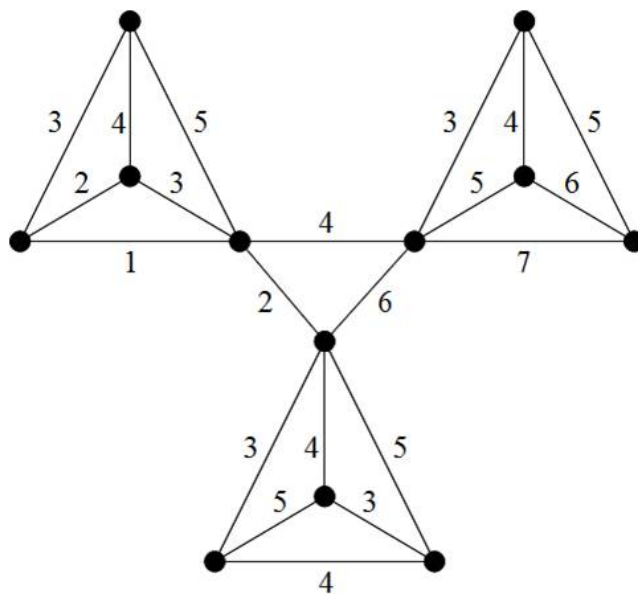
Վերջապես, ապացուցենք Հետևանք 1.2.16-ի անալոգը կենտ մուլտիգրաֆների համար: G մուլտիգրաֆը կանվանենք կենտ մուլտիգրաֆ, եթե G -ի բոլոր գագաթների աստիճանները կենտ են:

Թեորեմ 1.2.17. Եթե G -ն կապակցված կենտ մուլտիգրաֆ է, $|E(G)| - \frac{|V(G)|}{2}$ թիվը կենտ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա

$$w(G) \geq \max\{\Delta(G), 2\delta(G)\}:$$

Ապացույց. Նշանակենք $\delta = \delta(G)$: Եթե G -ն չունի կատարյալ զուգակցում, ապա արդյունքը հետևում է Հետևանք 1.2.16-ից: Ենթադրենք G -ն ունի կատարյալ զուգակցում: Այժմ կատարենք հակասող ենթադրություն, դիցուք G -ն ունի α միջակայքային t -ներկում որևէ $t \leq 2\delta - 1$ թվի համար: Քանի որ ցանկացած $v \in V(G)$, $1 \leq \underline{S}(v, \alpha) \leq \delta$, ստանում ենք, որ $\delta \in S_n(V(G), \alpha)$: Այստեղից հետևում է, որ δ գույնով ներկված կողերը G -ում կազմում են կատարյալ զուգակցում: Նշանակենք այդ կատարյալ զուգակցումը M -ով և դիտարկենք $G - M$ մուլտիգրաֆը: Սահմանենք $G - M$ -ի β ներկումը հետևյալ կերպ. ցանկացած $e \in E(G - M)$ կողի համար

$$\beta(e) = \begin{cases} \alpha(e), & \text{երբ } 1 \leq \alpha(e) \leq \delta - 1, \\ \alpha(e) - 1, & \text{երբ } \delta + 1 \leq \alpha(e) \leq t. \end{cases}$$



Նկ. 1.3: Միջակայքային ներկելի կապակցված գրաֆ G , որի բոլոր գագաթների աստիճանները կենտ են, $|E(G)| - \frac{|V(G)|}{2} = 15$ և $w(G) \geq 6$:

Դժվար չէ տեսնել, որ β -ն $G - M$ -ի միջակայքային $(t - 1)$ -ներկում է: Քանի որ $|E(G)| - \frac{|V(G)|}{2}$ կենտ է, ստանում ենք, որ $G - M$ -ը զույգ մուլտիգրաֆ է կենտ թվով կողերով: Այստեղից հետևում է, որ $G - M$ -ը ունի կենտ թվով կողեր պարունակող էլիբրյան կապակցված բաղադրիչ, որը միջակայքային ներկելի է, ինչը հակասում է Հետևանք 1.1.4-ին: □

1.3 Միջակայքային ներկման և հատուկ տիպի ֆակտորիզացիայի համարժեքությունը լրիվ գրաֆների համար

Լրիվ գրաֆների միջակայքային ներկելիության խնդիրը ունի պարզ լուծում: n գագաթանի լրիվ գրաֆը $(n - 1)$ -համասեռ է, իսկ մյուս կողմից հեշտ է տեսնել, որ $\chi'(K_n) = \Delta(K_n)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ n -ը զույգ է: Ուստի, ըստ Թեորեմ 1.1.1-ի, լրիվ գրաֆը ունի միջակայքային ներկում այն և միայն այն դեպքում, երբ գագաթների քանակը զույգ է: Կենտ գագաթանի լրիվ գրաֆների նվազագույն դեֆիցիտով ներկումները մանրամասն հետազոտված են այս աշխատանքի 3.1 պարագրաֆում:

Այս և հաջորդ պարագրաֆերում կուսումնասիրվեն զույգ գագաթանի լրիվ գրաֆների միջակայքային ներկումներում հանդիպող գույների քանակները: Նույն Թեորեմ 1.1.1-ից հետևում է, որ $w(K_{2n}) = 2n - 1$ և կամայական t բնական թվի համար, $w(K_{2n}) \leq t \leq W(K_{2n})$, K_{2n} գրաֆը ունի միջակայքային t -ներկում: Սակայն $W(K_{2n})$ պարամետրը գտնելու խնդիրը մնում է բաց 1990 թվականից [74]: Այս պարագրաֆում կառաջարկենք լրիվ գրաֆների միջակայքային ներկումներ կառուցելու նոր եղանակ, որի հիման վրա հաջորդ պարագրաֆում կստանանք $W(K_{2n})$ -ի նոր գնահատականներ և որոշ ճշգրիտ արժեքներ:

$W(K_{2n})$ -ի առաջին գնահատականը ստացվել է Քամալյանի կողմից [74].

Թեորեմ 1.3.1. Յանկացած $n \in \mathbb{N}$ թվի համար $W(K_{2n}) \geq 2n - 1 + \lfloor \log_2(2n - 1) \rfloor$:

Հետագայում Պետրոսյանին հաջողվել էր լավացնել այս գնահատականը [46].

Թեորեմ 1.3.2. Յանկացած $n \in \mathbb{N}$ թվի համար $W(K_{2n}) \geq 3n - 2$:

Նույն հոդվածում նա ցույց էր տվել, որ եթե ունենք որևէ լրիվ գրաֆի միջակայքային ներկում, ապա դրա հիման վրա կարելի է կառուցել երկու անգամ ավելի շատ գագաթներով լրիվ գրաֆի միջակայքային ներկում.

Թեորեմ 1.3.3. Կամայական $n \in \mathbb{N}$ թվի համար $W(K_{4n}) \geq 4n - 1 + W(K_{2n})$:

Այս երկու արդյունքները միավորելով Պետրոսյանը ստացել էր $W(K_{2n})$ -ի մինչ այժմ հայտնի լավագույն ստորին գնահատականը.

Թեորեմ 1.3.4. Եթե $n = p2^q$, որտեղ p -ն կենտ է, իսկ $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ապա

$$W(K_{2n}) \geq 4n - 2 - p - q:$$

Նույն հոդվածում Պետրոսյանը ձևակերպել էր հիպոթեզ, ըստ որի այս ստորին գնահատականը հենց $W(K_{2n})$ -ի ճշգրիտ արժեքն է:

Հիպոթեզ 1.1. Եթե $n = p2^q$, որտեղ p -ն կենտ է, իսկ $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ապա

$$W(K_{2n}) = 4n - 2 - p - q:$$

Պետրոսյանին հաջողվել էր ցույց տալ, որ հիպոթեզը ճիշտ է, երբ $n \leq 4$: Արդեն $n = 5$ դեպքում հիպոթեզը հերքվեց, K_{10} -ի 14 գույներով ներկումը պատկերված է Նկ. 1.4-ում:

$W(K_{2n})$ -ի հայտնի լավագույն վերին գնահատականը հետևում է Թեորեմ 1.2.3-ից.

$$W(K_{2n}) \leq 4n - 4, \text{ երբ } n \geq 2:$$

2010-ին մեր կողմից առաջարկվեց հետևյալ հիպոթեզը.

Հիպոթեզ 1.2. $W(K_{2n}) = 4n - 2 - \lfloor \log_2 n \rfloor - \|n_2\|$, որտեղ $\|n_2\|$ -ը n թվի երկուական ներկայացման մեջ 1-երի քանակն է:

Համակարգչային ծրագրի միջոցով հաջողվել էր կառուցել այս հիպոթեզին բավարարող ներկումներ $n \leq 14$ -ի համար:

Լրիվ գրաֆի միջակայքային կողային ներկումների կառուցման նոր եղանակը նկարագրելու համար ներմուծենք մի շարք սահմանումներ և նշանակումներ:

K_{2n} լրիվ գրաֆի գագաթները նշանակենք հետևյալ կերպ. $V(K_{2n}) = \{u_i, v_i : i = 1, 2, \dots, n\}$: Գագաթների կամայական ֆիքսված $\mathbf{v} = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ համարակալման համար $H_{\mathbf{v}}^{[i,j]}$ -ով, $i \leq j$, նշանակենք K_{2n} -ի $u_i, v_i, u_{i+1}, v_{i+1}, \dots, u_j, v_j$ գագաթներով ծնված ենթագրաֆը:

Դիցուք $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_{2n-1}\}$ բազմությունը K_{2n} -ի 1-ֆակտորիզացիա է: Ցանկացած $F \in \mathfrak{F}$ զուգակցման համար սահմանենք իր ձախ և աջ մասերը գագաթների \mathbf{v}

համարակալման նկատմամբ:

$$l_v^i(F) = F \cap E(H_v^{[1,i]})$$

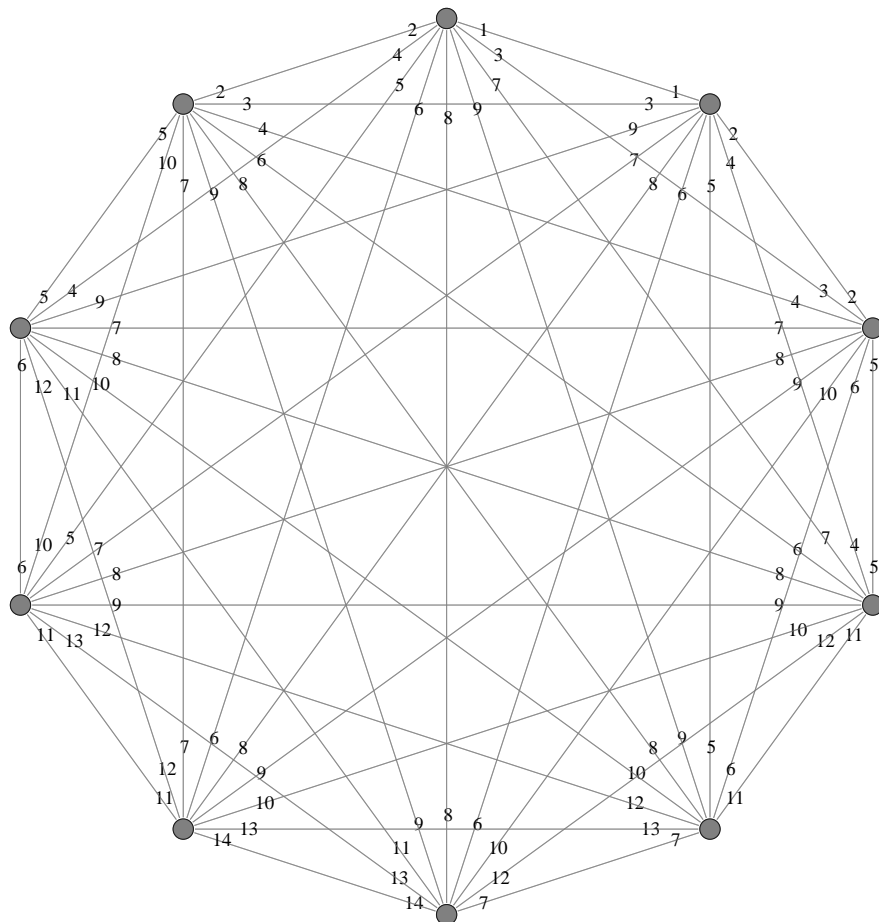
$$r_v^i(F) = F \cap E(H_v^{[i+1,n]})$$

Եթե որևէ i թվի համար, $1 \leq i \leq n - 1$, $F = l_v^i(F) \cup r_v^i(F)$, ապա F -ը կոչվում է i -բաժանված կատարյալ զուգակցում v համարակալման նկատմամբ: Այլ կերպ ասած, F -ի կողերը չեն հատում գագաթների i -րդ և $(i + 1)$ -րդ զույգերի միջև անցող ուղղահայաց ուղիորը (F_1^1 -ը և F_1^2 -ը Նկ. 1.5-ում):

Դիցուք α -ն K_{2n} -ի որևէ միջակայքային ներկում է: Կարող ենք գագաթները վերանվանել այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ անհավասարությունները:

$$\underline{S}(u_i, \alpha) \leq \underline{S}(v_i, \alpha) \leq \underline{S}(u_{i+1}, \alpha) \leq \underline{S}(v_{i+1}, \alpha), i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Այսպիսով, կամայական α ներկման համար գոյություն ունի գագաթների հատուկ



Նկ. 1.4: K_{10} -ի միջակայքային 14-ներկում: $sp(\alpha) = (1, 2, 1, 1)$

համարակալում $\mathbf{v}_\alpha = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$, որի համար այս անհավասարությունները բավարարվում են:

Այժմ ֆիքսենք \mathbf{v}_α համարակալումը և ուսումնասիրենք α ներկման որոշ հատկություններ: Նախ ցույց տանք, որ u_i և v_i գագաթների սպեկտրները նույնն են:

Պնդում 1.3.5. K_{2n} -ի ցանկացած α միջակայքային կողային ներկման համար, $S_\cap(K_{2n}, \alpha) \neq \emptyset$: Հակառակ դեպքում դա կհակասեր Թեորեմ 1.2.2-ի վերին գնահատականին:

Լեմմա 1.3.6. Եթե $1 \leq i \leq n$, ապա $\underline{S}(u_i, \alpha) = \underline{S}(v_i, \alpha)$.

Ապացույց. Պնդում 1.3.5-ից հետևում է, որ եթե $\underline{S}(v_i, \alpha) - \underline{S}(u_i, \alpha) > 0$, ապա $\underline{S}(u_i, \alpha)$ գույնով ներկված կողերը կազմում են կատարյալ զուգակցում $K_{2n}[\{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_i\}]$ ենթագրաֆում, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ այն ունի կենտ թվով գագաթներ: \square

Կամայական α ներկման համար սահմանենք իր շեղումների վեկտորը հետևյալ կերպ.

$$\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$$

$$\text{որտեղ } b_i = \underline{S}(u_{i+1}, \alpha) - \underline{S}(u_i, \alpha), i = 1, 2, \dots, n-1$$

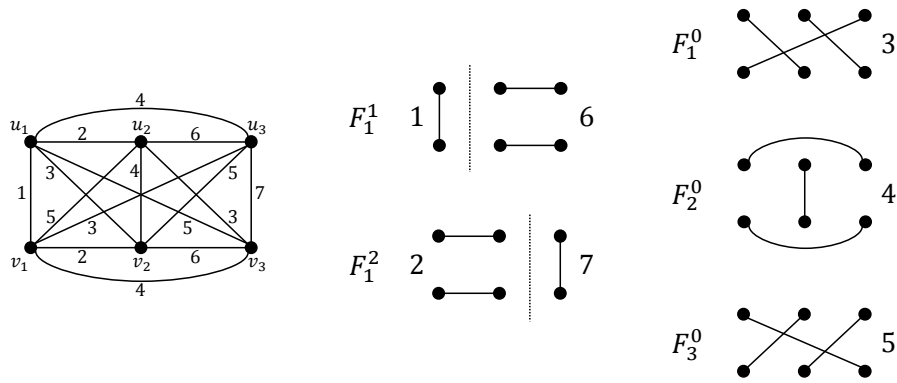
B_i -ով նշանակենք հետևյալ մասնակի գումարները. $B_0 = 0$ և $B_i = \sum_{j=1}^i b_j$, $i = 1, 2, \dots, n-1$:

α ներկման գումարային շեղումը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$|\text{sh}(\alpha)| = B_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i$$

Պնդում 1.3.7. Եթե α -ն K_{2n} -ի միջակայքային t -ներկում է և $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$, ապա $t = 2n - 1 + |\text{sh}(\alpha)|$:

Պնդում 1.3.8. K_{2n} -ի կամայական α միջակայքային կողային ներկման համար բոլոր գագաթներում հանդիպող գույներն են. $S_\cap(K_{2n}, \alpha) = [\underline{S}(u_n, \alpha), \overline{S}(u_1, \alpha)] = [|\text{sh}(\alpha)| + 1, 2n - 1] = \{|\text{sh}(\alpha)| + j : j = 1, 2, \dots, 2n - 1 - |\text{sh}(\alpha)|\}$:



Նկ. 1.5: K_6 -ի միջակայքային 7-ներկումը և համապատասխան 1-ֆակտորիզացիան՝ $\mathfrak{F} = \{F_1^1, F_1^2, F_1^0, F_2^0, F_3^0\}$

Կամայական $i = 1, 2, \dots, n - 1$, թվի համար սահմանենք հետևյալ երկու գույների բազմությունները.

$$L_{\mathbf{v}_\alpha}^i(\alpha) = \begin{cases} [\underline{S}(u_i, \alpha), \underline{S}(u_{i+1}, \alpha) - 1] = \{B_{i-1} + j : j = 1, 2, \dots, b_i\}, & \text{երբ } b_i > 0, \\ \emptyset, & \text{երբ } b_i = 0, \end{cases}$$

$$R_{\mathbf{v}_\alpha}^i(\alpha) = \begin{cases} [\overline{S}(u_i, \alpha) + 1, \overline{S}(u_{i+1}, \alpha)] = \{B_{i-1} + 2n - 1 + j : j = 1, 2, \dots, b_i\}, & \text{երբ } b_i > 0, \\ \emptyset, & \text{երբ } b_i = 0: \end{cases}$$

Պնդում 1.3.9. Եթե α -ն K_{2n} -ի միջակայքային t -ներկում է, և $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$, ապա

$$L_{\mathbf{v}_\alpha}^i(\alpha) \subset S_\cap(H_{\mathbf{v}_\alpha}^{[1,i]}, \alpha) \quad L_{\mathbf{v}_\alpha}^i(\alpha) \cap S_\cup(H_{\mathbf{v}_\alpha}^{[i+1,n]}, \alpha) = \emptyset$$

$$R_{\mathbf{v}_\alpha}^i(\alpha) \cap S_\cup(H_{\mathbf{v}_\alpha}^{[1,i]}, \alpha) = \emptyset \quad R_{\mathbf{v}_\alpha}^i(\alpha) \subset S_\cap(H_{\mathbf{v}_\alpha}^{[i+1,n]}, \alpha)$$

$C_k(\alpha)$ -ով նշանակենք k գույնով ներկված կողերի բազմությունը. $C_k(\alpha) = \{e \in E(K_{2n}) : \alpha(e) = k\}$:

Լեմմա 1.3.10 (Համարժեքության լեմմա). Հետևյալ երկու պնդումները համարժեք են.

(ա) գոյություն ունի K_{2n} -ի α միջակայքային կողային ներկում այնպես, որ $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$,

(բ) գոյություն ունի գազաթների \mathbf{v} համարակալում և K_{2n} -ի $\mathfrak{F} = \left\{ F_j^0 : j = 1, 2, \dots, 2n - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \right\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \{F_j^i : j = 1, 2, \dots, b_i\}$ 1-ֆակտորիզացիա այնպես, որ F_j^i -ն i -բաժանված է \mathbf{v} համարակալման նկատմամբ, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, $j = 1, 2, \dots, b_i$, $b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

Ապացույց. Ապացույցի ընթացքում B_i -ով կնշանակենք $\sum_{j=1}^i b_j$ գումարը, $i = 0, 1, \dots, n - 1$:

(ա) \Rightarrow (բ). Դիցուք α -ն K_{2n} -ի միջակայքային t -ներկում է, որի համար $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$: Ֆիքսենք գագաթների \mathbf{v}_α համարակալումը և կառուցենք K_{2n} -ի \mathfrak{F} 1-ֆակտորիզացիան:

Պնդում 1.3.8-ի համաձայն գոյություն ունեն $2n - 1 - |\text{sh}(\alpha)|$ գույներ, որոնք հանդիպում են բոլոր գագաթների սպեկտրներում: Ըստ սահմանման, $|\text{sh}(\alpha)| = \sum_{i=1}^{n-1} b_i$, ուստի կարող ենք վերցնել $F_j^0 = C_{|\text{sh}(\alpha)|+j}(\alpha)$, որտեղ $j = 1, 2, \dots, 2n-1-|\text{sh}(\alpha)|$:

Պնդում 1.3.9-ից հետևում է, որ ցանկացած $i = 1, 2, \dots, n - 1$, թվի համար գոյություն ունեն $|L_{\mathbf{v}_\alpha}^i(\alpha)| = b_i$ իրարից տարբեր գույներ, որոնք հանդիպում են միայն գագաթների առաջին i զույգերի սպեկտրներում, և ևս $|R_{\mathbf{v}_\alpha}^i(\alpha)| = b_i$ իրարից տարբեր գույներ, որոնք հանդիպում են միայն մնացած $2n - 2i$ գագաթների սպեկտրներում: Վերցնենք $F_j^i = C_{B_{i-1}+j}(\alpha) \cup C_{B_{i-1}+2n-1+j}(\alpha)$, կամայական $i = 1, 2, \dots, n - 1$ և $j = 1, 2, \dots, b_i$ թվերի համար: Նկատենք, որ $L_{\mathbf{v}_\alpha}^i(\alpha) \cup R_{\mathbf{v}_\alpha}^i(\alpha)$ բազմության գույներով ներկված կողերը չեն հատում i -րդ և $(i + 1)$ -րդ գագաթների զույգերի միջև անցնող ուղղահայաց ուղիղը (F_1^1 և F_1^2 Նկ. 1.5-ում), ուստի F_j^i -ն բոլոր թույլատրելի j -երի համար i -բաժանված կատարյալ զուգակցում է գագաթների \mathbf{v}_α համարակալման նկատմամբ:

(բ) \Rightarrow (ա). Ենթադրենք $\mathfrak{F} = \{F_j^0 : j = 1, 2, \dots, 2n - 1 - |\text{sh}(\alpha)|\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \{F_j^i : j = 1, 2, \dots, b_i\}$ K_{2n} -ի 1-ֆակտորիզացիա է, ընդ որում F_j^i -ն i -բաժանված կատարյալ զուգակցում է գագաթների $\mathbf{v} = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ համարակալման նկատմամբ, $i = 1, 2, \dots, n - 1, j = 1, 2, \dots, b_i$: Կառուցենք K_{2n} -ի α միջակայքային կողային ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\alpha(e) = B_{i-1} + j \quad \text{երբ } e \in l_{\mathbf{v}}^i(F_j^i) \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, j = 1, 2, \dots, b_i$$

$$\alpha(e) = B_{n-1} + j \quad \text{երբ } e \in F_j^0 \quad j = 1, 2, \dots, 2n - 1 - B_{n-1}$$

$$\alpha(e) = B_{i-1} + 2n - 1 + j \quad \text{երբ } e \in r_{\mathbf{v}}^i(F_j^i) \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, j = 1, 2, \dots, b_i$$

Այն փաստից, որ F_j^i -ն գագաթների \mathbf{v} համարակալման նկատմամբ i -բաժանված կատարյալ զուգակցում է, հետևում է, որ K_{2n} -ի կամայական կող ստացել է որևէ գույն: Իրոք, u_i (նաև v_i) գագաթը ծածկված է բոլոր F_j^0 զուգակցումներով, $j = 1, 2, \dots, 2n - 1 - B_{n-1}$, $F_j^{i'}$, զուգակցումների ծախ մասերով, $i' = i, i + 1, \dots, n - 1$, և $F_j^{i'}$ զուգակցումների աջ մասերով, $i' = 1, 2, \dots, i - 1$, կամայական $j = 1, 2, \dots, b_i$:

թվի համար: Ուստի գագաթների սպեկտրները կլինեն.

$$\begin{aligned}
 S(u_i, \alpha) &= S(v_i, \alpha) = \bigcup_{i'=i}^{n-1} \{B_{i'-1} + j : j = 1, 2, \dots, b_{i'}\} \\
 &\cup \{B_{n-1} + j : j = 1, 2, \dots, 2n - 1 - B_{n-1}\} \\
 &\cup \bigcup_{i'=1}^{i-1} \{B_{i'-1} + 2n - 1 + j : j = 1, 2, \dots, b_{i'}\} \\
 &= [B_{i-1} + 1, B_{n-1}] \cup [B_{n-1} + 1, 2n - 1] \cup [2n, B_{i-1} + 2n - 1] \\
 &= [B_{i-1} + 1, B_{i-1} + 2n - 1]
 \end{aligned}$$

Սա ցույց է տալիս, որ α -ն K_{2n} -ի միջակայքային $(B_{n-1} + 2n - 1)$ -ներկում է: Լեմմայի ապացույցն ավարտելու համար անհրաժեշտ է ստուգել կառուցված α ներկման շեղումների վեկտորը: Նկատենք, որ կամայական $i = 1, 2, \dots, n - 1$, թվի համար ունենք, որ $\underline{S}(u_{i+1}, \alpha) - \underline{S}(u_i, \alpha) = B_i - B_{i-1} = b_i$: Սա նշանակում է, որ գագաթների \mathbf{v}_α համարակալումը համընկնում է \mathbf{v} համարակալման հետ և $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$:

□

Պնդում 1.3.11. Համարժեքության լեմմայի ապացույցի առաջին մասում կառուցված F_j^0 զուգակցումների մի մասը ևս կարող են լինել բաժանված կատարյալ զուգակցումներ, սակայն նրանց թե՛ աջ և թե՛ ձախ մասերը α ներկման մեջ ունեն նույն գույնը: Օրինակ, երբ $|\text{sh}(\alpha)| = 0$, $F_{\alpha(u_1 v_1)}^0 = C_{\alpha(u_1 v_1)}(\alpha)$ զուգակցումը 1-բաժանված կատարյալ զուգակցում է գագաթների \mathbf{v}_α համարակալման նկատմամբ:

Հետևանք 1.3.12. Ցանկացած $n \in \mathbb{N}$ -ի համար K_{2n} -ը ունի միջակայքային t -ներկում այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ունի այնպիսի 1-ֆակտորիզացիա, որտեղ առնվազն $t - 2n + 1$ կատարյալ զուգակցումներ բաժանված են:

Ապացույց. Տրված միջակայքային t -ներկմանը համապատասխանող 1-ֆակտորիզացիայի կառուցումը անմիջականորեն հետևում է Պնդում 1.3.7-ից և Համարժեքության լեմմայից: Պնդում 1.3.11-ից հետևում է, որ ստացված 1-ֆակտորիզացիայում բաժանված կատարյալ զուգակցումների թիվը կարող է մեծ լինել $t - 2n + 1$ թվից:

Եթե տրված է K_{2n} -ի 1-ֆակտորիզացիա, որտեղ առնվազն $t - 2n + 1$ կատարյալ զուգակցումներ բաժանված են, կարող ենք դրանցից ընտրել որևէ $t - 2n + 1$ -ը, ապա

դրանցից յուրաքանչյուրի համար ընտրել որևէ i թիվ, որի համար այն i -բաժանված է (միևնույն կատարյալ զուգակցումը կարող է միաժամանակ լինել i -բաժանված, i' -բաժանված տարբեր i և i' թվերի համար, ընտրությունը կրկին կամայական է) և կիրառել Համարժեքության լեմման: Այսպիսով, ստացված ներկումը կարող է միակը չլինել: \square

Այս հետևանքը ցույց է տալիս, որ K_{2n} գրաֆի մեծ թվով գույներով ներկում գտնելը համարժեք է մեծ թվով բաժանված կատարյալ զուգակցումներ պարունակող 1-ֆակտորիզացիայի գտնելուն (գագաթների որևէ համարակալման նկատմամբ): Գագաթների ֆիքսված \mathbf{v} համարակալման համար կարող ենք սահմանել բաժանված կատարյալ զուգակցումների առավելագույն թիվը ըստ K_{2n} -ի բոլոր 1-ֆակտորիզացիաների: Լրիվ գրաֆի սիմետրիայի պատճառով այդ թիվը իրականում կախված չէ գագաթների \mathbf{v} համարակալման ընտրությունից, ուստի այն կարող ենք նշանակել σ_n -ով:

Թեորեմ 1.3.13 (Համարժեքության թեորեմ). Յանկացած $n \in \mathbb{N}$ թվի համար $W(K_{2n}) = 2n - 1 + \sigma_n$:

1.4 Լրիվ գրաֆի միջակայքային ներկման առավելագույն գույների քանակի գնահատականներ

1.4.1 Ստորին գնահատականներ

$W(K_{2n})$ -ի համար նոր ստորին գնահատականներ ստանալու K_{2n} -ը տրոհենք երկու կողերով չհատվող կմախքային համասեռ ենթագրաֆների, կառուցենք հատուկ տիպի 1-ֆակտորիզացիաներ ենթագրաֆներից յուրաքանչյուրի համար, ապա կիրառենք Համարժեքության լեմման այդ 1-ֆակտորիզացիաների միավորման համար:

Ֆիքսենք K_{2n} -ի գագաթների որևէ համարակալում՝ $\mathbf{v} = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$, և սահմանենք K_{2n} -ի երկու համասեռ կմախքային ենթագրաֆներ՝ $K_2 \square K_n$ և $K_2 \times K_n$ (Սկ. 1.6).

$$V(K_2 \square K_n) = V(K_2 \times K_n) = V(K_{2n})$$

$$E(K_2 \square K_n) = \{u_i u_j : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{u_i v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_j : 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$E(K_2 \times K_n) = \{u_i v_j : 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

Նկատենք, որ $E(K_{2n}) = E(K_2 \square K_n) \cup E(K_2 \times K_n)$: Ֆիքսված $\mathbf{v} = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ համարակալման համար կառուցենք $K_2 \square K_n$ գրաֆի հատուկ 1-ֆակտորիզացիա, որը կնշանակենք \mathfrak{F}_n -ով.

$\mathfrak{F}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$, որտեղ

$$P_0 = \begin{cases} \{u_j u_{n+1-j}, v_j v_{n+1-j} : j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\} & \text{երբ } n\text{-ը զույգ է} \\ \{u_j u_{n+1-j}, v_j v_{n+1-j} : j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} \cup \{u_{\frac{n+1}{2}} v_{\frac{n+1}{2}}\}, & \text{երբ } n\text{-ը կենտ է} \end{cases}$$

Բոլոր $i = 1, 2, \dots, n-1$, թվերի համար սահմանենք $P_i = l_{\mathbf{v}}^i(P_i) \cup r_{\mathbf{v}}^i(P_i)$, որտեղ

$$l_{\mathbf{v}}^i(P_i) = \begin{cases} \{u_j u_{i+1-j}, v_j v_{i+1-j} : j = 1, 2, \dots, \frac{i}{2}\} & \text{երբ } i\text{-ն զույգ է} \\ \{u_j u_{i+1-j}, v_j v_{i+1-j} : j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{i}{2} \rfloor\} \cup \{u_{\frac{i+1}{2}} v_{\frac{i+1}{2}}\}, & \text{երբ } i\text{-ն կենտ է} \end{cases}$$

$$r_{\mathbf{v}}^i(P_i) = \begin{cases} \{u_{i+j} u_{n+1-j}, v_{i+j} v_{n+1-j} : j = 1, 2, \dots, \frac{n-i}{2}\} & \text{երբ } n-i \text{ զույգ է} \\ \{u_{i+j} u_{n+1-j}, v_{i+j} v_{n+1-j} : j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-i}{2} \rfloor\} \cup \{u_{\frac{n+i+1}{2}} v_{\frac{n+i+1}{2}}\}, & \text{երբ } n-i \text{ կենտ է} \end{cases}$$

Պարզ է, որ P_i -ն i -բաժանված կատարյալ զուգակցում է բոլոր $i = 1, 2, \dots, n-1$ թվերի համար: Նկատենք, որ $K_2 \times K_n$ -ը համասեռ երկկողմանի գրաֆ է, ուստի ըստ Քյոնիգի թեորեմի [42] այն ունի 1-ֆակտորիզացիա: Եթե $K_2 \times K_n$ -ի 1-ֆակտորիզացիայի բոլոր կատարյալ զուգակցումները համարենք չտրոհված զուգակցումներ և ավելացնենք \mathfrak{F}_n -ի կատարյալ զուգակցումները, ապա կստանանք, որ $\sigma_n \geq n-1$: Համարժեքության թեորեմից հետևում է, որ այս արդյունքը համարժեք է Թեորեմ 1.3.2-ին:

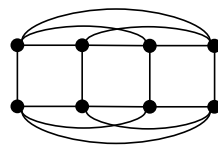
Այս ստորին գնահատականը լավացնելու համար փորձենք կառուցել $K_2 \times K_n$ -ի ավելի լավ 1-ֆակտորիզացիա:

Լեմմա 1.4.1. Եթե $n \geq 2$, ապա $\sigma_n \geq \lfloor 1.5n \rfloor - 2$:

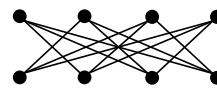
Ապացույց. Ֆիքսենք գագաթների $\mathbf{v} = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ համարակալումը և դիտարկենք երկու ծնված ենթագրաֆներ.

$$G_1 = K_2 \times K_n \left[\left\{ u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\} \right]$$

$$G_2 = K_2 \times K_n \left[\left\{ u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}, v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}, \dots, u_n, v_n \right\} \right]$$

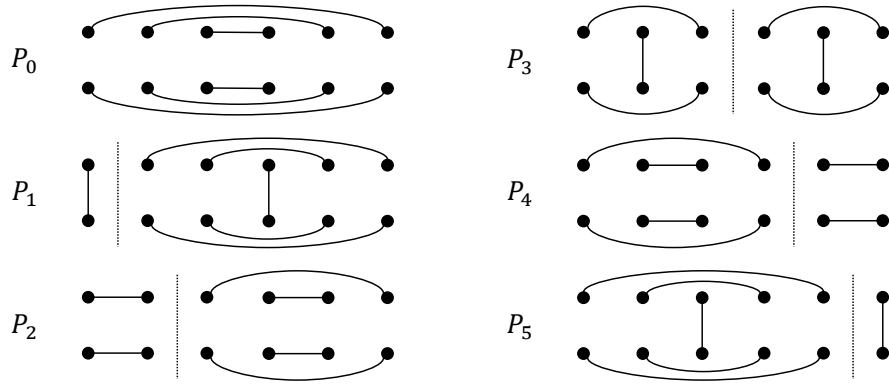


$K_2 \square K_4$



$K_2 \times K_4$

Նկ. 1.6: K_8 -ի երկու համասեռ կմախքային ենթագրաֆներ



Նկ. 1.7: $K_2 \square K_6$ -ի \mathfrak{F}_6 1-ֆակտորիզացիան

Երկու ենթագրաֆերն էլ համասեռ են ու երկկողմանի, հետևաբար ըստ Քյոնիգի թեորեմի [42] ունեն 1-ֆակտորիզացիա: Դիցուք G_1 -ի և G_2 -ի 1-ֆակտորիզացիաներն են համապատասխանաբար $F_1^l, F_2^l, \dots, F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^l$ և $F_1^r, F_2^r, \dots, F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^r$: Միավորելով այս զուգակցումների առաջին $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ զույգերը, կստանանք $K_2 \times K_n$ -ի $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -բաժանված կատարյալ զուգակցումներ \mathbf{v} համարակալման նկատմամբ.

$$F_i = F_i^l \cup F_i^r, \text{ բոլոր } i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \text{ թվերի համար:}$$

Եթե $K_2 \times K_n$ գրաֆից հանենք $\bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} F_i$ կողերը, ստացված գրաֆը ևս համասեռ երկկողմանի է և ունի 1-ֆակտորիզացիա, որը նշանակենք \mathfrak{F}_0 -ով: Ստացվում է, որ $\mathfrak{F}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} F_i \cup \mathfrak{F}_n$ K_{2n} -ի 1-ֆակտորիզացիա է: Բաժանված կատարյալ զուգակցումների քանակը $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 + n - 1$ է: Ուստի ստանում ենք, որ $\sigma_n \geq \lfloor 1.5n \rfloor - 2$: \square

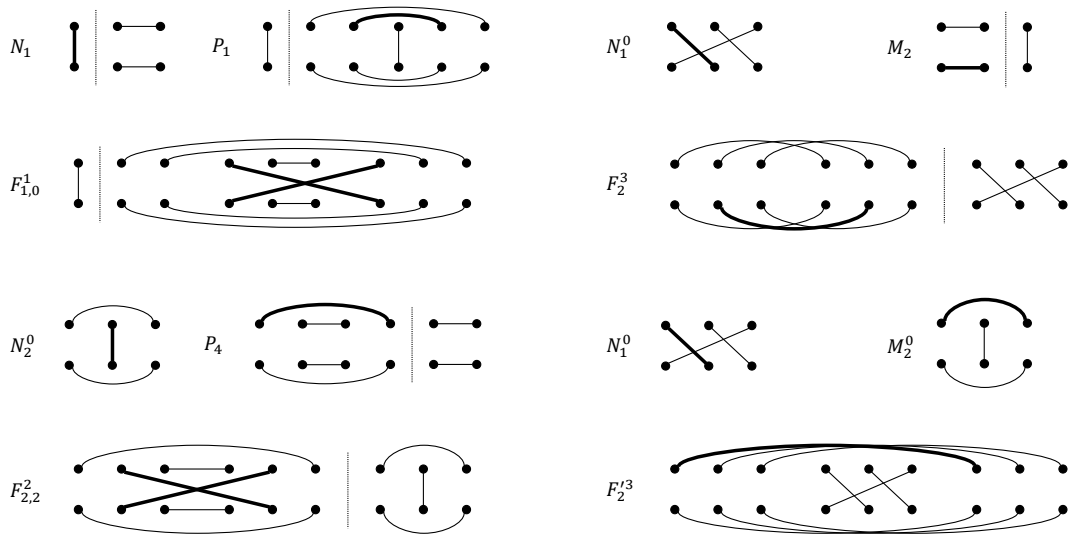
Կիրառելով Համարժեքության թեորեմը՝ ստանում ենք հետևյալ ստորին գնահատականը.

Թեորեմ 1.4.2. Եթե $n \geq 2$, ապա $W(K_{2n}) \geq \lfloor 3.5n \rfloor - 3$:

Այս թեորեմից հետևում է, որ $W(K_{10}) \geq 14$, որը Հիպոթեզ 1.1-ը հերքող ամենափոքր օրինակն է: Այսուհետ կքննարկենք այն դեպքը, երբ n -ը բաղադրյալ թիվ է:

Լեմմա 1.4.3. Յանկացած $m, n \in \mathbb{N}$ թվերի համար $\sigma_{mn} \geq \sigma_m + \sigma_n + 2(m-1)(n-1)$:

Ապացույց. Նշանակենք K_{2mn} , K_{2n} և K_{2m} գրաֆների գագաթների բազմությունը հետևյալ



Նկ. 1.8: K_{18} -ի որոշ կատարյալ զուգակցումներ հիմնված K_6 -ի $\bar{\mathfrak{F}} = \{N_1, N_2, N_1^0, N_2^0, N_3^0\}$, K_6 -ի $\tilde{\mathfrak{F}} = \{M_1, M_2, M_1^0, M_2^0, M_3^0\}$ և $K_2 \square K_6$ -ի $\mathfrak{P}_6 = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ 1-ֆակտորիզացիաների վրա՝ Լեմմա 1.4.3-ի միջոցով:

Կերպ.

$$V(K_{2mn}) = \{u_i^j, v_i^j : i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$$

$$V(K_{2n}) = \{\bar{u}_i, \bar{v}_i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$V(K_{2m}) = \{\tilde{u}^i, \tilde{v}^i : i = 1, 2, \dots, m\}$$

Ֆիքսենք, համապատասխանաբար, K_{2mn} -ի, K_{2n} -ի և K_{2m} -ի գագաթների համարակալումները.

$$\mathbf{v} = (u_1^1, v_1^1, u_2^1, v_2^1, \dots, u_n^1, v_n^1, u_1^2, v_1^2, u_2^2, v_2^2, \dots, u_n^2, v_n^2, \dots, u_1^m, v_1^m, u_2^m, v_2^m, \dots, u_n^m, v_n^m)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = (\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \dots, \bar{u}_n, \bar{v}_n)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{u}^1, \tilde{v}^1, \tilde{u}^2, \tilde{v}^2, \dots, \tilde{u}^m, \tilde{v}^m)$$

Դիցուք $\bar{\mathfrak{F}} = \{N_1, N_2, \dots, N_{\sigma_n}, N_1^0, N_2^0, \dots, N_{2n-1-\sigma_n}^0\}$ հանդիսանում է K_{2n} -ի 1-ֆակտորիզացիա, որտեղ N_i -ն բաժանված կատարյալ զուգակցումներ է, երբ $i = 1, 2, \dots, \sigma_n$: Դիցուք $\tilde{\mathfrak{F}} = \{M_1, M_2, \dots, M_{\sigma_m}, M_1^0, M_2^0, \dots, M_{2m-1-\sigma_m}^0\}$ հանդիսանում է K_{2m} -ի 1-ֆակտորիզացիա, որտեղ M_i -ն բաժանված կատարյալ զուգակցում է, երբ $i = 1, 2, \dots, \sigma_m$:

Մենք նաև կօգտագործենք $K_2 \square K_{2m}$ գրաֆը, $\{w_i, z_i : i = 1, 2, \dots, 2m\}$ գագաթների բազմությամբ, $\mathbf{w} = (w_1, z_1, w_2, z_2, \dots, w_{2m}, z_{2m})$ գագաթների համարակալմամբ և իր $\mathfrak{P}_{2m} =$

$\{P_0, P_1, \dots, P_{2m-1}\}$ 1-ֆակտորիզացիայով, որը սահմանվում է ինչպես այս պարագրաֆի սկզբում: $K_2 \square K_{2m}[\{w_{2k-1}, w_{2k}, z_{2k-1}, z_{2k}\}]$ ենթագրաֆը կանվանենք $K_2 \square K_{2m}$ -ի k -րդ բջիջ, որտեղ $1 \leq k \leq m$:

Ապացույցի ընթացքում միշտ կհամարենք, որ $x, y \in \{u, v\}$, $1 \leq s, t \leq n$ և $1 \leq p, q \leq m$:

Դիցուք $\bar{\varphi}$ -ն արտապատկերում է K_{2mn} -ի կողերը K_{2n} -ի կողերի վրա: Ցանկացած $x_s^p y_t^q \in E(K_{2mn})$ կողի համար, որտեղ $x_s \neq y_t$, սահմանենք $\bar{\varphi}(x_s^p y_t^q) = \bar{x}_s \bar{y}_t$: Այնուհետև սահմանենք $\tilde{\varphi}$ արտապատկերումը K_{2mn} -ի մնացած կողերից K_{2m} -ի կողերի մեջ: Ցանկացած $x_s^p x_s^q \in E(K_{2mn})$ կողի համար սահմանենք $\tilde{\varphi}(x_s^p x_s^q) = \tilde{x}^p \tilde{x}^q$: Նկատենք, որ $\bar{\varphi}^{-1}(\bar{e})$ նախապատկերները բոլոր $\bar{e} \in E(K_{2n})$ կողերի համար և $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{x}^p \tilde{x}^q)$ նախապատկերները բոլոր $\tilde{x}^p \tilde{x}^q \in E(K_{2m})$ կողերի համար զույգ առ զույգ տարբեր են, իսկ նրանց միավորումը ծածկում է ամբողջ $E(K_{2mn})$ բազմությունը: $E(K_{2mn})$ բազմությունը տրոհենք երեք չհատվող մասերի հետևյալ կերպ.

$$E(K_{2mn}) = E^1 \cup E^2 \cup E^3, \text{ որտեղ}$$

$$E^1 = \bigcup_{i=1}^{\sigma_n} \bigcup_{\bar{e} \in N_i} \bar{\varphi}^{-1}(\bar{e})$$

$$E^2 = \bigcup_{i=2}^{2n-1-\sigma_n} \bigcup_{\bar{e} \in N_i^0} \bar{\varphi}^{-1}(\bar{e})$$

$$E^3 = \bigcup_{\bar{e} \in N_1^0} \bar{\varphi}^{-1}(\bar{e}) \cup \bigcup_{\tilde{x}^p \tilde{x}^q \in E(K_{2m})} \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{x}^p \tilde{x}^q)$$

K_{2mn} -ի կառուցվելիք 1-ֆակտորիզացիան կնշանակենք \mathfrak{F} -ով և այն նույնպես բաղկացած կլինի երեք մասերից:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^1 \cup \mathfrak{F}^2 \cup \mathfrak{F}^3$$

\mathfrak{F}^k կատարյալ զուգակցումների բազմությունը ծածկելու է E^k կողերի բազմությունը, որտեղ $k = 1, 2, 3$: Նկ. 1.8-ում պատկերված են երեք մասերից յուրաքանչյուրը ծածկող կատարյալ զուգակցումները, երբ $m = n = 3$:

E^1 բազմությունը բաղկացած է K_{2n} -ի բաժանված կատարյալ զուգակցումների նախապատկերներից: Այն ծածկելու համար կամայական $N_i \in \bar{\mathfrak{F}}$ բաժանված կատարյալ զուգակցման համար, $i = 1, 2, \dots, \sigma_n$, և կամայական կենտ ինդեքսով $P_{2j+1} \in \mathfrak{F}_{2m}$ կատարյալ զուգակցման համար, $j = 0, 1, \dots, m-1$, կառուցենք \mathfrak{F}^1 -ի մեկ կատարյալ

զուգակցում.

$$\begin{aligned}
 F_{i,j}^1 &= F_{i,j,1}^1 \cup F_{i,j,2}^1 \cup F_{i,j,3}^1 \cup F_{i,j,4}^1, \text{ որտեղ} \\
 F_{i,j,1}^1 &= \bigcup_{\substack{w_{2k-1}z_{2k-1} \in P_{2j+1} \\ 1 \leq k \leq m}} \{x_s^k y_t^k : \bar{x}_s \bar{y}_t \in l(N_i)\} \\
 F_{i,j,2}^1 &= \bigcup_{\substack{w_{2k}z_{2k} \in P_{2j+1} \\ 1 \leq k \leq m}} \{x_s^k y_t^k : \bar{x}_s \bar{y}_t \in r(N_i)\} \\
 F_{i,j,3}^1 &= \bigcup_{\substack{w_{2k-1}w_{2l-1} \in P_{2j+1} \\ 1 \leq k < l \leq m}} \{x_s^k y_t^l, y_t^k x_s^l : \bar{x}_s \bar{y}_t \in l(N_i)\} \\
 F_{i,j,4}^1 &= \bigcup_{\substack{w_{2k}w_{2l} \in P_{2j+1} \\ 1 \leq k < l \leq m}} \{x_s^k y_t^l, y_t^k x_s^l : \bar{x}_s \bar{y}_t \in r(N_i)\} \\
 \mathfrak{F}^1 &= \{F_{i,j}^1 : i = 1, 2, \dots, \sigma_n, j = 0, 1, \dots, m-1\}
 \end{aligned}$$

$F_{i,j,1}^1$ -ը և $F_{i,j,2}^1$ -ը կառուցելու համար դիտարկում ենք P_{2j+1} կատարյալ զուգակցման ուղղաձիգ կողերը: Եթե որևէ k թվի համար, k -րդ բջջի ձախ (աջ) կողմի ուղղաձիգ կողը պատկանում է P_{2j+1} -ին, ապա K_{2mn} -ի k -րդ K_{2n} -ի կրկնօրինակում $l(N_i)$ -ի ($r(N_i)$ -ի) բոլոր կողերի նախապատկերները ավելացնում ենք $F_{i,j,1}^1$ -ին ($F_{i,j,2}^1$ -ին): Ցանկացած P_{2j+1} զուգակցում պարունակում է ճիշտ երկու ուղղաձիգ կող ($w_{j+1}z_{j+1}$ և $w_{j+m+1}z_{j+m+1}$): Երբ m -ը կենս է, այդ երկու ուղղաձիգ կողերից մեկը գտնվում է իր բջջի ձախ մասում, իսկ մյուսը՝ իր բջջի աջ մասում: Երբ m -ը զույգ է, ապա եթե j -ն կենս է (զույգ է), երկու ուղղաձիգ կողերն էլ գտնվում են իրենց բջիջների աջ (ձախ) կողմում: Այսպիսով, $F_{i,j,1}^1$ -ի և $F_{i,j,2}^1$ -ի կողերի քանակները կարելի է հաշվարկել հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned}
 |F_{i,j,1}^1| &= |l(N_i)| ((m \bmod 2) \cdot 1 + (1 - m \bmod 2) \cdot 2(1 - j \bmod 2)) \\
 |F_{i,j,2}^1| &= |r(N_i)| ((m \bmod 2) \cdot 1 + (1 - m \bmod 2) \cdot 2(j \bmod 2))
 \end{aligned}$$

$F_{i,j,3}^1$ -ը ($F_{i,j,4}^1$ -ը) կառուցելու համար դիտարկում ենք P_{2j+1} -ի այն կողերը, որոնք միացնում են երկու տարբեր բջիջների ձախ (աջ) մասերը: Երբ m -ը կենս է, գոյություն ունեն այդպիսի $\frac{m-1}{2}$ կողեր: Երբ m -ը զույգ է, ապա այդպիսի կողերի թիվը $\frac{m}{2} - (1 - j \bmod 2)$ է ($F_{i,j,4}^1$ -ի դեպքում՝ $\frac{m}{2} - (j \bmod 2)$): k -րդ և l -րդ բջիջները ($k < l$) միացնող այդպիսի կողերից յուրաքանչյուրի համար $F_{i,j,3}^1$ -ին ($F_{i,j,4}^1$ -ին) ավելացնում ենք $l(N_i)$ -ի ($r(N_i)$ -ի) բոլոր այն նախապատկերները, որոնք միացնում են K_{2mn} -ում K_{2n} -ի k -րդ և l -րդ կրկնօրինակները: Նկատենք, որ P_{2j+1} -ի ամեն մի ֆիքսված կողին համապատասխանող

$l(N_i)$ -ի ($r(N_i)$ -ի) յուրաքանչյուր կող ունի ճիշտ երկու նախապատկեր $F_{i,j,3}^1$ -ում ($F_{i,j,4}^1$ -ում)։
Ուստի ունենք հետևյալը.

$$|F_{i,j,3}^1| = 2|l(N_i)| \left((m \bmod 2) \cdot \frac{m-1}{2} + (1 - m \bmod 2) \cdot \left(\frac{m}{2} - (1 - j \bmod 2) \right) \right)$$

$$|F_{i,j,4}^1| = 2|r(N_i)| \left((m \bmod 2) \cdot \frac{m-1}{2} + (1 - m \bmod 2) \cdot \left(\frac{m}{2} - (j \bmod 2) \right) \right)$$

$F_{i,j}^1$ -ի կառուցումից հետևում է, որ այն զուգակցում է K_{2mn} -ում: Որպեսզի հիմնավորենք, որ այն նաև կատարյալ զուգացկում է, պետք է ցույց տալ, որ այն ունի ճիշտ mn թվով կողեր:

$$\begin{aligned} |F_{i,j}^1| &= |F_{i,j,1}^1| + |F_{i,j,2}^1| + |F_{i,j,3}^1| + |F_{i,j,4}^1| = \\ &= |l(N_i)| ((m \bmod 2)(1 + m - 1) + (1 - m \bmod 2)(2(1 - j \bmod 2) + m - 2(1 - j \bmod 2))) + \\ &+ |r(N_i)| ((m \bmod 2)(1 + m - 1) + (1 - m \bmod 2)(2(j \bmod 2) + m - 2(j \bmod 2))) \\ &= (|l(N_i)| + |r(N_i)|) ((m \bmod 2) \cdot m + (1 - m \bmod 2) \cdot m) = nm \end{aligned}$$

$F_{i,j}^1$ և $F_{i',j'}^1$ զուգակցումները չեն հատվում, երբ $i \neq i'$ կամ $j \neq j'$, քանի որ նրանց կողերը համապատասխանում են կամ K_{2n} -ի տարբեր կողերի, կամ $K_2 \square K_{2m}$ -ի տարբեր կողերի: Նաև նկատենք, որ եթե N_i -ն r -բաժանված կատարյալ զուգակցում է \bar{v} համարակալման նկատմամբ, ապա $F_{i,j}^1$ -ը $(jn + r)$ -բաժանված կատարյալ զուգակցում է v համարակալման նկատմամբ, բոլոր $i = 1, 2, \dots, \sigma_n$ և $j = 0, 1, \dots, m - 1$ թվերի համար:

E^2 բազմությունը բաղկացած է բոլոր չբաժանված կատարյալ զուգակցումների նախապատկերներից, բացի մեկ չբաժանված կատարյալ զուգակցումից: Այն ծածկելու համար կամայական $N_i^0 \in \bar{\mathfrak{F}}$ չբաժանված կատարյալ զուգակցման համար, բացի N_1^0 -ից (այս բացառության ընտրությունը կամայական է) և կամայական զույգ ինդեքսով $P_{2j} \in \mathfrak{F}_{2m}$ կատարյալ զուգակցման համար կառուցենք \mathfrak{F}^2 -ի մեկ կատարյալ զուգակցում:

$$F_{i,j}^2 = F_{i,j,1}^2 \cup F_{i,j,2}^2, \text{ որտեղ}$$

$$F_{i,j,1}^2 = \bigcup_{\substack{w_{2k-1}w_{2k} \in P_{2j} \\ 1 \leq k \leq m}} \{x_s^k y_t^k : \bar{x}_s \bar{y}_t \in N_i^0\}$$

$$F_{i,j,2}^2 = \bigcup_{\substack{w_{2k-1}w_{2l} \in P_{2j} \\ 1 \leq k < l \leq m}} \{x_s^k y_t^l, y_t^k x_s^l : \bar{x}_s \bar{y}_t \in N_i^0\}$$

$$\mathfrak{F}^2 = \{F_{i,j}^2 : i = 2, 3, \dots, 2n - 1 - \sigma_n, j = 0, 1, \dots, m - 1\}$$

P_{2j} զուգակցումները ունեն միայն հորիզոնական կողեր: Մեզ հետաքրքրում են այն կողերը, որոնք միացնում են որևէ բջջի ձախ մասը որևէ բջջի (նույն կամ տարբեր) աջ մասի հետ: Եթե կողի երկու ծայրակետերն էլ պատկանում են միևնույն k -րդ բջջին, ապա N_i^0 -ի բոլոր կողերի այն նախապատկերները, որոնք K_{2mn} -ում պատկանում են K_{2n} -ի k -րդ կրկնօրինակին, ավելացնում ենք $F_{i,j,1}^2$ բազմությանը: P_{2j} -ում այդպիսի կողերի քանակը 1 է, եթե m -ը կենտ է, և $2(j \bmod 2)$ է, եթե m -ը զույգ է: Ուստի, ունենք.

$$|F_{i,j,1}^2| = n((m \bmod 2) \cdot 1 + (1 - m \bmod 2) \cdot 2(j \bmod 2))$$

Եթե P_{2j} -ի կողը միացնում է k -րդ և l -րդ բջիջները ($k < l$), ապա N_i^0 -ի բոլոր կողերի այն նախապատկերները, որոնք միացնում են K_{2mn} -ում K_{2n} -ի k -րդ և l -րդ կրկնօրինակների գագաթները, ավելացնում ենք $F_{i,j,2}^2$ բազմությանը: P_{2j} -ում այդպիսի կողերի քանակը $\frac{m-1}{2}$ է, եթե m -ը կենտ է, և $\frac{m}{2} - (j \bmod 2)$ է, եթե m -ը զույգ է: Ուստի.

$$|F_{i,j,2}^2| = 2n \left((m \bmod 2) \cdot \frac{m-1}{2} + (1 - m \bmod 2) \cdot \left(\frac{m}{2} - (j \bmod 2) \right) \right)$$

$$\begin{aligned} |F_{i,j}^2| &= |F_{i,j,1}^2| + |F_{i,j,2}^2| = \\ &= n((m \bmod 2)(1 + m - 1) + (1 - m \bmod 2)(2(j \bmod 2) + m - 2(j \bmod 2))) = \\ &= n((m \bmod 2) \cdot m + (1 - m \bmod 2) \cdot m) = nm \end{aligned}$$

Ինչպես \mathfrak{F}^1 -ի զուգակցումների դեպքում, $F_{i,j}^2$ և $F_{i',j'}^2$ զուգակցումները նույնպես չեն հատվում, երբ $i \neq i'$ կամ $j \neq j'$: Նկատենք, որ կամայական $i = 2, 3, \dots, 2n - 1 - \sigma_n$ թվի համար, $F_{i,j}^2$ -ն j -բաժանված կատարյալ զուգակցում է \mathbf{v} համարակալման նկատմամբ երբ $j = 1, 2, \dots, m - 1$, իսկ երբ $j = 0$, այն բաժանված կատարյալ զուգակցում չէ:

E^3 բազմությունը պարունակում է K_{2n} -ի N_1^0 չբաժանված կատարյալ զուգակցման բոլոր կողերի նախապատկերները և $K_{2m}[\{\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \dots, \tilde{u}^m\}] \cup K_{2m}[\{\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \dots, \tilde{v}^m\}]$ ենթագրաֆի բոլոր կողերի նախապատկերները: K_{2m} -ի կողերի նախապատկերները կազմում են թվով $2n$ իրար հետ չհատվող, m գագաթանի լրիվ գրաֆներ՝ $K_{2mn}[\{x_s^1, x_s^2, \dots, x_s^m\}]$, կամայական $\bar{x}_s \in V(K_{2n})$ գագաթի համար: Կամայական $\bar{x}_s \bar{y}_t \in N_1^0$ կողի համար, իր նախապատկերը և իր երկու \bar{x}_s և \bar{y}_t ծայրակետերին համապատասխանող K_m ենթագրաֆները կազմում են $K_{2mn}[\{x_s^1, y_t^1, x_s^2, y_t^2, \dots, x_s^m, y_t^m\}]$ ենթագրաֆը, որը իզոմորֆ է K_{2m} -ին: Այսինքն, E^3 բազմությունը կազմված է K_{2m} -ի թվով n չհատվող կրկնօրինակներից: Կամայական $M \in \tilde{\mathfrak{F}}$ կատարյալ զուգակցման համար

կառուցում ենք K_{2mn} -ում մեկ կատարյալ զուգակցում միավորելով E^3 -ում իր n չհատվող կրկնօրինակները:

$$F_i^3 = \bigcup_{\bar{x}_s \bar{y}_t \in N_1^0} \{ \{x_s^p x_s^q : \tilde{u}^p \tilde{u}^q \in M_i\} \cup \{x_s^p y_t^q : \tilde{u}^p \tilde{v}^q \in M_i\} \cup \{y_t^p y_t^q : \tilde{v}^p \tilde{v}^q \in M_i\} \}$$

$$F_i'^3 = \bigcup_{\bar{x}_s \bar{y}_t \in N_1^0} \{ \{x_s^p x_s^q : \tilde{u}^p \tilde{u}^q \in M_i^0\} \cup \{x_s^p y_t^q : \tilde{u}^p \tilde{v}^q \in M_i^0\} \cup \{y_t^p y_t^q : \tilde{v}^p \tilde{v}^q \in M_i^0\} \}$$

$$\mathfrak{F}^3 = \{F_i^3 : i = 1, 2, \dots, \sigma_m\} \cup \{F_i'^3 : i = 1, 2, \dots, 2m - 1 - \sigma_m\}$$

F_i^3 և $F_i'^3$ զուգակցումները զույգ առ զույգ չեն հատվում և յուրաքանչյուրը բաղկացած է mn կողերից: Նկատենք, որ եթե M_i -ն r -բաժանված կատարյալ զուգակցում է \tilde{v} համարակալման նկատմամբ, ապա F_i^3 -ն, $i = 1, 2, \dots, \sigma_m$, rn -բաժանված կատարյալ զուգակցում է v համարակալման նկատմամբ: Իսկ $F_i'^3$, $i = 1, 2, \dots, 2m - 1 - \sigma_m$, կատարյալ զուգակցումները բաժանված չեն:

Ֆ բազմության մեջ կատարյալ զուգակցումների թիվը $m\sigma_n + m(2n - 2 - \sigma_n) + 2m - 1 = 2mn - 1$ է: Այս կատարյալ զուգակցումներից բաժանված են միայն $m\sigma_n + (m - 1)(2n - 2 - \sigma_n) + \sigma_m = \sigma_m + \sigma_n + 2(m - 1)(n - 1)$ հատը: Ապացույցն ավարտված է: \square

Կիրառելով Համարժեքության թեորեմը ստանում ենք հետևյալ ստորին գնահատականը, որն ընդհանրացնում է Թեորեմ 1.3.3-ը.

Թեորեմ 1.4.4. Ցանկացած $m, n \in \mathbb{N}$ թվերի համար $W(K_{2mn}) \geq W(K_{2m}) + W(K_{2n}) + 4(m - 1)(n - 1) - 1$:

Հայտնի է, որ $W(K_6) = 7$ և $W(K_{10}) \geq 14$: Վերոնշյալ թեորեմից հետևում է, որ $W(K_{30}) \geq 52$, ինչը հերքում է Հիպոթեզ 1.2-ը, ըստ որի $W(K_{30}) = 51$: Ինչպես կտեսնենք այս պարագրաֆի վերջում, սա հիպոթեզը հերքող ամենափոքր օրինակը չէ:

Թեորեմ 1.4.5. Եթե $n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{\alpha_i}$, որտեղ p_i -ն i -րդ պարզ թիվն է, $\pi(n)$ -ը՝ n -ը չզերազանցող պարզ թվերի քանակը, իսկ $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ապա

$$W(K_{2n}) \geq 4n - 3 - \sum_{i=1}^{\pi(n)} \alpha_i (4p_i - 3 - W(K_{2p_i})):$$

Ապացույց. d_m -ով նշանակենք $W(K_{2m}) - (4m - 3)$ տարբերությունը: Թեորեմ 1.4.4-ը պնդում է, որ $d_{mk} \geq d_m + d_k$: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով ստանում ենք, որ $d_n \geq \sum_{i=1}^{\pi(n)} \alpha_i d_{p_i}$: Ապացույցը կավարտվի, եթե d_{p_i} -ի փոխարեն տեղադրենք իր արժեքը: \square

Մինչև $W(K_{2n})$ -ի վերին գնահատականներին անցնելը ցույց տանք, որ վերը շարադրված թեորեմները թույլ են տալիս գնահատել նաև $W(G)$ պարամետրը, երբ G -ն ստացվում է լրիվ գրաֆից մեկ կատարյալ զուգակցում հանելով:

Թեորեմ 1.4.6. *Եթե G գրաֆը ստացվում է K_{2n} լրիվ գրաֆից մեկ կատարյալ զուգակցում հանելով, ապա $W(G) \geq W(K_{2n}) - 1$:*

Ապացույց. Դիցուք α -ն K_{2n} -ի որևէ միջակայքային $W(G)$ -ներկում է, որի համար $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$: Ըստ Պնդում 1.3.5-ի K_{2n} -ում գոյություն ունի F կատարյալ զուգակցում, որի բոլոր կողերը ներկված են միևնույն c գույնով: K_{2n} գրաֆից հանենք F զուգակցումը և ստացված գրաֆի համար կառուցենք β ներկումը հետևյալ կերպ.

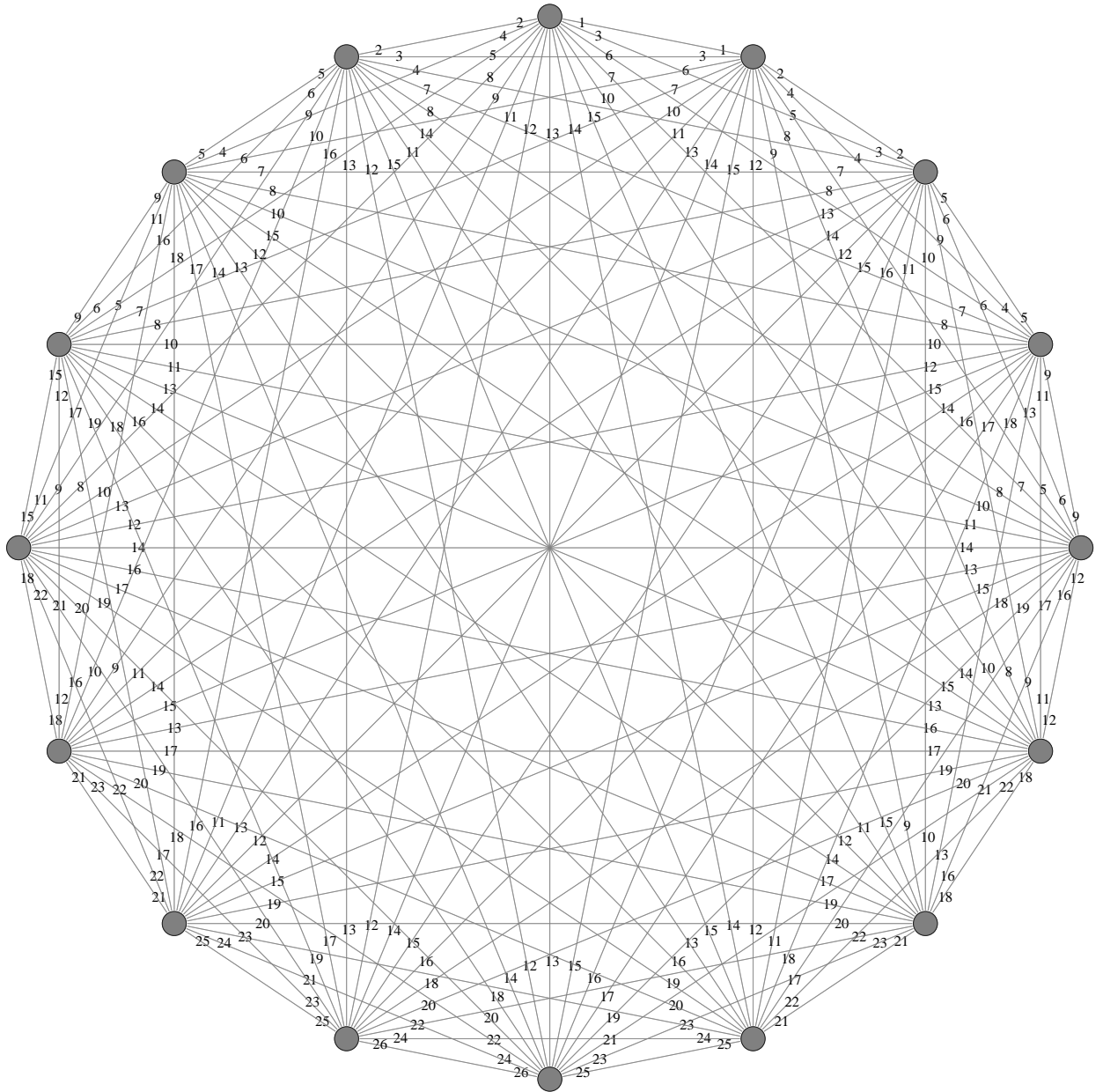
$$\beta(e) = \begin{cases} \alpha(e), & \text{երբ } \alpha(e) < c \\ \alpha(e) - 1, & \text{երբ } \alpha(e) > c \end{cases}$$

Կամայական $v \in V(K_{2n} - F)$ գագաթի սպեկտրը կլինի $S(v, \beta) = [\underline{S}(v, \alpha), \overline{S}(v, \alpha) - 1]$: Հետևաբար, β -ն $K_{2n} - F$ գրաֆի միջակայքային $(W(K_{2n}) - 1)$ -ներկում է և $W(K_{2n} - F) \geq W(K_{2n}) - 1$: \square

1.4.2 Վերին գնահատականներ

Դիցուք α -ն K_{2n} -ի կամայական միջակայքային կողային ներկում է, $n \in \mathbb{N}$, իսկ $\mathbf{v}_\alpha = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ ներկմանը համապատասխանող գագաթների համարակալումն է: Դիցուք α -ի շեղման վեկտորն է $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$: Համարժեքության լեմմայից հետևում է, որ գոյություն ունի K_{2n} -ի $\mathfrak{F} = \left\{ F_j^0 : j = 1, 2, \dots, 2n - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \right\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \left\{ F_j^i : j = 1, 2, \dots, b_i \right\}$ 1-ֆակտորիզացիա այնպես, որ F_j^i -ն i -բաժանված է \mathbf{v}_α համարակալման նկատմամբ, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, $j = 1, 2, \dots, b_i$: Այս բաժնի բոլոր այն ապացույցներում, որտեղ կունենանք լրիվ գրաֆի α միջակայքային ներկում, կենթադրենք, որ տրված է նաև գագաթների համապատասխան \mathbf{v}_α համարակալումը և \mathfrak{F} 1-ֆակտորիզացիան:

$W(K_{2n})$ -ի վերին գնահատականները լավացնելու համար մեզ պետք կգան մի շարք լեմմաներ:



Նկ. 1.9: K_{16} -ի միջակայքային 26-ներկում: $sh(\alpha) = (1, 2, 1, 3, 1, 2, 1)$

Լեմմա 1.4.7. Եթե K_{2n} -ի որևէ α միջակայքային կողային ներկման շեղման վեկտորը $sh(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ է, ապա գոյություն ունի K_{2n} -ի β միջակայքային կողային ներկում այնպես, որ $sh(\beta) = (b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1)$:

Ապացույց. Նկատենք, որ եթե որևէ $F \in \mathfrak{F}$ i -բաժանված է \mathbf{v}_α համարակալման նկատմամբ, ապա այն կլինի $(n - i)$ -բաժանված $\mathbf{v}'_\alpha = (u_n, v_n, u_{n-1}, v_{n-1}, \dots, u_1, v_1)$ համարակալման նկատմամբ: Կիրառենք Համարժեքության լեմման \mathfrak{F} -ից \mathbf{v}'_α համարակալման նկատմամբ β ներկումը կառուցելու համար: Շեղումների վեկտորը

կլինի $(b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1)$: □

Լեմմա 1.4.8. Եթե K_{2n} -ի որևէ α միջակայքային կողային ներկման համար $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$, որպեսզի $b_i > 0$ որևէ $i \in [1, n-1]$ թվի համար, ապա գոյություն ունի K_{2n} -ի β միջակայքային կողային ներկում այնպես, որ $\text{sh}(\beta) = (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, b_i - 1, b_{i+1}, \dots, b_{n-1})$:

Ապացույց. $b_i > 0$ պայմանից հետևում է, որ գոյություն ունի $F_{b_i}^i \in \mathfrak{F}$ կատարյալ զուգակցում, որը i -բաժանված է \mathbf{v}_α համարակալման նկատմամբ: Կառուցենք β ներկումը կիրառելով Համարժեքության լեմման \mathfrak{F} 1-ֆակտորիզացիայի նկատմամբ, համարելով $F_{b_i}^i$ զուգակցումը չբաժանված (կարող ենք վերանվանել այն $F_{2n-|\text{sh}(\alpha)}^0$): □

Լեմմա 1.4.9. Եթե K_{2n} -ի որևէ α միջակայքային կողային ներկման համար $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$, ապա

$$\sum_{i=1}^k b_i \leq 2k - 1, \text{ որպեսզի } k = 1, 2, \dots, n - 1:$$

Ապացույց. Համարժեքության լեմմայի ապացույցի համաձայն F_j^i կատարյալ զուգակցումների ձախ մասերը ծածկում են u_1 գագաթը (ինչպես նաև v_1 -ը), $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, b_i$: Ավելին,

$$\bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^{b_i} l_{\mathbf{v}_\alpha}^i(F_j^i) \subset E(H_{\mathbf{v}_\alpha}^{[1,k]})$$

Ապացույցն ավարտելու համար նկատենք, որ F_j^i կատարյալ զուգակցումների քանակը $\sum_{i=1}^k b_i$ է, իսկ u_1 (կամ v_1) գագաթի աստիճանը $H_{\mathbf{v}_\alpha}^{[1,k]}$ ենթազրաֆում $2k - 1$ է: □

(b_1, b_2, \dots, b_k) վեկտորը կանվանենք *հազեցած*, եթե $\sum_{i=1}^k b_i = 2k - 1$:

Հետևանք 1.4.10. Եթե α -ն K_{2n} -ի միջակայքային կողային ներկում է, $n \geq 3$, ապա $|\text{sh}(\alpha)| \leq 2n - 4$:

Ապացույց. Դիցուք $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$: Լեմմա 1.4.9-ից հետևում է, որ $\sum_{i=1}^{n-2} b_i \leq 2n - 5$: Նույն լեմմայից Լեմմա 1.4.7-ի հետ համատեղ բխում է, որ $b_{n-1} \leq 1$: Ապացույցը կավարտենք գումարելով այս երկու անհավասարությունները: □

Լեմմա 1.4.11. Եթե K_{2n} -ի որևէ α միջակայքային կողային ներկման համար $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$, և (b_1, b_2, \dots, b_k) վեկտորը *հազեցած* է որևէ $k \in [2, n - 2]$ թվի համար, ապա $b_{k+1} \leq 1$:

Ապացույց. Լեմմա 1.4.9-ից հետևում է, որ $b_{k+1} \leq 2$: Ապացույցն ավարտելու համար անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ $b_{k+1} \neq 2$: Ենթադրենք հակառակը՝ $b_{k+1} = 2$: (b_1, b_2, \dots, b_k) վեկտորը հազեցած է, ուստի Լեմմա 1.4.9-ի ապացույցից բխում է, որ $u_1 x_i$ և $v_1 x_i$ կողերը, $x \in \{u, v\}$, $i = 2, 3, \dots, k$, պատկանում են F_j^i կատարյալ զուգակցումներին, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, b_i$: Նմանապես, $u_1 u_{k+1}$, $u_1 v_{k+1}$, $v_1 u_{k+1}$ և $v_1 v_{k+1}$ կողերը պետք է ծածկված լինեն F_1^{k+1} -ով և F_2^{k+1} -ով:

Այժմ դիտարկենք u_2 գագաթը: Այն ծածկված է F_j^i կատարյալ զուգակցումների ձախ մասերով, $i = 2, 3, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, b_i$: Բոլոր այս զուգակցումները միասին ծածկում են $H_{\nu}^{[1,k]}$ ենթագրաֆում u_2 -ին կից բոլոր կողերը, բացի $2k - 1 - \sum_{i=2}^k b_i = b_1$ կողերից: Լեմմա 1.4.9-ից բխում է, որ $b_1 \leq 1$, ուստի չծածկված մնում է առավելագույնը մեկ կող: u_2 գագաթը պետք է ծածկված լինի նաև F_1^{k+1} և F_2^{k+1} կատարյալ զուգակցումների ձախ մասերով: $u_2 u_{k+1}$ և $u_2 v_{k+1}$ կողերը չեն կարող օգտագործվել, քանի որ u_{k+1} և v_{k+1} արդեն ծածկված են F_1^{k+1} -ով և F_2^{k+1} -ով: Հետևաբար, այս երկու զուգակցումների մնում է առավելագույնը մեկ կող, ինչը հակասություն է: \square

Հետևանք 1.4.12. Եթե α -ն K_{2n} -ի միջակայքային ներկում է և $n \geq 5$, ապա $|\text{sh}(\alpha)| \leq 2n - 5$:

Ապացույց. Դիցուք $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$: Լեմմա 1.4.9-ից հետևում է, որ $\sum_{i=1}^{n-3} b_i \leq 2n - 7$: Դիտարկենք երկու դեպք.

Դեպք 1. $\sum_{i=1}^{n-3} b_i = 2n - 7$: Լեմմա 1.4.11-ից բխում է, որ $b_{n-2} \leq 1$: Լեմմաներ 1.4.7 և 1.4.9-ից հետևում է, որ $b_{n-1} \leq 1$: Գումարելով այս անհավասարությունները կստանանք պահանջված գնահատականը:

Դեպք 2. $\sum_{i=1}^{n-3} b_i \leq 2n - 8$: Լեմմաներ 1.4.7-ից և 1.4.9-ից հետևում է, որ $b_{n-2} + b_{n-1} \leq 3$: Գումարելով այս անհասավարությունները կավարտենք ապացույցը: \square

Լեմմա 1.4.13. Եթե K_{2n} -ի որևէ α միջակայքային կողային ներկման համար $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$, և (b_1, b_2, \dots, b_k) վեկտորը հազեցած է որևէ $k \in [3, n - 1]$ թվի համար, ապա $b_k \geq 3$:

Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը՝ $b_k \leq 2$: Եթե $b_k = 2$, ապա $(b_1, b_2, \dots, b_{k-1})$ վեկտորը ևս հազեցած է, ինչը բերում է հակասության Լեմմա 1.4.11-ի հետ: Եթե $b_k \leq 1$, ապա ունենք, որ $\sum_{i=1}^{k-1} b_i \geq 2k - 2$, ինչը հակասում է Լեմմա 1.4.9-ին: \square

Լեմմա 1.4.14. Եթե K_{2n} -ի որևէ α միջակայքային կողային ներկման համար $\text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$, և $k \in [2, n - 2]$, ապա

$$k(2k - 1) \geq \sum_{i=1}^k ib_i + \sum_{i=k+1}^{\min\{2k-1, n-1\}} (2k - i)b_i:$$

Ապացույց. Դիտարկենք $H_{\nu_\alpha}^{[1,k]}$ ենթագրաֆը: Այս ենթագրաֆում կողերի քանակը $k(2k-1)$ է: F_j^i կատարյալ զուգակցումներից յուրաքանչյուրի ձախ մասը, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, b_i$, բաղկացած է i կողերից, և բոլորն էլ պատկանում են $H_{\nu_\alpha}^{[1,k]}$ ենթագրաֆին: Այսպիսի կողերի քանակն է $\sum_{i=1}^k ib_i$:

Այժմ ֆիքսենք որևէ $i \in [k + 1, r]$, որտեղ r -ով նշանակել ենք $\min\{2k - 1, n - 1\}$ -ը: F_j^i կատարյալ զուգակցումներից յուրաքանչյուրի ձախ մասը, $j = 1, 2, \dots, b_i$, բաղկացած է i կողերից: Դրանցից առավելագույնը $(2i - 2k)$ -ը կարող են միացնել $H_{\nu_\alpha}^{[1,k]}$ -ի որևէ գագաթ $H_{\nu_\alpha}^{[k+1,i]}$ -ի որևէ գագաթի հետ: Ուստի առնվազն $2k - i$ կողեր պատկանում են $H_{\nu_\alpha}^{[1,k]}$ ենթագրաֆին: Այդպիսի կողերի քանակը առնվազն $\sum_{i=k+1}^r (2k - i)b_i$ է: \square

Լեմմա 1.4.14-ից հետևում է, որ եթե որևէ ֆիքսված k_0 -ի համար գոյություն ունեն մեծ թվով i -բաժանված կատարյալ զուգակցումներ, որտեղ $i \leq k_0$, ապա չեն կարող գոյություն ունենալ մեծ թվով i' -բաժանված կատարյալ զուգակցումներ, որտեղ $k_0 < i' < \min\{2k_0 - 1, n - 1\}$: Այս լեմման օգտագործելու համար հարկավոր է $\sum_{i=1}^k ib_i$ գումարը գնահատել ներքևից:

Կամայական $k \in \mathbb{N}$ և $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ թվերի համար սահմանենք հետևյալը.

$$T_k = \{(b_1, b_2, \dots, b_k) : \exists K_{2n}\text{-ի } \alpha\text{ միջակայքային ներկում, } n > k, \text{sh}(\alpha) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})\}$$

$$m(k, r) = \min_{(b_1, b_2, \dots, b_k) \in T_k} \left\{ \sum_{i=1}^k ib_i : \sum_{i=1}^k b_i = r \right\}$$

Նկատենք, որ $m(k, r)$ -ը սահմանված չէ բոլոր (k, r) զույգերի համար: Օրինակ, Լեմմա 1.4.9-ից հետևում է, որ գոյություն չունեն K_{2n} -ի այնպիսի միջակայքային ներկումներ, որոնց համար $\sum_{i=1}^k b_i = r$, երբ $r \geq 2k$: Ակնհայտ է, որ $m(1, 1) = 1$ և $m(k, 0) = 0$, որտեղ $k \in \mathbb{N}$:

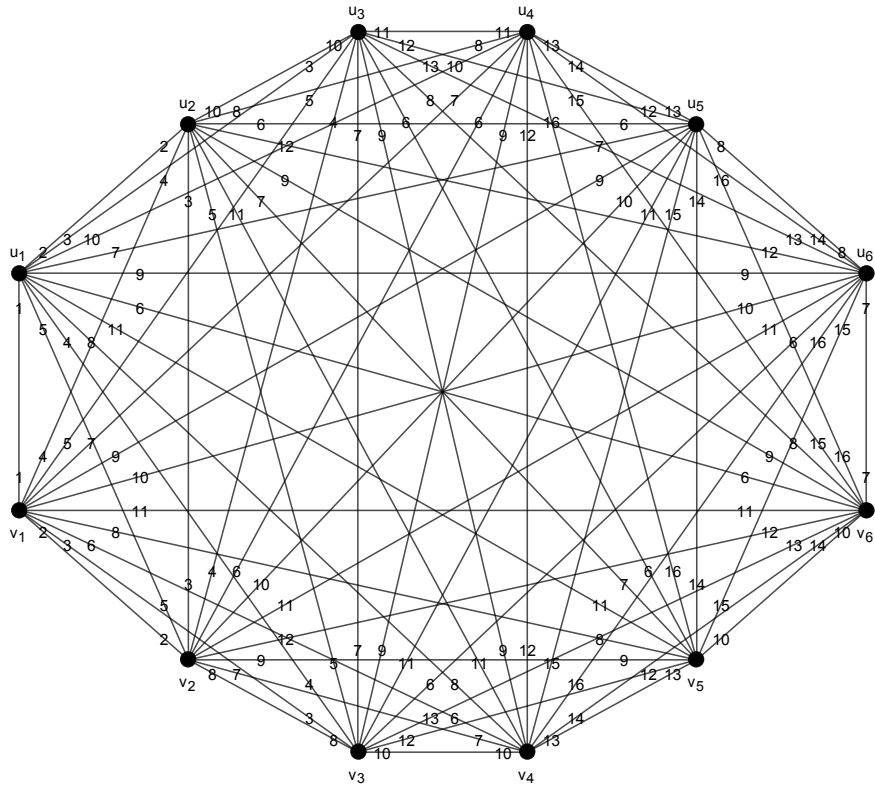
Պնդում 1.4.15. $m(k, r)$ -ը հաշվելու համար, $k > 1$, $r > 1$, բավական է վերցնել մինիմումը ըստ բոլոր այն $(b_1, b_2, \dots, b_k) \in T_k$ վեկտորների, որոնց համար $\sum_{i=1}^{k-1} ib_i = m(k - 1, r - b_k)$:

Աղյուսակ 1.1-ում թվարկված են $m(k, r)$ -ի արժեքները, երբ $k \leq 4$ և $r \leq 7$: Օրինակ, $m(3, 5)$ -ը հաշվարկված է հետևյալ կերպ: Ըստ վերը նշված պնդման, T_3 -ում թույլատրելի

$r \backslash k$	1	2	3	4
0	0 (0)	0 (0,0)	0 (0,0,0)	0 (0,0,0,0)
1	1 (1)	1 (1,0)	1 (1,0,0)	1 (1,0,0,0)
2		3 (1,1)	3 (1,1,0)	3 (1,1,0,0)
3		5 (1,2)	5 (1,2,0)	5 (1,2,0,0)
4			8 (1,2,1)	8 (1,2,1,0)
5			12 (1,1,3)	12 (1,2,1,1)
6				16 (1,2,1,2)
7				20 (1,2,1,3)

Աղյուսակ 1.1: $m(k, r)$ -ի արժեքները: Յուրաքանչյուր վանդակի առաջին տողում գրված է $m(k, r)$ -ի արժեքը: Երկրորդ տողում նշված է որևէ $(b_1, b_2, \dots, b_k) \in T_k$ վեկտոր, որի համար $\sum_{i=1}^k i b_i = m(k, r)$:

Թեկնածու վեկտորներն են $(1, 2, 2)$ -ը, $(1, 1, 3)$ -ը, $(1, 0, 4)$ -ը և $(0, 0, 5)$ -ը: Լեմմա 1.4.11-ից հետևում է, որ $(1, 2, 2) \notin T_3$: K_{12} -ի Նկ. 1.10-ում ներկայացված ներկումը ցույց է տալիս, որ $(1, 1, 3) \in T_3$: Մյուս կողմից, $b_1 + 2b_2 + 3b_3$ գումարը ավելի մեծ մյուս երկու թեկնածու վեկտորների համար, ուստի $m(3, 5) = 12$: Նմանապես կարելի է ցույց տալ, որ $m(4, 7) = 20$, որտեղ մինիմումը հասանելի է $(1, 2, 1, 3)$ վեկտորի համար, որը միանշանակ պատկանում է T_4 բազմությանը, ինչպես ցույց է տալիս K_{22} -ի Նկ. 1.11-ում պատկերված ներկումը: Լեմմա 1.4.8-ը կիրառելով այս երկու ներկումների համար կարող ենք ապացուցել, որ Աղյուսակ 1.1-ում նշված բոլոր վեկտորները պատկանում են



Նկ. 1.10: K_{12} -ի միջակայքային 16-ներկումը $(1, 1, 3, 0, 0)$ շեղման վեկտորով:

համապատասխան T_k բազմություններին:

Լեմմա 1.4.16. Եթե α -ն K_{2n} -ի միջակայքային կողային ներկում է և $n \geq 9$, ապա $|\text{sh}(\alpha)| \leq 2n - 6$:

Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը՝ $|\text{sh}(\alpha)| \geq 2n - 5$: Լեմմաներ 1.4.7-ից և 1.4.9-ից հետևում է, որ $\sum_{i=5}^{n-1} b_i \leq 2n - 11$: Դիտարկենք երեք դեպքեր:

Դեպք 1. $\sum_{i=5}^{n-1} b_i = 2n - 11$: Լեմմաներ 1.4.7-ից, 1.4.13-ից և 1.4.11-ից հետևում է, որ $b_5 \geq 3$ և $b_4 \leq 1$: Կիրառենք Լեմմա 1.4.9-ը՝ տեղադրելով $k = 3$, և ցույց տանք, որ $b_1 + b_2 + b_3 = 5$ և $b_4 = 1$: Ապա կիրառենք Լեմմա 1.4.14-ը՝ տեղադրելով $k = 3$: Անհավասարության ձախ մասը հավասար է 15-ի: Աջ կողմում ունենք $\sum_{i=1}^3 ib_i \geq m(3, 5) = 12$ և $\sum_{i=4}^5 (6 - i)b_i \geq 5$: Այս անհավասարությունները հակասում են Լեմմա 1.4.14-ին:

Դեպք 2. $\sum_{i=5}^{n-1} b_i = 2n - 12$: Լեմմա 1.4.9-ից բխում է, որ (b_1, b_2, b_3, b_4) վեկտորը հազեցած է: Լեմմա 1.4.11-ից հետևում է, որ $b_5 \leq 1$: Հետևաբար, $(b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_6)$ վեկտորը հազեցած է և $b_5 = 1$: Լեմմա 1.4.13-ից բխում է, որ $b_6 \geq 3$: Այժմ կիրառենք Լեմմա 1.4.14-ը՝ տեղադրելով $k = 4$: Անհավասարության ձախ մասը հավասար

է 28-ի: Աջ մասում ունենք, որ $\sum_{i=1}^4 ib_i \geq m(4,7) = 20$ և $\sum_{i=5}^7 (8-i)b_i \geq 9$: Այս անհավասարությունները հակասում են Լեմմա 1.4.14-ին:

Դեպք 3. $\sum_{i=5}^{n-1} b_i \leq 2n - 13$: Լեմմա 1.4.9-ից հետևում է, որ $\sum_{i=1}^4 b_i \leq 7$: Գումարելով այս երկու անհավասարությունները ստանում ենք հակասություն:

□

Հետևանքներ 1.4.10-ից, 1.4.12-ից, Լեմմա 1.4.16-ից և Պնդում 1.3.7-ից հետևում է $W(K_{2n})$ -ի հետևյալ վերին գնահատականը:

Թեորեմ 1.4.17. *Դիցուք $n \geq 3$:*

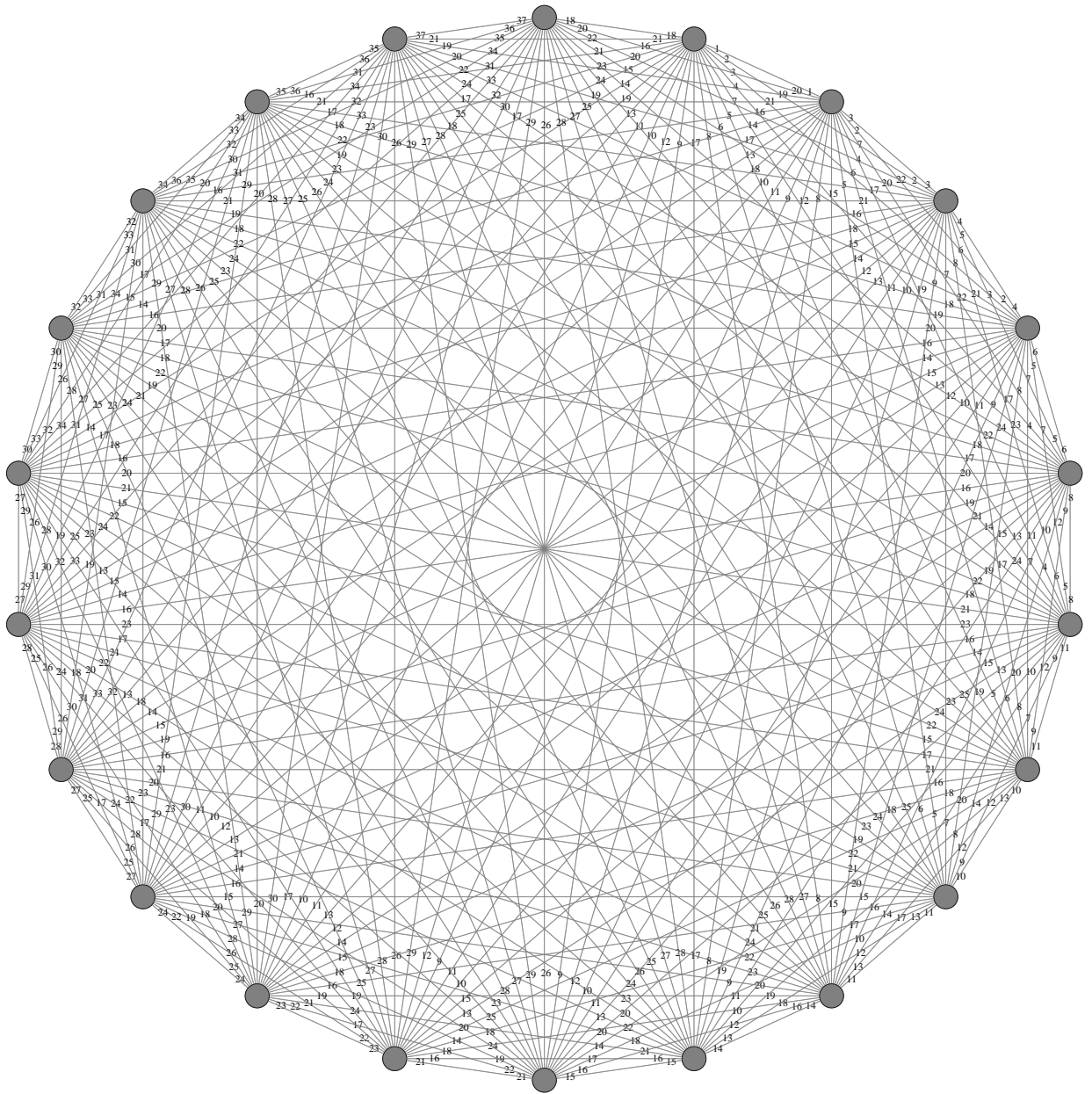
$$W(K_{2n}) \leq \begin{cases} 4n - 5, & \text{երբ } n \geq 3, \\ 4n - 6, & \text{երբ } n \geq 5, \\ 4n - 7, & \text{երբ } n \geq 9: \end{cases}$$

Ստացված վերին գնահատականները թույլ են տալիս որոշել $W(K_{2n})$ պարամետրի ճշգրիտ արժեքները որոշ փոքր n -երի համար: Այդ արժեքները իրենց հերթին թույլ են տալիս լավացնել $W(K_{2n})$ -ի ստորին գնահատականը, քանի որ Թեորեմ 1.4.5-ում ստացված գնահատականը կախված է $W(K_{2p})$ պարամետրի արժեքներից, որտեղ p -ն պարզ թիվ է: $p = 2$ և $p = 3$ դեպքերի համար $W(K_{2p})$ -ի ճշգրիտ արժեքները հայտնի էին [46]-ից: $p = 5$ դեպքում Թեորեմ 1.4.2-ի ստորին գնահատականը համընկնում է Թեորեմ 1.4.17-ի վերին գնահատականի հետ: $p = 7$ դեպքը կլուծվի հաջորդ լեմմայում: Վերջապես, $p = 11$ դեպքում Թեորեմ 1.4.17-ի վերին գնահատականը հասանելի է K_{22} -ի միջակայքային 37-ներկման միջոցով, որը պատկերված է Նկ. 1.11-ում: Այս ներկումը նաև հերքում է Հիպոթեզ 1.2-ը, ըստ որի $W(K_{22}) = 36$:

Լեմմա 1.4.18. $W(K_{14}) = 21$:

Ապացույց. Թեորեմ 1.4.17-ից հետևում է, որ $W(K_{14}) \leq 22$: Բավական է ցույց տալ, որ K_{14} -ը չունի միջակայքային կողային ներկում 22 գույներով: Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի K_{14} -ի α միջակայքային 22-ներկում:

Դիտարկենք ներկման շեղման վեկտորը՝ $sh(\alpha) = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$: Պնդում 1.3.7-ից հետևում է, որ $\sum_{i=1}^6 b_i = 9$: Լեմմա 1.4.9-ից հետևում է, որ թե՛ առաջին և թե՛ վերջին եռյակի գումարը չի կարող գերազանցել 5-ը: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք



Նկ. 1.11: K_{22} -ի միջակայքային 37-ներկում $(1, 2, 1, 3, 1, 1, 3, 1, 2, 1)$ շեղման վեկտորով:

համարել, որ $b_1 + b_2 + b_3 = 5$ և $b_4 + b_5 + b_6 = 4$: Լեմմա 1.4.11-ից բխում է, որ $b_4 \leq 1$:
Լեմմաներ 1.4.7-ից և 1.4.9-ից հետևում է, որ $b_5 + b_6 = 3$ և $b_4 = 1$: Ուստի $b_5 \geq 2$:

Այժմ ստուգենք Լեմմա 1.4.14-ի անհավասարությունը, երբ $k = 3$: Ձախ մասը հավասար է 15-ի: Աջ մասում ունենք, որ $\sum_{i=1}^3 ib_i \geq m(3, 5) = 12$, $\sum_{i=4}^5 (6-i)b_i \geq 4$: Գումարելով այս անհավասարությունները ստանում ենք հակասություն: \square

Լավագույն ստորին գնահատականը, որը հաջողվել է ստանալ, հետևյալն է:

Թեորեմ 1.4.19. Եթե $n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{\alpha_i}$, որտեղ p_i -ն i -րդ պարզ թիվն է, $\pi(n)$ -ը՝ n -ը չգերազանցող պարզ թվերի քանակը, իսկ $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ապա

$$W(K_{2n}) \geq 4n - 3 - A_n,$$

$$\text{որտեղ } A_n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 4\alpha_5 + \frac{1}{2} \sum_{i=6}^{\pi(n)} \alpha_i(p_i + 1):$$

Ապացույց. Թեորեմն ապացուցելու համար վերցնենք Թեորեմ 1.4.5-ի ստորին գնահատականը, տեղադրենք $W(K_{2p_i})$ -ի ճշգրիտ արժեքները առաջին հինգ պարզ թվերի համար, իսկ $W(K_{2p_i})$ թվերը, $i \geq 6$, գնահատելու համար կիրառենք Թեորեմ 1.4.2-ը՝ հաշվի առնելով, որ բացի 2-ից բոլոր պարզ թվերը կենտ են: \square

Այս Թեորեմից և Թեորեմ 1.1.2-ից ստանում ենք հետևյալ արդյունքը.

Հետևանք 1.4.20. Եթե $n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{\alpha_i}$, որտեղ p_i -ն i -րդ պարզ թիվն է, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\pi(n)$ -ը՝ n -ը չգերազանցող պարզ թվերի քանակը, իսկ $2n - 1 \leq t \leq 4n - 3 - A_n$, որտեղ $A_n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 4\alpha_5 + \frac{1}{2} \sum_{i=6}^{\pi(n)} \alpha_i(p_i + 1)$, ապա K_{2n} -ը ունի միջակայքային t -ներկում:

Այսպիսով, հայտնի են $W(K_{2n})$ -ի ճշգրիտ արժեքները, երբ $n \leq 12$ և $n = 16$: Այդ արժեքները, ինչպես նաև հայտնի լավագույն ստորին և վերին գնահատականները ներկայացված են Աղյուսակ 1.2-ում:

2016թ. Հուլիսի, Կարդոչը, Մադարասը և Վրբյարովան [39] դիտարկել են լրիվ գրաֆների միջակայքային ներկումների մի տարատեսակ, որտեղ ներկման ճշտությունը չի պահանջվում: Մասնավորապես, հեղինակները ցույց են տվել, որ այդ դեպքում ներկմանը մասնակցող առավելագույն գույների քանակը գագաթների թվից կախված խիստ աճում է:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$W(K_{2n}) \geq$	1	4	7	11	14	18	21	26	29	33	37	41	42	46	52	57	56	64
$W(K_{2n}) =$	1	4	7	11	14	18	21	26	29	33	37	41				57		
$W(K_{2n}) \leq$	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65

Աղյուսակ 1.2: $W(K_{2n})$ -ի գնահատականները: Առաջին տողում բերված են ստորին գնահատականները ըստ Թեորեմ 1.4.19-ի, երկրորդ տողում հայտնի ճշգրիտ արժեքներն են, իսկ երրորդ տողում վերին գնահատականներն են ըստ Թեորեմ 1.4.17-ի:

1.5 Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային ներկումներ

Այս պարագրաֆում կամփոփենք լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային ներկումների վերաբերյալ կատարված աշխատանքները և կապացուցենք մի շարք նոր արդյունքներ: Լրիվ բազմակողմանի գրաֆներից առաջինը ուսումնասիրվել են լրիվ երկկողմանի գրաֆները: Քամայանին հաջողվել է լիարժեք պատասխանել այն հարցին, թե երբ և որքան գույներով միջակայքային ներկումներ կարող են ունենալ լրիվ երկկողմանի գրաֆները [73]:

Թեորեմ 1.5.1. $K_{m,n}$ լրիվ երկկողմանի գրաֆը ունի միջակայքային t -ներկում այն և միայն դեպքում, երբ $m + n - (m, n) \leq t \leq m + n - 1$:

Պետրոսյանը [48]-ում ստացել է որոշ արդյունքներ հավասարակշռված լրիվ բազմակողմանի գրաֆների համար, երբ գրաֆի բոլոր կողմերում գագաթների թիվը նույնն է:

Թեորեմ 1.5.2. Եթե $K_{n,\dots,n}$ լրիվ հավասարակշռված r -կողմանի գրաֆ է, ապա $K_{n,\dots,n} \in \mathfrak{N}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ nr -ը զույգ է: Ավելին, երբ nr -ը զույգ է, ապա $w(K_{n,\dots,n}) = n(r - 1)$ և $W(K_{n,\dots,n}) \geq \left(\frac{3}{2}r - 1\right)n - 1$:

Եվս մեկ արդյունք ստացվել է Ֆենգի և Հուանգի կողմից [25] լրիվ երեք կողմանի գրաֆների մի ենթադասի համար:

Թեորեմ 1.5.3. Ցանկացած $n \in \mathbb{N}$ թվի համար, $K_{1,1,n} \in \mathfrak{N}$ այն և միայն դեպքում, երբ n -ը զույգ է:

Պետրոսյանը “Cycles and Colorings 2012” գիտաժողովում առաջարկել էր վերոհիշյալ թեորեմը ընդհանրացնող հետևյալ հիպոթեզը.

Հիպոթեզ 1.3. Ցանկացած $m, n \in \mathbb{N}$ թվերի համար, $K_{1,m,n} \in \mathfrak{N}$ այն և միայն դեպքում, երբ $(m + 1, n + 1) = 1$:

Այս պարագրաֆում կապացուցենք այս հիպոթեզը, կստանանք մի շարք նոր արդյունքներ լրիվ երեք կողմանի գրաֆների այլ ենթադասերի համար և կլավացնենք Թեորեմ 1.5.2-ի գնահատականը:

Նախ, ապացուցենք մի օժանդակ լեմմա լրիվ բազմակողմանի գրաֆների ընդհանուր դեպքի համար:

Լեմմա 1.5.4. Եթե $K_{n_1, \dots, n_r} \in \mathfrak{N}$, ապա կամայական $d \in \mathbb{N}$ թվի համար $K_{dn_1, \dots, dn_r} \in \mathfrak{N}$, ընդ որում $w(K_{dn_1, \dots, dn_r}) \leq d \cdot w(K_{n_1, \dots, n_r})$ և $W(K_{dn_1, \dots, dn_r}) \geq d \cdot W(K_{n_1, \dots, n_r}) + d - 1$:

Ապացույց. K_{dn_1, \dots, dn_r} գրաֆը կարելի է ստանալ K_{n_1, \dots, n_r} գրաֆից յուրաքանչյուր գագաթի փոխարեն տեղադրելով d գագաթներ և յուրաքանչյուր կող փոխարինելով $K_{d,d}$ լրիվ երկկողմանի գրաֆի կողերով համապատասխան գագաթների d -յակների միջև: Դիցուք,

$$V(K_{n_1, \dots, n_r}) = \{u_i^j : j = 1, \dots, r, i = 1, \dots, n_j\},$$

$$V(K_{dn_1, \dots, dn_r}) = \{v_{i,s}^j : j = 1, \dots, r, i = 1, \dots, n_j, s = 1, \dots, d\},$$

$$V(K_{d,d}) = \{x_s, y_s : s = 1, \dots, d\} :$$

Դիցուք α -ն K_{n_1, \dots, n_r} գրաֆի որևէ միջակայքային t_α ներկում է, իսկ β -ն $K_{d,d}$ -ի որևէ սիմետրիկ միջակայքային t_β -ներկում, այսինքն $\beta(x_s y_{s'}) = \beta(x_{s'} y_s)$ կամայական $1 \leq s, s' \leq d$ թվերի համար: Կառուցենք K_{dn_1, \dots, dn_r} -ի γ կողային ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\gamma(v_{i_1, s_1}^{j_1} v_{i_2, s_2}^{j_2}) = r(\alpha(u_{i_1}^{j_1} u_{i_2}^{j_2}) - 1) + \beta(x_{s_1} y_{s_2}), \text{ որտեղ} \quad (1)$$

$$1 \leq j_1 \neq j_2 \leq r, 1 \leq i_1 \leq n_{j_1}, 1 \leq i_2 \leq n_{j_2}, 1 \leq s_1, s_2 \leq d : \quad (2)$$

Որպեսզի ցույց տանք, որ կառուցված ներկումը միջակայքային կողային ներկում է, հաշվենք գագաթների սպեկտրները: Կամայական $1 \leq j_1 \leq r, 1 \leq i_1 \leq n_{j_1}$ և $1 \leq s_1 \leq d$

թվերի համար ունենք.

$$\begin{aligned}
 S(v_{i_1, s_1}^{j_1}, \gamma) &= \bigcup_{\substack{u_{i_2}^{j_2} \in V(K_{n_1, \dots, n_r}) \\ u_{i_1}^{j_1} u_{i_2}^{j_2} \in E(K_{n_1, \dots, n_r})}} \bigcup_{s_2=1}^d \gamma(v_{i_1, s_1}^{j_1}, v_{i_2, s_2}^{j_2}) \\
 &= \bigcup_{\substack{u_{i_2}^{j_2} \in V(K_{n_1, \dots, n_r}) \\ u_{i_1}^{j_1} u_{i_2}^{j_2} \in E(K_{n_1, \dots, n_r})}} [r(\alpha(u_{i_1}^{j_1} u_{i_2}^{j_2}) - 1) + \underline{S}(x_{s_1}, \beta), d(\alpha(u_{i_1}^{j_1} u_{i_2}^{j_2}) - 1) + \overline{S}(x_{s_1}, \beta)] \\
 &= [d(\underline{S}(u_{i_1}^{j_1}, \alpha) - 1) + \underline{S}(x_{s_1}, \beta), d(\overline{S}(u_{i_1}^{j_1}, \alpha) - 1) + \overline{S}(x_{s_1}, \beta)] :
 \end{aligned}$$

Դիցուք K_{n_1, \dots, n_r} գրաֆում 1 և t_α գույները հասանելի են համապատասխանաբար $u_{i'}^{j'}$ և $u_{i''}^{j''}$ գագաթների վրա, իսկ $K_{d,d}$ գրաֆում 1 և t_β գույները հասանելի են համապատասխանաբար $x_{s'}$ և $x_{s''}$ գագաթների վրա: Այդ դեպքում $1 \in S(v_{i', s'}^{j'}, \gamma)$ և $dt_\alpha + t_\beta - d \in S(v_{i'', s''}^{j''}, \gamma)$: Ստացված արդյունքը ճիշտ է կամայական α և β ներկումների համար: Ուստի, եթե որպես α վերցնենք K_{n_1, \dots, n_r} -ի որևէ միջակայքային $W(K_{n_1, \dots, n_r})$ -ներկում, իսկ որպես β վերցնենք $K_{d,d}$ -ի միջակայքային $(2d - 1)$ -ներկումը (օրինակ՝ $\beta(x_s, y_t) = s + t - 1$ բանաձևով տրվող), ապա կստանանք, որ $W(K_{dn_1, \dots, dn_r}) \geq d \cdot W(K_{n_1, \dots, n_r}) + d - 1$: Իսկ եթե որպես α վերցնենք K_{n_1, \dots, n_r} -ի որևէ միջակայքային $w(K_{n_1, \dots, n_r})$ -ներկում, իսկ որպես β վերցնենք $K_{d,d}$ -ի որևէ միջակայքային d -ներկում, ապա կստանանք, որ $w(K_{dn_1, \dots, dn_r}) \leq d \cdot w(K_{n_1, \dots, n_r})$: \square

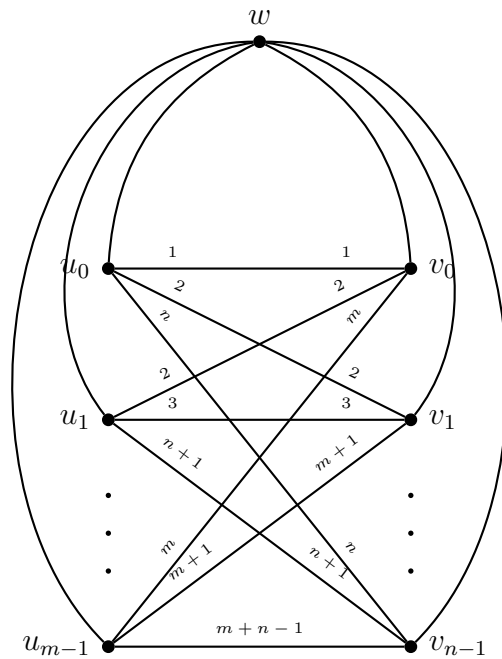
Այժմ անցնենք լրիվ երեք կողմանի գրաֆների քննարկմանը:

$K_{m,n}$ երկկողմանի գրաֆի երկու կողմերը նշանակենք (U, V) -ով, որտեղ $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\}$ և $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$: $K_{m,n}$ -ի $\alpha_{m,n}$ միջակայքային կողային ներկումը մաքսիմալ թվով գույներով ներկումը տրվում է հետևյալ կերպ [73].

$$\alpha_{m,n}(u_i v_j) = i + j + 1, \text{ որտեղ } 0 \leq i \leq m - 1, \quad 0 \leq j \leq n - 1:$$

$K_{1,m,n}$ -ը լրիվ երեք կողմանի գրաֆ է, որը կարելի է դիտարկել որպես $K_{m,n}$ և նրան ավելացված մեկ նոր գագաթ, որը միացած է մյուս բոլոր գագաթներին: Այս հոդվածում մենք կապացուցենք, որ եթե $m + 1$ և $n + 1$ թվերը փոխադարձաբար պարզ են, ապա հնարավոր է $K_{m,n}$ -ի $\alpha_{m,n}$ ներկումը լրացնել մինչև $K_{1,m,n}$ -ի միջակայքային ներկում: Այնուհետև մենք կապացուցենք, որ եթե $(m + 1, n + 1) > 1$, ապա $K_{1,m,n}$ -ը միջակայքային ներկելի չէ:

$\alpha_{m,n}$ ներկման ժամանակ գագաթների սպեկտրները հետևյալն են.



Նկ. 1.12: $K_{1,m,n}$ գրաֆը և $\alpha_{m,n}$ ներկումը

$$S(u_i, \alpha_{m,n}) = [i + 1, i + n], \quad 0 \leq i \leq m - 1$$

$$S(v_j, \alpha_{m,n}) = [j + 1, j + m], \quad 0 \leq j \leq n - 1$$

$K_{1,m,n}$ գրաֆը ստանանք $K_{m,n}$ -ին ավելացնելով w նոր գագաթը և միացնելով այն բոլոր մյուս գագաթների հետ:

$$V(K_{1,m,n}) = V(K_{m,n}) \cup \{w\}$$

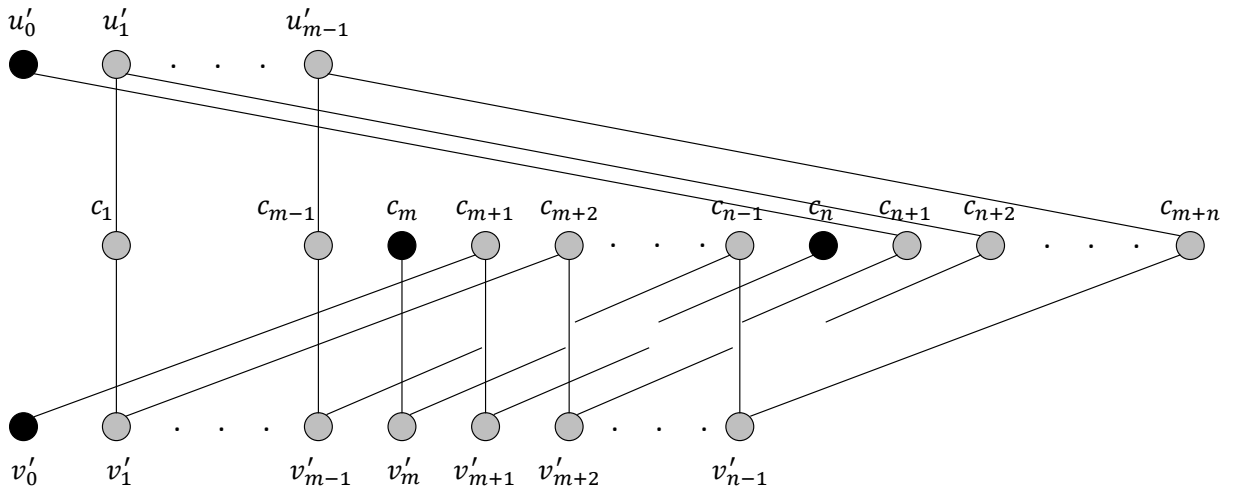
$$E(K_{1,m,n}) = E(K_{m,n}) \cup \{u_i w : 0 \leq i \leq m - 1\} \cup \{v_j w : 0 \leq j \leq n - 1\}$$

Թեորեմ 1.5.5. Եթե $(m+1, n+1) = 1$, ապա $K_{1,m,n}$ -ը ունի միջակայքային $(m+n)$ -ներկում:

Ապացույց. $K_{1,m,n}$ -ի $u_i v_j$ կողերը ներկենք ճիշտ այնպես, ինչպես $\alpha_{m,n}$ -ում: Թեորեմն ապացուցելու համար բավարար է ցույց տալ, որ մնացած կողերը հնարավոր է ներկել այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ պահանջները.

- (1) u_i և v_j գագաթների սպեկտրները մնան ամբողջ թվերի միջակայքեր
- (2) w գագաթի սպեկտրը ևս լինի ամբողջ թվերի միջակայք

Կառուցենք օժանդակ H երկկողմանի գրաֆը, որի երկու կողմերն են (B, C) , որտեղ B -ն համապատասխանում է $u_i w$ և $v_j w$ կողերին, իսկ C -ն համապատասխանում է այն գույներին, որոնք պետք է օգտագործվեն այդ կողերը ներկելու համար:



Նկ. 1.13: Թեորեմ 1.5.5-ում կառուցված H օժանդակ գրաֆը

$$B = \{u'_i : 0 \leq i \leq m - 1\} \cup \{v'_i : 0 \leq i \leq n - 1\}$$

որտեղ u'_i -ն և v'_j -ն համապատասխանում են, համապատասխանաբար, $u_i w$ -ին և $v_j w$ -ին $E(K_{1,m,n})$ -ից:

$$C = \{c_k : 1 \leq k \leq m + n\}$$

որտեղ c_k -ն համապատասխանում է k գույնին: $b \in B$ և $c_k \in C$ գագաթները միացնենք կողով այն և միայն դեպքում, երբ b -ին համապատասխանող կողի համար թույլատրելի է k գույնը: Նկատենք, որ $|B| = |C| = m + n$:

$S(u_0, \alpha_{m,n}) = [1, n]$, հետևաբար (1) պայմանը բավարարելու համար $u_0 w$ կողը կարող է ստանալ միայն $n + 1$ գույնը (մենք չենք ուզում թույլատրել 0 գույնը): Նմանապես, $v_0 w$ -ն կարող է ներկվել միայն $m + 1$ գույնով: $u_i w$ ($1 \leq i \leq m - 1$) կողերի համար ունենք երկու տարբերակ. i կամ $i + n + 1$: $v_j w$ ($1 \leq j \leq n - 1$) կողերի համար թույլատրում ենք j կամ $j + m + 1$ գույները: Ուստի,

$$E(H) = \{u'_i c_i : 1 \leq i \leq m - 1\} \cup \{u'_i c_{i+n+1} : 0 \leq i \leq m - 1\} \cup \\ \cup \{v'_j c_j : 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{v'_j c_{j+m+1} : 0 \leq j \leq n - 1\}$$

Ենթադրենք M -ը H -ում զուգակցում է: Ցանկացած $bc_k \in M$ կողի համար b գագաթին համապատասխանող $K_{1,m,n}$ -ի կողը ներկենք k գույնով: Եթե M -ը կատարյալ զուգակցում է, ապա G -ի բոլոր չներկված կողերը կներկվեն և բոլոր գույները օգտագործված կլինեն:

Հետևաբար, w գագաթի սպեկտրը կլինի $[1, m+n]$, իսկ (2) պայմանը բավարարված կլինի: (1) պայմանը բավարարված կլինի H գրաֆի կառուցման շնորհիվ:

Այսպիսով, ապացույցն ավարտելու համար ցույց տանք, որ H -ը ունի կատարյալ զուգակցում:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $m < n$: $m = n$ դեպքը բացառված է, քանի որ $(n + 1, n + 1) \neq 1$: H գրաֆի կառուցումից հետևում է, որ բոլոր գագաթների աստիճանը 2 է, բացի ճիշտ չորս գագաթներից, որոնց աստիճանը 1 է՝ u'_0, v'_0, c_m և c_n : Հետևաբար, H -ը բաղկացած է մի քանի զույգ ցիկլերից (քանի որ երկկողմանի է) և 2 պարզ շղթաներից: H -ը կունենա կատարյալ զուգակցում այն և միայն դեպքում, երբ երկու շղթաներն էլ ունենան կենտ երկարություն: Հետևաբար, u'_0 -ն և v'_0 -ն պետք է պատկանեն տարբեր շղթաների:

Ենթադրենք հակառակը, դիցուք u'_0 -ն և v'_0 -ն պատկանում են միևնույն P շղթային: Ներմուծենք կոորդինատային համակարգ և պատկերենք H գրաֆը հետևյալ կերպ. u'_i, v'_i և c_i գագաթները պատկերենք, համապատասխանաբար, $(i, 1)$, $(i, -1)$ և $(i, 0)$ կոորդինատներում (Նկ. 1.13): P -ի կողերը տրոհենք երկու խմբի: Առաջին խումբը պարունակում է $u'_i c_{i+n+1}$ և $v'_i c_i$ տիպի կողերը, իսկ երկրորդ խումբը պարունակում է մնացած կողերը: Նկատենք, որ P շղթայի յուրաքանչյուր կող կից է միայն մյուս խմբի կողերին: Եթե շրջանցենք P շղթան սկսելով u'_0 գագաթից, մենք կշարժվենք դեպի ներքև միայն ոչ ուղղաձիգ կողերով և կշարժվենք դեպի վեր միայն ուղղաձիգ կողերով: Ենթադրենք $u'_i c_{i+n+1}$ տիպի կողերով շարժվել ենք a անգամ, ամեն քայլում արքսիսը մեծացնելով $n + 1$ -ով, իսկ $c_{j+m+1} v'_j$ տիպի կողերով շարժվել ենք b անգամ, ամեն քայլում փոքրացնելով արքսիսը $m + 1$ -ով: Ուղղաձիգ կողերով շարժվելիս արքսիսը չի փոխվում: Շղթայի վերջին գագաթը v'_0 -ն է, որի արքսիսը 0 է, ուստի ստանում ենք հետևյալ հավասարությունը.

$$a(n + 1) - b(m + 1) = 0$$

Նկատենք, որ $a \leq m$ և $b \leq n$: Մյուս կողմից, $(m + 1, n + 1) = 1$, հետևաբար ունենք, որ $a = b = 0$: P շղթան չունի կողեր, ինչը հակասություն է: □

Թեորեմ 1.5.6. Եթե $(m + 1, n + 1) > 1$, ապա $K_{1,m,n}$ -ն միջակայքային ներկելի չէ:

Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը, որ $(m + 1, n + 1) = d > 1$ և β -ն $K_{1,m,n}$ -ի

միջակայքային ներկում է: $e \in E(K_{1,m,n})$ կողը կանվանենք d -կող, եթե $\beta(e) = dx$ որևէ $x \in \mathbb{Z}$ թվի համար: $D(v)$ -ով նշանակենք $v \in V(K_{1,m,n})$ գագաթին կից d -կողերի քանակը:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $S(w, \beta) = [1, m+n]$ (հակառակ դեպքում բոլոր կողերի գույները կշեղենք միևնույն չափով այնպես, որ w գագաթի սպեկտրը սկսվի 1 գույնով): Հետևաբար,

$$D(w) = \left\lfloor \frac{m+n}{d} \right\rfloor = \frac{m+n+2}{d} - 1$$

$|S(u_i, \beta)| = n+1$ բոլոր $0 \leq i \leq m-1$ թվերի համար, իսկ $|S(v_j, \beta)| = m+1$ բոլոր $0 \leq j \leq n-1$ թվերի համար: Ուստի,

$$D(u_i) = \frac{n+1}{d}, \quad 0 \leq i \leq m-1$$

$$D(v_j) = \frac{m+1}{d}, \quad 0 \leq j \leq n-1$$

$D(v)$ թվերի գումարը ըստ բոլոր $v \in V(K_{1,m,n})$ գագաթների պետք է հավասար լինի գրաֆում d -կողերի թվի կրկնապատիկին:

$$D = \sum_{v \in V(K_{1,m,n})} D(v) = \frac{m+n+2}{d} - 1 + m \frac{n+1}{d} + n \frac{m+1}{d} = \frac{2(m+1)(n+1)}{d} - 1$$

Սա հակասություն է, քանի որ D -ն կենտ թիվ է: □

Այժմ փորձենք գնահատել $W(K_{1,m,n})$ պարամետրը, երբ $K_{1,m,n}$ գրաֆը ունի միջակայքային ներկում:

Թեորեմ 1.5.7. *Եթե $(m+1, n+1) = 1$, ապա $W(K_{1,m,n}) \leq m+n+1$:*

Ապացույց. Ենթադրենք α -ն $K_{1,m,n}$ գրաֆի միջակայքային t -ներկում է: Դիցուք e -ն և e' -ը, համապատասխանաբար, 1 և t գույներով ներկված կողերն են: Եթե e -ն և e' -ը կից են, ապա $t \leq m+n$: Այժմ ենթադրենք, որ նրանք կից չեն: Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

Դեպք 1. e կողը կից է w գագաթին: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $e = wu_0$ և $e' = u_{m-1}v_{n-1}$ (այն դեպքը, երբ e -ն միացնում է w -ն V -ի որևէ գագաթի հետ, համանման է): Քանի որ $\alpha(e) = 1$, ստանում ենք, որ $\alpha(u_0v_{n-1}) \leq n+1$ և $t = \alpha(u_{m-1}v_{n-1}) \leq m+n+1$: Այժմ դիցուք $t = m+n+1$: Սրանից հետևում է, որ $\alpha(u_0v_{n-1}) = n+1$ և $\alpha(u_0v_i) \leq n$ բոլոր $i = 0, \dots, n-2$ թվերի համար: Հետևաբար, v_i գագաթին կից ոչ մի կող, $i = 0, \dots, n-2$, չի կարող ներկված լինել $m+n+1$ գույնով:

Նույնը վերաբերում է նաև w -ին կից կողերին, քանի որ $\alpha(wu_0) = 1$: Այսինքն, e' -ը $m + n + 1$ գույնով ներկված միակ կողն է:

Դեպք 2. e' կողը կից է w գագաթին: Ապացույցը համանման է Դեպք 1-ին:

Դեպք 3. e -ը և e' -ը կից չեն w գագաթին: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $e = u_0v_0$ և $e' = u_{m-1}v_{n-1}$: Առաջին դեպքի նման ստանում ենք, որ $\alpha(u_0v_{n-1}) \leq n + 1$ և $t = \alpha(u_{m-1}v_{n-1}) \leq m + n + 1$: Այնուհետև, եթե $t = m + n + 1$, ստանում ենք $\alpha(u_0v_{n-1}) = n + 1$ և $\alpha(u_{m-1}v_0) = m + 1$: Հետևաբար, $\alpha(u_0v_i) \leq n$, երբ $i = 1, \dots, n - 2$, և $\alpha(u_i v_0) \leq m$, երբ $i = 1, \dots, m - 2$: Այսինքն, $u_{m-1}v_{n-1}$ -ից բացի որևէ այլ կող ներկված չէ $m + n + 1$ գույնով:

α -ն $K_{1,m,n}$ -ի կամայական ներկում է, ուստի ունենք, որ $W(K_{1,m,n}) \leq m + n + 1$: □

Պնդում 1.5.8. Քանի որ $w(K_{1,m,n}) \geq \Delta(K_{1,m,n}) = m + n$, նախորդ թեորեմի ապացույցից հետևում է, որ եթե $K_{1,m,n}$ -ը ունի միջակայքային t -ներկում, ապա կամ $t = m + n$, կամ $t = m + n + 1$ և գոյություն ունի առավելագույն գույնով ներկված միայն մեկ կող:

Հաջորդ թեորեմում կստանանք $W(K_{1,m,m+1})$ -ի ճշգրիտ արժեքը:

Թեորեմ 1.5.9. $W(K_{1,m,m+1}) = 2m + 1$:

Ապացույց. Քանի որ $(m + 1, m + 2) = 1$, Թեորեմ 1.5.7-ից հետևում է, որ $W(K_{1,m,m+1}) \leq 2m + 2$: Դիցուք α -ն $K_{1,m,m+1}$ -ի միջակայքային $(2m + 2)$ -ներկում է: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $S(w, \alpha) = [1, 2m + 1]$: Հակառակ դեպքում, երբ $S(w, \alpha) = [2, 2m + 2]$, կարող ենք կառուցել նոր β ներկում հետևյալ կերպ. $\beta(e) = 2m + 3 - \alpha(e)$ բոլոր $e \in E(K_{1,m,m+2})$ կողերի համար: Պնդում 1.5.8-ի համաձայն գոյություն ունի $2m + 2$ գույնով ներկված միայն մեկ կող:

U բազմության կամայական գագաթի սպեկտրը $[j, j + m + 2]$ է, որևէ $j \in [1, m]$ թվի համար: Հետևաբար, U -ի բոլոր գագաթների սպեկտրները պարունակում են $m + 1$ գույնը: Դիցուք M -ը $m + 1$ գույնով ներկված կողերից կազմված զուգակցումն է: Ենթադրենք wz -ը w -ին կից այն կողն է, որը ներկված է $m + 1$ գույնով: Հնարավոր է երկու դեպք.

Դեպք 1. $z \in U$: $U \setminus \{z\}$ բազմության մնացած $m - 1$ գագաթները M զուգակցման կողերով միացած են V -ի $m - 1$ իրարից տարբեր գագաթների: Հետևաբար, V -ի մնացած 2 գագաթները ծածկված չեն M -ով: Նրանց սպեկտրները կլինեն $[m + 2, 2m + 2]$,

հետևաբար գոյություն ունեն $2m + 2$ գույնով ներկված երկու տարբեր կողեր, ինչը հակասություն է:

Դեպք 2. $z \in V$: U -ի բոլոր m գագաթները M զուգակցման կողերով միացած են $V \setminus \{z\}$ բազմության m իրարից տարբեր գագաթների: Հետևաբար, V -ի բոլոր գագաթները ծածկված են M -ով և նրանցից ոչ մեկի սպեկտրը չի կարող պարունակել $2m + 2$ գույնը: Քանի որ $2m + 2$ գույնը բացակայում է նաև w գագաթի սպեկտրում, ստանում ենք հակասություն:

□

Այժմ ապացուցենք որոշ արդյունքներ $K_{l,m,n}$ լրիվ երեք կողմանի գրաֆների համար, երբ $l > 1$: Ցույց կտանք լրիվ երեք կողմանի գրաֆների երեք անվերջ ընտանիքներ, որոնցից երկուսի բոլոր գրաֆները միջակայքային ներկելի են, իսկ երրորդ ընտանիքի գրաֆները ներկելի չեն:

Թեորեմ 1.5.10. $K_{l,m,l+m}$ լրիվ երեք կողմանի գրաֆները միջակայքային ներկելի են:

Ապացույց. Դիցուք $K_{l,m,n}$ -ի երեք կողմերը հետևյալ բազմություններն են. $W = \{w_0, w_1, \dots, w_{l-1}\}$, $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}\}$ և $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{l+m-1}\}$: Սահմանենք $K_{l,m,l+m}$ -ի կողերի α ներկումը հետևյալ կերպ.

(1) $\alpha(w_i u_j) = i + j + 1$, որտեղ $i = 0, \dots, l - 1$, $j = 0, \dots, m - 1$:

(2) $\alpha(u_j v_k) = j + k + 1 + l$, որտեղ $j = 0, \dots, m - 1$, $k = 0, \dots, l + m - 1$:

(3) $\alpha(w_i v_k) = i + k + 1 + l + m$, որտեղ $i = 0, \dots, l + m - 1$, $k = 0, \dots, m - l + 2i$:

(4) $\alpha(w_i v_k) = -i + k + l$, որտեղ $i = 0, \dots, l - 1$, $k = m - l + 2i + 1, \dots, l + m - 1$:

Հեշտ է ստուգել, որ գագաթների սպեկտրները հետևյալն են.

- $S(w_i, \alpha) = [i + 1, i + l + 2m]$, երբ $i = 0, \dots, l - 1$, (1)-ի, (3)-ի և (4)-ի պատճառով,
- $S(u_j, \alpha) = [j + 1, j + 2l + m]$, երբ $j = 0, \dots, m - 1$, (1)-ի և (2)-ի պատճառով,
- $S(v_k, \alpha) = [k + l + 1, k + 2l + 2m]$, երբ $k = 0, \dots, m - l - 1$, (2)-ի և (3)-ի պատճառով,
- $S(v_k, \alpha) = [\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + m + 1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + l + 2m]$, երբ $k = m - l, \dots, l + m - 1$, (2)-ի, (3)-ի և (4)-ի պատճառով:

Հետևաբար, α -ն $K_{l,m,l+m}$ -ի միջակայքային $(2l + 2m - 1)$ -ներկում է: \square

Թեորեմ 1.5.11. $K_{2n,2n+1,2n+2}$ լրիվ երեք կողմանի գրաֆները միջակայքային ներկելի են և $w(K_{2n,2n+1,2n+2}) = 8n + 2$:

Ապացույց. Դիցուք $K_{2n,2n+1,2n+2}$ լրիվ երեք կողմանի գրաֆի կողմերն են $X = \{x_1, \dots, x_{2n}\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_{2n+1}\}$ և $Z = \{z_1, \dots, z_{2n+2}\}$: Կառուցենք $K_{2n,2n+1,2n+2}$ գրաֆի կողային α ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\alpha(x_{2i-1}y_j) = 4i + 2j - 3, \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n \text{ և } j = 1, \dots, 2n + 1 \quad (3)$$

$$\alpha(x_{2i}y_j) = 4i + 2j - 2, \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n \text{ և } j = 1, \dots, 2n + 1 \quad (4)$$

$$\alpha(x_{2i-1}z_k) = 4i + 2k - 4, \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n \text{ և } k = 1, \dots, 2n + 2 \quad (5)$$

$$\alpha(x_{2i}z_k) = 4i + 2k - 3, \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n \text{ և } k = 1, \dots, 2n + 2 \quad (6)$$

$$\alpha(y_{2j-1}z_{2k-1}) = 4j + 4k - 7, \quad \text{որտեղ } j = 1, \dots, n + 1 \text{ և } k = 1, \dots, n + 1 \quad (7)$$

$$\alpha(y_{2j-1}z_{2k}) = 4j + 4k - 6, \quad \text{որտեղ } j = 1, \dots, n + 1 \text{ և } k = 1, \dots, n + 1 \quad (8)$$

$$\alpha(y_{2j}z_{2k}) = 4j + 4k - 5, \quad \text{որտեղ } j = 1, \dots, n \text{ և } k = 1, \dots, n + 1 \quad (9)$$

$$\alpha(y_{2j}z_{2k-1}) = 4j + 4k - 4, \quad \text{որտեղ } j = 1, \dots, n \text{ և } k = 1, \dots, n + 1 \quad (10)$$

Կառուցումից հետևում է, որ գագաթների սպեկտրները կլինեն.

$$S(x_{2i-1}, \alpha) = [4i - 2, 4n + 4i] \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n, \text{ ըստ (3), (5) կետերի}$$

$$S(x_{2i}, \alpha) = [4i - 1, 4n + 4i + 1] \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n, \text{ ըստ (4), (6) կետերի}$$

$$S(y_j, \alpha) = [2j - 1, 4n + 2j] \quad \text{որտեղ } j = 1, \dots, 2n + 1, \text{ ըստ (3) - (10) կետերի}$$

$$S(z_{2k-1}, \alpha) = [4k - 3, 4n + 4k - 3] \quad \text{որտեղ } k = 1, \dots, n + 1, \text{ ըստ (5), (6), (7), (10) կետերի}$$

$$S(z_{2k}, \alpha) = [4k - 2, 4n + 4k - 2] \quad \text{որտեղ } k = 1, \dots, n + 1, \text{ ըստ (5), (6), (8), (9) կետերի}$$

Ուստի, ստանում ենք, որ α -ն միջակայքային $(8n + 2)$ -ներկում է: Մյուս կողմից, $K_{2n,2n+1,2n+2}$ գրաֆը բավարարում է Հետևանք 1.2.16-ի պայմաններին, հետևաբար $w(K_{2n,2n+1,2n+2}) \geq \max \{\Delta(K_{2n,2n+1,2n+2}), 2\delta(K_{2n,2n+1,2n+2})\} = 8n + 2$: Ուստի ստանում ենք, որ $w(K_{2n,2n+1,2n+2}) = 8n + 2$: \square

Աղյուսակ 1.3-ում ներկայացված է $K_{4,5,6}$ գրաֆի Թեորեմ 1.5.11-ում առաջարկված ներկումը:

	x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
x_1					2	4	6	8	10	12
x_2					3	5	7	9	11	13
x_3					6	8	10	12	14	16
x_4					7	9	11	13	15	17
y_1	3	4	7	8	1	2	5	6	9	10
y_2	5	6	9	10	4	3	8	7	12	11
y_3	7	8	11	12	5	6	9	10	13	14
y_4	9	10	13	14	8	7	12	11	16	15
y_5	11	12	15	16	9	10	13	14	17	18

Աղյուսակ 1.3: $K_{4,5,6}$ լրիվ երեք կողմանի գրաֆի միջակայքային 18-ներկումը ըստ Թեորեմ 1.5.11-ի:

Թեորեմ 1.5.12. Եթե l -ը, m -ը և n -ը կենտ են, ապա $K_{l,m,n} \notin \mathfrak{N}$:

Ապացույց. Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $K_{l,m,n}$ -ի բոլոր գագաթների աստիճանները զույգ են: Հետևաբար, գրաֆը էյլերյան է: Գրաֆում կողերի քանակը կենտ է. $|E(K_{l,m,n})| = lm + mn + ln$: Այսինքն, $K_{l,m,n}$ գրաֆը բավարարում է Հետևանք 1.1.4-ի պայմաններին և միջակայքային ներկելի չէ: \square

Կամայական l, m, n թվերի համար $K_{l,m,n}$ -ի ներկելիության վերաբերյալ առաջարկում ենք հետևյալ հիպոթեզը.

Հիպոթեզ 1.4. $K_{l,m,n}$ գրաֆը, որտեղ $l \leq m \leq n$ և $n > l + m$ միջակայքային ներկելի է այն և միայն դեպքում, երբ $K_{l,m,n-l-m}$ -ը միջակայքային ներկելի է:

Պարագրաֆի վերջում ցույց տանք, որ լրիվ հավասարակշռված բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային ներկումներում մասնակցող գույների քանակները կարելի է գնահատել լրիվ գրաֆի միջակայքային ներկումներում մասնակցող գույների քանակներով:

Թեորեմ 1.5.13. Եթե $n, r \in \mathbb{N}$ և nr արտադրյալը զույգ է, ապա

$$W\left(K_{\underbrace{n, \dots, n}_r}\right) \geq \begin{cases} nW(K_r) + n - 1 & \text{երբ } r\text{-ը զույգ է,} \\ \frac{n}{2}W(K_{2r}) - 1 & \text{երբ } n\text{-ը զույգ է:} \end{cases}$$

Ապացույց. Չույգ r -ի դեպքում արդյունքը ստացվում է Լեմմա 1.5.4-ից՝ վերցնելով $n_1 = \dots = n_r = 1$ և $d = n$:

Չույգ n -ի դեպքում արդյունքը ստացվում է Լեմմա 1.5.4-ից՝ վերցնելով $n_1 = \dots = n_r = 2$ և $d = \frac{n}{2}$: Նկատենք, որ $K_{\underbrace{2, \dots, 2}_r}$ գրաֆը իզոմորֆ է K_{2r} լրիվ գրաֆից հանած մեկ կատարյալ զուգակցմանը: Մյուս կողմից, ըստ Թեորեմ 1.4.6-ի, $W(K_{\underbrace{2, \dots, 2}_r}) \geq W(K_{2r}) - 1$: Ուստի երբ n -ը զույգ է, $W(K_{\underbrace{n, \dots, n}_k}) \geq \frac{n}{2} (W(K_{2r}) - 1) + \frac{n}{2} - 1 = \frac{n}{2} W(K_{2r}) - 1$: \square

Այս թեորեմը թույլ է տալիս $W(K_{2n})$ -ի ստորին գնահատականները օգտագործել լրիվ հավասարակշռված բազմակողմանիների մեծ թվով գույներով ներկումներ կառուցելու համար: Նկատենք, որ եթե այս թեորեմում տեղադրենք $W(K_{2r}) \geq 3r - 2$ գնահատականը, ապա կստանանք Թեորեմ 1.5.2-ում ստացված ստորին գնահատականը: Սակայն Թեորեմ 1.4.19-ի միջոցով հնարավոր է էապես լավացնել այդ գնահատականները:

Լեմմա 1.5.14. *Եթե $n, r \in \mathbb{N}$, $r = \prod_{i=1}^{\pi(r)} p_i^{\alpha_i}$, որտեղ p_i -ն i -րդ պարզ թիվն է, $\pi(r)$ -ը՝ r -ը չգերազանցող պարզ թվերի քանակը, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, իսկ nr արտադրյալը զույգ է, ապա*

$$W\left(K_{\underbrace{n, \dots, n}_r}\right) \geq \begin{cases} 2nr - n - nA_r - 1 & \text{երբ } r\text{-ն զույգ է,} \\ 2nr - n - \frac{n}{2}(A_r + 1) - 1 & \text{երբ } n\text{-ը զույգ է,} \end{cases}$$

որտեղ $A_r = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 4\alpha_5 + \frac{1}{2} \sum_{i=6}^{\pi(r)} \alpha_i(p_i + 1)$:

Ապացույց. Չույգ n -ի դեպքում գնահատականը ստացվում է Թեորեմ 1.5.13-ում $W(K_{2r})$ -ի փոխարեն Թեորեմ 1.4.19-ի գնահատականը դնելով: Չույգ r -ի դեպքում անհրաժեշտ է նաև հաշվի առնել, որ $A_{\frac{r}{2}} = A_r - 1$, քանի որ r և $\frac{r}{2}$ թվերի պարզ արտադրիչների վերլուծությունները տարբերվում են միայն 2-ի ցուցիչով: \square

Նկատենք, որ ստացված ստորին գնահատականները հեռու չեն Թեորեմ 1.2.5-ից ստացվող $W\left(K_{\underbrace{n, \dots, n}_r}\right) \leq 2nr - 3$ վերին գնահատականից:

2 Գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային ներկումներ

2.1 Գրաֆների դեկարտյան արտադրյալի միջակայքային ներկելիությունը

Գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային ներկումները առաջին անգամ դիտարկել են Գիառոն և Կուբալը 1997թ. [30]: Մասնավորապես, հեղինակները ստացել էին որոշ արդյունքներ ցանցային տիպի գրաֆների վերաբերյալ: Առաջին ընդհանուր բնույթի արդյունքը ևս ստացել են նույն հեղինակները [31, 43].

Թեորեմ 2.1.1. *Եթե $G, H \in \mathfrak{R}$, ապա $G \square H \in \mathfrak{R}$. Ընդ որում,*

$$w(G \square H) \leq w(G) + w(H) \text{ և } W(G \square H) \geq W(G) + W(H):$$

Պետրոսյանը [47] ցույց է տվել, որ համասեռ գրաֆների դեպքում միայն մի արտադրիչի միջակայքային ներկելիությունը բավարար է արտադրյալի միջակայքային ներկելիության համար.

Թեորեմ 2.1.2. *Եթե G և H գրաֆները համասեռ են և տեղի ունի հետևյալ պայմաններից գոնե մեկը.*

1. G -ն և H -ը ունեն կադարյալ զուգակցում,
2. $G \in \mathfrak{R}$,
3. $H \in \mathfrak{R}$,

ապա $G \square H \in \mathfrak{R}$:

Մենք ցույց կտանք, որ ոչ համասեռ գրաֆների դեպքում այս պնդումը միշտ չէ, որ տեղի ունի: Նախ նկատենք հետևյալ փաստը.

Լեմմա 2.1.3. *Եթե G -ն էլլերյան գրաֆ է, ունի զույգ թվով կողեր և կենտր թվով գագաթներ, իսկ H -ը կենտր թվով կողեր ունեցող էլլերյան գրաֆ է, ապա $G \square H$ արտադրյալը ևս էլլերյան է և ունի կենտր թվով կողեր:*

Ապացույց. $G \square H$ գրաֆը ակնհայտորեն էյլերյան է: Իսկ արտադրյալի կողերի քանակը՝ $|E(G \square H)| = |E(H)||V(G)| + |E(G)||V(H)|$, կենտ է, քանի որ $|E(G)|$ -ն զույգ է, իսկ $|E(H)|$ -ը և $|V(G)|$ -ն՝ կենտ: □

Եթե վերցնենք կամայական էյլերյան գրաֆի երկու օրինակ և մի օրինակի որևէ գագաթ նույնացնենք մյուս օրինակի որևէ գագաթի հետ, ապա ստացված գրաֆը կարելի է վերցնել որպես լեմմայի G գրաֆ: Մասնավորապես, այսպիսի գրաֆի օրինակ է թիթեռ գրաֆը, որն ունի միջակայքային ներկում (Աղ. 2.1): Որպես լեմմայի H գրաֆ կարելի է վերցնել օրինակ K_3 եռանկյունը, որը միջակայքային ներկելի չէ: Այսպիսով թիթեռ գրաֆի և եռանկյան դեկարտյան արտադրյալը, ըստ Լեմմա 2.1.3-ի, էյլերյան է և ունի կենտ թվով կողեր, ուստի, ըստ Հետևանք 1.1.4-ի, չունի միջակայքային ներկում:

Երկու միջակայքային չներկվող գրաֆների դեկարտյան արտադրյալը կարող է լինել ինչպես միջակայքային ներկելի, այնպես էլ չներկվող: Մասնավորապես, P_{10} Պետերսենի գրաֆը չի բավարարում Թեորեմ 1.1.1-ի պայմանին, ուստի միջակայքային ներկելի չէ, սակայն երկու այդպիսի գրաֆների արտադրյալը $P_{10} \square P_{10}$ ներկելի է ըստ Թեորեմ 2.1.2-ի առաջին կետի: Մյուս կողմից, C_{2n+1} կենտ երկարության ցիկլը, ինչպես նաև երկու այդպիսի ցիկլերի արտադրյալը չեն բավարարում Թեորեմ 1.1.1-ի պայմանին, ուստի չեն կարող ունենալ միջակայքային ներկում:

	$G \square H \in \mathfrak{N}$	$G \square H \notin \mathfrak{N}$
$G \in \mathfrak{N}, H \in \mathfrak{N}$	$G = H = K_2$	հնարավոր չէ
$G \in \mathfrak{N}, H \notin \mathfrak{N}$	$G = K_2, H = K_3$	$G = \text{triangle}, H = K_3$
$G \notin \mathfrak{N}, H \notin \mathfrak{N}$	$G = H = P_{10}$	$G = H = K_3$

Աղյուսակ 2.1: Գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային ներկելիության հարաբերությունը առանձին բաղադրիչների միջակայքային ներկելիության հետ՝ օրինակներով:

2.2 Համասեռ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալներ

Այս պարագրաֆում ցույց կտանք, որ միջակայքային ներկելի գրաֆների դեկարտյան արտադրյալի միջակայքային ներկման մեջ մասնակցող առավելագույն գույների քանակի

համար Թեորեմ 2.1.1-ի գնահատականը կարելի է էապես լավացնել, եթե գրաֆներից մեկը համասեռ է: Նաև կապացուցենք, որ այդ գնահատականները էլ ավելի կլավացվեն, եթե արտադրյալում մասնակցող բաղադրիչներից մեկի ներկումը բավարարի լրացուցիչ պայմանների:

Թեորեմ 2.2.1. *Եթե $G, H \in \mathfrak{N}$, ընդ որում H -ը r -համասեռ է, ապա.*

$$W(G \square H) \geq W(G) + W(H) + r:$$

Ապացույց. Դիցուք α -ն G գրաֆի կողային միջակայքային t_G -ներկում է, իսկ β -ն H գրաֆի միջակայքային t_H -ներկում է: Թեորեմն ապացուցելու համար բավական է կառուցել $G \square H$ գրաֆի համար γ միջակայքային ներկում՝ $t_G + t_H + r$ գույներով:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $\underline{S}(u_1, \alpha) = 1$, $\underline{S}(v_1, \beta) = 1$, $\overline{S}(u_m, \alpha) = t_G$ և $\overline{S}(v_n, \beta) = t_H$: γ ներկումը սահմանենք հետևյալ կերպ.

(1) $\gamma((u_i, x)(u_i, y)) = \beta(xy) + \underline{S}(u_i, \alpha) - 1$, որտեղ $xy \in E(H)$ և $i = 1, \dots, m - 1$,

(2) $\gamma((x, v_j)(y, v_j)) = \alpha(xy) + \overline{S}(v_j, \beta)$, որտեղ $xy \in E(G)$ և $j = 1, \dots, n$,

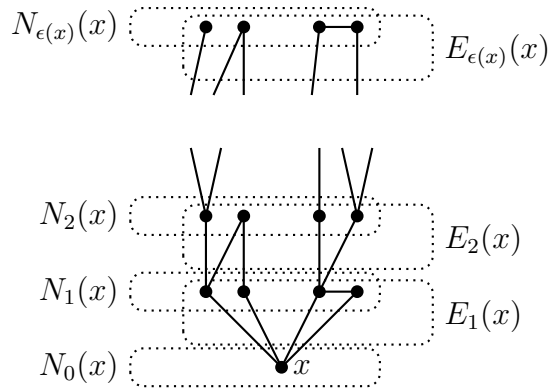
(3) $\gamma((u_m, x)(u_m, y)) = \beta(xy) + \overline{S}(u_m, \alpha) + r$, որտեղ $xy \in E(H)$:

Այսպիսի ներկման դեպքում արտադրյալ գրաֆի գագաթների սպեկտրները կլինեն.

$$\begin{aligned} S((u_i, v_j)) &= [\underline{S}(v_j, \beta) + \underline{S}(u_i, \alpha) - 1, \overline{S}(v_j, \beta) + \underline{S}(u_i, \alpha) - 1] \cup \\ &\cup [\underline{S}(u_i, \alpha) + \overline{S}(v_j, \beta), \overline{S}(u_i, \alpha) + \overline{S}(v_j, \beta)] = \\ &= [\underline{S}(v_j, \beta) + \underline{S}(u_i, \alpha) - 1, \overline{S}(u_i, \alpha) + \overline{S}(v_j, \beta)], \\ &i = 1, \dots, m - 1, \quad j = 1, \dots, n: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S((u_m, v_j)) &= [\underline{S}(u_m, \alpha) + \overline{S}(v_j, \beta), \overline{S}(u_m, \alpha) + \overline{S}(v_j, \beta)] \cup \\ &\cup [\underline{S}(v_j, \beta) + \overline{S}(u_m, \alpha) + r, \overline{S}(v_j, \beta) + \overline{S}(u_m, \alpha) + r] = \\ &= [\underline{S}(u_m, \alpha) + \overline{S}(v_j, \beta), \overline{S}(v_j, \beta) + \overline{S}(u_m, \alpha) + r], \\ &j = 1, \dots, n: \end{aligned}$$

Վերջին հավասարությունը տեղի ունի, քանի որ H գրաֆի համասեռությունից՝ $\overline{S}(v_j, \beta) - \underline{S}(v_j, \beta) = r - 1$: Նկատենք, որ $\underline{S}(u_1, v_1) = \underline{S}(v_1, \beta) + \underline{S}(u_1, \alpha) - 1 = 1$ և $\overline{S}(u_m, v_n) = \overline{S}(v_n, \beta) + \overline{S}(u_m, \alpha) + r = t_G + t_H + r$: Հետևաբար, Լեմմա 0.0.1-ից՝ γ -ն $G \square H$ գրաֆի միջակայքային $(t_G + t_H + r)$ -ներկում է: □



Նկ. 2.1: Գագաթների և կողերի տրոհումը ըստ x գագաթից ունեցած հեռավորության

Հետևանք 2.2.2. Եթե $G, H \in \mathfrak{G}$, ընդ որում G -ն r -համասեռ է, իսկ H -ը՝ r' -համասեռ, ապա $W(G \square H) \geq W(G) + W(H) + \max\{r, r'\}$:

Քանի որ համասեռ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալը ևս համասեռ է, հաջորդաբար կիրառելով Հետևանք 2.2.2-ը, կստանանք գնահատական k հատ համասեռ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալի համար.

Հետևանք 2.2.3. Դիցուք $G_1, G_2, \dots, G_k \in \mathfrak{G}$, G_i -ն r_i -համասեռ է, $i = 1, \dots, k$, ընդ որում $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_k$: Այդ դեպքում,

$$W(G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k) \geq \sum_{i=1}^k W(G_i) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^i r_j:$$

Թեորեմ 2.2.1-ի գնահատականը կարելի է էլ ավելի լավացնել, եթե խստացնենք պայմանները G գրաֆի ներկման վրա: Կատարենք որոշ նշանակումներ: Ֆիքսված $x \in V(G)$ գագաթի համար G կապակցված գրաֆի գագաթների և կողերի բազմությունները տրոհենք մակարդակների՝ ըստ x գագաթից ունեցած հեռավորության (Նկ. 2.1): Այսպես.

$$V(G) = \bigcup_{i=0}^{\epsilon(x)} N_i(x), \text{ որտեղ}$$

$$N_i(x) = \{v \in V(G) : d(v, x) = i\}, i = 0, \dots, \epsilon(x):$$

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{\epsilon(x)} E_i(G), \text{ որտեղ}$$

$$E_i(G) = \{uv \in E(G) : u \in N_{i-1}(x) \cup N_i(x), v \in N_i(x)\}, i = 1, \dots, \epsilon(x):$$

Բոլոր $v \in N_i(G)$ ($i = 1, \dots, \epsilon(x)$) գագաթների սպեկտրները տրոհենք երկու մասի (Նկ. 2.2).

$$S(v, \alpha) = S_x^-(v, \alpha) \cup S_x^+(v, \alpha), \text{ որտեղ}$$

$$S_x^-(v, \alpha) = \{\alpha(vu) : u \in N_{i-1}(x) \cup N_i(x)\},$$

$$S_x^+(v, \alpha) = \{\alpha(vu) : u \in N_{i+1}(x)\} :$$

$S_x^-(v, \alpha)$ -ն անվանենք v գագաթի ստորին սպեկտր, իսկ $S_x^+(v, \alpha)$ -ն՝ վերին սպեկտր:

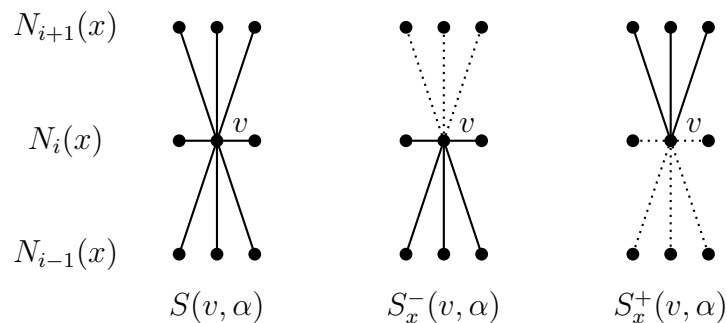
Կասենք, որ G կապակցված գրաֆի α ներկման համար $v \in V(G)$ գագաթը անջատող է x գագաթի նկատմամբ, եթե $\max S_x^-(v, \alpha) < \min S_x^+(v, \alpha)$: Այն դեպքում, երբ $S_x^-(v, \alpha) = \emptyset$, կհամարենք, որ $\max S_x^-(v, \alpha) = -\infty$, իսկ երբ $S_x^+(v, \alpha) = \emptyset$, կհամարենք, որ $\min S_x^+(v, \alpha) = +\infty$: Նկատենք, որ $S_x^-(x, \alpha) = \emptyset$, հետևաբար այն գագաթը, որի նկատմամբ գրաֆի գագաթները տրոհվում են մակարդակների, միշտ անջատող է:

Կասենք, որ G կապակցված գրաֆի α միջակայքային ներկումը սեպարաբել է x գագաթի նկատմամբ, եթե այդ ներկման համար $\forall v \in V(G)$ գագաթ անջատող է x -ի նկատմամբ:

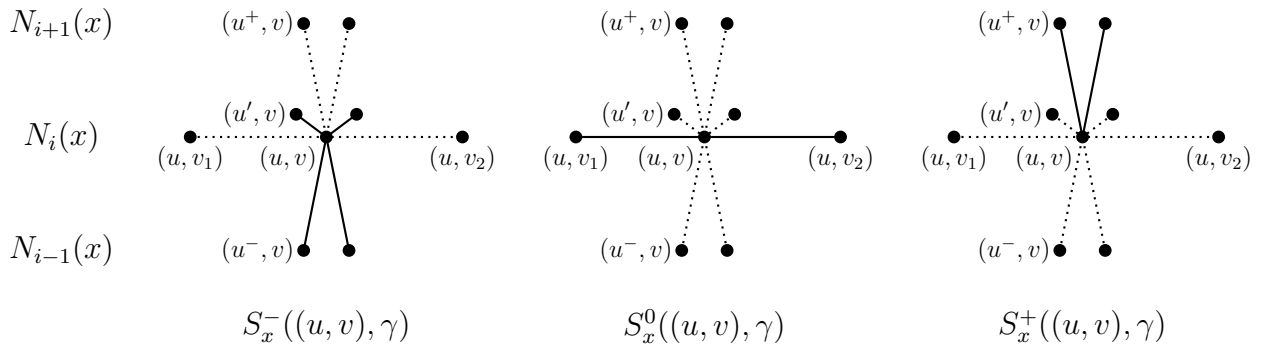
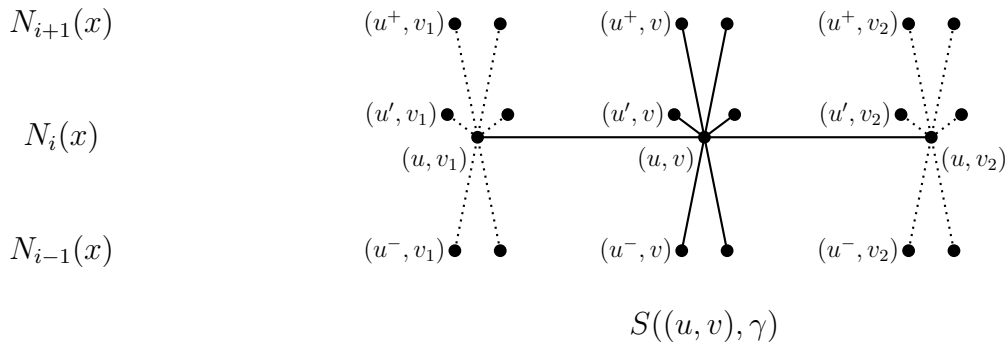
Թեորեմ 2.2.4. Դիցուք G կապակցված գրաֆը ունի սեպարաբել միջակայքային t_G -ներկում որևէ $x \in V(G)$ գագաթի նկատմամբ, ընդ որում գոյություն ունի $y \in N_{\epsilon(x)}(x)$ գագաթ, որի սպեկտրը պարունակում է t_G գույնը, իսկ $1 \in S(x, \alpha)$: Եթե H գրաֆը r -համասեռ է և ունի միջակայքային t_H -ներկում, ապա

$$W(G \square H) \geq t_G + t_H + \epsilon(x)r:$$

Ապացույց. Դիցուք α -ն G -ի սեպարաբել միջակայքային t_G -ներկում է $x \in V(G)$ գագաթի նկատմամբ, β -ն H -ի միջակայքային t_H -ներկում է: $G \square H$ գրաֆի համար սահմանենք γ ներկումը հետևյալ կերպ.



Նկ. 2.2: Գագաթի ստորին և վերին սպեկտրները



Նկ. 2.3: Դեկարտյան արտադրյալի (u, v) գագաթի սպեկտրի տրոհումը

- (1) $\gamma((x, v)(x, v')) = \beta(vv')$, որտեղ $vv' \in E(H)$,
- (2) $\gamma((u, v)(u, v')) = \beta(vv') + \max S_x^-(u, \alpha) + ir$,
որտեղ $u \in N_i(x)$, $vv' \in E(H)$ և $i = 0, \dots, \epsilon(x)$,
- (3) $\gamma((u, v)(u', v)) = \alpha(uu') + \bar{S}(v, \beta) + ir - r$,
որտեղ $uu' \in E_i(x)$, $v \in V(H)$ և $i = 1, \dots, \epsilon(x)$:

Ցույց տանք, որ այս ներկման դեպքում բոլոր գագաթների սպեկտրները միջակայքեր են: Յուրաքանչյուր գագաթի սպեկտր տրոհենք 3 չհատվող բազմությունների (Նկ. 2.3).

$$S((u, v), \gamma) = S_x^-(u, v, \gamma) \cup S_x^0(u, v, \gamma) \cup S_x^+(u, v, \gamma), \text{ որտեղ}$$

$$S_x^0(u, v, \gamma) = \{\gamma((u, v)(u, v')) : vv' \in E(H)\},$$

$$S_x^+(u, v, \gamma) = \{\gamma((u, v)(u', v)) : uu' \in E_{i+1}(x)\},$$

$$S_x^-(u, v, \gamma) = \{\gamma((u, v)(u', v)) : uu' \in E_i(x)\},$$

$$u \in N_i(x), i = 0, 1, \dots, \epsilon(x) :$$

Երբ $u \in N_{\epsilon(x)}(x)$, համարենք, որ $S_x^+((u, v), \gamma) = \emptyset$, իսկ $S_x^-(u, v, \gamma) = \emptyset$:

Հաշվի առնելով, որ β -ն H -ի միջակայքային ներկում է, ըստ γ ներկման կառուցման կստանանք.

$$\begin{aligned} S_x^0((x, v), \gamma) &= \{\beta(vv') | vv' \in E(H)\} = [\underline{S}(v, \beta), \overline{S}(v, \beta)], \\ S_x^0((u, v), \gamma) &= \{\beta(vv') + \max S_x^-(u, \alpha) + ir : vv' \in E(H)\} \\ &= [\underline{S}(v, \beta) + \max S_x^-(u, \alpha) + ir, \overline{S}(v, \beta) + \max S_x^-(u, \alpha) + ir] : \end{aligned}$$

Քանի որ α -ն G -ի սեպարաբել միջակայքային ներկում է x -ի նկատմամբ՝

$$\begin{aligned} S_x^+((u, v), \gamma) &= \{\alpha(uu') + \overline{S}(v, \beta) + (i+1)r - r : uu' \in E_{i+1}(x)\} \\ &= [\min S_x^+(u, \alpha) + \overline{S}(v, \beta) + ir, \max S_x^+(u, \alpha) + \overline{S}(v, \beta) + ir], \\ S_x^-((u, v), \gamma) &= \{\alpha(uu') + \overline{S}(v, \beta) + ir - r : uu' \in E_i(x)\} \\ &= [\min S_x^-(u, \alpha) + \overline{S}(v, \beta) + ir - r, \max S_x^-(u, \alpha) + \overline{S}(v, \beta) + ir - r] : \end{aligned}$$

Ըստ թեորեմի պայմանի, $1 \in S(x, \alpha)$: Ուստի՝ $\min S_x^+(x, \alpha) = 1$, և $\forall v \in V(H)$ գազաթի համար՝

$$S((x, v), \gamma) = [\underline{S}(v, \beta), \max S_x^+(x, \alpha) + \overline{S}(v, \beta)]:$$

Քանի որ $\underline{S}(v, \beta) - (\overline{S}(v, \beta) - r) = 1$ և $\min S_x^+(u, \alpha) - \max S_x^-(u, \alpha) = 1$, ստացվում է, որ $\forall u \in V(G)$, $u \neq x$, և $\forall v \in V(H)$ գազաթի համար՝

$$S((u, v), \gamma) = [\min S_x^-(u, \alpha) + \overline{S}(v, \beta) + ir - r, \max S_x^+(u, \alpha) + \overline{S}(v, \beta) + ir]:$$

Այսպիսով, $G \square H$ գրաֆի բոլոր գազաթների սպեկտրները միջակայքեր են: Քանի որ β -ն H -ի միջակայքային t_H -ներկում է, $\exists v', v'' \in V(H)$ այնպիսիք, որ $1 \in S(v', \beta)$, $t_H \in S(v'', \beta)$: Մյուս կողմից, ըստ թեորեմի պայմանների՝ $1 \in S(x, \alpha)$ և $t_G \in S(y, \alpha)$, որտեղ $y \in N_{\epsilon(x)}(x)$: Հետևաբար՝

$$1 \in S((x, v'), \gamma) \text{ և } t_G + t_H + \epsilon(x)r \in S((y, v''), \gamma):$$

Ըստ Լեմմա 0.0.1-ի՝ γ -ն G գրաֆի միջակայքային կողային $(t_G + t_H + \epsilon(x)r)$ -ներկում է: □

Հետևանք 2.2.5. Դիցուք G -ն հանդիսանում է զույգ երկարությամբ ցիկլ, շղթա, n -չափանի խորանարդ, թրթուրածառ կամ լրիվ երկկողմանի գրաֆ, իսկ H -ը միջակայքային ներկելի r -համասեռ գրաֆ է: Այդ դեպքում.

$$W(G \square H) \geq W(G) + W(H) + \text{diam}(G)r:$$

Մասնավորապես՝

$$W(C_{2n} \square H) \geq n(r+1) + W(H) + 1,$$

$$W(P_n \square H) \geq (n-1)(r+1) + W(H),$$

$$W(Q_n \square H) \geq \frac{n(n+2r+1)}{2} + W(H),$$

$$W(T \square H) \geq |E(T)| + W(H) + \text{diam}(T)r,$$

$$W(K_{m,n} \square H) \geq m + n + 2r + W(H) - 1:$$

Ապացույց. Այս հետևանքն ապացուցելու համար բավական է ստուգել, որ նշված դասերին պատկանող գրաֆները ունեն առավելագույն թվով գույներով այնպիսի ներկումներ, որոնք բավարարում են Թեորեմ 2.2.4-ի պայմաններին:

1. $G = C_{2n}$

Դիցուք, $V(C_{2n}) = \{x, v_1, \dots, v_{n-1}, y, u_{n-1}, \dots, u_1\}$: Այս գրաֆի $W(C_{2n})$ -ներկումը տրվում է հետևյալ կերպ.

$$\alpha(xv_1) = 1$$

$$\alpha(xu_1) = 2$$

$$\alpha(v_i v_{i+1}) = i + 1 \quad \alpha(u_i u_{i+1}) = i + 2 \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n - 2$$

$$\alpha(v_{n-1} y) = n \quad \alpha(u_{n-1} y) = n + 1$$

Այս դեպքում, եթե գագաթները տրոհենք մակարդակների ըստ x գագաթից ունեցած հեռավորության, ստորին և վերին սպեկտրները կլինեն.

$$S_x^-(v_i, \alpha) = \{i\} \quad S_x^+(v_i, \alpha) = \{i + 1\} \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n - 2$$

$$S_x^-(u_i, \alpha) = \{i + 1\} \quad S_x^+(u_i, \alpha) = \{i + 2\} \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n - 2$$

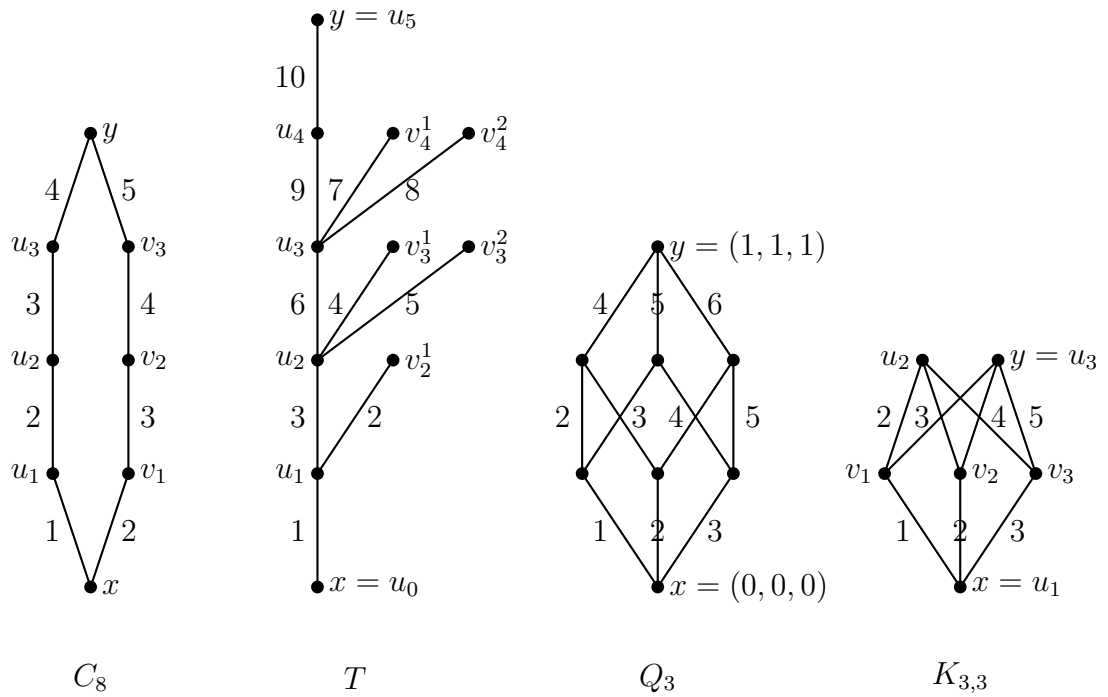
Այսպիսով,

$$i = \max S_x^-(v_i, \alpha) < \min S_x^+(v_i, \alpha) = i + 1 \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n - 2$$

$$i + 1 = \max S_x^-(u_i, \alpha) < \min S_x^+(u_i, \alpha) = i + 2 \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n - 2$$

$$S_x^+(y, \alpha) = \emptyset$$

Փաստորեն, α ներկման համար բոլոր գագաթները անջատող են, այսինքն՝ α -ն C_{2n} -ի սեպարաբել ներկում է: Մյուս կողմից, $1 \in S(x, \alpha)$, $W(C_{2n}) = n + 1 \in S(y, \alpha)$, իսկ $d(x, y) = \epsilon(x) = \text{diam}(C_{2n}) = n$: Ուստի, Թեորեմ 2.2.4-ի բոլոր պայմանները բավարարված են:



Նկ. 2.4: C_8 -ի, թրթուրածառի, Q_3 -ի և $K_{3,3}$ -ի սեպարաբել ներկումները

2. $G = T$, T -ն թրթուրածառ է

Դիցուք T -ի գագաթների բազմությունը հետևյալն է.

$$V(T) = \{u_0, u_1, v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, u_2, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}^1, \dots, v_{n-1}^{k_n}, u_n\}$$

որտեղ $n \geq 1$, $k_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n - 1$: Թրթուրածառի կողերի բազմությունը կլինի՝

$$E(T) = \{u_i u_{i+1} : i = 0, \dots, n - 1\} \cup \{u_i v_i^j : i = 1, \dots, n - 1, j = 1, \dots, k_i\}$$

T -ի β միջակայքային կողային ներկումը տրվում է հետևյալ կերպ.

$$\beta(u_i u_{i+1}) = \sum_{s=1}^i k_s + i + 1 \quad \text{որտեղ } i = 0, \dots, n - 1$$

$$\beta(u_i v_i^j) = \sum_{s=1}^{i-1} k_s + i + j \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n - 1, j = 1, \dots, k_i$$

Տրոհենք T -ի գագաթներն ու կողերը մակարդակների ըստ u_0 գագաթից ունեցած հեռավորության: Այս դեպքում վերին և ստորին սպեկտրները կլինեն.

$$S_{u_0}^-(u_i, \beta) = \left\{ \sum_{s=1}^i k_s + i + 1 \right\} \quad \text{որտեղ } i = 1, \dots, n$$

$$S_{u_0}^+(u_i, \beta) = \left[\sum_{s=1}^{i-1} k_s + i + 1, \sum_{s=1}^i k_s + i + 1 \right] \quad \text{որտեղ } i = 0, \dots, n - 1$$

$$S_{u_0}^-(v_i^j, \beta) = \left\{ \sum_{s=1}^{i-1} k_s + i + j \right\} \quad \text{որտեղ } i = 0, \dots, n - 1, j = 1, \dots, k_i$$

$$S_{u_0}^+(v_i^j, \beta) = \emptyset, S_{u_0}^+(u_n, \beta) = \emptyset$$

Ուստի, բոլոր գագաթները անջատող են u_0 գագաթի նկատմամբ: Մյուս կողմից՝

$$1 \in S(u_0, \beta)$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} k_s + n = |E(T)| = W(T) \in S(u_n, \beta)$$

$$d_T(u_0, u_n) = n = \text{diam}(T)$$

Հետևաբար, բավարարված են Թեորեմ 2.2.4-ի բոլոր պայմանները:

3. $G = P_n$

Նկատենք, որ P_n շղթան թրթուրածառի մասնավոր դեպքն է, երբ

$$k_1 = \dots = k_{n-1} = 0:$$

Ուստի այս դեպքի ապացույցը բխում է նախորդ կետից:

4. $G = K_{m,n}$

$$V(K_{m,n}) = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}$$

$$E(K_{m,n}) = \{u_i v_j : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$$

$K_{m,n}$ -ի γ միջակայքային ներկումը տրվում է հետևյալ կերպ.

$$\gamma(u_i v_j) = i + j - 1$$

Գագաթների և կողերի բազմությունները տրոհենք ըստ u_1 գագաթից ունեցած հեռավորության: Գագաթների ստորին և վերին սպեկտրները կլինեն՝

$$S_{u_1}^-(v_j, \gamma) = \{\gamma(u_1 v_j)\} = \{j\} \quad \text{որտեղ } j = 1, \dots, n$$

$$S_{u_1}^+(v_j, \gamma) = \{\gamma(v_j u_i) | i = 2, \dots, m\} = [j + 1, j + m - 1] \quad \text{որտեղ } j = 1, \dots, n$$

$$S_{u_1}^+(u_i, \gamma) = \emptyset \quad \text{որտեղ } i = 2, \dots, m$$

Այսպիսով, բոլոր գագաթները անջատող են u_1 -ի նկատմամբ և

$$1 \in S(u_1, \gamma)$$

$$m + n - 1 = W(K_{m,n}) \in S(u_m, \gamma)$$

$$d_{K_{m,n}}(u_1, u_m) = 2 = \text{diam}(K_{m,n})$$

Թեորեմ 2.2.4-ի բոլոր պայմանները բավարարված են:

5. $G = Q_n$

$$V(Q_n) = \{(b_1, \dots, b_n) | b_i \in \{0, 1\}\}$$

n -չափանի խորանարդի α միջակայքային $\frac{1}{2}n(n+1)$ -ներկումը տրվել է [46]-ում, իսկ [57, 56]-ում ապացուցվել է, որ ավելի շատ գույներ օգտագործող ներկում գոյություն չունի: Այդ ներկման կառուցման ավգորիթից հետևում է, որ այն սեպարաբել է, ընդ որում՝

$$1 \in S((0, \dots, 0), \alpha)$$

$$\frac{1}{2}n(n+1) = W(Q_n) \in S((1, \dots, 1), \alpha)$$

$$d_{Q_n}((0, \dots, 0), (1, \dots, 1)) = n = \text{diam}(Q_n)$$

Ուստի Թեորեմ 2.2.4-ի բոլոր պայմանները այս դեպքում ևս բավարարվում են: \square

2.3 Երկկողմանի գրաֆների դեկարտյան արտադրյալներ

Այս պարագրաֆում կդիտարկենք այնպիսի դեկարտյան արտադրյալներ, որոնց արտադրիչներից մեկը երկկողմանի գրաֆ է: Հայտնի է, որ երկկողմանի գրաֆների միջակայքային ներկելիությունը պարզելը NP-լրիվ խնդիր է [79]: Մինչ այժմ բաց է մնում 4 առավելագույն աստիճան ունեցող երկկողմանի գրաֆների միջակայքային ներկելիության հարցը [40, 63]: Այս պարագրաֆում ցույց կտանք, որ փոքր առավելագույն աստիճանով երկկողմանի գրաֆների որոշ դասերի դեկարտյան արտադրյալները K_2 գրաֆի հետ ունեն միջակայքային ներկումներ:

Նախ ցույց տանք, որ h -չափանի խորանարդի մասնակցությամբ դեկարտյան արտադրյալների ներկումները կապված են գրաֆների միջակայքային (t, h) -ներկումների հետ:

Թեորեմ 2.3.1. $G \in \mathfrak{N}^h$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $G \square Q_h \in \mathfrak{N}$:

Ապացույց. Դիցուք α -ն G -ի միջակայքային (t, h) -ներկում է: Կառուցենք $G \square Q_h$ գրաֆի β ներկումը հետևյալ կերպ: Նախ $G \square Q_h$ -ի յուրաքանչյուր G -շերտ ներկենք α ներկման համաձայն: Այնուհետև, կամայական $u \in V(G)$ գագաթի համար, ներկենք $G \square Q_h$ -ի համապատասխան Q_h -շերտը օգտագործելով $\overline{S(u, \alpha)}$ բազմությունից h գույներ: Պարզ է, որ ցանկացած $(u, v) \in V(G \square Q_h)$ գագաթի համար, $S((u, v), \beta) = S(u, \alpha) \cup \overline{S(u, \alpha)} = [\underline{S}(u, \alpha), \underline{S}(u, \alpha) + d_G(u) + h - 1]$: Այստեղից հետևում է $G \square Q_h \in \mathfrak{N}$:

Դիցուք γ -ն $G \square Q_h$ -ի միջակայքային t' -ներկում է: Այս կողային ներկման սահմանափակումը $G \square Q_h$ -ի որևէ G -շերտի կողերի վրա կարող է ձևափոխվել G -ի միջակայքային (t'', h) -ներկման, որտեղ $t'' \leq t'$: \square

Այս թեորեմից հետևում է, որ G գրաֆի միջակայքային h -անցք-ներկելիության վերաբերյալ կամայական արդյունք կարելի է վերածել $G \square Q_h$ գրաֆի միջակայքային ներկելիության մասին արդյունքի: Ավելին, եթե G -ն երկկողմանի է, ապա $G \square Q_h$ -ը ևս երկկողմանի է:

Այժմ դիտարկենք 4 առավելագույն աստիճան ունեցող երկկողմանի գրաֆների դեկարտյան արտադրյալները:

Թեորեմ 2.3.2. *Եթե G -ն երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(G) = 4$, ապա $G \in \mathfrak{N}^1$ և $w^1(G) = 4$:*

Ապացույց. Դիցուք G -ն երկկողմանի գրաֆ է 4 առավելագույն աստիճանով: Հայտնի է, որ եթե G -ն չունի 3 աստիճանով գագաթ, ապա այն ունի միջակայքային 4-ներկում [28]: Ուստի, $G \in \mathfrak{N}^1$ և $w^1(G) = 4$: Այժմ ենթադրենք, որ G -ն ունի 3 աստիճանով որոշ գագաթներ: Կառուցենք նոր G^* գրաֆը հետևյալ կերպ. G -ի յուրաքանչյուր 3 աստիճան ունեցող գագաթին ավելացնենք կախված կող: Հեշտ է տեսնել, որ G^* -ը երկկողմանի գրաֆ է 4 առավելագույն աստիճանով և չունի 3 աստիճանով գագաթներ, ուստի, այն ևս ունի միջակայքային 4-ներկում: Այժմ դիտարկենք այս միջակայքային 4-ներկման սահմանափակումը G -ի կողերի վրա: Պարզ է, որ այս ներկումը G -ի միջակայքային $(4, 1)$ -ներկում է: □

Թեորեմներ 2.3.1-ի և 2.3.2-ի համաձայն ստանում ենք հետևյալ արդյունքը.

Հետևանք 2.3.3. *Եթե G -ն երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(G) \leq 4$, ապա $G \square K_2 \in \mathfrak{N}$:*

[17]-ում հեղինակները ցույց են տվել, որ բոլոր $(5, 3)$ -երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆները միջակայքային 1-անցք-ներկելի են: Այժմ դիտարկենք բոլոր երկկողմանի գրաֆները, որոնց առավելագույն աստիճանը 5 է:

Թեորեմ 2.3.4. *Եթե G -ն երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(G) = 5$ և չունի 3 աստիճան ունեցող գագաթ, ապա $G \in \mathfrak{N}^1$ և $w^1(G) = 5$:*

Ապացույց. Դիցուք G -ն երկկողմանի գրաֆ է, որի առավելագույն աստիճանը 5 է, բայց չունի 3 աստիճան ունեցող գագաթ: Ըստ Հոլլի թեորեմի, G -ն ունի առավելագույն աստիճան ունեցող գագաթները ծածկող զուգակցում: Դիցուք M -ը G -ի այդպիսի զուգակցում է: Դիտարկենք $G' = G - M$ գրաֆը: Պարզ է, որ G' -ը երկկողմանի գրաֆ

է, որի համար $\Delta(G') = 4$: Ինչպես Թեորեմ 2.3.2-ի ապացույցում, կարող ենք ցույց տալ, որ G' -ը ունի α միջակայքային $(4, 1)$ -ներկում այնպիսին, որ կամայական $v \in V(G')$ գագաթի համար, որի համար $d_{G'}(v) \in \{1, 2, 4\}$, $S(v, \alpha)$ -ն ամբողջ թվերի միջակայք է: Այժմ կառուցենք G' -ի նոր β ներկումը վերցնելով α ներկման գույները և փոխարինելով 3 և 4 գույները համապատասխանաբար 4-ով և 5-ով: Այսպիսով, ամեն $v \in V(G')$ գագաթի համար կունենանք, որ

- եթե $d_{G'}(v) = 4$, ապա $S(v, \beta) = \{1, 2, 4, 5\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 3$, ապա $S(v, \beta) \in \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 2$, ապա $S(v, \beta) \in \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 1$, ապա $S(v, \beta) \in \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$:

Այժմ սահմանենք G -ի γ կողային ներկումը հետևյալ կերպ.

- 1) կամայական $e \in E(G')$ կողի համար $\gamma(e) = \beta(e)$,
- 2) կամայական $e \in M$ կողի համար $\gamma(e) = 3$:

Քանի որ G -ն չունի 3 աստիճան ունեցող գագաթ, ապա կամայական $v \in V(G)$ գագաթի համար ստանում ենք, որ

- եթե $d_G(v) = 5$, ապա $S(v, \gamma) = [1, 5]$,
- եթե $d_G(v) = 4$, ապա $S(v, \gamma) \in \{\{1, 4\}, [2, 5], \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}\}$,
- եթե $d_G(v) = 2$, ապա $S(v, \gamma) \in \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$,
- եթե $d_G(v) = 1$, ապա $S(v, \gamma) \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$:

Այստեղից հետևում է, որ γ -ն G -ի միջակայքային $(5, 1)$ -ներկում է: □

Հետևանք 2.3.5. *Եթե G -ն երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(G) = 5$, և չունի 3 աստիճան ունեցող գագաթ, ապա $G \square K_2 \in \mathfrak{R}$:*

Նախորդ թեորեմում երեք աստիճան ունեցող գագաթների գոյություն չունենալու պայմանը կարող ենք փոխարինել կատարյալ զուգակցման գոյության պայմանով:

Թեորեմ 2.3.6. *Եթե G -ն կապարյալ զուգակցում ունեցող երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(G) = 5$, ապա $G \in \mathfrak{R}^1$ և $w^1(G) = 5$:*

Ապացույց. Դիտարկենք $G' = G - M$ գրաֆը, որտեղ M -ը G -ում առկա որևէ կատարյալ զուգակցում է: Թեորեմ 2.3.4-ի ապացույցում նկարագրված եղանակով կարելի է կառուցել G' -ի β ճիշտ կողային ներկում $1, 2, 4, 5$ գույներով այնպես, որ ցանկացած $v \in V(G')$ գագաթի համար կունենանք հետևյալը.

- եթե $d_{G'}(v) = 4$, ապա $S(v, \beta) = \{1, 2, 4, 5\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 3$, ապա $S(v, \beta) \in \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 2$, ապա $S(v, \beta) \in \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 1$, ապա $S(v, \beta) \in \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$:

G գրաֆի γ ներկումը կստացվի β ներկումից՝ M կատարյալ զուգակցման կողերը 3 գույնով ներկելով: Քանի որ M -ը ծածկում էր G -ի բոլոր գագաթները, γ ներկման դեպքում գագաթների սպեկտրները կբավարարեն հետևյալ պայմաններին.

- եթե $d_{G'}(v) = 5$, ապա $S(v, \beta) = [1, 5]$,
- եթե $d_{G'}(v) = 4$, ապա $S(v, \beta) \in \{[1, 4], \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, [2, 5]\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 3$, ապա $S(v, \beta) \in \{[1, 3], [2, 4], [3, 5]\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 2$, ապա $S(v, \beta) \in \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 1$, ապա $S(v, \beta) = \{3\}$:

Այսպիսով, γ -ն G -ի միջակայքային $(5, 1)$ -ներկում է և $w^1(G) = 5$: □

Հետևանք 2.3.7. *Եթե G -ն կախարյալ զուգակցում ունեցող երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(G) = 5$, ապա $G \square K_2 \in \mathfrak{N}$:*

[17]-ում հեղինակները ցույց են տվել, որ բոլոր $(6, 4)$ -երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆները միջակայքային 1-անցք-ներկելի են: Մեր հաջորդ արդյունքը վերաբերում է 6 առավելագույն աստիճանով երկկողմանի գրաֆներին: Գրաֆի 2-համասեռ կմախքային ենթագրաֆը կանվանենք 2-ֆակտոր:

Թեորեմ 2.3.8. *Եթե G -ն երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(G) = 6$ և որն ունի 2-ֆակտոր, ապա $G \in \mathfrak{N}^1$ և $w^1(G) = 6$:*

Ապացույց. Դիցուք G -ն 6 առավելագույն աստիճանով երկկողմանի գրաֆ է: Դիցուք F -ը G -ի 2-ֆակտոր է: Դիտարկենք $G' = G - E(F)$ գրաֆը: Պարզ է, որ G' -ը երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(G') = 4$: Թեորեմ 2.3.2-ի ապացույցի նման կարող ենք ցույց տալ, որ G' -ը ունի α միջակայքային $(4, 1)$ -ներկում այնպիսին, որ կամայական $v \in V(G')$ գագաթի համար, որի համար $d_{G'}(v) \in \{1, 2, 4\}$, $S(v, \alpha)$ -ն ամբողջ թվերի միջակայք է: Այժմ կառուցենք G' -ի նոր β ներկումը վերցնելով α ներկման գույները և փոխարինելով 3 և 4 գույները համապատասխանաբար 5-ով և 6-ով: Պարզ է, որ ցանկացած $v \in V(G')$ գագաթի համար ունենք, որ

- եթե $d_{G'}(v) = 4$, ապա $S(v, \beta) = \{1, 2, 5, 6\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 3$, ապա $S(v, \beta) \in \{\{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 5, 6\}\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 2$, ապա $S(v, \beta) \in \{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{5, 6\}\}$,
- եթե $d_{G'}(v) = 1$, ապա $S(v, \beta) \in \{\{1\}, \{2\}, \{5\}, \{6\}\}$:

Այժմ սահմանենք G -ի γ ներկումը հետևյալ կերպ.

1) ցանկացած $e \in E(G')$ կողի համար $\gamma(e) = \beta(e)$,

2) քանի որ F -ը G -ում իրենից ներկայացնում է զույգ ցիկլերի միավորում, ներկենք F -ի կողերը հերթականորեն 3 և 4 գույներով:

Քանի որ G -ն ունի 2-ֆակտոր, կամայական $v \in V(G)$ գագաթի համար ստանում ենք, որ

- եթե $d_G(v) = 6$, ապա $S(v, \gamma) = [1, 6]$,
- եթե $d_G(v) = 5$, ապա $S(v, \gamma) \in \{[1, 5], [2, 6], \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}\}$,
- եթե $d_G(v) = 4$, ապա $S(v, \gamma) \in \{[1, 4], [2, 5], [3, 6]\}$,
- եթե $d_G(v) = 3$, ապա $S(v, \gamma) \in \{[2, 4], [3, 5], \{1, 3, 4\}, \{3, 4, 6\}\}$,
- եթե $d_G(v) = 2$, ապա $S(v, \gamma) = \{3, 4\}$:

Այստեղից հետևում է, որ γ -ն G -ի միջակայքային $(6, 1)$ -ներկում է: □

Հետևանք 2.3.9. *Եթե G -ն երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(G) = 6$ և ունի 2-ֆակտոր, ապա $G \square K_2 \in \mathfrak{N}$:*

2.4 Հարթ դեկարտյան արտադրյալներ

Առանձին հետաքրքրություն են ներկայացնում այն դեկարտյան արտադրյալները, որոնք նաև հարթ գրաֆներ են: Հարթ դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային ներկումներին անդրադառնալու համար կատարենք մի քանի նշանակումներ: k -չափանի ցանցը՝ $G(n_1, n_2, \dots, n_k)$, $n_i \in \mathbb{N}$, շղթաների դեկարտյան արտադրյալն է՝ $P_{n_1} \square P_{n_2} \square \dots \square P_{n_k}$: Գլանը՝ $C(n_1, n_2)$, շղթայի և ցիկլի՝ $P_{n_1} \square C_{n_2}$, իսկ k -չափանի տողը՝ $T(n_1, n_2, \dots, n_k)$, ցիկլերի դեկարտյան արտադրյալն է՝ $C_{n_1} \square C_{n_2} \square \dots \square C_{n_k}$:

Բեհզադը և Մահմուդիանը [10] տվել են հարթ դեկարտյան արտադրյալների հետևյալ նկարագրությունը.

Լեմմա 2.4.1. *$G \square H$ դեկարտյան արտադրյալը հարթ է այն և միայն դեպքում, եթե*

1. $G \square H \cong G(m, n)$,
2. $G \square H \cong C(m, n)$ կամ
3. $G \cong K_2$, իսկ H -ը արտաքին հարթ գրաֆ է:

Այս պարագրաֆում հերթով կանդրադառնանք վերը նշված լեմմայում նկարագրված գրաֆների երեք դասերին: Հարթ դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային ներկումների վերաբերյալ առաջին արդյունքը ստացել են Գիառոն և Կուբալը [30]: Մասնավորապես, նրանք ցույց են տվել, որ k -չափանի ցանցերը, երկու չափանի տոռերը և այն գլանները, որոնց մեջ մասնակցող ցիկլը զույգ է, ունեն միջակայքային ներկում:

Թեորեմ 2.4.2. Եթե $G = G(n_1, n_2, \dots, n_k)$ կամ $G = C(m, 2n)$, $m \in \mathbb{N}, n \geq 2$, կամ $G = T(2m, 2n)$, $m, n \geq 2$, ապա $G \in \mathfrak{N}$ և $w(G) = \Delta(G)$:

Դիտարկենք ցանցերը: Հեշտ է տեսնել, որ $W(G(2, n)) = 2n - 1$ ցանկացած $n \in \mathbb{N}$ -ի համար: Ստանանք ստորին գնահատական $W(G(m, n))$ -ի համար, երբ $m, n \geq 2$.

Թեորեմ 2.4.3. Ցանկացած $m, n \geq 2$ թվերի համար

$$W(G(m, n)) \geq 2(m + n - 3):$$

Ապացույց. Թեորեմն ապացուցելու համար կառուցենք $G(m, n)$ գրաֆի այնպիսի ներկում, որ կրավարարի նշված պայմաններին:

Դիցուք

$$V(G(m, n)) = \{v_j^{(i)} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

$$E(G(m, n)) = \bigcup_{i=1}^m E^i \cup \bigcup_{j=1}^n E_j,$$

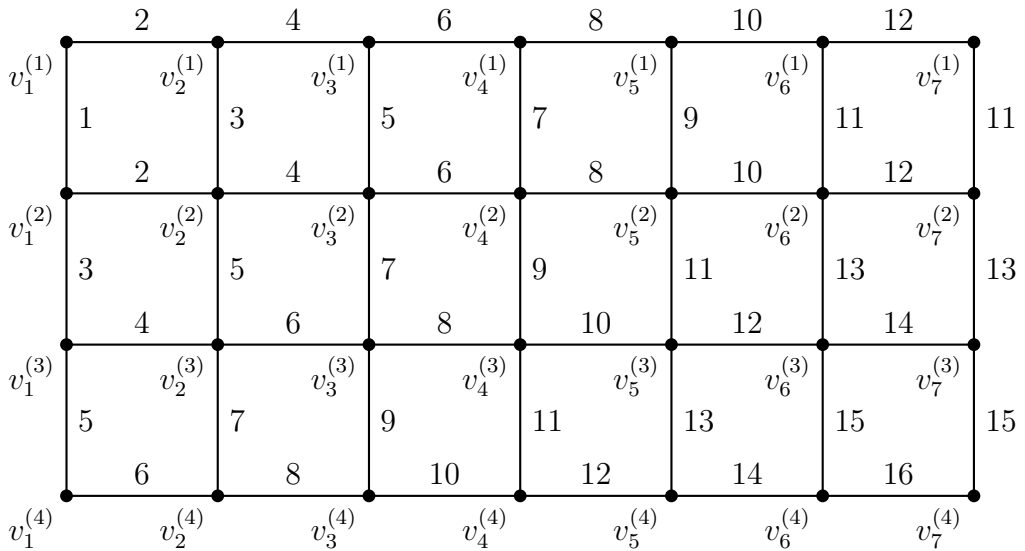
որտեղ

$$E^i = \{v_j^{(i)} v_{j+1}^{(i)} : 1 \leq j \leq n - 1\} \text{ և } E_j = \{v_j^{(i)} v_j^{(i+1)} : 1 \leq i \leq m - 1\}.$$

Սահմանենք $G(m, n)$ -ի α կողային ներկում հետևյալ կերպ.

(1) $\alpha(v_j^{(i)} v_j^{(i+1)}) = 2(i + j) - 3$ որտեղ $i = 1, \dots, m - 1, j = 1, \dots, n - 1$

(2) $\alpha(v_n^{(i)} v_n^{(i+1)}) = 2(n + i) - 5$ որտեղ $i = 1, \dots, m - 1$



Նկ. 2.5: $G(4, 7)$ գրաֆի միջակայքային 16-ներկումը

(3) $\alpha(v_j^{(1)}v_{j+1}^{(1)}) = 2j$ որտեղ $j = 1, \dots, n - 1$

(4) $\alpha(v_j^{(i)}v_{j+1}^{(i)}) = 2(i + j) - 4$ որտեղ $i = 2, \dots, m, j = 1, \dots, n - 1$

Հեշտ է տեսնել, որ α -ն $G(m, n)$ -ի միջակայքային $(2(m + n - 3))$ -ներկում է, երբ $m, n \geq 2$: □

Հարկ է նշել, որ Թեորեմ 2.4.3-ում ստացված գնահատականը հեռու չէ $W(G(m, n))$ -ի վերին գնահատականից: Քանի որ $G(m, n)$ -ը երկկողմանի է, $2 \leq \Delta(G(m, n)) \leq 4$ և $\text{diam}(G(m, n)) = m + n - 2$, ապա Թեորեմ 1.2.6-ից ստանում ենք $W(G(m, n)) \leq 3(m + n - 2) + 1$:

Թեորեմ 2.1.1-ից և Թեորեմ 2.4.3-ից ստանում ենք.

Հետևանք 2.4.4. *Եթե $n_1 \geq \dots \geq n_{2k} \geq 2$ ($k \in \mathbb{N}$), ապա*

$$W(G(n_1, n_2, \dots, n_{2k})) \geq 2 \sum_{i=1}^{2k} n_i - 6k,$$

իսկ եթե $n_1 \geq \dots \geq n_{2k+1} \geq 2$ ($k \in \mathbb{N}$), ապա

$$W(G(n_1, n_2, \dots, n_{2k+1})) \geq 2 \sum_{i=1}^{2k} n_i + n_{2k+1} - 6k - 1.$$

Այժմ դիտարկենք գլանները: Խշոյանը [81] ապացուցել է հետևյալը.

Թեորեմ 2.4.5. *Ցանկացած $n \geq 3$ թվի համար*

(1) $C(2, n) \in \mathfrak{N}$,

(2) $w(C(2, n)) = 3$,

(3) $W(C(2, n)) = n + 2$,

(4) Եթե $w(C(2, n)) \leq t \leq W(C(2, n))$, ապա $C(2, n)$ -ը ունի միջակայքային t -ներկում:

Մեզ հաջողվել է ստանալ գլանների համար ավելի ընդհանուր արդյունք.

Թեորեմ 2.4.6. Եթե $m \geq 3, n \in \mathbb{N}$, ապա $C(m, 2n + 1) \in \mathfrak{N}$ և

$$w(C(m, 2n + 1)) = \begin{cases} 4, & \text{երբ } m\text{-ը զույգ է,} \\ 6, & \text{երբ } m\text{-ը կենտ է:} \end{cases}$$

Ապացույց. Դիցուք

$$V(C(m, 2n + 1)) = \left\{ v_j^{(i)} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2n + 1 \right\},$$

$$E(C(m, 2n + 1)) = \bigcup_{i=1}^m E^i \cup \bigcup_{j=1}^{2n+1} E_j, \text{ որտեղ}$$

$$E^i = \left\{ v_j^{(i)} v_{j+1}^{(i)} : 1 \leq j \leq 2n \right\} \cup \left\{ v_1^{(i)} v_{2n+1}^{(i)} \right\},$$

$$E_j = \left\{ v_j^{(i)} v_j^{(i+1)} : 1 \leq i \leq m - 1 \right\} :$$

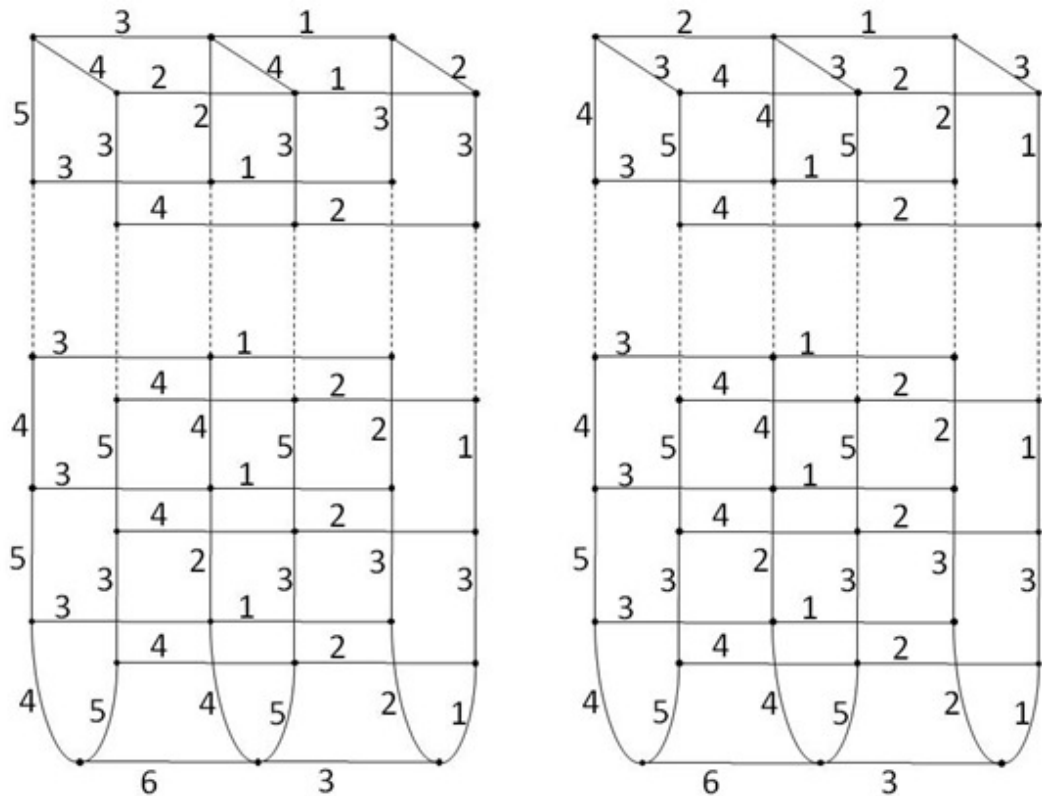
Նախ ցույց տանք, որ եթե m -ը զույգ է, ապա $C(m, 2n + 1)$ -ը ունի միջակայքային 4-ներկում: Բոլոր $1 \leq i \leq \frac{m}{2}$ թվերի համար սահմանենք $C(m, 2n + 1)$ գրաֆի C^i ենթագրաֆը հետևյալ կերպ.

$$C^i = \left(V^{2i-1} \cup V^{2i}, E^{2i-1} \cup E^{2i} \cup \left\{ v_j^{(2i-1)} v_j^{(2i)} : 1 \leq j \leq 2n + 1 \right\} \right):$$

C^i -ն իզոմորֆ է $C(2, 2n + 1)$ բոլոր $1 \leq i \leq \frac{m}{2}$ թվերի համար. Թեորեմ 2.4.5-ի համաձայն, $C(2, 2n + 1) \in \mathfrak{N}$ և գոյություն ունի $C(2, 2n + 1)$ գրաֆի α միջակայքային 3-ներկում: $C(m, 2n + 1)$ -ի համար կայուցենք β ներկումը: Նախ C^i ($1 \leq i \leq \frac{m}{2}$) ենթագրաֆերի կողերը ներկենք համաձայն α ներկման: Այնուհետև $v_j^{(2i)} v_j^{(2i+1)} \in E_j$ կողերը ներկենք 4 գույնով բոլոր $1 \leq i \leq \frac{m}{2} - 1, 1 \leq j \leq 2n + 1$ թվերի համար: Հեշտ է տեսնել, որ β -ն $C(m, 2n + 1)$ -ի համար միջակայքային 4-ներկում է: Այսպիսով, $C(m, 2n + 1) \in \mathfrak{N}$ և $w(C(m, 2n + 1)) \leq 4$: Մյուս կողմից՝ $w(C(m, 2n + 1)) \geq \Delta(C(m, 2n + 1)) = 4$, հետևաբար՝ $w(C(m, 2n + 1)) = 4$, երբ m -ը զույգ է:

Այժմ ենթադրենք m -ը կենտ է: Սկզբում ցույց տանք, որ $C(3, 2n + 1)$ -ը ունի միջակայքային 6-ներկում: Սահմանենք $C(3, 2n + 1)$ -ի γ կողային ներկումը հետևյալ կերպ.

- (1) $\gamma(v_1^{(1)}v_1^{(2)}) = 6, \gamma(v_j^{(1)}v_j^{(2)}) = 4$, որստեղ $j = 2, \dots, 2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$,
- (2) $\gamma(v_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor+1}^{(1)}v_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor+1}^{(2)}) = 2, \gamma(v_j^{(1)}v_j^{(2)}) = 3$, որստեղ $j = 2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 2, \dots, 2n + 1$,
- (3) $\gamma(v_1^{(2)}v_1^{(3)}) = 3, \gamma(v_j^{(2)}v_j^{(3)}) = 2$, որստեղ $j = 2, \dots, 2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$,
- (4) $\gamma(v_j^{(2)}v_j^{(3)}) = 1$, որստեղ $j = 2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1, \dots, 2n + 1$,
- (5) $\gamma(v_{2j-1}^{(1)}v_{2j}^{(1)}) = \gamma(v_{2j-1}^{(2)}v_{2j}^{(2)}) = 5$ և $\gamma(v_{2j}^{(1)}v_{2j+1}^{(1)}) = \gamma(v_{2j}^{(2)}v_{2j+1}^{(2)}) = 3$,
 որստեղ $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$,
- (6) $\gamma(v_{2j-1}^{(1)}v_{2j}^{(1)}) = \gamma(v_{2j-1}^{(2)}v_{2j}^{(2)}) = 4$ և $\gamma(v_1^{(1)}v_{2n+1}^{(1)}) = \gamma(v_1^{(2)}v_{2n+1}^{(2)}) = 4$,
 որստեղ $j = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1, \dots, n$,
- (7) $\gamma(v_{2j}^{(1)}v_{2j+1}^{(1)}) = \gamma(v_{2j}^{(2)}v_{2j+1}^{(2)}) = 2$, որստեղ $j = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1, \dots, n$,
- (8) $\gamma(v_{2j-1}^{(3)}v_{2j}^{(3)}) = 1$ և $\gamma(v_{2j}^{(3)}v_{2j+1}^{(3)}) = 3$, որստեղ $j = 1, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$,



Նկ. 2.6: $C(m, 2n + 1)$ գրաֆի միջակայքային 6-ներկուսը, երբ n -ը զույգ է (ձախից) և երբ n -ը կենտ է (աջից)

(9) $\gamma(v_{2j-1}^{(3)}v_{2j}^{(3)}) = 2$ և $\gamma(v_1^{(3)}v_{2n+1}^{(3)}) = 2$, որտեղ $j = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1, \dots, n$,

(10) $\gamma(v_{2j}^{(3)}v_{2j+1}^{(3)}) = 3$, որտեղ $j = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1, \dots, n$:

Դժվար չէ տեսնել, որ γ -ն $C(3, 2n + 1)$ -ի միջակայքային 6-ներկում է, ընդ որում $S(v_j^{(3)}, \gamma) = [1, 3]$ բոլոր $1 \leq j \leq 2n + 1$ թվերի համար:

Այնուհետև կառուցենք ϕ ներկումը $C(m, 2n + 1)$ գրաֆի համար: Նախ ներկենք $C(m, 2n + 1)$ -ի $C(3, 2n + 1)$ ենթագրաֆի կողերը՝ համաձայն γ ներկման: Մնացած $C(m - 3, 2n + 1)$ ենթագրաֆը ներկենք համաձայն β ներկման: Վերջապես, $v_j^{(3)}v_j^{(4)} \in E_j$ ($1 \leq j \leq 2n + 1$) կողերը ներկենք 4 գույնով: Հեշտ է տեսնել, որ ϕ -ն $C(m, 2n + 1)$ -ի միջակայքային 6-ներկում է: Փաստորեն, $C(m, 2n + 1) \in \mathfrak{N}$ և $w(C(m, 2n + 1)) \leq 6$.

Քանի որ կենս m -երի դեպքում $G = C(m, 2n + 1)$ գրաֆը չունի կատարյալ զուգակցում, իսկ $\delta(G) = 3$, $\Delta(G) = 4$, ըստ Հետևանք 1.2.16-ի՝ $w(C(m, 2n + 1)) \geq \max\{\Delta(G), 2\delta(G)\} = 6$: □

Այսպիսով, մեզ հաջողվեց կառուցել միջակայքային ներկումներ ինչպես ցանցերի, այնպես էլ գլանների համար: Ունենալով այդ ներկումները և հաշվի առնելով Լեմմա 2.4.1-ը, կարող ենք ձևակերպել հետևյալ պնդումը.

Թեորեմ 2.4.7. *Եթե $G \square H$ դեկարտյան արտադրյալը հարթ է, ընդ որում 2 արտադրիչներն էլ ունեն առնվազն 3 գագաթ, ապա $G \square H \in \mathfrak{N}$ և $w(G \square H) \leq 6$:*

Գլանի ներկման համար անհրաժեշտ գույների առավելագույն քանակի համար Պետրոսյանը և Կարապետյանը [52] ստացել են ստորին գնահատական այն դեպքում, երբ գլանի բաղադրիչ ցիկլի երկարությունը զույգ է.

Թեորեմ 2.4.8. *Ցանկացած $m \in \mathbb{N}, n \geq 2$ թվերի համար*

$$W(C(m, 2n)) \geq 3m + n - 2:$$

Մեզ հաջողվել ստանալ գնահատական այն դեպքում, երբ գլանի բաղադրիչ շղթայի երկարությունն է զույգ:

Թեորեմ 2.4.9. *Երբ $m \in \mathbb{N}, n \geq 2$,*

$$W(C(2m, 2n)) \geq 4m + 2n - 2,$$

իսկ երբ $m, n \in \mathbb{N}$,

$$W(C(2m, 2n + 1)) \geq 4m + 2n - 1:$$

Ապացույց. Թեորեմն ապացուցելու համար բավական է կառուցել համապատասխան պայմաններին բավարարող ներկումներ: Դիցուք,

$$\begin{aligned} V(C(2m, 2n)) &= \left\{ v_j^{(i)} : 1 \leq i \leq 2m, 1 \leq j \leq 2n \right\}, \\ V(C(2m, 2n + 1)) &= \left\{ u_j^{(i)} : 1 \leq i \leq 2m, 1 \leq j \leq 2n + 1 \right\}, \\ E(C(2m, 2n)) &= \bigcup_{i=1}^{2m} E^i \cup \bigcup_{j=1}^{2n} E_j, \\ E(C(2m, 2n + 1)) &= \bigcup_{i=1}^{2m} \hat{E}^i \cup \bigcup_{j=1}^{2n+1} \hat{E}_j, \end{aligned}$$

որտեղ

$$\begin{aligned} E^i &= \left\{ v_j^{(i)} v_{j+1}^{(i)} : 1 \leq j \leq 2n - 1, \right\} \cup \left\{ v_1^{(i)} v_{2n}^{(i)} \right\}, & E_j &= \left\{ v_j^{(i)} v_j^{(i+1)} : 1 \leq i \leq 2m - 1 \right\}, \\ \hat{E}^i &= \left\{ u_j^{(i)} u_{j+1}^{(i)} : 1 \leq j \leq 2n, \right\} \cup \left\{ u_1^{(i)} u_{2n+1}^{(i)} \right\}, & \hat{E}_j &= \left\{ u_j^{(i)} u_j^{(i+1)} : 1 \leq i \leq 2m - 1 \right\}: \end{aligned}$$

Նախ կառուցենք α միջակայքային ներկումը $C(2m, 2n)$ գրաֆի համար, որտեղ $m \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

- (1) $\alpha \left(v_j^{(2i-1)} v_{j+1}^{(2i-1)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2i)} v_{j+1}^{(2i)} \right) = 4i + 2j - 4$, որտեղ $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$,
- (2) $\alpha \left(v_j^{(2i-1)} v_{j+1}^{(2i-1)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2i)} v_{j+1}^{(2i)} \right) = 4i - 2j + 4n - 1$, որտեղ $i = 1, \dots, m, j = n + 1, \dots, 2n - 1$,
- (3) $\alpha \left(v_1^{(2i-1)} v_{2n}^{(2i-1)} \right) = \alpha \left(v_1^{(2i)} v_{2n}^{(2i)} \right) = 4i - 1$, որտեղ $i = 1, \dots, m$,
- (4) $\alpha \left(v_j^{(2i-1)} v_j^{(2i)} \right) = 4i + 2j - 5$, որտեղ $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$,
- (5) $\alpha \left(v_j^{(2i-1)} v_j^{(2i)} \right) = 4i - 2j + 4n$, որտեղ $i = 1, \dots, m, j = n + 1, \dots, 2n$,
- (6) $\alpha \left(v_j^{(2i)} v_j^{(2i+1)} \right) = 4i + 2j - 3$, որտեղ $i = 1, \dots, m - 1, j = 2, \dots, n + 1$,
- (7) $\alpha \left(v_j^{(2i)} v_j^{(2i+1)} \right) = 4i - 2j + 4n + 2$, որտեղ $i = 1, \dots, m - 1, j = n + 2, \dots, 2n$,
- (8) $\alpha \left(v_1^{(2i)} v_1^{(2i+1)} \right) = 4i$, որտեղ $i = 1, \dots, m - 1$:

Այժմ կառուցենք β ներկումը $C(2m, 2n + 1)$ գրաֆի համար, որտեղ $m, n \in \mathbb{N}$:

- (1) $\beta \left(u_j^{(2i-1)} u_{j+1}^{(2i-1)} \right) = \beta \left(u_j^{(2i)} u_{j+1}^{(2i)} \right) = 4i + 2j - 4$, որստեղ $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n + 1$,
- (2) $\beta \left(u_j^{(2i-1)} u_{j+1}^{(2i-1)} \right) = \beta \left(u_j^{(2i)} u_{j+1}^{(2i)} \right) = 4i - 2j + 4n + 1$, որստեղ $i = 1, \dots, m, j = n + 2, \dots, 2n$,
- (3) $\beta \left(u_1^{(2i-1)} u_{2n+1}^{(2i-1)} \right) = \beta \left(u_1^{(2i)} u_{2n+1}^{(2i)} \right) = 4i - 1$, որստեղ $i = 1, \dots, m$,
- (4) $\beta \left(u_j^{(2i-1)} u_j^{(2i)} \right) = 4i + 2j - 5$, որստեղ $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n + 2$,
- (5) $\beta \left(u_j^{(2i-1)} u_j^{(2i)} \right) = 4i - 2j + 4n + 2$, որստեղ $i = 1, \dots, m, j = n + 3, \dots, 2n + 1$,
- (6) $\beta \left(u_j^{(2i)} u_j^{(2i+1)} \right) = 4i + 2j - 3$, որստեղ $i = 1, \dots, m - 1, j = 2, \dots, n + 1$,
- (7) $\beta \left(u_j^{(2i)} u_j^{(2i+1)} \right) = 4i - 2j + 4n + 4$, որստեղ $i = 1, \dots, m - 1, j = n + 2, \dots, 2n + 1$,
- (8) $\beta \left(u_1^{(2i)} u_1^{(2i+1)} \right) = 4i$, որստեղ $i = 1, \dots, m - 1$:

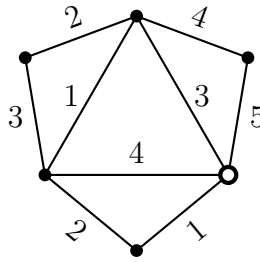
Դժվար չէ ստուգել, որ α -ն $C(2m, 2n)$ -ի միջակայքային $(4m + 2n - 2)$ -ներկում է, երբ $m \in \mathbb{N}, n \geq 2$, իսկ β -ն $C(2m, 2n + 1)$ -ի միջակայքային $(4m + 2n - 1)$ -ներկում է, երբ $m, n \in \mathbb{N}$: □

Նկատենք, որ երբ գլանի երկու բաղադրիչներն էլ ունեն զույգ թվով գագաթներ, 2.4.8 և 2.4.9 թեորեմները տալիս են տարբեր ստորին գնահատականներ $W(C(2m, 2n))$ -ի համար: Երբ $n > 2m$, Թեորեմ 2.4.9-ի գնահատականը ավելի լավն է: Երբ $n = 2m$, երկու թեորեմներն էլ տալիս են նույն գնահատականը: Իսկ երբ $n < 2m$ ավելի լավն է Թեորեմ 2.4.8-ի գնահատականը:

Թեորեմ 2.4.9-ի ստորին գնահատականները հեռու չեն $W(C(2m, n))$ -ի համար հայտնի վերին գնահատականներից: Այսպես, քանի որ $C(2m, 2n)$ -ը երկկողմանի է, ընդ որում $3 \leq \Delta(C(2m, 2n)) \leq 4$ և $\text{diam}(C(2m, 2n)) = 2m + n - 1$, ապա Թեորեմ 1.2.6-ից՝ $W(C(2m, 2n)) \leq 3(2m + n - 1) + 1$: Նմանապես, քանի որ $3 \leq \Delta(C(2m, 2n + 1)) \leq 4$ և $\text{diam}(C(2m, 2n + 1)) = 2m + n - 1$, ապա Թեորեմ 1.2.5-ից՝ $W(C(2m, 2n + 1)) \leq 3(2m + n) + 1$:

2.4.1 Արտաքին հարթ գրաֆների ներկումներ

Ինչպես տեսանք, $G \square H$ դեկարտյան արտադրյալը հարթ է նաև այն դեպքում, երբ $G = K_2$, իսկ H գրաֆը արտաքին հարթ է: Մյուս կողմից, ըստ Թեորեմ 2.3.1-ի, $G \square H$ արտադրյալը ունի միջակայքային ներկում այն և միայն դեպքում, երբ H -ը ունի



Նկ. 2.7: Արտաքին հարթ տրիանգուլյացիա, որը միջակայքային ներկելի չէ: Պատկերված ներկման դեֆիցիտը 1 է:

միջակայքային մեկ անցքով ներկում: Այս պարագրաֆում կնկարագրենք արտաքին հարթ գրաֆների հատուկ տիպի ներկման կառուցման ալգորիթ, որի շնորհիվ ցույց կտրվի, որ արտաքին հարթ գրաֆները բավարարում են Հիպոթեզ 2.1-ին, իսկ եռանկյուն չպարունակող արտաքին գրաֆները նաև միջակայքային 1-անցք-ներկելի են:

Ֆիորինին [26] նկարագրել է բոլոր արտաքին հարթ գրաֆների քրոմատիկ դասը.

Թեորեմ 2.4.10. *Եթե G -ն արտաքին հարթ գրաֆ է, ապա $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ G -ն կենտրոնիկ է:*

Թեորեմ 1.1.1-ից անմիջապես հետևում է, որ կենտրոնիկ միջակայքային ներկելի չեն: Սակայն գոյություն ունեն բազմաթիվ այլ արտաքին հարթ գրաֆներ, որոնց դեֆիցիտը դրական է: Օրինակ, Նկ. 2.7-ում պատկերված գրաֆը էլյերյան է, ունի կենտրոնիկ կողեր, և համաձայն Հետևանք 1.1.4-ի՝ չի կարող ունենալ միջակայքային ներկում: Մյուս կողմից, հեշտ է տեսնել, որ այդ գրաֆն ունի 1 դեֆիցիտով ներկում:

Հայտնի է, որ արտաքին հարթ գրաֆների որոշ ենթադասեր միջակայքային ներկելի են: Արտաքին հարթ գրաֆը կոչվում է արտաքին հարթ տրիանգուլյացիա, եթե այն կարելի է պատկերել հարթության վրա այնպես, որ բոլոր սահմանափակ նիստերը լինեն եռանկյուն: Հարթության վրա պատկերված արտաքին հարթ գրաֆի եռանկյուն նիստը կոչվում է բաժանող եռանկյուն, եթե նրա կողմերից ոչ մեկը չի պատկանում անվերջ նիստին: Աքսենովիչը [9] ապացուցել է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2.4.11. *Եթե G -ն առնվազն չորս գագաթ պարունակող արտաքին հարթ տրիանգուլյացիա է և չունի բաժանող եռանկյուն, ապա այն միջակայքային ներկելի է:*

Նկ. 2.7-ում պատկերված գրաֆը բաժանող եռանկյուն պարունակող արտաքին հարթ տրիանգուլյացիա է և չունի միջակայքային ներկում:

Հետագայում, Գիառոն և Կուբալեն [31] նկարագրել են արտաքին հարթ գրաֆների միջակայքային ներկելի և մեկ ենթադաս.

Թեորեմ 2.4.12. *Եթե G -ն երկկողմանի արտաքին հարթ գրաֆ է, ապա այն միջակայքային ներկելի է:*

Վերջապես, Պետրոսյանը [50] ստացել է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 2.4.13. *Եթե G -ն կապակցված ենթախորանարդ արտաքին հարթ գրաֆ է, բացի կենտրոնից, ապա այն միջակայքային ներկելի է:*

Այս պարագրաֆում մենք կդիտարկենք բոլոր արտաքին հարթ գրաֆների դեֆիցիտը և կընդհանրացնենք Թեորեմ 2.4.12-ը:

$f_i(G)$ -ով նշանակենք հարթության վրա պատկերված G արտաքին հարթ գրաֆում i կողեր ունեցող սահմանափակ նիստերի քանակը, որտեղ $i = 3, 4, \dots, |V(G)|$:

Լեմմա 2.4.14. *Եթե G -ն համիլտոնյան արտաքին հարթ գրաֆ է, իսկ $w_0 \in V(G)$ -ն այդ գրաֆի որևէ ֆիքսված գագաթ, ապա գոյություն ունի G -ի α ճիշտ կողային ներկում այնպիսին, որ.*

- $def(w_0, \alpha) = 0$,
- $def(G, \alpha) = \sum_{\substack{i \geq 3 \\ \text{կենտրոն } i}} f_i(G)$,
- $gn(G, \alpha) \leq f_3(G) + \min \left\{ 1, \sum_{\substack{i \geq 5 \\ \text{կենտրոն } i}} f_i(G) \right\}$:

Ապացույց. Այս լեմմայի ապացույցը ընդլայնում է [21]-ի Պնդում 3.1-ում և [31]-ի Թեորեմ 2.3-ում մշակված մեթոդը:

Դիցուք $|V(G)| = n$ և G -ն պատկերված է հարթության վրա այնպես, որ բոլոր գագաթները պատկանում են անվերջ նիստին: α ներկումը կառուցելու ենք զուգահեռաբար ներկելով և նշելով G -ի կողերը: Կողերի նշումների ֆունկցիան նշանակենք λ -ով. $\lambda : E(G) \rightarrow \{l, u, m\}$: Ալգորիթմի յուրաքանչյուր քայլում դիտարկվում է G -ի մեկ նիստ և, նիստին պատկանող կողերից մեկի նախապես որոշված գույնի և նշման հիման վրա միարժեքորեն որոշվում են մյուս կողերի գույները և նշումները: Նիստերի դիտարկման հերթականությունը որոշվում է ըստ G -ի T թույլ երկակի գրաֆի:

T -ի գագաթները համապատասխանում են G -ի սահմանափակ նիստերին և երկու գագաթներ միացած են կողով այն և միայն դեպքում, երբ համապատասխան նիստերը G -ում ունեն ընդհանուր կող: Հայտնի է, որ արտաքին հարթի թույլ երկակի գրաֆը անտառ է [37]: Մեր դեպքում G -ն համիլտոնյան է, ուստի 2-կապակցված է, հետևաբար թույլ երկակի գրաֆը ծառ է: Ստորև տրված է α -ն և λ -ն կառուցող ալգորիթմի նկարագրությունը:

1. Պատկերենք G գրաֆը հարթության վրա առանց խաչումների այնպես, որ բոլոր գագաթները պատկանեն անվերջ նիստին: Անվերջ նիստի կողերը կազմում են համիլտոնյան ցիկլ: Գրաֆի գագաթները համակարալենք սկսած w_0 -ից այդ ցիկլի երկայնքով ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ. w_0, w_1, \dots, w_{n-1} :
2. Կառուցենք G -ի T թույլ երկակի գրաֆը:
3. Վերցնենք G -ի այն նիստը, որը պարունակում է $w_0 w_{n-1}$ կողը: Դիցուք $t_0 \in V(T)$ գագաթը համապատասխանում է այդ նիստին: Նկատենք, որ այս նիստը միարժեք է որոշվում, քանի որ հակառակ դեպքում $w_0 w_{n-1}$ կողը չէր պատկանի անվերջ նիստին: Դիցուք այդ նիստին պատկանող գագաթներն են $w_0 = v_1, v_2, \dots, v_r = w_{n-1}$ (ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ):
4. Վերցնենք $\alpha(v_1 v_r) = 1$ և $\lambda(v_1 v_r) = u$:
5. Լայնությամբ շրջանցենք T ծառը՝ սկսելով t_0 գագաթից: Դիցուք F -ը G -ի այն նիստն է, որը համապատասխանում է տվյալ պահին դիտարկվող $t \in V(T)$ գագաթին: Ալգորիթմը երաշխավորում է, որ F -ի կողերից մեկը նախորդ քայլերից մեկում արդեն ներկվել և նշվել է: Դիցուք $V(F) = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ (ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ), որտեղ $v_1 v_r$ -ը նախորդ քայլերից մեկում նշված կողն է և $\alpha(v_1 v_r) = k$: Մնացած կողերի գույներն ու նշումները որոշվում են կախված r -ից և $\lambda(v_1 v_r)$ նշումից (Նկ. 2.8):
 - (a) Եթե $\lambda(v_1 v_r) = l$, ապա ալգորիթմը երաշխավորում է, որ $\underline{S}(v_1, \alpha) = \underline{S}(v_r, \alpha) = k$, ուստի ներկումը կմնա ճիշտ, եթե նոր կողերին վերագրենք ավելի փոքր գույներ:

i. Եթե $r = 3$, ապա վերցնենք $\alpha(v_1v_2) = k - 1$, $\alpha(v_2v_3) = k - 2$, $\lambda(v_1v_2) = m$ և $\lambda(v_2v_3) = l$: Նկատենք, որ $k - 1$ գույնը բացակայում է v_3 գագաթի սպեկտրից և ալգորիթմի հաջորդ քայլերի ընթացքում ևս այդ գույնը չի օգտագործվի:

ii. Եթե $r = 2s$, $s \geq 2$, ապա $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{2s-1}v_{2s}$ կողերը ներկենք հերթականորեն $k - 1$ և k գույներով և նշենք հերթականորեն l -ով և u -ով:

iii. Եթե $r = 2s + 1$, $s \geq 2$, ապա վերցնենք $\alpha(v_1v_2) = k - 1$, $\alpha(v_2v_3) = k - 2$, $\lambda(v_1v_2) = m$, $\lambda(v_2v_3) = l$, իսկ $v_3v_4, v_4v_5, \dots, v_{2s}v_{2s+1}$ կողերը ներկենք հերթականորեն k և $k - 1$ գույներով և նշենք հերթականորեն u -ով և l -ով: Նկատենք, որ v_3 գագաթի սպեկտրից կբացակայի $k - 1$ գույնը:

(b) Եթե $\lambda(v_1v_r) = u$, ապա ալգորիթմը երաշխավորում է, որ $\overline{S}(v_1, \alpha) = \overline{S}(v_r, \alpha) = k$, ուստի ներկումը կմնա ճիշտ, եթե նոր կողերի վրա օգտագործենք ավելի մեծ գույներ:

i. Եթե $r = 3$, ապա վերցնենք $\alpha(v_1v_2) = k + 1$, $\alpha(v_2v_3) = k + 2$, $\lambda(v_1v_2) = m$ և $\lambda(v_2v_3) = u$: Նկատենք, որ v_3 գագաթի սպեկտրից կբացակայի $k + 1$ գույնը:

ii. Եթե $r = 2s$, $s \geq 2$, ապա $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{2s-1}v_{2s}$ կողերը ներկենք հերթականորեն $k - 1$ և k գույներով և նշենք հերթականորեն u -ով և l -ով:

iii. Եթե $r = 2s + 1$, $s \geq 2$, ապա վերցնենք $\alpha(v_1v_2) = k + 1$, $\alpha(v_2v_3) = k + 2$, $\lambda(v_1v_2) = m$, $\lambda(v_2v_3) = u$, իսկ $v_3v_4, v_4v_5, \dots, v_{2s}v_{2s+1}$ կողերը ներկենք հերթականորեն k և $k + 1$ գույներով և նշենք հերթականորեն l -ով և u -ով: Նկատենք, որ v_3 գագաթի սպեկտրում չի մասնակցի $k + 1$ գույնը:

(c) Եթե $\lambda(v_1v_r) = m$, ապա ալգորիթմը երաշխատվորում է, որ կան $\overline{S}(v_1, \alpha) = \underline{S}(v_r, \alpha) = k$, կան $\underline{S}(v_1, \alpha) = \overline{S}(v_r, \alpha) = k$:

i. Եթե $\underline{S}(v_1, \alpha) = \overline{S}(v_r, \alpha) = k$, ապա F նիստի գագաթները վերահամարակալենք ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ՝ այսպիսով երաշխավորելով, որ $\overline{S}(v_1, \alpha) = \underline{S}(v_r, \alpha) = k$:

ii. Եթե $r = 3$, ապա վերցնենք $\alpha(v_1v_2) = k + 1$, $\alpha(v_2v_3) = k - 1$, $\lambda(v_1v_2) = u$ և $\lambda(v_2v_3) = l$: Նկատենք, որ v_2 գագաթի սպեկտրում չի մասնակցի k գույնը:

- iii. Եթե $r = 2s$, $s \geq 2$, ապա վերցնենք $\alpha(v_1v_2) = k + 1$, $\alpha v_2v_3 = k$, $\lambda(v_1v_2) = u$ և $\lambda(v_2v_3) = m$: Այնուհետև $v_3v_4, v_4v_5, \dots, v_{2s-1}v_{2s}$ կողերը ներկենք հերթականորեն $k - 1$ և k գույներով և նշենք հերթականորեն u -ով և l -ով:
- iv. Եթե $r = 2s + 1$, $s \geq 2$, ապա վերցնենք $\alpha(v_1v_2) = k + 1$, $\lambda(v_1v_2) = u$, իսկ $v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{2s}v_{2s+1}$ կողերը ներկենք հերթականորեն $k - 1$ և k գույներով և նշենք հերթականորեն l -ով և u -ով:

6. Եթե $\min_{e \in E(G)} \alpha(e) = c_0 \neq 1$, ապա բոլոր կողերի գույները շեղենք համաձայն $\alpha(e) = \alpha(e) - c_0 + 1$ ($e \in E(G)$), բանաձևի:

Ապացույցն ավարտելու համար անհրաժեշտ է ստուգել լեմմայի երեք պնդումները: Նախ, նկատենք, որ ալգորիթմը կենտ թվով կողեր ունեցող յուրաքանչյուր նիստի գագաթներից մեկի սպեկտրում ավելացնում է ճիշտ մեկ չօգտագործված գույն (5(a)i, 5(b)i, 5(c)ii, 5(a)iii, 5(b)iii և 5(c)iv քայլերում): Ավելին, ալգորիթմը չի ավելացնում նոր չօգտագործված գույն զույգ թվով կողեր ունեցող նիստի գագաթներում (5(a)ii, 5(b)ii, 5(c)iii քայլերում): Այստեղից հետևում է, որ բոլոր գագաթների սպեկտրներում բացակայող գույների քանակը հավասար է կենտ կողեր ունեցող նիստերի քանակին. $def(G, \alpha) = \sum_{i \geq 3, \text{կենտ } i} f_i(G)$:

Այնուհետև, կարևոր է նկատել, որ որևէ գագաթի դեֆիցիտը մեկից մեծ կլինի միայն այն դեպքում, երբ ալգորիթմը այդ գագաթում բացակայող գույն ավելացնի այդ գագաթը պարունակող մեկից ավելի իրարից տարբեր նիստեր դիտարկելու ընթացքում: Երբ $r \geq 5$ (5(a)iii, 5(b)iii և 5(c)iv քայլեր) կամ երբ $r = 3$ և $\lambda(v_1v_3) = m$ (Քայլ 5(c)ii), բացակայող գույնը ավելացվում է այնպիսի գագաթներում, որոնք նախորդ քայլերում չեն դիտարկվել: Ուստի գագաթի դեֆիցիտը կարող է դառնալ մեկից ավել միայն 5(a)i և 5(b)i քայլերի դեպքում ($r = 3$, և $\lambda(v_1v_r) = l$ կամ $\lambda(v_1v_r) = u$): Այսպիսով, կամայական գագաթի դեֆիցիտը չի կարող լինել G -ում եռանկյունների քանակին գումարած մեկ թվից, այն դեպքում, երբ այն պատկանում է նաև ավելի մեծ կենտ ցիկլի: Հետևաբար, $gn(G, \alpha) = \max_{v \in V(G)} \{def(v, \alpha)\} \leq f_3(G) + \min \left\{ 1, \sum_{i \geq 5, \text{կենտ } i} f_i(G) \right\}$: Այստեղ հավասարությունը դառնում է հասանելի, երբ G -ն հովհար գրաֆ է:

Վերջապես պետք է ցույց տալ, որ $def(w_0, \alpha) = 0$: Ենթադրենք այս գագաթը պատկանում է թվով $k \geq 1$ տարբեր նիստերի: Այս նիստերը դիտարկվում են T ծառի լայնական շրջանցմամբ որոշվող հերթականությամբ: 4 քայլից հետո յուրաքանչյուր

	$r = 3$	$r = 2s, s \geq 2$	$r = 2s + 1, s \geq 2$
l			
u			
m			

Նկ. 2.8: Լեմմա 2.4.15-ում նկարագրված ալգորիթմի Քայլ 5-ի նկարագրությունը: Աղյուսակի տողերը համապատասխանում են $v_1 v_r$ կողի նշմանը: Սյուները համապատասխանում են հերթական F նիստի կողերի քանակին: Օղակներով նշված գագաթները (ի տարբերություն շրջաններով նշվածների) ցույց են տալիս, որ ալգորիթմի տվյալ քայլի արդյունքում այդ գագաթի սպեկտրներում չօգտագործված գույների քանակը (դեֆիցիտը) կավելանա մեկով:

անգամ, երբ դիտարկվում է այս k նիստերից մեկը, w_0 գագաթը պատկանում է արդեն ներկված կողին և նշանակվում է v_1 -ով: Միակ բացառությունը 5(c)-ի քայլն է, երբ $\lambda(v_1 v_r) = m$ և w_0 գագաթը կարող է նշանակված լինել v_r -ով: Նկատենք, որ անկախ դիտարկվող նիստի r երկարությունից և $\lambda(v_1 v_r)$ նշումից, v_1 գագաթում նոր բացակայող գույն չի ավելանում: \square

Հաջորդ թեորեմը ապացուցելու համար անհրաժեշտ է բլոկների և միակցման կետերի ծառի գաղափարը: Բլոկը մաքսիմալ 2-կապակցված ենթագրաֆն է: Միակցման կետը այնպիսի գագաթ է, որը հանելու դեպքում գրաֆի կապակցվածության բաղադրիչների քանակը ավելանում է: Տրված G գրաֆի համար B -ով նշանակենք իր բլոկների բազմությունը, իսկ C -ով՝ իր միակցման կետերի բազմությունը: Նկատենք, որ կամայական միակցման կետ պատկանում է առնվազն երկու բլոկի: Կառուցենք $bc(G)$ գրաֆը հետևյալ կերպ. $V(bc(G)) = B \cup C$, իսկ $b \in B$ և $c \in C$ գագաթները միացվում են կողով այն և միայն այն դեպքում, երբ G գրաֆում c գագաթը պատկանում է b բլոկին: Հայտնի է, որ $bc(G)$ -ն ծառ է [36]: $bc(G)$ -ն կոչվում է G -ի բլոկների և միակցման կետերի գրաֆ:

Թեորեմ 2.4.15. *Եթե G -ն արտաքին հարթ գրաֆ է, ապա*

$$def(G) \leq \sum_{\substack{i \geq 3 \\ \text{կենտր } i}} f_i(G) \text{ և } gn(G) \leq f_3(G) + \min \left\{ 1, \sum_{\substack{i \geq 5 \\ \text{կենտր } i}} f_i(G) \right\}:$$

Ապացույց. Դիցուք $bc(G)$ -ն G -ի բլոկների և միակցման կետերի գրաֆն է: G -ի բլոկները նշանակենք B_1, B_2, \dots, B_m , $m \geq 1$, իսկ միակցման կետերը՝ c_1, \dots, c_n , $n \geq 0$: Բլոկները կան իզոմորֆ են K_2 -ին, կան համիլտոնյան արտաքին հարթ գրաֆներ են: G -ի β ներկումը կառուցենք բլոկների ներկումների հիման վրա: Սկսենք B_1 գագաթին համապատասխանող բլոկից: Եթե B_1 -ը իզոմորֆ է K_2 -ին, ապա իր միակ կողը ներկենք 1 գույնով: Եթե այն համիլտոնյան արտաքին հարթ գրաֆ է, ապա վերցնենք $\beta(e) = \alpha_1(e)$, բոլոր $e \in E(B_1)$ կողերի համար, որտեղ α_1 -ը B_1 -ի ներկումն է ըստ Լեմմա 2.4.14-ի:

Այնուհետև, կատարենք $bc(G)$ ծառի լայնական շրջանցում: Ենթադրենք հասել ենք $B_i \in V(bc(G))$ բլոկին: $bc(G)$ ծառում այս բլոկի ծնողը որևէ c_k միակցման կետ է, որի ծնողը իր հերթին որևէ այլ B_j բլոկ է, որն ալգորիթմի նախորդ քայլերում արդեն ներկվել է: Ենթադրենք այդ պահին $\bar{S}(c_k, \beta) = t$: Կառուցենք B_i բլոկի α_i ներկումը: Եթե B_i -ն իզոմորֆ է K_2 -ին, ապա նրա միակ կողը ներկենք 1 գույնով: Հակառակ դեպքում, որպես

α_i վերցնենք B_i բլոկի ներկումը համաձայն Լեմմա 2.4.14-ի՝ վերցնելով $w_0 = c_k$, որպեսզի երաշխավորվի, որ $def(c_k, \alpha_i) = 0$: G -ի համապատասխան կողերը ներկենք հետևյալ բանաձևով. $\beta(e) = \alpha_i(e) + t$, բոլոր $e \in E(B_i)$ կողերի համար: Այսպես կերաշխավորվի, որ B_i բլոկը ներկելուց հետո $def(c_k, \beta)$ դեֆիցիտը կմնա հավասար $def(c_k, \alpha_j)$ -ին:

Հեշտ է տեսնել, որ

$$def(G, \beta) = \sum_k def(G, \alpha_k) = \sum_k \sum_{\substack{i \geq 3 \\ \text{կենտ } i}} f_i(B_k) = \sum_{\substack{i \geq 3 \\ \text{կենտ } i}} f_i(G),$$

$$gn(G, \beta) = \max_k gn(G, \alpha_k) \leq \max_k \left\{ f_3(B_k) + \min \left\{ 1, \sum_{\substack{i \geq 5 \\ \text{կենտ } i}} f_i(B_k) \right\} \right\} \leq$$

$$\leq f_3(G) + \min \left\{ 1, \sum_{\substack{i \geq 5 \\ \text{կենտ } i}} f_i(G) \right\} :$$

□

Հետևանք 2.4.16. Եթե G -ն երկկողմանի արտաքին հարթ գրաֆ է, ապա այն միջակայքային ներկելի է:

Հետևանք 2.4.17. Եթե G -ն եռանկյուն չպարունակող արտաքին հարթ գրաֆ է, ապա այն միջակայքային 1-անցք-ներկելի է:

Հետևանք 2.4.18. Եթե G -ն արտաքին հարթ գրաֆ է, ապա

$$def(G) \leq \frac{|V(G)|-2}{og(G)-2},$$

որտեղ $og(G)$ -ն G -ի կարճագույն կենտրոնի երկարությունն է:

Ապացույց. Կամայական համիլտոնյան արտաքին հարթ գրաֆ կարելի է կառուցել սկսելով K_2 -ից և իտերատիվ կերպով ավելացնելով սահմանափակ նիստեր: Յուրաքանչյուր ավելացված սահմանափակ նիստ, որն ունի m կող, ավելացնում է ճիշտ $m - 2$ գագաթներ: Այսպիսով, երբ G -ն համիլտոնյան է, $|V(G)| = 2 + \sum_{i \geq 3} f_i(G)(i - 2)$: Ընդհանուր դեպքում, երբ B_1, \dots, B_k , $k \geq 1$, հանդիսանում են G -ի բլոկները, ունենք, որ

$$|V(G)| \geq 1 + \sum_{j=1}^k (|V(B_j)| - 1) \geq 1 + \sum_{j=1}^k \left(2 + \sum_{i \geq 3} f_i(B_j)(i - 2) - 1 \right)$$

$$\geq 2 + \sum_{i \geq 3} f_i(G)(i - 2) \geq 2 + \sum_{\substack{i \geq 3 \\ \text{կենտ } i}} f_i(G)(i - 2) \geq 2 + \sum_{\substack{i \geq 3 \\ \text{կենտ } i}} f_i(G)(og(G) - 2) :$$

Վերջին անհավասարությունը տեղի ունի, քանի որ կամայական կենտ կողեր ունեցող նիստ ունի առնվազն $og(G)$ կող: Հաշվի առնելով Թեորեմ 2.4.15-ը, ստանում ենք, որ $def(G) \leq \sum_{\substack{i \geq 3 \\ \text{կենտ } i}} f_i(G) \leq \frac{|V(G)|-2}{og(G)-2}$: \square

Գիառոն, Կուբալը և Մալաֆիյսկին ցույց են տվել, որ գոյություն ունի գրաֆների $\{G_n\}$ հաջորդականություն այնպես, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{def(G_n)}{|V(G_n)|} = 1$ [32]: Մյուս կողմից՝ հայտնի չեն գրաֆներ, որոնց դեֆիցիտը գազաթների թվից մեծ է: Գրաֆների դեֆիցիտի վերաբերյալ կարևորագույն բաց խնդիրներից է հետևյալ հիպոթեզը.

Հիպոթեզ 2.1. *Ցանկացած G գրաֆի համար $def(G) \leq |V(G)|$:*

Հիպոթեզը ակնհայտորեն ճիշտ է միջակայքային 1-անցք-ներկելի գրաֆների համար, այդ թվում՝ համասեռ գրաֆների համար: Մյուս կողմից, հայտնի է, որ կամայական h թվի համար գոյություն ունի գրաֆ, որը միջակայքային h -անցք-ներկելի չէ [53]: Հետևանք 2.4.18-ից հետևում է, որ արտաքին հարթ գրաֆները բավարարում են Հիպոթեզ 2.1-ին:

2.5 Տոռերի միջակայքային ներկումներ

Այժմ դիտարկենք այն $G \square H$ կապակցված դեկարտյան արտադրյալները, որոնց արտադրիչներից յուրաքանչյուրի առավելագույն աստիճանը չի գերազանցում երկուսը: Այսպիսի արտադրյալների մի մասը հարթ գրաֆներ են, որոնց միջակայքային ներկումները արդեն դիտարկվել են նախորդ պարագրաֆում: Այսպիսի արտադրյալները կլինեն ոչ հարթ այն և միայն այն դեպքում, երբ երկու արտադրիչներն էլ հանդիսանում են ցիկլեր: Այս պարագրաֆում կդիտարկենք տոռերի միջակայքային ներկումները:

Պետրոսյանը [47] ցույց է տվել, որ տոռը $T(m, n) \in \mathfrak{R}$ այն և միայն դեպքում, երբ mn -ը զույգ է: Քանի որ $T(m, n)$ -ը 4-համասեռ է, Թեորեմ 1.1.2-ից հետևում է, որ $w(T(m, n)) = 4$ երբ mn -ը զույգ է: Այն դեպքի համար, երբ երկու արտադրիչներն էլ զույգ երկարությամբ ցիկլեր են, Պետրոսյանն ու Կարապետյանը [52] ստացել են այսպիսի գնահատական.

Թեորեմ 2.5.1. *Ցանկացած $m, n \geq 2$ թվերի համար*

$$W(T(2m, 2n)) \geq \max\{3m + n, 3n + m\}.$$

Մեզ հաջողվել է փոքր ինչ ուժեղացնել այս արդյունքը և ստանալ համանման արդյունք այն դեպքում, երբ արտադրիչներից մեկը կենտ երկարությամբ ցիկլ է:

Թեորեմ 2.5.2. Տանկացած $m, n \geq 2$ թվերի համար

$$W(T(2m, 2n)) \geq \max\{3m + n + 2, 3n + m + 2\},$$

իսկ ցանկացած $m \geq 2, n \in \mathbb{N}$ թվերի համար

$$W(T(2m, 2n + 1)) \geq \begin{cases} 2m + 2n + 2, & \text{երբ } m\text{-ը կենս է,} \\ 2m + 2n + 3, & \text{երբ } m\text{-ը զույգ է:} \end{cases}$$

Ապացույց. $W(T(2m, 2n))$ -ի ստորին գնահատականը ($m, n \geq 2$) հետևում է Հետևանք 2.2.5-ից: Թեորեմի երկրորդ կեսը ապացուցելու համար բավական է կառուցել $T(2m, 2n + 1)$ -ի միջակայքային կողային ներկումներ, որ կբավարարեն նշված պայմաններին:

Դիցուք,

$$\begin{aligned} V(T(2m, 2n + 1)) &= \left\{ v_j^{(i)} : 1 \leq i \leq 2m, 1 \leq j \leq 2n + 1 \right\}, \\ E(T(2m, 2n + 1)) &= \bigcup_{i=1}^{2m} E^i \cup \bigcup_{j=1}^{2n+1} E_j, \text{ որտեղ} \\ E^i &= \left\{ v_j^{(i)} v_{j+1}^{(i)} : 1 \leq j \leq 2n \right\} \cup \left\{ v_1^{(i)} v_{2n+1}^{(i)} \right\}, \\ E_j &= \left\{ v_j^{(i)} v_j^{(i+1)} : 1 \leq i \leq 2m - 1 \right\} \cup \left\{ v_j^{(1)} v_j^{(2m)} \right\}: \end{aligned}$$

$T(2m, 2n + 1)$ -ի α կողային ներկումը սահմանենք հետևյալ կերպ.

- (1) $\alpha \left(v_j^{(1)} v_{j+1}^{(1)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2m)} v_{j+1}^{(2m)} \right) = 2j,$
որտեղ $j = 1, \dots, n + 1,$
- (2) $\alpha \left(v_j^{(1)} v_{j+1}^{(1)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2m)} v_{j+1}^{(2m)} \right) = 2(2n + 1 - j) + 3$ և
 $\alpha \left(v_1^{(1)} v_{2n+1}^{(1)} \right) = \alpha \left(v_1^{(2m)} v_{2n+1}^{(2m)} \right) = 3,$
որտեղ $j = n + 2, \dots, 2n,$
- (3) $\alpha \left(v_j^{(1)} v_j^{(2m)} \right) = 2j - 1,$
որտեղ $j = 1, \dots, n + 2,$
- (4) $\alpha \left(v_j^{(1)} v_j^{(2m)} \right) = 2(2n + 3 - j),$
որտեղ $j = n + 3, \dots, 2n + 1,$
- (5) $\alpha \left(v_j^{(2i)} v_{j+1}^{(2i)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2i+1)} v_{j+1}^{(2i+1)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2m-2i)} v_{j+1}^{(2m-2i)} \right) =$
 $\alpha \left(v_j^{(2m-2i+1)} v_{j+1}^{(2m-2i+1)} \right) = 4i + 2j,$
որտեղ $i = 1, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, j = 1, \dots, n + 1,$

$$(6) \alpha \left(v_j^{(2i)} v_{j+1}^{(2i)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2i+1)} v_{j+1}^{(2i+1)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2m-2i)} v_{j+1}^{(2m-2i)} \right) = \\ \alpha \left(v_j^{(2m-2i+1)} v_{j+1}^{(2m-2i+1)} \right) = 4i + 2(2n + 1 - j) + 3 \text{ և} \\ \alpha \left(v_1^{(2i)} v_{2n+1}^{(2i)} \right) = \alpha \left(v_1^{(2i+1)} v_{2n+1}^{(2i+1)} \right) = \alpha \left(v_1^{(2m-2i)} v_{2n+1}^{(2m-2i)} \right) = \\ \alpha \left(v_1^{(2m-2i+1)} v_{2n+1}^{(2m-2i+1)} \right) = 4i + 3,$$

որտեղ $i = 1, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, j = n + 2, \dots, 2n,$

$$(7) \alpha \left(v_j^{(2i-1)} v_j^{(2i)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2m-2i+1)} v_j^{(2m-2i+2)} \right) = 4i + 2j - 3,$$

որտեղ $i = 1, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, j = 2, \dots, n + 1,$

$$(8) \alpha \left(v_j^{(2i-1)} v_j^{(2i)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2m-2i+1)} v_j^{(2m-2i+2)} \right) = 4(n + 1 + i) - 2j,$$

որտեղ $i = 1, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, j = n + 2, \dots, 2n + 1,$

$$(9) \alpha \left(v_1^{(2i-1)} v_1^{(2i)} \right) = \alpha \left(v_1^{(2m-2i+1)} v_1^{(2m-2i+2)} \right) = 4i,$$

որտեղ $i = 1, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor,$

$$(10) \alpha \left(v_j^{(2i)} v_j^{(2i+1)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2m-2i)} v_j^{(2m-2i+1)} \right) = 4i + 2j - 1,$$

որտեղ $i = 1, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, j = 1, \dots, n + 2,$

$$(11) \alpha \left(v_j^{(2i)} v_j^{(2i+1)} \right) = \alpha \left(v_j^{(2m-2i)} v_j^{(2m-2i+1)} \right) = 4i + 2(2n + 3 - j),$$

որտեղ $i = 1, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, j = n + 3, \dots, 2n + 1:$

Դժվար չէ տեսնել, որ α -ն իրոք $T(2m, 2n + 1)$ -ի միջակայքային $(2m + 2n + 3)$ -ներկում է, երբ m -ը զույգ է և միջակայքային- $(2m + 2n + 2)$ -ներկում է, երբ m -ը կենտ է: \square

Թերթեմ 2.5.2-ում ստացված ստորին գնահատականները հեռու չեն $W(T(m, n))$ -ի վերին գնահատականից: Այսպես, քանի որ $T(2m, 2n)$ -ը երկկողմանի է, $\Delta(T(2m, 2n)) = 4$ և $\text{diam}(C(2m, 2n)) = m + n$, Թերթեմ 1.2.6-ից ստանում ենք $W(T(2m, 2n)) \leq 3(m + n) + 1$: Նմանապես, $\Delta(T(2m, 2n + 1)) = 4$ և $\text{diam}(T(2m, 2n + 1)) = m + n$, Թերթեմ 1.2.5-ից ստանում ենք $W(T(2m, 2n + 1)) \leq 3(m + n + 1) + 1$:

Այսպիսով, 1.1.2, 2.4.2 և 2.5.2 Թերթեմներից ստանում ենք.

Հետևանք 2.5.3. Եթե $G = T(2m, 2n)$ ($m, n \geq 2$) և $4 \leq t \leq \max\{3m + n + 2, 3n + m + 2\}$, ապա G -ն ունի միջակայքային t -ներկում: Երբ $H = T(2m, 2n + 1)$ ($m \geq 2, n \in \mathbb{N}$), m -ը կենտ է, իսկ $4 \leq t \leq 2m + 2n + 2$, ապա H -ը ունի միջակայքային t -ներկում, և երբ $H = T(2m, 2n + 1)$ ($m \geq 2, n \in \mathbb{N}$), m -ը զույգ է, իսկ $4 \leq t \leq 2m + 2n + 3$, ապա H -ը ունի միջակայքային t -ներկում:

Անդրադառնանք k -չափանի տոռերին: Հայտնի է, որ $T(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathfrak{N}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ արտադրիչներից գոնե մեկը ունի զրոյգ թվով գազաթներ: Ընդ որում, Թեորեմ 1.1.2-ից՝ այդ պայմանի դեպքում $w(T(n_1, n_2, \dots, n_k)) = 2k$: Օգտվելով ապացուցած թեորեմներից կարելի է ստանալ ստորին գնահատական $W(T(n_1, n_2, \dots, n_k))$ -ի համար որոշ մասնավոր դեպքերում:

Թեորեմ 2.5.4. *Դիցուք y տոռի բաղադրիչների առնվազն k ետը ունեն զրոյգ թվով գազաթներ:*

(1) *Երբ $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$,*

$$W(T(2n_1, 2n_2, \dots, 2n_k)) \geq k + \sum_{i=1}^k n_i(2i - 1),$$

(2) *Երբ $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k$, $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{k+s}$, որպեսզի $s \geq 0$,*

$$W(T(2n_1, \dots, 2n_{k+s}, 2m_1 + 1, \dots, 2m_k + 1)) \geq s + 2k^2 + 2 \sum_{i=1}^k (m_i + n_i) + \sum_{j=1}^s n_{k+j}(4k + 2j - 1):$$

Ապացույց. Թեորեմի առաջին պնդումը ապացուցելու համար կատարենք մաթեմատիկական ինդուկցիա ըստ k -ի: $k = 1$ դեպքը ակնհայտ է. $W(C_{2n_1}) = n_1 + 1$: Ենթադրենք պնդումը ճիշտ է $k - 1$ չափանի տոռի համար՝

$$W(T(2n_1, 2n_2, \dots, 2n_{k-1})) \geq k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i(2i - 1):$$

Նկատենք, որ $T(2n_1, 2n_3, \dots, 2n_{k-1})$ գրաֆը $(2k - 2)$ -համասեռ է, իսկ $T(2n_1, 2n_2, \dots, 2n_k) = C_{2n_k} \square T(2n_1, 2n_2, \dots, 2n_{k-1})$: Հետևաբար, օգտվելով Հետևանք 2.2.5-ից ստանում ենք.

$$W(T(2n_1, 2n_2, \dots, 2n_k)) \geq n_k + 1 + (k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i(2i - 1)) + n_k(2k - 2) = k + \sum_{i=1}^k n_i(2i - 1):$$

Երկրորդ պնդումը ապացուցելու համար հիշենք, որ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալ գործողությունը կոմուտատիվ և ասոցիատիվ է, հետևաբար կարող ենք գրել.

$$T(2n_1, \dots, 2n_{k+s}, 2m_1 + 1, \dots, 2m_k + 1) \cong C_{2n_{k+s}} \square \dots \square C_{2n_{k+1}} \square H,$$

որտեղ $H = T_1 \square T_2 \square \dots \square T_k$, իսկ $T_i = C_{2n_i} \square C_{2m_i + 1}$, $i = 1, \dots, k$: Թեորեմ 2.5.2-ից՝

$W(T_i) \geq 2m_i + 2n_i + 2$: Քանի որ $\Delta(T_i) = 4$, Թեորեմ 2.2.3-ից՝

$$W(H) = W(T_1 \square T_2 \square \dots \square T_k) \geq 2k + \sum_{i=1}^k (2m_i + 2n_i) + 2k(k - 1) = 2k^2 + 2 \sum_{i=1}^k (m_i + n_i):$$

Ապացույցն ավարտելու համար կատարենք մաթեմատիկական ինդուկցիա ըստ s

փոփոխականի: Նշանակենք $G_s = T(2n_1, \dots, 2n_{k+s}, 2m_1 + 1, \dots, 2m_k + 1)$: $s = 0$ դեպքում

$W(G_0) = W(H) \geq 2k^2 + 2 \sum_{i=1}^k (m_i + n_i)$: Ենթադրենք, պնդումը ճիշտ է $(s - 1)$ -ի համար՝

$$W(G_{s-1}) \geq s - 1 + 2k^2 + 2 \sum_{i=1}^k (m_i + n_i) + \sum_{j=1}^{s-1} n_{k+j}(4k + 2j - 1):$$

Քանի որ $G_s = C_{2n_{k+s}} \square G_{s-1}$, իսկ G_s -ը $(4k + 2s)$ -համասեռ է, Հետևանք 2.2.5-ից կստանանք.

$$W(G_s) \geq n_{k+s} + 1 + \left(s - 1 + 2k^2 + 2 \sum_{i=1}^k (m_i + n_i) + \sum_{j=1}^{s-1} n_{k+j}(4k + 2j - 1) \right) + \\ + n_{k+s}(4k + 2s - 2) = s + 2k^2 + 2 \sum_{i=1}^k (m_i + n_i) + \sum_{j=1}^s n_{k+j}(4k + 2j - 1) :$$

□

2.6 Հեմմինգի գրաֆների միջակայքային ներկումներ

Երկրորդ գլուխն ավարտենք Հեմմինգի գրաֆների միջակայքային ներկումների ուսումնասիրությամբ: k լրիվ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալը կոչվում է Հեմմինգի գրաֆ.

$$H(n_1, n_2, \dots, n_k) = K_{n_1} \square K_{n_2} \square \dots \square K_{n_k},$$

$$H_n^k = \underbrace{K_n \square \dots \square K_n}_k:$$

Պետրոսյանը [47] ցույց է տվել, որ Հեմմինգի գրաֆները ունեն միջակայքային ներկում այն և միայն այն դեպքում, երբ բաղադրիչներից գոնե մեկը զույգ գազաթանի լրիվ գրաֆ է: Թեորեմ 1.1.2-ից՝ երբ $H(n_1, \dots, n_k) \in \mathfrak{N}$

$$w(H(n_1, \dots, n_k)) = \Delta(H(n_1, \dots, n_k)) = \sum_{i=1}^k n_i - k:$$

Այն դեպքի համար, երբ Հեմմինգի գրաֆի բոլոր բաղադրիչները $2n$ գազաթաներով լրիվ գրաֆներ են, Պետրոսյանը [47] ստացել էր այսպիսի գնահատական.

Թեորեմ 2.6.1. Երբ $n = p^{2^q}$, որտեղ p -ն կենտ է, $q \geq 0$,

$$W(H_{2n}^k) \geq (4n - 2 - p - q)k:$$

Օգտվելով Թեորեմ 2.2.3-ից, Հեմմինգի գրաֆի միջակայքային ներկումներում մասնակցող գույների առավելագույն թիվը կարելի է գնահատել լրիվ գրաֆների միջակայքային ներկումներում մասնակցող գույների թվերով, երբ Հեմմինգի գրաֆի բոլոր բաղադրիչները ունեն զույգ թվով գազաթաներ:

Թեորեմ 2.6.2. Եթե $G = H(2n_1, \dots, 2n_k)$, որպեսզի $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, ապա

$$W(G) \geq \sum_{i=1}^k W(K_{2n_i}) + \sum_{i=1}^{k-1} i(2n_i - 1):$$

Մասնավորապես, երբ Հեմմինգի գրաֆների բոլոր բաղադրիչները իրար հավասար են, Թեորեմ 1.4.19-ը հնարավորություն է տալիս ստանալ այսպիսի գնահատական.

Հետևանք 2.6.3. Եթե $n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{\alpha_i}$, որպեսզի p_i -ն i -րդ պարզ թիվն է, $\pi(n)$ -ը՝ n -ը չգերազանցող պարզ թվերի քանակը, իսկ $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ապա

$$W(H_{2n}^k) \geq (4n - 3 - A_n)k + \frac{1}{2}k(k - 1)(2n - 1),$$

$$\text{որպեսզի } A_n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 4\alpha_5 + \frac{1}{2} \sum_{i=6}^{\pi(n)} \alpha_i(p_i + 1):$$

Նկատենք, որ այս արդյունքը էապես լավացնում է Թեորեմ 2.6.1-ի գնահատականը: Այս հետևանքից և Թեորեմ 1.1.2-ից ստանում ենք հետևյալ պնդումը.

Հետևանք 2.6.4. Եթե $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$, որպեսզի p_i -ն i -րդ պարզ թիվն է, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, իսկ $k(2n - 1) \leq t \leq (4n - 3 - A_n)k + \frac{1}{2}k(k - 1)(2n - 1)$, որպեսզի $A_n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 4\alpha_5 + \frac{1}{2} \sum_{i=6}^{\infty} \alpha_i(p_i + 1)$, ապա H_{2n}^k գրաֆը ունի միջակայքային t -ներկում:

Այժմ Հեմմինգի գրաֆի միջակայքային ներկումներում մասնակցող գույների առավելագույն թիվը գնահատենք վերևից:

Թեորեմ 2.6.5. Եթե $G = H(2n_1, \dots, 2n_k)$, որպեսզի $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, ապա

$$W(G) \leq \frac{1}{2}(k + 1) \sum_{i=1}^k (4n_i - 3):$$

Ապացույց. Դիտարկենք $G = H(2n_1, \dots, 2n_k)$ գրաֆի որևէ α միջակայքային $W(G)$ -ներկում: Կամայական երկու e և e' կողերի համար նշանակենք $sp_{\alpha}(e, e') = |\alpha(e) - \alpha(e')|$: Նշանակենք $sp_{\alpha, m} = \max_{d(e, e')=m} sp_{\alpha}(e, e')$: Փորձենք գնահատել այս մեծությունը: Պարզ է, որ $sp_{\alpha, 0} = \Delta(G) - 1$:

Ենթադրենք, որ $m \geq 1$, և ֆիքսենք e և e' կողեր, որոնց հեռավորությունը m է: Գոյություն ունեն u և v գագաթներ, որոնք հանդիսանում են, համապատասխանաբար, e -ի և e' -ի ծայրակետ, և որոնց հեռավորությունը m է: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $\alpha(e) \geq \alpha(e')$: Հեմմինգի գրաֆի հատկություններից հետևում է, որ գոյություն ունեն u և v գագաթները միացնող գագաթներով չհատվող m շղթաներ:

Հետևաբար գոյություն ունեն v_1, \dots, v_m գագաթներ այնպես, որ $vv_i \in E(G)$ և $d(v_i, u) = m - 1, i = 1, \dots, m$: Այդ կողերից ամենափոքր գույնով ներկված կողը նշանակենք e'' -ով: Պարզ է, որ $\alpha(e'') \leq \alpha(e') + \Delta(G) - m$: Հետևաբար՝

$$\begin{aligned} sp_\alpha(e, e') &= |\alpha(e) - \alpha(e')| \leq |\alpha(e) - \alpha(e'') + \Delta(G) - m| \leq \\ &\leq |\alpha(e) - \alpha(e'')| + \Delta(G) - m \leq sp_{\alpha, m-1} + \Delta(G) - m : \end{aligned}$$

Քանի որ e և e' կողերի ընտրությունը պատահական էր, կարող ենք պնդել, որ $sp_{\alpha, m} \leq sp_{\alpha, m-1} + \Delta(G) - m$: Կատարելով մաթեմատիկական ինդուկցիա ըստ m -ի՝ կստանանք.

$$sp_{\alpha, m} \leq (m + 1)\Delta(G) - \frac{1}{2}m(m + 1) - 1:$$

Նկատենք, որ $G = H(2n_1, \dots, 2n_k)$ գրաֆում երկու կողերի հեռավորությունը չի կարող գերազանցել k -ն: Դիցուք $e_1, e_W \in E(G)$ կողերը ներկված են, համապատասխանաբար, 1 և $W(G)$ գույներով, իսկ $d(e_1, e_W) = m_0 \leq k$: Ունենք, որ

$$\begin{aligned} W(G) - 1 &= sp_\alpha(e_1, e_W) \leq (m_0 + 1) \left(\Delta(G) - \frac{m_0}{2} \right) - 1 \leq (k + 1) \left(\Delta(G) - \frac{k}{2} \right) - 1, \\ W(G) &\leq (k + 1) \left(\sum_{i=1}^k (2n_i - 1) - \frac{k}{2} \right) = \frac{1}{2}(k + 1) \sum_{i=1}^k (4n_i - 3) : \end{aligned}$$

□

Հետևանք 2.6.6. Եթե $n \in \mathbb{N}$, ապա $W(H_{2n}^k) \leq \frac{1}{2}k(k + 1)(4n - 3)$:

Հեմմինգի գրաֆների մասնավոր դեպքն են հանդիսանում n -չափանի խորանարդները՝ $Q_n = H_2^n$: Այս գրաֆների համար Հետևանքներ 2.6.3-ում և 2.6.6-ում ստացված ստորին և վերին գնահատականները համընկնում են և տալիս են $W(Q_n)$ -ի ճշգրիտ արժեքը.

Հետևանք 2.6.7. Եթե $n \in \mathbb{N}$, ապա $W(Q_n) = \frac{n(n+1)}{2}$:

Այս արժեքը որպես ստորին գնահատական առաջին անգամ ստացվել էր [46]-ում, իսկ որպես ճշգրիտ արժեք՝ [55, 56]-ում:

3 Միջակայքային ներկում չունեցող գրաֆներ և գրաֆների դեֆիցիտ

Այս գլուխը նվիրված է միջակայքային ներկում չունեցող մուլտիգրաֆներին: Առաջին մասում կտրվեն նվազագույն դեֆիցիտով ներկումներում մասնակցող գույների քանակների տարբեր բնույթի գնահատականներ: Երկրորդ մասը նվիրված է որոշ գրաֆների դեֆիցիտի ճշգրիտ արժեքների որոշմանը, մասնավորապես Բորովիցկա-Օլշեվսկայի, Դրգաշ-Բուրչարդտի և Հալուշչակի հիպոթեզի ապացուցմանը: Երրորդ մասը վերաբերում է միջակայքային ներկում չունեցող փոքրագույն երկկողմանի գրաֆների և մուլտիգրաֆների որոնմանը:

3.1 $w_{def}(G)$ և $W_{def}(G)$ պարամետրերի գնահատականներ

Միջակայքային ներկում չունեցող գրաֆների համար հետաքրքիր խնդիր է նրանց նվազագույն դեֆիցիտով ներկումներում մասնակցող գույների քանակը գնահատելը: Այս ուղղությամբ առաջին արդյունքները ստացել են Ալտինակարը, Կապորոսսին և Հերցը [1]: Մասնավորապես, նրանք ցույց են տվել, որ եթե G -ն ունի առնվազն երեք գագաթ, ապա $W_{def}(G) \leq 2|V(G)| - 4 + def(G)$: Այս պարագրաֆում կապացուցենք կապակցված, եռանկյուն չպարունակող և հարթ գրաֆների $w_{def}(G)$ և $W_{def}(G)$ պարամետրերի համար մի քանի այլ գնահատականներ կախված գագաթների թվից, աստիճաններից և տրամագծից:

Թեորեմ 3.1.1. Դիցուք $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, իսկ \mathcal{C} -ն գրաֆների որևէ փակ դաս է կախված կող ավելացնելու գործողության նկատմամբ: Եթե $W(G') \leq f(|V(G')|)$ պայմանը տեղի ունի կամայական $G' \in \mathcal{C} \cap \mathfrak{R}$ գրաֆի համար, ապա ցանկացած $G \in \mathcal{C}$ գրաֆի համար ունենք

$$W_{def}(G) \leq f(|V(G)| + def(G))$$

Ապացույց. Դիցուք $G \in \mathcal{C}$ և α -ն G -ի ճիշտ կողային ներկում է $W_{def}(G)$ գույներով, ընդ որում $def(G, \alpha) = def(G)$:

Սահմանենք G' օժանդակ գրաֆը հետևյալ կերպ. կամայական $v \in V(G)$ գագաթի համար, որի համար $def(v, \alpha) > 0$, v գագաթից կախենք թվով $def(v, \alpha)$ նոր կողեր: Պարզ է, որ $G' \in \mathcal{C}$ և $|V(G')| = |V(G)| + def(G)$: Այնուհետև, շարունակենք G -ի α $W_{def}(G)$

գույներով ճիշտ կողային ներկումը մինչև G' -ի β ճիշտ կողային $W_{def}(G)$ -ներկում հետևյալ կերպ. կամայական $v \in V(G)$ գագաթի համար, որի համար $def(v, \alpha) > 0$, ներկենք v -ին նոր ավելացված կողերը $[\underline{S}(v, \alpha), \overline{S}(v, \alpha)] \setminus S(v, \alpha)$ բազմության տարբեր գույներով: β -ի սահմանման և G' -ի կառուցման համաձայն կստանանք, որ G' -ը ունի միջակայքային $W_{def}(G)$ -ներկում: Քանի որ $G' \in \mathcal{C} \cap \mathfrak{N}$, ունենք, որ

$$W_{def}(G) \leq W(G') \leq f(|V(G')|) = f(|V(G)| + def(G)):$$

□

Քանի որ եռանկյուն չպարունակող գրաֆների դասը փակ է կախված կող ավելացնելու գործողության նկատմամբ, ըստ Թեորեմներ 1.2.1-ի և 3.1.1-ի ստանում ենք հետևյալ արդյունքները.

Հետևանք 3.1.2. *Եթե G -ն եռանկյուն չպարունակող գրաֆ է, ապա $W_{def}(G) \leq |V(G)| + def(G) - 1$:*

Հետևանք 3.1.3. *Եթե G -ն երկկողմանի գրաֆ է, ապա $W_{def}(G) \leq |V(G)| + def(G) - 1$:*

Թեորեմ 1.5.1-ից ունենք, որ $W_{def}(K_{m,n}) = m + n - 1$ ($m, n \in \mathbb{N}$), ուստի այս վերջին գնահատականը հասանելի է այն G գրաֆների համար, որոնց $def(G) = 0$: Այժմ դիտարկենք այնպիսի G գրաֆներ, որոնց համար $def(G) = 1$: Դիցուք, $K'_{n,n}$ գրաֆը ստացվում է $K_{n,n}$ լրիվ երկկողմանի գրաֆից՝ մեկ կողի տրոհմամբ.

$$V(K'_{n,n}) = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w\}$$

$$E(K'_{n,n}) = (\{u_i v_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\} \setminus \{u_n v_n\}) \cup \{u_n w, w v_n\}$$

Հայտնի է, որ $\chi'(K'_{n,n}) = n + 1$ [11, 70], ուստի ըստ Թեորեմ 1.1.1-ի, $K'_{n,n} \notin \mathfrak{N}$: Հետևաբար, $def(K'_{n,n}) \geq 1$: Մյուս կողմից, սահմանենք $K'_{n,n}$ -ի α կողային ներկումը հետևյալ կերպ. ցանկացած $e \in E(K'_{n,n})$ կողի համար

$$\alpha(e) = \begin{cases} i + j - 1, & \text{երբ } e = u_i v_j, \\ 2n - 1, & \text{երբ } e = u_n w, \\ 2n, & \text{երբ } e = w v_n : \end{cases}$$

Դժվար չէ տեսնել, որ α -ն $K'_{n,n}$ -ի ճիշտ ներկում է $2n$ գույներով և $def(K'_{n,n}, \alpha) = 1$ դեֆիցիտով: Հետևաբար, $def(K'_{n,n}) = 1$ և $2n \leq W_{def}(K'_{n,n}) \leq 2n + 1$:

Քանի որ հարթ գրաֆների դասը փակ է կախված կող ավելացնելու գործողության նկատմամբ, ըստ Թեորեմներ 1.2.7-ի և 3.1.1-ի կստանանք հետևյալ արդյունքը:

Շեռևանք 3.1.4. Եթե G -ն հարթ գրաֆ է, ապա $W_{def}(G) \leq \frac{11}{6} (|V(G)| + def(G))$:

Այժմ ապացուցենք $W_{def}(G)$ -ի որոշ վերին գնահատականներ՝ կախված G կապակցված գրաֆի գագաթների աստիճաններից և տրամագծից:

Թեորեմ 3.1.5. Եթե G -ն կապակցված գրաֆ է, ապա

$$W_{def}(G) \leq 1 + def(G) + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} (d_G(v) - 1),$$

որտեղ \mathcal{P} -ն G -ի բոլոր կարճագույն շղթաների բազմությունն է:

Ապացույց. Ապացույցում կհետևենք [5]-ում Թեորեմ 2-ի ապացույցի սխեմային: Դիցուք α -ն G -ի ճիշտ ներկում է $W_{def}(G)$ գույներով, ընդ որում $def(G, \alpha) = def(G)$:

Թեորեմ 3.1.1-ի ապացույցին համանման սահմանենք H օժանդակ գրաֆը H հետևյալ կերպ. ցանկացած $v \in V(G)$ գագաթի համար, որի համար $def(v, \alpha) > 0$, v գագաթին ավելացնենք թվով $def(v, \alpha)$ կախված կողեր: Պարզ է, որ H -ը կապակցված գրաֆ է: G -ի α ճիշտ ներկումը $W_{def}(G)$ գույներով շարունակենք մինչև H -ի β ճիշտ $W_{def}(G)$ -ներկում հետևյալ կերպ. կամայական $v \in V(G)$ գագաթի համար, որի համար $def(v, \alpha) > 0$, v -ին կից ավելացված կողերը ներկենք $[\underline{S}(v, \alpha), \overline{S}(v, \alpha)] \setminus S(v, \alpha)$ բազմության տարրեր գույներով: Ըստ β -ի սահմանման և H -ի կառուցման ստանում ենք, որ H -ը ունի միջակայքային $W_{def}(G)$ -ներկում: H -ի β ներկման մեջ դիտարկենք 1 և $W_{def}(G)$ գույներով ներկված կողերը: Դիցուք, $e = u_1 u_2, e' = w_1 w_2$ և $\beta(e) = 1, \beta(e') = W_{def}(G)$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ենթադրել, որ e -ն և e' -ը միացնող P կարճագույն շղթան միացնում է u_1 և w_1 գագաթները, որտեղ $P = v_0 e_1 v_1 \dots v_{i-1} e_i v_i \dots v_{k-1} e_k v_k$ և $v_0 = u_1, v_k = w_1$:

Քանի որ β -ն H -ի միջակայքային $W_{def}(G)$ -ներկում է, ունենք, որ

$$\begin{aligned} \beta(e_1) &\leq d_H(v_0), \\ \beta(e_2) &\leq \beta(e_1) + d_H(v_1) - 1, \\ &\dots\dots\dots \\ \beta(e_i) &\leq \beta(e_{i-1}) + d_H(v_{i-1}) - 1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\beta(e_k) \leq \beta(e_{k-1}) + d_H(v_{k-1}) - 1,$$

$$\beta(e') \leq \beta(e_k) + d_H(v_k) - 1.$$

Գումարելով այս անհավասարությունները, կստանանք.

$$\beta(e') \leq 1 + \sum_{j=0}^k (d_H(v_j) - 1):$$

Այստեղից ստանում ենք, որ

$$\begin{aligned} W_{def}(G) = \beta(e') &\leq 1 + \sum_{j=0}^k (d_H(v_j) - 1) \leq 1 + def(G) + \sum_{j=0}^k (d_G(v_j) - 1) \\ &\leq 1 + def(G) + \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in V(P)} (d_G(v) - 1): \end{aligned}$$

□

Հետևանք 3.1.6. Եթե G -ն կապակցված գրաֆ է, ապա

$$W_{def}(G) \leq 1 + def(G) + (\text{diam}(G) + 1) (\Delta(G) - 1):$$

Հայտնի է, որ Թեորեմ 3.1.5-ի վերին գնահատականը հասանելի է ծառերի համար [73, 74]: Նկատենք, որ որոշ գրաֆների համար Հետևանք 3.1.6-ի վերին գնահատականը հեռու չէ ճշգրիտ արժեքից: Մասնավորապես, կենտ ցիկլերի դեպքում $def(C_{2n+1}) = 1$, $\text{diam}(C_{2n+1}) = n$, իսկ $W_{def}(C_{2n+1}) = n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$):

Այժմ ապացուցենք կատարյալ զուգակցում չունեցող գրաֆների $w_{def}(G)$ -ի համար ստորին գնահատական, որն ընդհանրացնում է Հետևանք 1.2.16-ը:

Թեորեմ 3.1.7. Եթե G -ն չունի կատարյալ զուգակցում, ապա $w_{def}(G) \geq 2\delta(G) - def(G)$:

Ապացույց. Այս թեորեմի ապացույցում մենք հետևում ենք [15]-ի Պնդում 2-ի ապացույցին:

Դիցուք α -ն G -ի ճիշտ ներկում է $w_{def}(G)$ գույներով և $def(G, \alpha) = def(G)$:

Հեշտ է տեսնել, որ ցանկացած $v \in V(G)$ գագաթի համար ունենք, որ

$$1 \leq \underline{S}(v, \alpha) \leq w_{def}(G) - \delta(G) + 1:$$

Ենթադրենք, որ $w_{def}(G) - \delta(G) + 1 \leq \delta(G)$ (հակառակ դեպքում՝ $w_{def}(G) \geq 2\delta(G) \geq 2\delta(G) - def(G)$):

Քանի որ G -ն չունի կատարյալ զուգակցում, կամայական $c \in [w_{def}(G) - \delta(G) + 1, \delta(G)]$ գույնի համար գոյություն ունի առնվազն մեկ գագաթ v_c այնպիսին, որ $c \notin S(v_c, \alpha)$ և $\underline{S}(v_c, \alpha) < c < \overline{S}(v_c, \alpha)$: Այստեղից հետևում է, որ առնվազն $2\delta(G) - w_{def}(G)$ գույներ բացակայում են G -ի գագաթներից: Ուստի, $def(G) \geq 2\delta(G) - w_{def}(G)$: □

Այս թեորեմը ընդհանրացնում է [15] աշխատանքում ստացված հետևյալ երկու արդյունքները.

Հետևանք 3.1.8. [15] Եթե G -ն կենտր թվով գազաթներ ունեցող գրաֆ է, ապա $w_{def}(G) \geq 2\delta(G) - def(G)$:

Հետևանք 3.1.9. [15] Եթե G -ն կենտր թվով գազաթներ ունեցող r -համասեռ գրաֆ է և $def(G) = \frac{r}{2}$, ապա $w_{def}(G) \geq \frac{3r}{2}$:

Գիառոն, Կուբալեն և Մալաֆիյսկին [33]-ում որոշել են K_{2n+1} -ի դեֆիցիտը և ցույց են տվել, որ $def(K_{2n+1}) = n$ ($n \in \mathbb{N}$): Թեորեմ 3.1.7-ի ստորին գնահատականը հասանելի է K_{2n+1} -ի համար, քանի որ $\delta(K_{2n+1}) = 2n$ և [15]-ում ապացուցվել է, որ $w_{def}(K_{2n+1}) = 3n$ ($n \in \mathbb{N}$): Հաջորդ պարագրաֆում կապացուցենք, որ այս ստորին գնահատականը հասանելի է նաև գրեթե լրիվ գրաֆների համար:

Այժմ դիտարկենք $W_{def}(G) - w_{def}(G)$ տարբերությունը: [74]-ում Քամալյանը ապացուցել էր, որ կամայական $l \in \mathbb{N}$ թվի համար գոյություն ունի G գրաֆ այնպիսին, որ $G \in \mathfrak{R}$ և $W(G) - w(G) \geq l$: Հաջորդ թեորեմը ընդհանրացնում է այս արդյունքը դրական դեֆիցիտով գրաֆների համար:

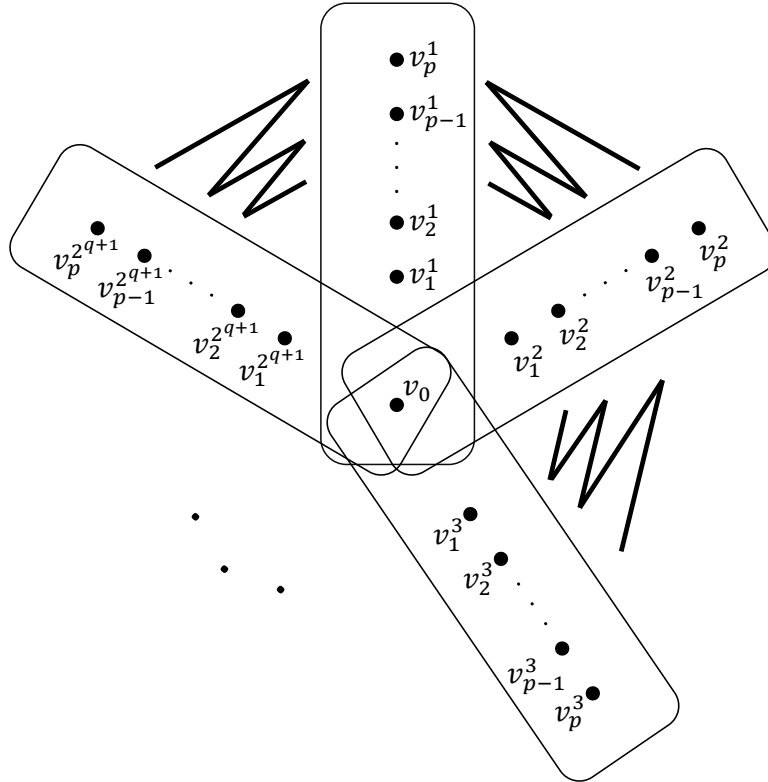
Թեորեմ 3.1.10. Տանկացած $l \in \mathbb{N}$ թվի համար գոյություն ունի G գրաֆ այնպիսին, որ $def(G) > 0$ և $W_{def}(G) - w_{def}(G) \geq l$:

Ապացույց. Դիցուք $p = 2l + 1$ և $G = K_{2p+1}$: Քանի որ $def(G) = p > 0$ և $w_{def}(G) = 3p$, ապա ապացույցը ավարտելու համար բավարար է ցույց տալ, որ $W_{def}(G) \geq 3p + \frac{p-1}{2} = 3p + l$: Մենք կապացուցենք փոքր ինչ ավելի ընդհանուր արդյունք բոլոր կենտր թվով գազաթներով լրիվ գրաֆների համար: Տույց կտանք, որ եթե $n = p2^q$, որտեղ p -ն կենտ է, իսկ $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ապա

$$W_{def}(K_{2n+1}) \geq 3n + \frac{p-1}{2}:$$

K_{p2^q+1} -ի ϕ կողային ներկումը կառուցենք օգտագործելով տարբեր գրաֆների երեք ներկումներ:

1. Մեզ հարկավոր է Թեորեմ 1.3.2-ում նկարագրված K_{p+1} -ի α միջակայքային $(\frac{3}{2}(p+1) - 2)$ -ներկումը: K_{p+1} -ի գազաթները նշանակենք հետևյալ կերպ. $V(K_{p+1}) = \{u_i : i = 0, \dots, p\}$: α ներկումը ունի մի կարևոր հատկություն, որ $\underline{S}(u_i, \alpha) = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + 1$ կամայական $i = 0, \dots, p$ թվի համար:



Նկ. 3.1: $K_{p2^{q+1}+1}$ գրաֆի գագաթները բաժանում ենք 2^{q+1} խմբերի այպես, որ կամայական երկու խմբի հատումը v_0 գագաթն է:

2. Այնուհետև, մեզ պետք է $K_{p,p}$ -ի հատուկ տիպի ներկում, որը կնշանակենք β -ով: Դիցուք, $K_{p,p}$ -ի գագաթներն են. $V(K_{p,p}) = \{x_i, y_i : i = 1, \dots, p\}$: β ներկումը պետք է բավարարի հետևյալ պայմանին. կամայական $i = 1, \dots, p$ թվի համար $\underline{S}(x_i, \beta) = \underline{S}(y_i, \beta) = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + 1$: Այս պայմանին բավարարող $K_{p,p}$ -ի ներկման գոյությունը հետևում է [65] աշխատանքի Լեմմա 4-ից:
3. Վերջապես, մեզ պետք է $K_{2^{q+1}+1}$ գրաֆի որևէ γ ներկում $3 \cdot 2^q$ գույներով: Գրաֆի գագաթները նշանակենք $V(K_{2^{q+1}+1}) = \{w^j : j = 0, \dots, 2^{q+1}\}$: γ -ն պետք է բավարարի հետևյալ պայմանին. $def(K_{2^{q+1}+1}, \gamma) = def(w^0, \gamma) = 2^q$: Այսպիսի հատկանիշներով ներկումներ նկարագրված են [33]-ի Թեորեմ 4.2-ում և [58]-ի Թեորեմ 29-ում:

$K_{p2^{q+1}+1}$ գրաֆի գագաթները նշանակենք հետևյալ կերպ (Նկ. 3.1).

$$V(K_{p2^{q+1}+1}) = \{v_0\} \cup \{v_i^j : i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, 2^{q+1}\}.$$

Կառուցենք նրա ϕ ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned}\phi(v_{i_1}^j v_{i_2}^j) &= \alpha(u_{i_1} u_{i_2}) + p(\gamma(w^0 w^j) - 1), & 0 \leq i_1 < i_2 \leq p, & 1 \leq j \leq 2^{q+1}, \\ \phi(v_{i_1}^{j_1} v_{i_2}^{j_2}) &= \beta(x_{i_1} y_{i_2}) + p(\gamma(w^{j_1} w^{j_2}) - 1), & 1 \leq i_1, i_2 \leq p, & 1 \leq j_1 < j_2 \leq 2^{q+1} : \end{aligned}$$

Վերևում բերված բանաձևերում v_0^j սիմվոլները վերաբերվում են միևնույն v_0 գազաթին, կամայական $j = 1, \dots, 2^{q+1}$ թվի համար: Առաջին բանաձևի միջոցով ներկվում են այն կողերը, որոնց ծայրակետերը պատկանում են Նկ. 3.1-ում միևնույն խմբին, մինչդեռ երկրորդ բանաձևի միջոցով ներկվում են այն կողերը, որոնք միացնում են տարբեր խմբերին պատկանող գազաթները: Ցույց տանք, որ v_i^j , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, 2^{q+1}$, գազաթների սպեկտրները միջակայքեր են:

$$\begin{aligned}S(v_i^j, \phi) &= [\underline{S}(u_i, \alpha) + p(\gamma(w^0 w^j) - 1), \overline{S}(u_i, \alpha) + p(\gamma(w^0 w^j) - 1)] \\ &\cup \bigcup_{j' \in [1, 2^{q+1}] \setminus \{j\}} [\underline{S}(x_i, \beta) + p(\gamma(w^j w^{j'}) - 1), \overline{S}(x_i, \beta) + p(\gamma(w^j w^{j'}) - 1)]. \end{aligned}$$

Ունենք, որ $\underline{S}(u_i, \alpha) = \underline{S}(x_i, \beta) = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + 1$ կամայական $i = 1, \dots, p$ թվի համար: Ուստի վերը նշված արտահայտությունը դառնում է.

$$\begin{aligned}S(v_i^j, \phi) &= \left[\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1 + p(\gamma(w^0 w^j) - 1), \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + p + p(\gamma(w^0 w^j) - 1) \right] \\ &\cup \bigcup_{j' \in [1, 2^{q+1}] \setminus \{j\}} \left[\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1 + p(\gamma(w^j w^{j'}) - 1), \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + p + p(\gamma(w^j w^{j'}) - 1) \right] \\ &= \bigcup_{j' \in [0, 2^{q+1}] \setminus \{j\}} \left[\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1 + p(\gamma(w^j w^{j'}) - 1), \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + p + p(\gamma(w^j w^{j'}) - 1) \right] \\ &= \left[\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1 + p(\underline{S}(w^j, \gamma) - 1), \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + p + p(\overline{S}(w^j, \gamma) - 1) \right] : \end{aligned}$$

Վերջին հավասարությունը տեղի ունի, քանի որ $S(w^j, \gamma)$ սպեկտրը միջակայք է բոլոր $j = 1, \dots, 2^{q+1}$ թվերի համար: Վերջապես, v_0 -ի սպեկտրը և ϕ ներկման դեֆինիցիոն v_0 գազաթում կլինեն.

$$\begin{aligned}S(v_0, \phi) &= \bigcup_{j' \in [1, 2^{q+1}]} [\underline{S}(u_0, \alpha) + p(\gamma(w^0 w^{j'}) - 1), \overline{S}(u_0, \alpha) + p(\gamma(w^0 w^{j'}) - 1)] \\ &= \bigcup_{j' \in [1, 2^{q+1}]} [1 + p \cdot \gamma(w^0 w^{j'}) - p, p \cdot \gamma(w^0 w^{j'})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}def(v_0, \phi) &= \overline{S}(v_0, \phi) - \underline{S}(v_0, \phi) - d_{K_{2^{q+1}+1}}(v_0) + 1 \\ &= p \cdot \overline{S}(w^0, \gamma) - (1 + p \cdot \underline{S}(w^0, \gamma) - p) - p \cdot 2^{q+1} + 1 \\ &= p \left(\overline{S}(w^0, \gamma) - \underline{S}(w^0, \gamma) - d_{K_{2^{q+1}+1}}(w^0) + 1 \right) = p \cdot def(w^0, \gamma) = p2^q = n : \end{aligned}$$

Դիցուք w^i և $w^{\bar{j}}$ K_{2^q+1} -ի այն գագաթներն են, որոնց համար $\underline{S}(w^i, \gamma) = 1$ և $\bar{S}(w^{\bar{j}}, \gamma) = 3 \cdot 2^q$: Հեշտ է տեսնել, որ $\underline{S}(v_1^i, \phi) = 1$ և $\bar{S}(v_p^{\bar{j}}, \phi) = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + p + p(3 \cdot 2^q - 1) = 3n + \frac{p-1}{2}$: Ուստի, ϕ -ն K_{2n+1} -ի ճիշտ կողային ներկում է $3n + \frac{p-1}{2}$ գույներով, ընդ որում $def(K_{2n+1}, \phi) = def(v_0, \phi) = n$: \square

Թեորեմ 1.1.2-ի երկրորդ կետը պնդում է, որ եթե G -ն համասեռ մուլտիգրաֆ է, իսկ $w(G) \leq t \leq W(G)$, ապա G -ն ունի միջակայքային t -ներկում: Հաջորդ թեորեմը ընդլայնում է այս արդյունքը դրական դեֆիցիտով մուլտիգրաֆների համար:

Թեորեմ 3.1.11. Դիցուք α_0 -ն G համասեռ մուլտիգրաֆի ճիշտ t_0 -ներկում է, իսկ $D \subseteq V(G)$ նրա գագաթների որևէ ենթաբազմություն է: Եթե կամայական $v \in V(G) \setminus D$ գագաթի համար $def(v, \alpha_0) = 0$, ապա ցանկացած t թվի համար, $\bar{S}(D, \alpha_0) - \underline{S}(D, \alpha_0) + 1 \leq t \leq t_0$, G -ն ունի α ճիշտ t -ներկում այնպես, որ $def(v, \alpha) = def(v, \alpha_0)$ կամայական $v \in V(G)$ գագաթի համար:

Ապացույց. Դիցուք $a = \underline{S}(D, \alpha_0) - 1$ և $b = t_0 - \bar{S}(D, \alpha_0)$: Փաստացի $[\underline{S}(D, \alpha_0), \bar{S}(D, \alpha_0)]$ միջակայքից դուրս ունենք $a + b$ գույներ, և պետք է ազատվել դրանցից $(t_0 - t)$ -ից: Կառուցենք G -ի α ճիշտ կողային ներկումը՝ վերցնելով բոլոր կողերի գույները α_0 ներկումից և ապա փոփոխելով դրանց մի մասը: Նախ կփորձենք ազատվել $\bar{S}(D, \alpha_0)$ -ից մեծ գույներից, և եթե դա բավարար չլինի, կազատվենք $\underline{S}(D, \alpha_0)$ -ից փոքր գույներից:

Եթե $t_0 - t \leq b$, ապա կամայական $e \in E(G)$ կողի համար, որի համար $\alpha_0(e) \in [t + 1, t_0]$, նշանակենք $\alpha(e) = \alpha_0(e) - \Delta(G)$:

Եթե $t_0 - t > b$, ապա կամայական $e \in E(G)$ կողի համար, որի համար $\alpha_0(e) \in [\bar{S}(D, \alpha_0) + 1, t_0]$, նշանակենք $\alpha(e) = \alpha_0(e) - \Delta(G)$: Այնուհետև, կամայական $e \in E(G)$ կողի համար, որի համար $\alpha_0(e) \in [1, t_0 - t - b]$, նշանակենք $\alpha(e) = \alpha_0(e) + \Delta(G)$: Երկու դեպքերում էլ D բազմության գագաթների սպեկտրները չեն փոփոխվում, իսկ մյուս գագաթների սպեկտրները մնում են միջակայքեր: Եթե $\underline{S}(V(G), \alpha) > 1$, ապա վերջնական ներկումը ստանալու համար բոլոր կողերի գույներից հանում ենք $\underline{S}(V(G), \alpha) - 1$: \square

Նշենք, որ Թեորեմ 1.1.2-ի երկրորդ պնդումը կստացվի, եթե վերը նշված թեորեմը կիրառենք միջակայքային ներկելի համասեռ G մուլտիգրաֆի համար՝ որպես α_0 վերցնելով նրա միջակայքային $W(G)$ -ներկումը, իսկ որպես D վերցնելով մեկ գագաթ պարունակող որևէ բազմություն:

Թեորեմ 3.1.10-ի ապացույցից և Թեորեմ 3.1.11-ից հետևում է կենտ գագաթանի լրիվ գրաֆների նվազագույն դեֆիցիտով ներկումների հետևյալ նկարագրությունը:

Հետևանք 3.1.12. Դիցուք $n = p2^q$, որտեղ p -ն կենտ է, իսկ $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: Կամայական t թվի համար, $3n \leq t \leq 3n + \frac{p-1}{2}$, K_{2n+1} -ը ունի α ճիշտ t -ներկում այնպես, որ $def(K_{2n+1}, \alpha) = n$:

Ապացույց. Բավական է վերցնել Թեորեմ 3.1.10-ի ապացույցում նկարագրված K_{2n+1} -ի α_0 ճիշտ կողային ներկումը $(3n + \frac{p-1}{2})$ գույներով, վերցնել $D = \{v_0\}$, որտեղ $v_0 \in V(K_{2n+1})$ և $def(v_0, \alpha_0) = def(K_{2n+1}, \alpha_0) = n$, և հաշվի առնել, որ $\overline{S}(D, \alpha_0) - \underline{S}(D, \alpha_0) + 1 = \overline{S}(v_0, \alpha_0) - \underline{S}(v_0, \alpha_0) + 1 = def(v_0, \alpha_0) + d_{K_{2n+1}}(v_0) = n + 2n = 3n$: \square

3.2 Որոշ գրաֆների դեֆիցիտի ճշգրիտ արժեքներ

Այս պարագրաֆը նվիրված է լրիվ գրաֆներին մոտ գրաֆների և որոշ լրիվ երեք կողմանի գրաֆների դեֆիցիտներին: Նախ կդիտարկենք լրիվ գրաֆներին մոտ գրաֆները: Կենտ թվով գագաթ ունեցող գրաֆների դեֆիցիտի համար հայտնի է հետևյալ ստորին գնահատականը.

Թեորեմ 3.2.1. [14] Եթե G -ն կենտ թվով գագաթ ունեցող գրաֆ է, ապա

$$def(G) \geq \frac{2|E(G)| - (|V(G)| - 1)\Delta(G)}{2}:$$

Հետևանք 3.2.2. [14] Ցանկացած $n, m \in \mathbb{N}$ թվերի համար

$$def(K_{2n+1} - mK_2) \geq n - m, \text{ որտեղ } 1 \leq m \leq n:$$

Ընդհանուր դեպքում, $def(K_{2n+1} - mK_2)$ ($1 \leq m \leq n$) գնահատականը ոչ միշտ է հասանելի, քանի որ K_{2n+1} -ի կամայական M առավելագույն զուգակցման համար ($n \geq 2$), $K_{2n+1} - M \notin \mathfrak{R}$ [46], ուստի $def(K_{2n+1} - nK_2) > 0$: Սակայն այս ստորին գնահատականը հասանելի է $K_{2n+1} - e$ գրաֆի համար, ինչպես առաջարկվել էր [14]-ում հիպոթեզում:

Թեորեմ 3.2.3. Եթե $n \in \mathbb{N}$, ապա $def(K_{2n+1} - e) = n - 1$:

Ապացույց. Հետևանք 3.2.2-ից ունենք, որ $def(K_{2n+1} - e) \geq n - 1$ կամայական $n \in \mathbb{N}$ թվի համար: Ապացույցի համար բավարար է կառուցել $K_{2n+1} - e$ -ի β ճիշտ կողային ներկում, որի դեֆիցիտը կլինի $def(K_{2n+1} - e, \beta) = n - 1$: Դիցուք $V(K_{2n+1} - e) = \{v_0, v_1, \dots, v_{2n}\}$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $e = v_1v_{2n}$:

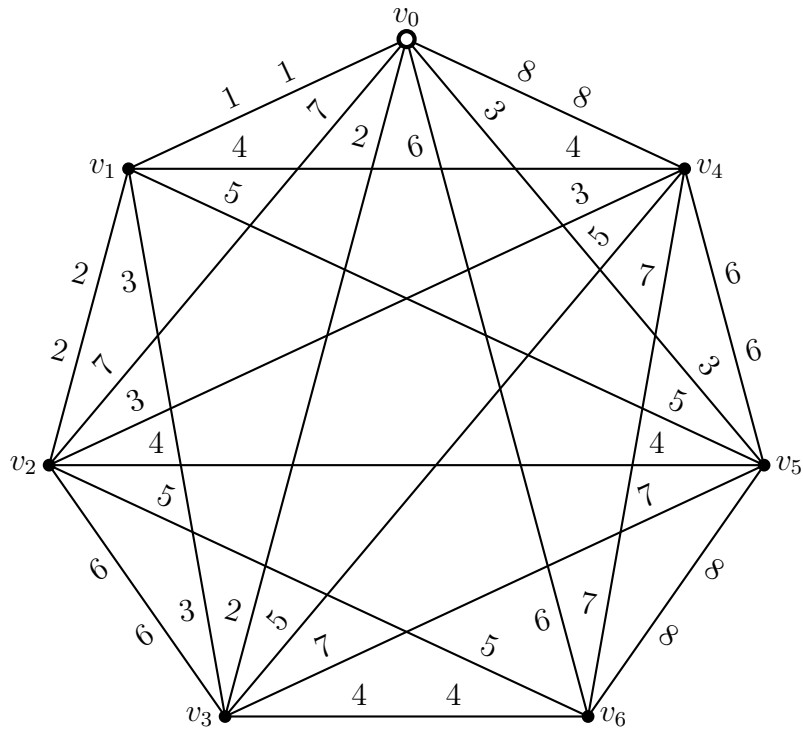
Սահմանենք $K_{2n+1} - e$ -ի β կողային ներկումը: Կամայական $v_i v_j \in E(K_{2n+1})$ կողի համար, որտեղ $i < j$ և $(i, j) \neq (1, 2n)$, $\beta(v_i v_j)$ գույնը որոշենք հետևյալ կերպ.

$$\beta(v_i v_j) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } i = 0, j = 1, \\ 2n + 1, & \text{երբ } i = 0, j = 2, \\ j - 1, & \text{երբ } i = 0, 3 \leq j \leq n, \\ n + 1 + j, & \text{երբ } i = 0, n + 1 \leq j \leq 2n - 2, \\ n, & \text{երբ } i = 0, j = 2n - 1, \\ 2n, & \text{երբ } i = 0, j = 2n, \\ i + j - 1, & \text{երբ } 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 2 \leq j \leq n, i + j \leq n + 1, \\ i + j + n - 2, & \text{երբ } 2 \leq i \leq n - 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq n, i + j \geq n + 2, \\ n + 1 + j - i, & \text{երբ } 3 \leq i \leq n, n + 1 \leq j \leq 2n - 2, j - i \leq n - 2, \\ j - i + 1, & \text{երբ } 1 \leq i \leq n, n + 1 \leq j \leq 2n, j - i \geq n, \\ 2i - 1, & \text{երբ } 2 \leq i \leq 1 + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, n + 1 \leq j \leq n + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, j - i = n - 1, \\ i + j - 1, & \text{երբ } \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 2 \leq i \leq n, n + 1 + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq j \leq 2n - 1, j - i = n - 1, \\ i + j - 2n + 1, & \text{երբ } n + 1 \leq i \leq n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, n + 2 \leq j \leq 2n - 2, i + j \leq 3n - 1, \\ i + j - n, & \text{երբ } n + 1 \leq i \leq 2n - 1, n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq j \leq 2n, i + j \geq 3n: \end{cases}$$

Ապացուցենք, որ β -ն $K_{2n+1} - e$ -ի ճիշտ ներկում է $(3n - 1)$ գույներով և $def(K_{2n+1} - e, \beta) = n - 1$ դեֆիցիտով:

Դիցուք G -ն $K_{2n+1} - e$ -ի ենթագրաֆն է ծնված $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ գագաթներով: Պարզ է, որ G -ն իզոմորֆ է $K_{2n} - e$ գրաֆին: $K_{2n+1} - e$ -ի այս β ներկումը հիմնված է Թեորեմ 1.3.2-ում կառուցված K_{2n} -ի միջակայքային $(3n - 2)$ -ներկման վրա (այդ ներկումը նկարագրված է [46] աշխատանքի Թեորեմ 4-ի ապացույցում): Վերցնում ենք K_{2n} -ի այս միջակայքային $(3n - 2)$ -ներկումը և G -ի բոլոր կողերի գույները շեղում ենք մեկով: Դիցուք α -ն G -ի ստացված ներկումն է: Օգտվելով այս ներկման հատկությունից, որը նկարագրված է [46]-ի Հետևանք 6-ում, ստանում ենք

- 1) $S(v_1, \alpha) = [2, 2n - 1]$ և $S(v_2, \alpha) = [2, 2n]$,
- 2) $S(v_i, \alpha) = S(v_{n+i-2}, \alpha) = [i, 2n - 2 + i]$ երբ $3 \leq i \leq n$,
- 3) $S(v_{2n-1}, \alpha) = [n + 1, 3n - 1]$ և $S(v_{2n}, \alpha) = [n + 1, 3n - 1] \setminus \{2n\}$:



Նկ. 3.2: K_7-e գրաֆի β ճիշտ կողային ներկումը 8 գույներով, որտեղ $def(v_0, \beta) = def(K_7-e) = 2$:

Այժմ, ըստ β -ի սահմանման, ունենք

- 1) $S(v_0, \beta) = [1, n] \cup [2n, 3n - 1]$,
- 2) $S(v_1, \beta) = [1, 2n - 1]$ և $S(v_2, \beta) = [2, 2n + 1]$,
- 3) $S(v_i, \beta) = [i - 1, 2n - 2 + i]$ և $S(v_{n+i-2}, \beta) = [i, 2n - 1 + i]$ երբ $3 \leq i \leq n$,
- 4) $S(v_{2n-1}, \beta) = [n, 3n - 1]$ և $S(v_{2n}, \beta) = [n + 1, 3n - 1]$:

Սա ցույց է տալիս, որ β -ն $K_{2n+1} - e$ գրաֆի ճիշտ կողային ներկում է $(3n - 1)$ գույներով և $def(K_{2n+1} - e, \beta) = n - 1$ դեֆիցիտով: Ուստի, $def(K_{2n+1} - e) = n - 1$ (Նկ. 3.2): \square

Թեորեմ 3.2.4. Եթե $n \in \mathbb{N}$, ապա $w_{def}(K_{2n+1} - e) = 3n - 1$:

Ապացույց. Թեորեմ 3.2.3-ի ապացույցից ունենք, որ $K_{2n+1} - e$ գրաֆը ունի α ճիշտ կողային $(3n - 1)$ -ներկում և $def(K_{2n+1} - e, \alpha) = def(K_{2n+1} - e) = n - 1$ դեֆիցիտով: Այստեղից հետևում է, որ $w_{def}(K_{2n+1} - e) \leq 3n - 1$: Մյուս կողմից, քանի որ $K_{2n+1} - e$ գրաֆը

չունի կատարյալ զուգակցում, $\delta(K_{2n+1} - e) = 2n - 1$ և $def(K_{2n+1} - e) = n - 1$, Թերեմ 3.1.7-ի համաձայն ստանում ենք, որ $w_{def}(K_{2n+1} - e) \geq 2(2n - 1) - n + 1 = 3n - 1$: \square

[25]-ում ցույց է տրվել, որ $def(K_{1,1,n}) = 0$, երբ n -ը զույգ է, իսկ $def(K_{1,1,n}) = 1$, երբ n -ը կենտ է: Այստեղ մենք կընդհանրացնենք այս արդյունքը և կորոշենք $K_{1,m,n}$ գրաֆի դեֆիցիտը բոլոր $m, n \in \mathbb{N}$ թվերի համար:

Թերեմ 3.2.5. *Կամայական $m, n \in \mathbb{N}$ թվերի համար*

$$def(K_{1,m,n}) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } (m+1, n+1) = 1, \\ 1, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Ապացույց. Ըստ Թերեմներ 1.5.5-ի և 1.5.6-ի, $K_{1,m,n} \in \mathfrak{N}$ այն և միայն դեպքում, երբ $(m+1, n+1) = 1$ կամայական $m, n \in \mathbb{N}$ թվերի համար: Այստեղից հետևում է, որ $def(K_{1,m,n}) = 0$, երբ $(m+1, n+1) = 1$, և $def(K_{1,m,n}) \geq 1$, երբ $(m+1, n+1) > 1$: Այժմ ցույց տանք, որ $def(K_{1,m,n}) \leq 1$: Դիցուք.

$$V(K_{1,m,n}) = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n, w\}$$

$$E(K_{1,m,n}) = \{u_i v_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{w u_i : 1 \leq i \leq m\} \cup \{w v_j : 1 \leq j \leq n\} :$$

Սահմանենք $K_{1,m,n}$ -ի α կողային ներկումը հետևյալ կերպ.

(1) երբ $1 \leq i \leq m$ և $1 \leq j \leq n$, $\alpha(u_i v_j) = i + j$,

(2) երբ $1 \leq i \leq m$, $\alpha(w u_i) = i$,

(3) երբ $1 \leq j \leq n$, $\alpha(w v_j) = m + 1 + j$:

Ապացուցենք, որ α -ն $K_{1,m,n}$ -ի ճիշտ կողային ներկում է $m + n + 1$ գույներով և $def(K_{1,m,n}, \alpha) = 1$ դեֆիցիտով: Ըստ α -ի սահմանման ունենք, որ

1) երբ $1 \leq i \leq m$,

$$S(u_i, \alpha) = [i + 1, n + i] \cup \{i\} = [i, n + i] \text{ համաձայն (1)-ի և (2)-ի,}$$

2) երբ $1 \leq j \leq n$,

$$S(v_j, \alpha) = [j + 1, m + j] \cup \{m + 1 + j\} = [j + 1, m + 1 + j] \text{ համաձայն (1)-ի և (3)-ի,}$$

3) $S(w, \alpha) = [1, m] \cup [m + 2, m + n + 1]$ համաձայն (2)-ի և (3)-ի:

Այստեղից հետևում է, որ α -ն $K_{1,m,n}$ -ի ճիշտ կողային ներկում է $m + n + 1$ գույներով և $def(K_{1,m,n}, \alpha) = 1$ դեֆիցիտով ($m, n \in \mathbb{N}$), ուստի $def(K_{1,m,n}) \leq 1$ երբ $(m+1, n+1) > 1$: \square

3.3 Միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի գրաֆների ընտանիքներ

Այս պարագրաֆը նվիրված է այնպիսի երկկողմանի գրաֆների կառուցմանը, որոնք չունեն միջակայքային ներկումներ: Սեվաստյանովը [79] ցույց է տվել, որ երկկողմանի գրաֆի միջակայքային ներկելիության խնդիրը NP -լրիվ է: Փոքրաթիվ գագաթներով երկկողմանի գրաֆների ներկելիության հարցը դիտարկել է Գիառոն [29]: Նրան համակարգչային ծրագրի օգնությամբ հաջողվել է ստանալ հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 3.3.1. *Բոլոր երկկողմանի գրաֆները, որոնք ունեն առավելագույնը 14 գագաթ միջակայքային ներկելի են:*

Մի շարք հետազոտողներ դիտարկել են փոքր առավելագույն աստիճանով երկկողմանի գրաֆների միջակայքային ներկելիության հարցը: Հանսենը ապացուցել է հետևյալ պնդումը ենթախորանարդ երկկողմանիների համար.

Թեորեմ 3.3.2. [38] *Եթե G -ն երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(G) \leq 3$, ապա $G \in \mathfrak{N}$ և $w(G) \leq 4$:*

4 առավելագույն աստիճանով երկկողմանի գրաֆների համար Գիառոն ստացել է հետևյալ երկու արդյունքները.

Թեորեմ 3.3.3. [28]. *Եթե G -ն երկկողմանի գրաֆ է, $\Delta(G) = 4$ և այն չունի 3 աստիճան ունեցող գագաթ, ապա $G \in \mathfrak{N}$ և $w(G) = 4$:*

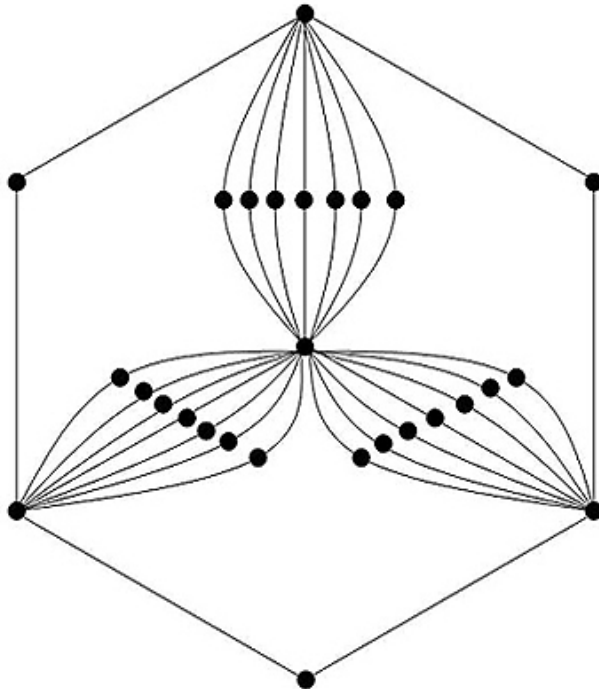
Թեորեմ 3.3.4. [28]. *G երկկողմանի գրաֆի համար միջակայքային $\Delta(G)$ -ներկման գոյությունը կարելի է պարզել բազմանդամային ժամանակում, երբ $\Delta(G) \leq 4$, և NP -լրիվ է, եթե $\Delta(G) \geq 5$:*

Այն երկկողմանի գրաֆների համար, որոնց մի կողմում գագաթների քանակը փոքր է, ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 3.3.5. [32] *Եթե G -ն երկկողմանի գրաֆ է (X, Y) կողմերով, իսկ $\min\{|X|, |Y|\} \leq 3$, ապա $G \in \mathfrak{N}$:*

Հայտնի են երկկողմանի դասերի մի շարք դասեր, որոնք միջակայքային ներկելի են, մասնավորապես, բոլոր համասեռ երկկողմանի գրաֆները [68, 5], երկուուղիկ

երկկողմանի գրաֆները [6, 74], ցանցերը [30], արտաքին հարթ երկկողմանիները [31], $(2, b)$ -երկհամասեռ երկկողմանիները [35, 76], $(3, 5)$ -երկհամասեռ երկկողմանիների [16] և $(3, 4)$ -երկհամասեռ երկկողմանիների որոշ դասեր [8, 59, 67]: Սակայն հայտնի են նաև երկկողմանի գրաֆներ, որոնք չունեն միջակայքային ներկում: Այդպիսի առաջին օրինակը կառուցվել է Միրումյանի կողմից 1989-ին, որը սակայն չի տպագրվել: Այդ գրաֆը ուներ 19 գագաթ և 15 առավելագույն աստիճան (Նկ. 3.4): Առաջին տպագրված օրինակը Սեվաստյանովինն է [79], որն ուներ 28 գագաթ և 21 առավելագույն աստիճան (Նկ. 3.3): Այլ օրինակներ կառուցվել են Էրդյոշի (27 գագաթ և 13 առավելագույն աստիճան), Հերցի և դե Վերրայի (21 գագաթ և 14 առավելագույն աստիճան) և Մալաֆիյսկու կողմից (19 գագաթ և 15 առավելագույն աստիճան): Ջենսենը և Տոֆտը [40]-ում (հետագայում՝ նաև [63]-ում) առաջարկել են հետևյալ խնդիրը.



Նկ. 3.3: Սեվաստյանովի գրաֆը

Խնդիր 3.1. Գոյություն ունի՞ G երկկողմանի գրաֆ, որի համար $4 \leq \Delta(G) \leq 12$ և $G \notin \mathcal{R}$:

Այս պարագրաֆում մենք ներկայացնում ենք միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի գրաֆների կառուցման մի քանի մեթոդներ: Մասնավորապես, այդ մեթոդներով հաջողվել է կառուցել երկու երկկողմանի գրաֆներ G և H , որտեղ $\Delta(G) =$

11, $\Delta(H) = 12$, որոնք չունեն միջակայքային ներկում, այդպիսով մասնակիորեն պատասխանելով Ջենսենի և Տոֆտի հարցադրմանը:

3.3.1 Շեննոնի գրաֆներով հակաօրինակներ

1949 թ. Շեննոնը [61] ցույց է տվել, որ $\chi'(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor$ ցանկացած G մուլտիգրաֆի համար: Նա նաև ցույց է տվել, որ այդ գնահատականը հասանելի է հատուկ տիպի մուլտիգրաֆների վրա, որոնք հետագայում կոչվեցին Շեննոնի գրաֆներ: Շեննոնի գրաֆը երեք գագաթ ունեցող մուլտիգրաֆ է՝ x, y, z , որոնցից յուրաքանչյուր երկուսի միջև կան r կողեր՝ $\mu(xy) = \mu(yz) = \mu(xz) = r$: Մենք կօգտագործենք Շեննոնի գրաֆները միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի գրաֆներ կառուցելու համար: Նկատենք, որ Շեննոնի գրաֆի բոլոր կողերը տրոհելուց առաջացած գրաֆը երկկողմանի է: Ավելին, այն կմնա երկկողմանի, եթե տրոհումից առաջացած գագաթները միացնենք մի նոր գագաթի: Այսպես, սահմանենք $\Delta_{r,s,t}$ ($1 \leq r \leq s \leq t$) գրաֆը հետևյալ կերպ.

$$V(\Delta_{r,s,t}) = \{v, x, y, z\} \cup \{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t\},$$

$$E(\Delta_{r,s,t}) = \{va_i, xa_i, ya_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \{vb_j, xb_j, zb_j : 1 \leq j \leq s\} \cup \{vc_k, yc_k, zc_k : 1 \leq k \leq t\} :$$

$\Delta_{r,s,t}$ -ն կապակցված երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $|V(\Delta_{r,s,t})| = r + s + t + 4$, $d(x) = r + s$, $d(y) = r + t$, $d(z) = s + t$, և $\Delta(\Delta_{r,s,t}) = r + s + t$: Նկատենք, որ $\Delta_{r,s,t}$ գրաֆները ընդհանրացնում են [32]-ում սահմանված Մալաֆիյսկու վարդերը M_k , քանի որ $M_k \cong \Delta_{k,k,k}$, ցանկացած k -ի համար, $k \in \mathbb{N}$:

Թեորեմ 3.3.6. *Եթե $r \geq 5$, ապա $\Delta_{r,s,t} \notin \mathfrak{N}$:*

Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը՝ $\Delta_{r,s,t}$ գրաֆը ունի α միջակայքային q -ներկում ինչ որ q -ի համար, $q \geq r + s + t$:

Դիտարկենք v գագաթը: Ենթադրենք u -ն և w -ն v -ին հարևան այն գագաթներն են, որոնց համար $\alpha(vu) = \underline{S}(v, \alpha) = p$ և $\alpha(vw) = \overline{S}(v, \alpha) = p + r + s + t - 1$: $\Delta_{r,s,t}$ -ի կառուցման համաձայն $\Delta_{r,s,t} - v$ գրաֆում գոյություն ունի երկու երկարությամբ $P(u, w)$ շղթա, որը միացնում է u -ն w -ին, որտեղ

$$P(u, w) = (u, uv', v', v'w, w):$$

Քանի որ $d(u) = 3$ և $d(v') \leq s + t$, ունենք, որ

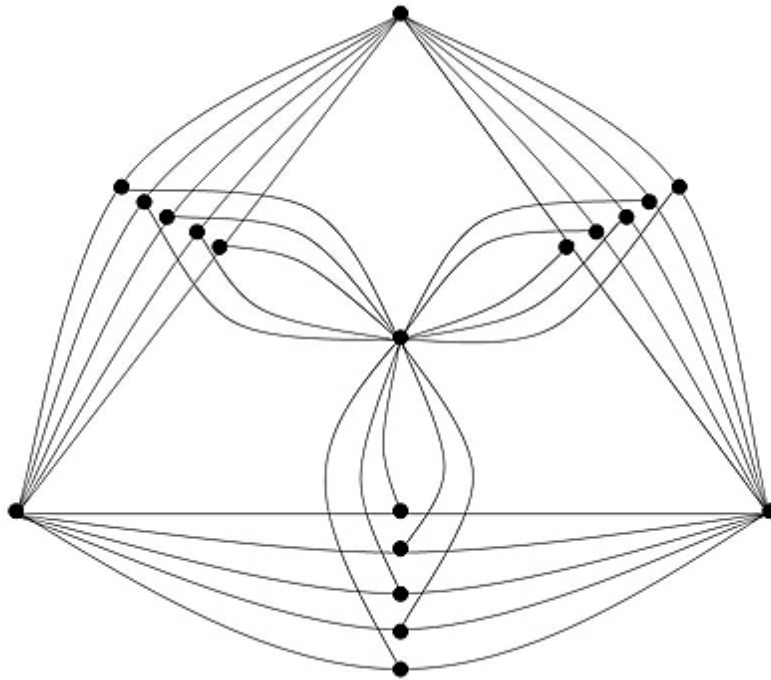
$$\alpha(uv') \leq p + d(u) - 1 = p + 2, \text{ ուստի}$$

$$\alpha(v'w) \leq p + 2 + d(v') - 1 = p + 1 + s + t:$$

Մյուս կողմից, քանի որ $d(w) = 3$, ունենք, որ

$$p + r + s + t - 1 = \alpha(vw) = \overline{S}(v, \alpha) \leq p + 1 + s + t + d(w) - 1 = p + s + t + 3:$$

Այսպիսով, ստացանք, որ $r \leq 4$, ինչը հակասություն է: □



Նկ. 3.4: $\Delta_{5,5,5}$ գրաֆը

Թեորեմ 3.3.6-ից հետևում է, որ Նկ. 3.4-ում պատկերված $\Delta_{5,5,5}$ գրաֆը, որի համար $|V(\Delta_{5,5,5})| = 19$ և $\Delta(\Delta_{5,5,5}) = 15$ չունի միջակայքային ներկում: Իրականում սա այն երկկողմանի գրաֆն է, որն առաջին անգամ կառուցվել էր Միրումյանի կողմից: Այն առաջին անգամ տպագրվել է [6]-ում և [32]-ում, և այժմ հայտնի է որպես Մալաֆիյսկու վարդ M_5 :

Հետևանք 3.3.7. Ցանկացած Δ բնական թվի համար, $\Delta \geq 15$, գոյություն ունի կապակցված երկկողմանի գրաֆ G , այնպես, որ $G \notin \mathfrak{R}$ և $\Delta(G) = \Delta$:

3.3.2 Վերջավոր պրոյեկտիվ երկրաչափություններով հակաօրինակներ

Այս պարագրաֆում կառուցենք միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի գրաֆներ օգտվելով վերջավոր պրոյեկտիվ հարթություններից: n -րդ կարգի ($n \geq 2$) վերջավոր պրոյեկտիվ հարթությունը՝ $\pi(n)$, ունի $n^2 + n + 1$ կետեր և $n^2 + n + 1$ ուղիղներ, որոնք բավարարում են հետևյալ հատկություններին.

- Հ1 յուրաքանչյուր երկու կետ որոշում են ուղիղ,
- Հ2 յուրաքանչյուր երկու ուղիղ որոշում են կետ,
- Հ3 յուրաքանչյուր կետ պատկանում է $n + 1$ ուղիղների,
- Հ4 յուրաքանչյուր ուղիղի պատկանում են $n + 1$ կետեր:

Ենթադրենք $\{1, \dots, n^2 + n + 1\}$ -ը $\pi(n)$ -ի կետերի բազմությունն է, իսկ L -ը՝ ուղիղների: Սահմանենք $Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1})$ գրաֆը ($r_1 \geq \dots \geq r_{n^2+n+1} \geq 1$) հետևյալ կերպ.

$$V(Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1})) = \{u\} \cup \{1, \dots, n^2 + n + 1\} \cup \\ \cup \left\{ v_1^{(l_i)}, \dots, v_{r_i}^{(l_i)} : l_i \in L, 1 \leq i \leq n^2 + n + 1 \right\},$$

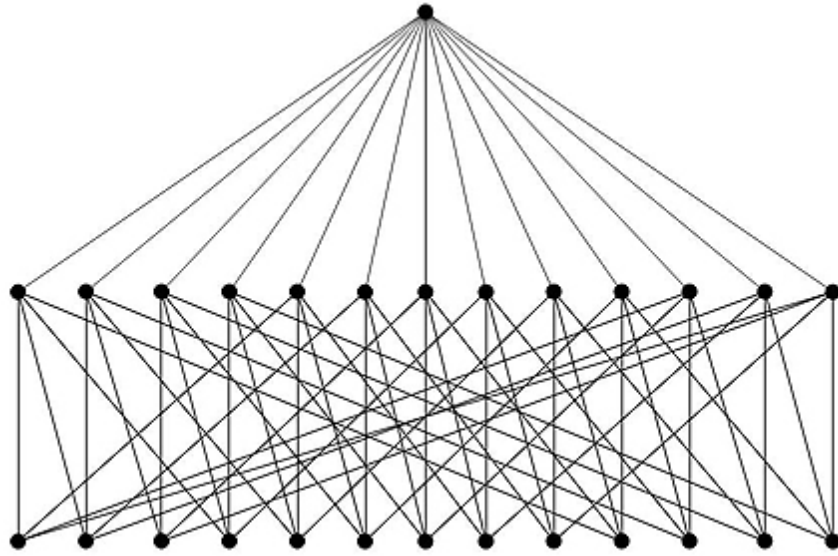
$$E(Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1})) = \left\{ uv_1^{(l_i)}, \dots, uv_{r_i}^{(l_i)} : l_i \in L, 1 \leq i \leq n^2 + n + 1 \right\} \cup \\ \cup \bigcup_{i=1}^{n^2+n+1} \left\{ v_1^{(l_i)} k, \dots, v_{r_i}^{(l_i)} k : l_i \in L, k \in l_i, 1 \leq k \leq n^2 + n + 1 \right\} :$$

$Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1})$ -ը կապակցված երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1})) = \sum_{i=1}^{n^2+n+1} r_i$, իսկ $|V(Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1}))| = \sum_{i=1}^{n^2+n+1} r_i + n^2 + n + 2$: Նկատենք, որ $Erd(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ գրաֆը (Նկ. 3.5) նկարագրվել էր Էրոյոշի կողմից դեռևս 1991թ. [40]: Այս գրաֆն ունի 27 գագաթ, իսկ առավելագույն աստիճանը 13 է:

Թեորեմ 3.3.8. Եթե $\sum_{i=n+2}^{n^2+n+1} r_i > 2(n + 1)$, ապա $Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1}) \notin \mathfrak{N}$.

Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը. $Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1})$ գրաֆը ունի α միջակայքային t -ներկում ինչ որ t -ի համար, $t \geq \sum_{i=1}^{n^2+n+1} r_i$:

Դիտարկենք u գագաթը: Դիցուք $v_p^{(l_{i_0})}$ -ն և $v_q^{(l_{j_0})}$ -ն u -ին հարևան այն գագաթներն են, որոնց համար $\alpha \left(uv_p^{(l_{i_0})} \right) = \underline{S}(u, \alpha) = s$ և $\alpha \left(uv_q^{(l_{j_0})} \right) = \overline{S}(u, \alpha) = s + \sum_{i=1}^{n^2+n+1} r_i - 1$:



Նկ. 3.5: $Erd(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ գրաֆը:

Եթե $l_{i_0} = l_{j_0}$, ապա, ըստ $Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1})$ -ի կառուցման, գոյություն ունի k_0 այնպիսին, որ $k_0 v_p^{(l_{i_0})}, k_0 v_q^{(l_{j_0})} \in E(Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1}))$: Եթե $l_{i_0} \neq l_{j_0}$, ապա, ըստ $Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1})$ -ի կառուցման և $\angle 2$ հատկության, գոյություն ունի k_0 այնպիսին, որ $k_0 v_p^{(l_{i_0})}, k_0 v_q^{(l_{j_0})} \in E(Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1}))$:

$Erd(r_1, \dots, r_{n^2+n+1})$ -ի կառուցման համաձայն, ինչպես նաև $\angle 3$ և $\angle 4$ հատկություններից ելնելով ունենք, որ $d(v_p^{(l_{i_0})}) = d(v_q^{(l_{j_0})}) = n + 2$ և

$$\alpha(k_0 v_p^{(l_{i_0})}) \leq s + d(v_p^{(l_{i_0})}) - 1 = s + n + 1, \text{ ուստի}$$

$$\alpha(k_0 v_q^{(l_{j_0})}) \leq s + n + 1 + d(k_0) - 1 \leq s + n + \sum_{i=1}^{n+1} r_i:$$

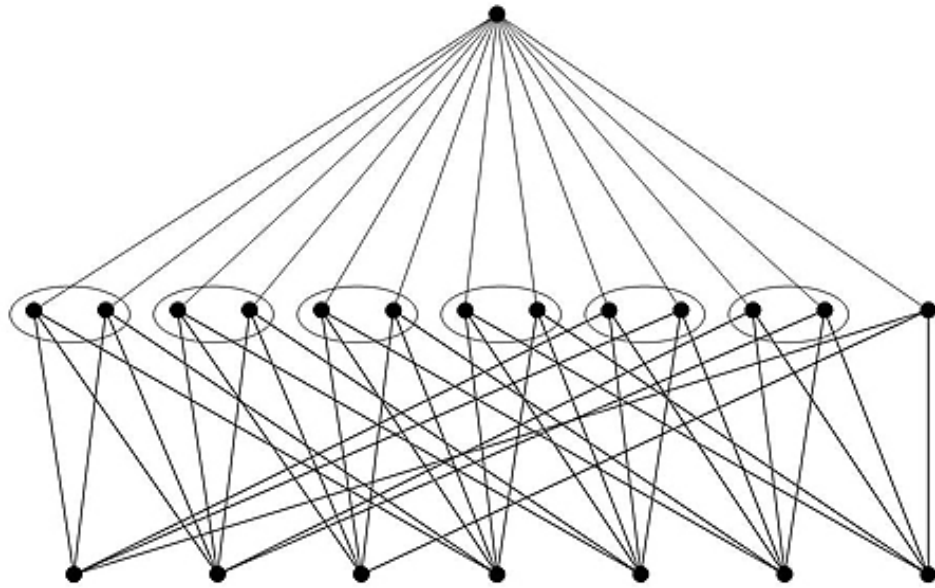
Հետևաբար,

$$s + \sum_{i=1}^{n^2+n+1} r_i - 1 = \alpha(uv_q^{(l_{j_0})}) = \bar{S}(u, \alpha) \leq s + n + \sum_{i=1}^{n+1} r_i + d(v_q^{(l_{j_0})}) - 1 = s + 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n+1} r_i:$$

Այսպիսով ստանում ենք, որ $\sum_{i=n+2}^{n^2+n+1} r_i \leq 2(n + 1)$, ինչը հակասություն է: □

Հետևանք 3.3.9. Ցանկացած բնական Δ -ի համար, $\Delta \geq 13$, գոյություն ունի կապակցված երկկողմանի գրաֆ G , այնպես, որ $G \notin \mathfrak{N}$ և $\Delta(G) = \Delta$:

Թեորեմ 3.3.8-ից հետևում է, որ Նկ. 3.6-ում պատկերված $Erd(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$ գրաֆը, որի համար $|V(Erd(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1))| = 21$ և $\Delta(Erd(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1)) = 13$, չունի



Նկ. 3.6: $Erd(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$ գրաֆը:

միջակայքային ներկում: Թեորեմ 3.3.8-ից նաև հետևում է, որ $Erd(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ գրաֆը, որի համար $|V(Erd(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2))| = 22$ և $\Delta(Erd(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1)) = 14$, ևս չունի միջակայքային ներկում: Հաջորդ հաստվածում կկառուցենք կապակցված երկկողմանի գրաֆ 21 գագաթներով և 14 առավելագույն աստիճանով, որը չունի միջակայքային ներկում:

3.3.3 Ծառերով հակաօրինակներ

Դիցուք T -ն ծառ է, $V(T) = \{v_1, \dots, v_n\}$, $n \geq 2$: Նշանակենք $F(T) = \{v : v \in V(T) \wedge d_T(v) = 1\}$: Ցանկացած պարզ $P(v_i, v_j)$ շղթայի համար սահմանենք $LP(v_i, v_j)$ հետևյալ կերպ.

$$LP(v_i, v_j) = |EP(v_i, v_j)| + |\{vw : vw \in E(T), v \in VP(v_i, v_j), w \notin VP(v_i, v_j)\}|:$$

Տանք ևս մեկ սահմանում.

$$M(T) = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} LP(v_i, v_j):$$

Այժմ սահմանենք \tilde{T} գրաֆը հետևյալ կերպ.

$$V(\tilde{T}) = V(T) \cup \{u\}, u \notin V(T), E(\tilde{T}) = E(T) \cup \{uv : v \in F(T)\}:$$

\tilde{T} -ը կապակցված գրաֆ է, որի համար $\Delta(\tilde{T}) = |F(T)|$: Ավելին, եթե T ծառը այնպիսին է, որ նրա ցանկացած երկու կախված գագաթների միջև հեռավորությունը զույգ է, ապա \tilde{T} -ն նաև երկկողմանի է:

Քամայվանը [73, 74] ապացուցել է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3.3.10. *Եթե T -ն ծառ է, ապա T -ն ունի միջակայքային t -ներկում այն և միայն այն դեպքում $\Delta(T) \leq t \leq M(T)$:*

Թեորեմ 3.3.11. *Եթե T -ն ծառ է, իսկ $|F(T)| > M(T) + 2$, ապա $\tilde{T} \notin \mathfrak{R}$:*

Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը, \tilde{T} -ն ունի α միջակայքային t -ներկում ինչ որ t -ի համար, $t \geq |F(T)|$:

Դիտարկենք u գագաթը: Դիցուք v -ն և v' -ը u -ի հարևան այն երկու գագաթներն են, որոնց համար $\alpha(uv) = \underline{S}(u, \alpha) = s$ և $\alpha(uv') = \overline{S}(u, \alpha) = s + |F(T)| - 1$: Քանտի որ $\tilde{T} - u$ գրաֆը ծառ է, այնտեղ գոյություն ունի միակ շղթա $P(v, v')$, որը միացնում է v -ն և v' -ը, որտեղ

$$P(v, v') = (x_1, e_1, x_2, \dots, x_i, e_i, x_{i+1}, \dots, x_k, e_k, x_{k+1}), x_1 = v, x_{k+1} = v':$$

Նկատենք, որ.

$$\alpha(x_i x_{i+1}) \leq s + 1 + \sum_{j=1}^i (d_T(x_j) - 1), \text{ երբ } 1 \leq i \leq k:$$

Ստանում ենք, որ

$$\alpha(x_k x_{k+1}) = \alpha(x_k v') \leq s + 1 + \sum_{j=1}^k (d_T(x_j) - 1) = s + LP(v, v') \leq s + M(T):$$

Այսպիսով,

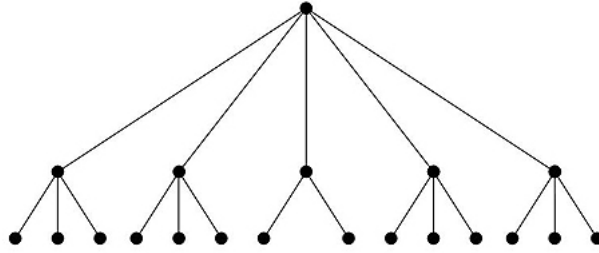
$$s + |F(T)| - 1 = \overline{S}(u, \alpha) = \alpha(uv') \leq s + 1 + M(T), \text{ ուստի } |F(T)| \leq M(T) + 2,$$

ինչը հակասություն է: □

Հետևանք 3.3.12. *Եթե T -ն այնպիսի ծառ է, որի ցանկացած երկու կախված գագաթների միջև հեռավորությունը զույգ է և $|F(T)| > M(T) + 2$, ապա \tilde{T} երկկողմանի գրաֆը չունի միջակայքային ներկում:*

Դիտարկենք Նկ. 3.7-ում պատկերված T ծառը:

Քանի որ $M(T) = 11$ և $|F(T)| = 14$, \tilde{T} երկկողմանի գրաֆը, որի համար $|V(\tilde{T})| = 21$ և $\Delta(\tilde{T}) = 14$ չունի միջակայքային ներկում: Ծառերի միջոցով մեր կողմից նկարագրված



Նկ. 3.7: T ծառը

կառուցումը ընդհանրացնում է $H_{p,q}$ Հերցի գրաֆները, որոնք սահմանված են [32]-ում: Ավելին, վերոհիշյալ օրինակը ավելի փոքր է, քան միջակայքային ներկում չունեցող ամենափոքր Հերցի գրաֆը՝ $H_{7,2}$:

3.3.4 Ենթատրոհումներով հակաօրինակներ

Դիցուք G -ն գրաֆ է, $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$: Սահմանենք $S(G)$ և \widehat{G} գրաֆները հետևյալ կերպ.

$$V(S(G)) = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{w_{ij} : v_i v_j \in E(G)\},$$

$$E(S(G)) = \{v_i w_{ij}, v_j w_{ij} : v_i v_j \in E(G)\},$$

$$V(\widehat{G}) = V(S(G)) \cup \{u\}, \text{ որտեղ } u \notin V(S(G)),$$

$$E(\widehat{G}) = E(S(G)) \cup \{u w_{ij} : v_i v_j \in E(G)\} :$$

Այլ կերպ ասած, $S(G)$ -ն, որին կանվանենք G -ի ենթատրոհում, ստացվում է G -ից նրա բոլոր կողերը տրոհելով, իսկ \widehat{G} -ը ստացվում է $S(G)$ -ից՝ միացնելով տրոհումից առաջացած բոլոր գագաթները մի նոր u գագաթի: $S(G)$ -ն և \widehat{G} -ն երկկողմանի գրաֆներ են:

Պնդում 3.3.13. Եթե G -ն երկկողմանի գրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա $S(G) \in \mathfrak{N}$:

Ապացույց. Դիցուք G -ն երկկողմանի գրաֆ է (X, Y) կողմերով, որտեղ $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_s\}$, իսկ α -ն G -ի միջակայքային t -ներկում է:

Սահմանենք $S(G)$ -ի β միջակայքային ներկումը հետևյալ կերպ.

$$\beta(x_i w_{ij}) = \alpha(x_i y_j) \text{ և } \beta(y_j w_{ij}) = \alpha(x_i y_j) + 1, \text{ ցանկացած } x_i y_j \in E(G)\text{-ի համար:}$$

Հետո է համոզվել, որ β -ն $S(G)$ -ի միջակայքային $(t + 1)$ -ներկում է: □

[35, 76]-ում ապացուցվել է, որ եթե G -ն համասեռ գրաֆ է, ապա $S(G) \in \mathfrak{N}$: Հետաքրքրություն է ներկայացնում այս պնդման ընդհանրացումը ոչ երկկողմանի գրաֆների համար: Մեր կողմից 2014-ին [54] առաջարկվել էր հետևյալ հիպոթեզը.

Հիպոթեզ 3.1. *Եթե $G \in \mathfrak{N}$, ապա $S(G) \in \mathfrak{N}$:*

Այս հիպոթեզը հաստատվել է Պյատկինի կողմից [78]:

Թեորեմ 3.3.14. *Եթե G -ն կապացված գրաֆ է, և*

$$|E(G)| > 1 + \max_{P \in \mathbf{P}} \sum_{v \in V(P)} (d_{\widehat{G}}(v) - 1),$$

որտեղ \mathbf{P} -ն $S(G)$ -ում w_{ij} գագաթները միացնող ամենակարճ շղթաների բազմությունն է, ապա $\widehat{G} \notin \mathfrak{N}$:

Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը, α -ն \widehat{G} -ի միջակայքային t -ներկում է ինչ որ t -ի համար, $t \geq |E(G)|$:

Դիտարկենք u գագաթը: Դիցուք w -ն և w' -ը u -ին հարևան այն երկու գագաթներն են, որոնց համար $\alpha(uw) = \underline{S}(u, \alpha) = s$ և $\alpha(uw') = \overline{S}(u, \alpha) = s + |E(G)| - 1$: Քանի որ $\widehat{G} - u = S(G)$ և $\widehat{G} - u$ գրաֆները կապակցված են, գոյություն ունի w -ն և w' -ը միացնող կարճագույն $P(w, w')$ շղթա $\widehat{G} - u$ գրաֆում, որտեղ

$$P(w, w') = (x_1, e_1, x_2, \dots, x_i, e_i, x_{i+1}, \dots, x_k, e_k, x_{k+1}), x_1 = w, x_{k+1} = w':$$

Նկատենք, որ

$$\alpha(x_i x_{i+1}) \leq s + \sum_{j=1}^i (d_{\widehat{G}}(x_j) - 1), \text{ երբ } 1 \leq i \leq k,$$

և

$$\alpha(x_{k+1} u) = \alpha(w' u) \leq s + \sum_{j=1}^{k+1} (d_{\widehat{G}}(x_j) - 1):$$

Հետևաբար,

$$s + |E(G)| - 1 = \overline{S}(u, \alpha) = \alpha(uw') \leq s + \sum_{j=1}^{k+1} (d_{\widehat{G}}(x_j) - 1) \leq s + \max_{P \in \mathbf{P}} \sum_{v \in V(P)} (d_{\widehat{G}}(v) - 1),$$

ուստի՝

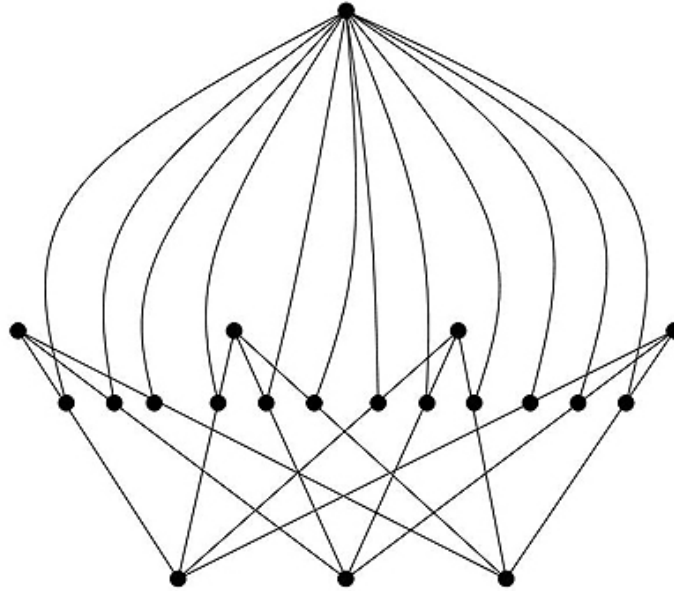
$$|E(G)| \leq 1 + \max_{P \in \mathbf{P}} \sum_{v \in V(P)} (d_{\widehat{G}}(v) - 1),$$

ինչը հակասություն է:

□

Հետևանք 3.3.15. Եթե $n \geq 7$, ապա $\widehat{K}_n \notin \mathfrak{N}$:

Հետևանք 3.3.16. Եթե $mn - m - n > 5$, ապա $\widehat{K}_{m,n} \notin \mathfrak{N}$:



Նկ. 3.8: $\widehat{K}_{3,4}$ գրաֆը:

Այժմ ապացուցենք, որ Նկ. 3.8-ում պատկերված $\widehat{K}_{3,4}$ գրաֆը չունի միջակայքային ներկում:

Թեորեմ 3.3.17. $\widehat{K}_{3,4} \notin \mathfrak{N}$:

Ապացույց. Դիցուք $V(\widehat{K}_{3,4}) = \{u, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} \cup \{w_{ij} : 1 \leq i \leq 3, 4 \leq j \leq 7\}$, իսկ $E(\widehat{K}_{3,4}) = \{v_i w_{ij}, v_j w_{ij}, u w_{ij} : 1 \leq i \leq 3, 4 \leq j \leq 7\}$:

Ենթադրենք, որ α -ն $\widehat{K}_{3,4}$ -ի միջակայքային t -ներկում է ինչ որ t -ի համար, $t \geq 12$:

Դիտարկենք u գագաթը: Դիցուք $w_{i_0 j_0}$ -ն և $w_{i_1 j_1}$ -ն u -ին հարևան այն գագաթներն են, որոնց համար $\alpha(u w_{i_0 j_0}) = \underline{S}(u, \alpha) = s$ և $\alpha(u w_{i_1 j_1}) = \overline{S}(u, \alpha) = s + 11$: Դիտարկենք երկու դեպք:

Դեպք 1. $i_0 = i_1$ կամ $j_0 = j_1$:

Եթե $i_0 = i_1$, ապա $v_{i_0} w_{i_0 j_0}, v_{i_0} w_{i_0 j_1} \in E(\widehat{K}_{3,4})$: Հետևաբար,

$$\alpha(v_{i_0} w_{i_0 j_0}) \leq s + 2 \text{ և } \alpha(v_{i_0} w_{i_0 j_1}) \leq s + 5:$$

Ուստի,

$$s + 11 = \overline{S}(u, \alpha) = \alpha(ww_{i_0j_1}) \leq s + 7,$$

ինչը հնարավոր չէ:

Եթե $j_0 = j_1$, ապա $v_{j_0}w_{i_0j_0}, v_{j_0}w_{i_1j_0} \in E(\widehat{K}_{3,4})$: Հետևաբար,

$$\alpha(v_{j_0}w_{i_0j_0}) \leq s + 2 \text{ և } \alpha(v_{j_0}w_{i_1j_0}) \leq s + 4:$$

Ուստի,

$$s + 11 = \overline{S}(u, \alpha) = \alpha(ww_{i_1j_0}) \leq s + 6,$$

ինչը նույնպես հնարավոր չէ:

Դեպք 2. $i_0 \neq i_1$ և $j_0 \neq j_1$:

Այս դեպքում $v_{i_0}v_{j_0}$ և $v_{i_1}v_{j_1}$ կողերը անկախ են $K_{3,4}$ -ում: Իսկ $K_{3,4}$ -ում ցանկացած երկու անկախ կող ընկած են 4 երկարությամբ ցիկլի վրա: Այսինքն, $\widehat{K}_{3,4}$ -ում գոյություն ունի ցիկլ $C = w_{i_0j_0}v_{j_0}w_{i_1j_0}v_{i_1}w_{i_1j_1}v_{j_1}w_{i_0j_1}v_{i_0}w_{i_0j_0}$, որը բաղկացած է P և Q շղթաներից, որտեղ

$$P = (w_{i_0j_0}, v_{j_0}w_{i_0j_0}, v_{j_0}, v_{j_0}w_{i_1j_0}, w_{i_1j_0}, v_{i_1}w_{i_1j_0}, v_{i_1}, v_{i_1}w_{i_1j_1}, w_{i_1j_1}) \text{ և}$$

$$Q = (w_{i_0j_0}, v_{i_0}w_{i_0j_0}, v_{i_0}, v_{i_0}w_{i_0j_1}, w_{i_0j_1}, v_{j_1}w_{i_0j_1}, v_{j_1}, v_{j_1}w_{i_1j_1}, w_{i_1j_1}):$$

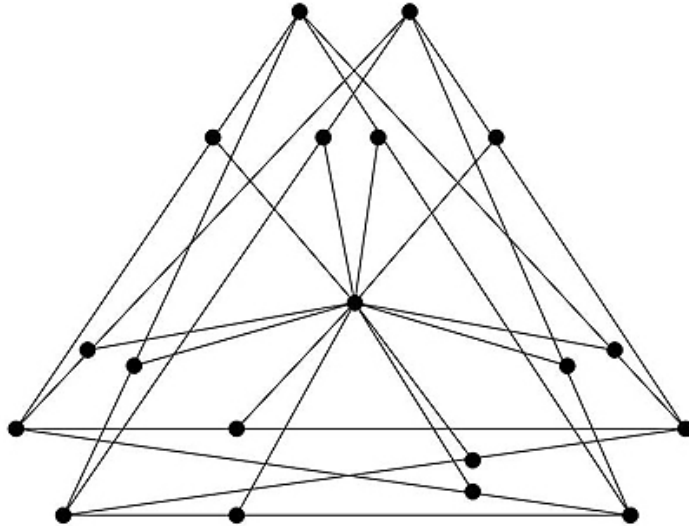
Եթե $\alpha(v_{j_0}w_{i_0j_0}) \leq s+1$, ապա դիտարկելով P շղթան ստանում ենք, որ $\alpha(v_{i_1}w_{i_1j_1}) \leq s+8$ և $\overline{S}(w_{i_1j_1}, \alpha) \leq s + 10$, ինչը հակասություն է:

Եթե $\alpha(v_{i_0}w_{i_0j_0}) \leq s+1$, ապա դիտարկելով Q շղթան ստանում ենք, որ $\alpha(v_{j_1}w_{i_1j_1}) \leq s+8$ և $\overline{S}(w_{i_1j_1}, \alpha) \leq s + 10$, ինչը ևս հակասություն է:

Ուստի, $\alpha(v_{j_0}w_{i_0j_0}) \geq s + 2$ և $\alpha(v_{i_0}w_{i_0j_0}) \geq s + 2$, ինչը կրկին հակասություն է: \square

Նկատենք, որ $\widehat{K}_{3,4}$ գրաֆը ունի 20 գագաթ և 12 առավելագույն աստիճան: Այժմ ցույց տանք, որ գոյություն ունի G երկկողմանի կապակցված գրաֆ, որի համար $|V(G)| = 19$ և $\Delta(G) = 12$ և որը չունի միջակայքային ներկում: Դիցուք $K_{2,2,2}$ -ը լրիվ 3-կողմանի գրաֆն է, որն ունի երկուական գագաթ յուրաքանչյուր կողմում: Դիտարկենք Նկ. 3.9-ում պատկերված $\widehat{K}_{2,2,2}$ գրաֆը:

Թեորեմ 3.3.18. $\widehat{K}_{2,2,2} \notin \mathfrak{N}$:



Նկ. 3.9: $\widehat{K}_{2,2,2}$ գրաֆը:

Ապացույց. Դիցուք

$$V(\widehat{K}_{2,2,2}) = \{u, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \cup \{w_{ij} : 1 \leq i < j \leq 6, (i, j) \notin \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}\}$$

$$E(\widehat{K}_{2,2,2}) = \{v_i w_{ij}, v_j w_{ij}, u w_{ij} : 1 \leq i < j \leq 6, (i, j) \notin \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}\}$$

Ենթադրենք α -ն $\widehat{K}_{2,2,2}$ -ի միջակայքային t -ներկում է ինչ որ t -ի համար, $t \geq 12$:

Դիտարենք u գագաթը: Դիցուք, $w_{i_0 j_0}$ -ն և $w_{i_1 j_1}$ -ը u -ին հարևան այն երկու գագաթներն են, որոնց համար $\alpha(u w_{i_0 j_0}) = \underline{S}(u, \alpha) = s$ և $\alpha(u w_{i_1 j_1}) = \overline{S}(u, \alpha) = s + 11$: $\widehat{K}_{2,2,2}$ գրաֆի սիմետրիայի համաձայն կարող ենք ենթադրել, որ $(i_0, j_0) = (1, 6)$: Դիտարկենք երկու դեպք:

Դեպք 1. $v_1 v_6$ և $v_{i_1} v_{j_1}$ հարևան են $K_{2,2,2}$ -ում:

$\widehat{K}_{2,2,2}$ գրաֆի սիմետրիայից ելնելով բավական է դիտարկել այն դեպքը, երբ $(i_1, j_1) = (1, 4)$ և $(i_1, j_1) = (1, 5)$:

Եթե $\alpha(u w_{14}) = s + 11$ կամ $\alpha(u w_{15}) = s + 11$, ապա $\alpha(v_1 w_{16}) \leq s + 2$ և $\alpha(v_1 w_{1j_1}) \leq s + 5$:

Ուստի, $\alpha(u w_{1j_1}) \leq s + 7$, ինչը հնարավոր չէ:

Դեպք 2. $v_1 v_6$ և $v_{i_1} v_{j_1}$ անկախ են $K_{2,2,2}$ -ում:

Հաշվի առնելով $\widehat{K}_{2,2,2}$ գրաֆի սիմետրիան, բավական է դիտարկել այն դեպքը, երբ $(i_1, j_1) = (4, 5)$ և $(i_1, j_1) = (2, 5)$:

Եթե $\alpha(u w_{45}) = s + 11$, ապա կամ $\alpha(v_1 w_{16}) = s + 1$ կամ $\alpha(v_1 w_{16}) = s + 2$, և երկու դեպքերում էլ $C = w_{16} v_1 w_{15} v_5 w_{45} v_4 w_{46} v_6 w_{16}$ ցիկլի վրա գտնվող կողերի գույները որոշվում

են միարժեքորեն: Հետևաբար, $\alpha(v_1w_{14}) \leq s + 4$ և $\alpha(v_4w_{14}) \geq s + 7$, ինչը հակասություն է:

Եթե $\alpha(uw_{25}) = s + 11$, ապա հաշվի առնելով $\widehat{K}_{2,2,2}$ գրաֆի սիմետրիան կարող ենք համարել, որ $\alpha(v_1w_{16}) = s + 1$: Այս դեպքում $C = w_{16}v_1w_{15}v_5w_{25}v_2w_{26}v_6w_{16}$ ցիկլի վրա գտնվող բոլոր կողերի գույները որոշվում են միարժեքորեն: Հետևաբար, $\alpha(uw_{26}) = s + 6$: $\widehat{K}_{2,2,2}$ գրաֆի սիմետրիան հաշվի առնելով կարող ենք համարել, որ $\alpha(v_1w_{13}) = s + 2$ և $\alpha(v_1w_{14}) = s + 3$: Այժմ ցույց տանք, որ $\alpha(uw_{13}) = s + 1$: Քանի որ $S(u, \alpha) = [s, s + 11]$, պետք է գոյություն ունենա կող $uw_{i'j'}$ որի համար $\alpha(uw_{i'j'}) = s + 1$: Քանի որ $\alpha(v_2w_{25}) = s + 10$, ստանում ենք, որ $i', j' \neq 2, 5$: Եթե $(i', j') \in \{(1, 4), (4, 6)\}$, ապա $\alpha(uw_{24}) = s + 6$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ $\alpha(uw_{26}) = s + 6$: Մյուս կողմից, եթե $(i', j') = (3, 6)$, ապա հաշվի առնելով, որ $\alpha(v_6w_{36}) > s + 2$, ստանում ենք, որ $\alpha(uw_{23}) = s + 6$, ինչը նույնպես հնարավոր չէ, քանի որ $\alpha(uw_{26}) = s + 6$: Ուստի, ստանում ենք, որ $(i', j') = (1, 3)$: Հետևաբար, $\alpha(v_3w_{13}) = s + 3$ և հաշվի առնելով, որ $\alpha(v_2w_{25}) = s + 10$, ստանում ենք, որ $\alpha(v_3w_{23}) = s + 6$: Սրանից հետևում է, որ $\alpha(v_3w_{35}) \leq s + 5$: Մյուս կողմից, քանի որ $\alpha(v_5w_{25}) = s + 9$, ունենք, որ $\alpha(v_5w_{35}) \geq s + 7$, ուստի $\alpha(uw_{35}) = s + 6 = \alpha(uw_{26})$, ինչը հակասություն է: \square

$\widehat{K}'_{3,4}$ -ով նշանակենք այն գրաֆը, որը ստացվում է $\widehat{K}_{3,4}$ գրաֆից առավելագույն աստիճան ունեցող u գագաթին կից կողերից մեկը հեռացնելուց հետո: Այն ունի 20 գագաթ և 11 առավելագույն աստիճան: Ապացուցենք, որ այն ևս չունի միջակայքային ներկում:

Թեորեմ 3.3.19. $\widehat{K}'_{3,4} \notin \mathfrak{N}$:

Ապացույց. Դիցուք $V(\widehat{K}'_{3,4}) = V(\widehat{K}_{3,4})$ և $E(\widehat{K}'_{3,4}) = E(\widehat{K}_{3,4}) \setminus \{uw_{l_0m_0}\}$:

Ենթադրենք α -ն $\widehat{K}'_{3,4}$ -ի միջակայքային t -ներկում է ինչ որ t -ի համար, $t \geq 11$:

Դիտարկենք u գագաթը: Դիցուք, $w_{i_0j_0}$ -ն և $w_{i_1j_1}$ -ը u -ին հարևան այն գագաթներն են, որոնց համար $\alpha(uw_{i_0j_0}) = \underline{S}(u, \alpha) = s$ և $\alpha(uw_{i_1j_1}) = \overline{S}(u, \alpha) = s + 10$:

Դիցուք $S(w_{l_0m_0}, \alpha) = \{c, c + 1\}$: $\widehat{K}'_{3,4}$ գրաֆին ավելացնենք $uw_{l_0m_0}$ կողը և ներկենք այն $c + 2$ գույնով: Արդյունքում ստանում ենք $\widehat{K}_{3,4}$ գրաֆի ներկում $1, \dots, t'$ գույներով, ($t' \geq t$): Այս ներկումը նշանակենք β -ով: Նկատենք, որ ցանկացած v գագաթի համար, $v \in V(\widehat{K}_{3,4}) \setminus \{u\}$, $S(v, \beta)$ -ն ամբողջ թվերի միջակայք է, իսկ $S(u, \beta) = [s, s + 10] \cup \{c + 2\}$ -ն ընդհանուր դեպքում մուլտիբազմություն է:

Թեորեմ 3.3.17-ի Դեպք 1-ի ապացույցի նման կարելի է ցույց տալ, որ $i_0 \neq i_1$ և $j_0 \neq j_1$: $v_{i_0}v_{j_0}$ և $v_{i_1}v_{j_1}$ կողերը անկախ են $K_{3,4}$: Հաշվի առնելով $\widehat{K}_{3,4}$ գրաֆի սիմետրիան կարելի է

համարել, որ $(i_0, j_0) = (1, 4)$ և $(i_1, j_1) = (3, 7)$:

Դիտարկենք v_1w_{14} կողը: Այն պետք է ներկված կլինի կամ $\beta(v_1w_{14}) = s + 1$ գույնով կամ $\beta(v_1w_{14}) = s + 2$: Եթե $\beta(v_1w_{14}) = s + 1$, ապա $C = w_{14}v_1w_{17}v_7w_{37}v_3w_{34}v_4w_{14}$ ցիկլի վրա գտնվող բոլոր կողերի գույները միարժեք որոշվում են: Արդյունքում ստացվում է, որ $\beta(uw_{17}) = \beta(uw_{34}) = s + 5$: Հետևաբար $c + 2$ ավելացված գույնը հավասար է $s + 5$, ինչը սակայն հնարավոր չէ, քանի որ $S(w_{17}, \beta) = S(w_{34}, \beta) = [s + 4, s + 6]$ և երկու դեպքում էլ $s + 5$ -ը $S(w_{17}, \beta)$ և $S(w_{34}, \beta)$ բազմությունների միջին գույնն է:

Այժմ ենթադրենք, որ $\beta(v_1w_{14}) = s + 2$: Այդ դեպքում $C = w_{14}v_1w_{17}v_7w_{37}v_3w_{34}v_4w_{14}$ ցիկլի վրա գտնվող բոլոր կողերի գույները հայտնի են: $\widehat{K}_{3,4}$ գրաֆի սիմետրիայի համաձայն կարող ենք համարել, որ $\beta(v_1w_{15}) = s + 3$ և $\beta(v_1w_{16}) = s + 4$: Քանի որ $\beta(v_7w_{27}) = s + 8$, ունենք, որ $\underline{S}(v_2, \beta) \geq s + 3$. Մյուս կողմից, քանի որ $\beta(v_4w_{24}) = s + 2$, ստանում ենք, որ $\underline{S}(v_2, \beta) \leq s + 4$: Քննարկենք երկու դեպք:

Դեպք 1. $\underline{S}(v_2, \beta) = s + 3$:

Ապացուցենք, որ $\beta(uw_{36}) = s + 9$: Քանի որ $S(u, \alpha) = [s, s + 10]$, պետք է գոյություն ունենա $uw_{i'j'}$ կող, որի համար $\beta(uw_{i'j'}) = s + 9$: Քանի որ $\overline{S}(v_1, \beta) = s + 5$ և $\overline{S}(v_2, \beta) = s + 6$, ունենք, որ $i' \neq 1, 2$, ուստի $i' = 3$: Քանի որ $\beta(v_3w_{37}) = s + 8$ և $i' = 3$, ստանում ենք, որ $\beta(v_3w_{3j'}) = s + 7$, $\beta(v_{j'}w_{3j'}) = s + 8$ և $\beta(v_1w_{1j'}) \geq s + 4$: Այսպիսով, ունենք, որ $j' = 6$ և $(i', j') = (3, 6)$: Հետևաբար, $\beta(v_6w_{26}) = s + 7$: Քանի որ $\beta(v_7w_{27}) = s + 8$, ունենք, որ $\beta(v_2w_{26}) \leq s + 5$, ուստի $\beta(uw_{26}) = s + 6$: Մյուս կողմից ունենք, որ $\beta(uw_{17}) = s + 6$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ $S(w_{17}, \beta) = S(w_{26}, \beta) = [s + 5, s + 7]$ և երկու դեպքերում էլ $s + 6$ գույնը ($c + 2$ ավելացված գույնը) $S(w_{17}, \beta)$ և $S(w_{26}, \beta)$ բազմությունների միջին գույնն է:

Դեպք 2. $\underline{S}(v_2, \beta) = s + 4$:

Այս դեպքում $\beta(uw_{24}) = s + 3$ և $\beta(v_2w_{24}) = s + 4$: Հետևաբար, $\beta(v_2w_{25}) \geq s + 5$: Այժմ ցույց տանք, որ $\beta(uw_{15}) = s + 1$: Քանի որ $S(u, \alpha) = [s, s + 10]$, պետք է գոյություն ունենա կող $uw_{i'j'}$, որի համար $\beta(uw_{i'j'}) = s + 1$: Քանի որ $\underline{S}(v_2, \beta) = s + 4$ և $\underline{S}(v_3, \beta) = s + 5$, ունենք, որ $i' \neq 2, 3$, ուստի $i' = 1$: Քանի որ $\beta(v_1w_{16}) = s + 4$ և $i' = 1$, ստանում ենք, որ $j' = 5$ և $(i', j') = (1, 5)$: Սրանից հետևում է, որ $\beta(v_5w_{15}) = s + 2$: Քանի որ $\beta(v_3w_{35}) \geq s + 6$, ունենք, որ $\beta(v_5w_{35}) = s + 4$ և $\beta(v_5w_{25}) = s + 3$: Հետևաբար, $\beta(uw_{25}) = s + 4$: Մյուս կողմից, $\beta(uw_{34}) = s + 4$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ $S(w_{34}, \beta) = S(w_{25}, \beta) = [s + 3, s + 5]$ և երկու դեպքերում էլ $s + 4$ գույնը ($c + 2$ ավելացված գույնը) $S(w_{34}, \beta)$ և $S(w_{25}, \beta)$ բազմությունների միջին գույնն է: □

3.4 Փոքրաթիվ գազաթաներով երկկողմանի գրաֆների միջակայքային ներկումներ

Նախորդ պարագրաֆում ցույց տրվեց, որ գոյություն ունեն 19 գազաթանի երկկողմանի գրաֆներ, որոնք միջակայքային ներկելի չեն: Սակայն նվազագույն թվով գազաթաներով միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի գրաֆները մնում են անհայտ: Այս պարագրաֆում ցույց կտանք, որ երկկողմանի գրաֆների որոշ ենթադասերին պատկանող բոլոր գրաֆները միջակայքային ներկելի են:

Այս պարագրաֆի հիմնական արդյունքները ստանալու համար կիրառվել են համակարգչային որոնման մեթոդներ: Ընդհանուր սկզբունքը հետևյալն է. տրված գրաֆների ենթադասի համար գեներացվում են այդ ենթադասի բոլոր այն գրաֆները, որոնց միջակայքային ներկելիությունը չի հետևում հայտնի թեորեմներից, ապա բաշխված համակարգչային համակարգի միջոցով կառուցվում են այդ գրաֆների ներկումները և կատարվում է կառուցված ներկումների լրացուցիչ ստուգում՝ հնարավոր տեխնիկական սխալները բացառելու համար:

Գրաֆները գեներացնելու համար օգտագործել ենք **nauty** համակարգը [45]: Այդ համակարգին պատկանող **genbg** ծրագիրը հնարավորություն է տալիս կառուցել տրված կողմերի հարաբերությամբ բոլոր երկկողմանի գրաֆները: Ավելին, այն հնարավորություն է տալիս որոշել գրաֆների նվազագույն և առավելագույն աստիճանները, կապակցվածությունը և մի շարք այլ հատկանիշներ:

Գեներացված գրաֆների ներկումները կառուցելու համար կիրառել ենք բաշխված հաշվարկների համակարգեր: Արդյունքների մի մասը ստացվել են CrowdProcess համացանցում աշխատող գործիքի միջոցով [18]: CrowdProcess-ը տրամադրում է REST API, որի միջոցով հնարավոր է JavaScript լեզվով գրված ծրագիրը և խնդիրների (տվյալ դեպքում՝ գրաֆների) ցուցակ պարունակող JSON ֆայլը փոխանցել համակարգին: Համակարգը բաշխում է ծրագիրը և խնդիրները մեծ թվով համակարգիչների միջև (մեր փորձերի ժամանակ համակարգիչների թիվը տատանվում էր 1000-ի և 5000-ի միջև), արդյունքները հավաքում է և վերադարձնում է API-ի միջոցով: Քանի որ գրաֆների մեծ մասը ներկվում են մեկ միլիվայրկյանից ավելի քիչ ժամանակում, յուրաքանչյուր համակարգչին ուղարկվում էին շուրջ 200 գրաֆներ: Մեր աշխատանքների ընթացքում CrowdProcess համակարգը դադարեց աշխատել և մենք անցում կատարեցինք

Մամիկոնյան Տիգրանի մշակած համանման համակարգին [82]:

Տրված երկկողմանի գրաֆի որևէ միջակայքային ներկում կառուցելու համար կիրառել ենք հատարկման ալգորիթմ: (X, Y) կողմերով G երկկողմանի գրաֆը և իր ներկումը ներկայացվում է երկկցության $B(G) = (b_{ij})_{n \times m}$ մատրիցով, որտեղ $|X| = n$ և $|Y| = m$: Այստեղ b_{ij} -ն X -ի i -րդ գագաթը Y -ի j -րդ գագաթին միացնող կողի գույնն է, եթե այդ կողը գոյություն ունի, և 0 է հակառակ դեպքում: Մատրիցի գույները որոշելու համար կիրառում ենք ուղղորդված հատարկում (backtracking): Յուրաքանչյուր քայլում որոշվում է մատրիցի տվյալ վանդակի համար թույլատրելի գույների բազմությունը (հաշվի առնելով արդեն ներկված կողերը): Կողը ներկվում է թույլատրելի գույների բազմությունից պատահականորեն ընտրված գույնով և անցում է կատարվում մատրիցի հաջորդ վանդակին: Եթե որևէ կողի համար թույլատրելի գույների բազմությունը դատարկ է, ապա ալգորիթմը վերադառնում է նախորդ կողին և փոխում է գույնը (եթե թույլատրելի գույների բազմության մեջ դեռ գոյություն ունի նախորդ քայլերին չընտրված գույն): Ալգորիթմն ավարտում է աշխատանքը, երբ բոլոր կողերը ներկված են, կամ երբ բոլոր հնարավորությունները փորձարկվել են և գրաֆը միջակայքային ներկում չունի: Ալգորիթմի իրականացումը JavaScript լեզվով կարելի է գտնել աշխատանքի Հավելվածում:

Կառուցված ներկումները առցանց բաշխված համակարգերից ներբեռնելուց հետո իրականացվել է ներկումների ստուգում C++ ծրագրով: Մենք հայտնաբերել ենք մի քանի դեպքեր, երբ CrowdProcess-ից վերադարձված ներկումը պարունակում էր սխալ: Այս սխալները հայտնաբերվել են ստուգող ծրագրի կողմից և նույն գրաֆները ևս մեկ անգամ ուղարկվել են մշակման:

Ստացված արդյունքները ձևակերպելու համար կատարենք որոշ նշանակումներ: Դիցուք \mathfrak{F} -ը երկկողմանի գրաֆների որևէ բազմություն է: $C(\mathfrak{F})$ -ով նշանակենք \mathfrak{F} -ի բոլոր կապակցված գրաֆների բազմությունը, որոնց նվազագույն աստիճանը առնվազն 2 է և կողմերից յուրաքանչյուրում ունեն առնվազն 4 գագաթ: $M(\mathfrak{F})$ -ով նշանակենք բոլոր այն գրաֆները, որոնք ստացվում են կամայական $G \in \mathfrak{F}$ գրաֆից որոշ (առնվազն մեկ) գագաթների հանելով: Տեղի ունի հետևյալ լեմման:

Լեմմա 3.4.1. *Եթե երկկողմանի գրաֆների որևէ \mathfrak{F} բազմության համար $M(\mathfrak{F})$ և $C(\mathfrak{F})$ բազմությունների բոլոր գրաֆները միջակայքային ներկելի են, ապա \mathfrak{F} բազմության բոլոր*

Գագաթների քանակ	Գրաֆների քանակ	Պրոցեսորային ժամեր
4 / 11	16 308	3.04
5 / 10	1 583 646	146.35
6 / 9	43 739 172	340.51
7 / 8	243 304 742	15537.42

Աղյուսակ 3.1: Թեորեմ 3.4.2-ի ապացույցում սահմանված $C(\mathfrak{F})$ բազմության 15 գագաթանի երկկողմանի գրաֆների ներկումների կառուցման համար կատարված հաշվարկների մանրամասներ: Պրոցեսորային ժամերը տրամադրվել են CrowdProcess-ի կողմից:

գրաֆները ևս միջակայքային ներկելի են:

Ապացույց. Դիցուք G -ն \mathfrak{F} բազմության որևէ երկկողմանի գրաֆ է: Եթե $G \in C(\mathfrak{F})$, ապա այն միջակայքային ներկելի է: Հակառակ դեպքում՝ այն կապակցված չէ, նվազագույն աստիճանը 1 է, կամ կողմերից որևէ մեկում ունի 4-ից քիչ գագաթներ: Եթե G -ն կապակցված չէ, ապա նրա կապակցված բաղադրիչներից յուրաքանչյուրը պատկանում է $M(\mathfrak{F})$ -ին, ուստի G -ի ներկումը կստացվի կապակցված բաղադրիչների ներկումների միավորմամբ: Եթե գոյություն ունի $uv \in E(G)$ կախված կող, որտեղ $d_G(v) = 1$, ապա կվերցնենք $G - v$ գրաֆի (որը պատկանում է $M(\mathfrak{F})$ -ին) α ներկումը և uv կողը կներկենք $\bar{S}(u, \alpha) + 1$ գույնով: Վերջապես, եթե G -ի կողմերից մեկում գագաթների թիվը փոքր է 4-ից, ապա G -ն միջակայքային ներկելի է ըստ Թեորեմ 3.3.5-ի: \square

Թեորեմ 3.4.2. *Բոլոր 15 գագաթ ունեցող երկկողմանի գրաֆները միջակայքային ներկելի են:*

Ապացույց. Դիցուք \mathfrak{F} -ը 15 գագաթ ունեցող բոլոր երկկողմանի գրաֆների բազմությունն է: $M(\mathfrak{F})$ բազմության բոլոր գրաֆները միջակայքային ներկելի են ըստ Թեորեմ 3.3.1-ի: Լեմմա 3.4.1-ի համաձայն, բավարար է ցույց տալ, որ $C(\mathfrak{F})$ բազմության բոլոր գրաֆները միջակայքային ներկելի են: $C(\mathfrak{F})$ բազմության գրաֆների թիվը 288 643 868 է: Այս գրաֆների ներկումները կառուցվել են վերը նկարագրված համակարգչային ալգորիթմի

Գագաթների քանակ	Գրաֆների քանակ	Պրոցեսորային ժամեր
4 / 12	29 515	4.96
4 / 13	51 616	19.19
4 / 14	87 609	96.95
4 / 15	144 766	N/A

Աղյուսակ 3.2: 4 գագաթ մի կողմում և j ($12 \leq j \leq 15$) գագաթ մյուս կողմում պարունակող երկկողմանի գրաֆների ներկումների կառուցման համար կատարված հաշվարկների մանրամասներ: Պրոցեսորային ժամերը տրամադրվել են CrowdProcess-ի կողմից:

միջոցով: Կատարված հաշվարկների վերաբերյալ որոշ մանրամասներ ներկայացված են Աղյուսակ 3.1-ում: □

Թեորեմ 3.4.3. Բոլոր այն երկկողմանի գրաֆները, որոնք ունեն 4 գագաթ մի կողմում և n_j ավել, քան 15 գագաթ մյուս կողմում, միջակայքային ներկելի են, բացի նախորդ պարագրաֆում նկարագրված $\Delta_{5,5,5}$ գրաֆից (Նկ. 3.4):

Ապացույց. Դիցուք $\mathfrak{F}_{i,j}$ -ն (X, Y) կողմերով երկկողմանի գրաֆների բազմությունն է, որտեղ $|X| = i$ և $|Y| = j$, $i, j \in \mathbb{N}$: Նկատենք, որ $M(\mathfrak{F}_{i,j}) = \bigcup_{k=1}^{i-1} \mathfrak{F}_{k,j} \cup \bigcup_{k=1}^{j-1} \mathfrak{F}_{i,k}$, ցանկացած $i, j > 1$ թվերի համար: Պետք է ապացուցել, որ $\mathfrak{F}_{4,j}$, $12 \leq j \leq 15$, բազմությունների բոլոր գրաֆները միջակայքային ներկելի են, բացի Նկ. 3.4-ում պատկերված $\Delta_{5,5,5}$ գրաֆից: Նկատենք, որ $\mathfrak{F}_{i,j}$, $i = 1, 2, 3$, $j \in \mathbb{N}$, բազմությունների բոլոր գրաֆները միջակայքային ներկելի են համաձայն Թեորեմ 3.3.5-ի: $\mathfrak{F}_{4,11}$ բազմության բոլոր գրաֆները միջակայքային ներկելի են ըստ Թեորեմ 3.4.2-ի: $C(\mathfrak{F}_{4,j})$, $12 \leq j \leq 15$, բազմությունների բոլոր գրաֆները (բացառությամբ $\Delta_{5,5,5}$ գրաֆի) ներկելու համար կիրառում ենք վերը նկարագրված համակարգչային ծրագիրը: Հաշվարկների վերաբերյալ որոշ մանրամասներ ներկայացված են Աղյուսակ 3.2-ում: Ապացույցն ավարտելու համար հերթականորեն կիրառում ենք Լեմմա 3.4.1-ը $\mathfrak{F}_{4,j}$, $j = 12, 13, 14, 15$, բազմությունների համար: □

Գագաթների քանակ	Գրաֆների քանակ
4 / 12	29 515
5 / 11	5 158 975
6 / 10	291 917 907
7 / 9	3 604 370 591
8 / 8	8 420 890 828

Աղյուսակ 3.3: Թեորեմ 3.4.4-ի ապացույցում սահմանված $C(\mathfrak{F})$ բազմության 16 գագաթանի երկկողմանի գրաֆների վիճակագրությունը: Հաշվարկները կատարվել են [82] համակարգի միջոցով, որը չի տրամադրում պրոցեսորային ժամերի մասին տեղեկություններ:

Թեորեմ 3.4.4. *Բոլոր 16 գագաթ ունեցող երկկողմանի գրաֆները միջակայքային ներկելի են:*

Ապացույց. Ապացույցը կրկնում է Թեորեմ 3.4.2-ի դատողությունները: Դիցուք \mathfrak{F} -ը 16 գագաթ ունեցող բոլոր երկկողմանի գրաֆների բազմությունն է: $M(\mathfrak{F})$ բազմության բոլոր գրաֆները միջակայքային ներկելի են ըստ Թեորեմներ 3.3.1-ի և 3.4.2-ի: Լեմմա 3.4.1-ի համաձայն, բավարար է ցույց տալ, որ $C(\mathfrak{F})$ բազմության բոլոր գրաֆները միջակայքային ներկելի են: $C(\mathfrak{F})$ բազմության գրաֆների թիվը 12 322 367 816 է: Այս գրաֆների ներկումները կառուցվել են վերը նկարագրված համակարգչային ալգորիթմի միջոցով: (Աղյուսակ 3.3) □

Ստացված արդյունքներից հետևում է, որ նվազագույն թվով գագաթներով միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի գրաֆի գագաթների քանակը կարող է լինել 17, 18 կամ 19:

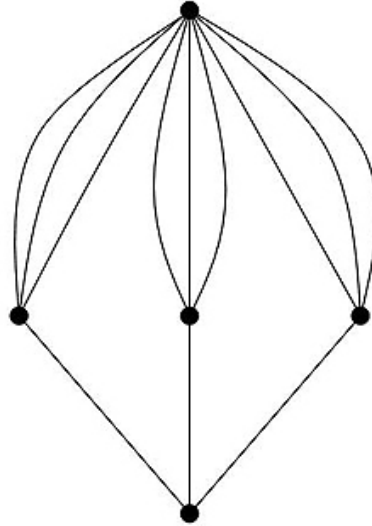
3.5 Միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի մուլտիգրաֆներ

Աշխատանքի վերջին պարագրաֆում քննարկենք միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի մուլտիգրաֆները: Սահմանենք $Par(r_1, \dots, r_n)$ օդապարիկ

մուլտիգրաֆները ($r_1 \geq \dots \geq r_n \geq 1$) հետևյալ կերպ (Նկ. 3.10).

$$V(\text{Par}(r_1, \dots, r_n)) = \{u, w, v_1, \dots, v_n\},$$

$$E(\text{Par}(r_1, \dots, r_n)) = \{uv_i : \mu(uv_i) = r_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_j w : 1 \leq j \leq n\} :$$



Նկ. 3.10: Երկկողմանի մուլտիգրաֆ $\text{Par}(3, 3, 3)$:

$\text{Par}(r_1, \dots, r_n)$ -ը կապակցված երկկողմանի մուլտիգրաֆ է, որի համար $|V(\text{Par}(r_1, \dots, r_n))| = n + 2$, $\Delta(\text{Par}(r_1, \dots, r_n)) = d(u) = \sum_{i=1}^n r_i$, և $d(w) = n$, $d(v_i) = r_i + 1$, $i = 1, 2, \dots, n$:

Թեորեմ 3.5.1. Եթե $\sum_{i=3}^n r_i \geq n + 1$ ($n \geq 3$), ապա $\text{Par}(r_1, \dots, r_n) \notin \mathfrak{N}$.

Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը՝ α -ն $\text{Par}(r_1, \dots, r_n)$ մուլտիգրաֆի միջակայքային t -ներկում է ինչ որ t -ի համար. $t \geq \sum_{i=1}^n r_i$:

Դիտարկենք u գագաթը: Ենթադրենք v_{i_0} -ը և v_{i_1} -ը u -ին հարևան այն գագաթներն են, որոնց համար $\alpha(uv_{i_0}) = \underline{S}(u, \alpha) = s$ և $\alpha(uv_{i_1}) = \overline{S}(u, \alpha) = s + \sum_{i=1}^n r_i - 1$: Քանի որ $n \geq 3$, ունենք, որ $i_0 \neq i_1$, և ըստ $\text{Par}(r_1, \dots, r_n)$ մուլտիգրաֆի սահմանման ստանում ենք

$$\alpha(v_{i_0}w) \leq s + d(v_{i_0}) - 1 = s + r_{i_0}, \text{ ուստի}$$

$$\alpha(v_{i_1}w) \leq s + r_{i_0} + d(w) - 1 = s + r_{i_0} + n - 1.$$

Հետևաբար՝

$$s + \sum_{i=1}^n r_i - 1 = \alpha(uv_{i_1}) = \bar{S}(u, \alpha) \leq s + r_{i_0} + n - 1 + d(v_{i_1}) - 1 = s + r_{i_0} + r_{i_1} + n - 1:$$

Փաստորեն ստացվում է, որ

$$\sum_{i=3}^n r_i \leq \sum_{i=1}^n r_i - (r_{i_0} + r_{i_1}) \leq n,$$

ինչը հակասություն է: □

Նկատենք, որ $Par(3, 3, 3)$ մուլտիգրաֆը չի բավարարում վերը նշված թեորեմի պայմաններին, սակայն այն ևս չունի միջակայքային ներկում:

Պնդում 3.5.2. $Par(3, 3, 3) \notin \mathfrak{N}$

Ապացույց. Յույց տանք, որ չնայած Նկ. 3.10-ում պատկերված $Par(3, 3, 3)$ մուլտիգրաֆը չի բավարարում Թեորեմ 3.5.1-ի պայմաններին, այն ևս միջակայքային ներկում չունի: Ենթադրենք հակառակը, դիցուք α -ն $Par(3, 3, 3)$ -ի որևէ միջակայքային ներկում է: Պահպանենք նախորդ թեորեմում ներմուծված գազաթների նշանակումները:

Դիցուք $S(u, \alpha) = [a, a + 8]$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $a \in S(v_1, \alpha)$, իսկ $a + 8 \in S(v_3, \alpha)$: v_1, w, v_3 գազաթների սպեկտրների միջակայք լինելը հնարավոր է ապահովել միայն այն դեպքում, երբ $S(v_1, \alpha) = [a, a + 3]$, $S(w, \alpha) = [a + 3, a + 5]$, իսկ $S(v_3, \alpha) = [a + 5, a + 8]$: Սակայն այդ դեպքում մի կողմից ստանում ենք, որ $\alpha(uv_2) = 5$, իսկ մյուս կողմից՝ 5 գույնը պետք է օգտագործվի նաև uv_2 կողերից մեկի վրա, ինչը հակասություն է: □

Հաջորդ թեորեմից հետևում է, որ $Par(3, 3, 3)$ մուլտիգրաֆից ավելի փոքր թվով գազաթներով միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի մուլտիգրաֆ գոյություն չունի:

Թեորեմ 3.5.3. Եթե G -ն կապակցված երկկողմանի մուլտիգրաֆ է, ընդ որում $|V(G)| \leq 4$, ապա $G \in \mathfrak{N}$: Մյուս կողմից՝ ցանկացած դրական $n \geq 5$ թվի համար գոյություն ունի G կապակցված երկկողմանի մուլտիգրաֆ, որի համար $|V(G)| = n$ և $G \notin \mathfrak{N}$:

Ապացույց. Այն դեպքերը, երբ $|V(G)| \leq 3$ ակնհայտ են: Ենթադրենք $|V(G)| = 4$. Եթե G -ի հիմքում ընկած գրաֆը ծառ է, ապացույցը նորից ակնհայտ է: Ուստի, ենթադրենք $V(G) = \{u, v, w, z\}$ և $E(G) = E(uv) \cup E(vw) \cup E(wz) \cup E(uz)$, որտեղ $\mu(uv) = a$, $\mu(vw) = b$, $\mu(wz) = c$, $\mu(uz) = d$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ

$\max\{a, b, c, d\} = d$. Ներկենք $E(uv)$ կողերը $d + 1, \dots, d + a$ գույներով, $E(vw)$ կողերը՝ $d - b + 1, \dots, d$, $E(wz)$ կողերը՝ $d + 1, \dots, d + c$, իսկ $E(uz)$ կողերը՝ $1, \dots, d$ գույներով: Եթե $a < c$, ապա ստացվածը G մուլտիգրաֆի միջակայքային $(d + c)$ -ներկում է: Հակառակ դեպքում, ստացվածը G մուլտիգրաֆի միջակայքային $(d + a)$ -ներկում է:

Թերորեմի երկրորդ մասը ցույց տալու համար նկատենք, որ ըստ Թերորեմ 3.5.1-ի՝ ցանկացած $n \geq 3$ թվի համար $G_n = \text{Par}(\underbrace{n + 1, \dots, n + 1}_n)$ երկկողմանի մուլտիգրաֆը միջակայքային ներկում չունի, ընդ որում՝ $|V(G_n)| = n + 2$: \square

Պարագրաֆի վերջում ցույց տանք, որ բոլոր ենթախորանարդ երկկողմանի մուլտիգրաֆները միջակայքային ներկվող են:

Թերորեմ 3.5.4. Եթե G -ն երկկողմանի մուլտիգրաֆ է, որի համար $\Delta(G) \leq 3$, ապա $G \in \mathfrak{N}$ և $w(G) \leq 4$: Մյուս կողմից՝ ցանկացած դրական $\Delta \geq 9$ թվի համար գոյություն ունի G կապակցված երկկողմանի մուլտիգրաֆ, որի համար $\Delta(G) = \Delta$ և $G \notin \mathfrak{N}$:

Ապացույց. Ցույց տանք, որ եթե G -ն երկկողմանի մուլտիգրաֆ է, ընդ որում $\Delta(G) \leq 3$, ապա G -ն ունի միջակայքային ներկում ոչ ավել քան չորս գույներով:

Ապացույցը կատարենք ինդուկցիայով ըստ $|E(G)|$ -ի: Պնդումն ակնհայտ է, երբ $|E(G)| \leq 4$: Ենթադրենք, որ $|E(G)| \geq 5$ և պնդումը ճիշտ է բոլոր այնպիսի G' երկկողմանի մուլտիգրաֆների համար, որոնց համար $\Delta(G') \leq 3$ և $|E(G')| < |E(G)|$:

Դիտարկենք G մուլտիգրաֆը: Այն կապակցված է: Եթե $\Delta(G) \leq 2$, ապա $G \in \mathfrak{N}$ և $w(G) \leq 2$. Ենթադրենք, որ $\Delta(G) = 3$. Եթե G -ն չունի պատիկ կողեր, ապա պնդումը հետևում է Թերորեմ 3.3.2-ից: Ուստի ենթադրենք, որ G -ն ունի պատիկ կողեր:

Դիցուք $uv \in E(G)$ և $\mu(uv) \geq 2$. Եթե $\mu(uv) = 3$, ապա G -ն բաղկացած է միայն u և v գագաթներից և uv երեք պատիկ կողերից, ուստի այն ունի միջակայքային 3-ներկում: Այժմ ենթադրենք, որ $\mu(uv) = 2$: Դիտարկենք երկու դեպք.

Դեպք 1. $d_G(v) = 2$ և $d_G(u) = \Delta(G) = 3$:

Այս դեպքում գոյություն ունի uv կող, որը հանդիսանում է կամուրջ G -ում: Դիտարկենք $G' = G - E(uv)$ մուլտիգրաֆը, որտեղ $E(uv) = \{e_1, e_2\}$. Ինդուկցիոն ենթադրության համաձայն, G' -ը ունի α միջակայքային ներկում ոչ ավել քան չորս գույներով: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $\alpha(uv) \leq 2$ (հակառակ դեպքում կդիտարկենք $\beta(e) = 4 - \alpha(e)$ կամ $\beta(e) = 5 - \alpha(e)$ ներկումը ցանկացած $e \in E(G')$)

կողի համար): Այժմ ներկենք e_i կողը $\alpha(uv) + i$, գույնով, $i = 1, 2$: Դժվար չէ համոզվել, որ ստացված ներկումը G մուլտիգրաֆի միջակայքային ներկում է ոչ ավել քան չորս գույներով:

Դեպք 2. $d_G(u) = d_G(v) = \Delta(G) = 3$:

Այս դեպքում G -ում գոյություն ունեն x, y գագաթներ ($x \neq y$), այնպես, որ $ux \in E(G)$ և $vy \in E(G)$: Դիտարկենք $G' = (G - E(uv) - ux - vy) + xy$ մուլտիգրաֆը, որտեղ $E(uv) = \{e_1, e_2\}$: Ինդուկցիոն ենթադրության համաձայն, G' -ը ունի α միջակայքային ներկում ոչ ավել քան չորս գույներով: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $\alpha(xy) \leq 2$ (հակառակ դեպքում կդիտարկենք $\beta(e) = 4 - \alpha(e)$ կամ $\beta(e) = 5 - \alpha(e)$ ներկումը ցանկացած $e \in E(G')$ կողի համար): Այնուհետև ջնջենք xy կողը և ներկենք ux և vy կողերը $\alpha(xy)$ գույնով, իսկ e_i կողը՝ $\alpha(xy) + i$ գույնով, $i = 1, 2$: Հեշտ է տեսնել, որ ստացված ներկումը G մուլտիգրաֆի միջակայքային ներկում է ոչ ավել քան չորս գույներով:

Թերորեմի երկրորդ մասի ապացույցը անմիջապես հետևում է Պնդում 3.5.2-ից և Թերորեմ 3.5.1-ից: □

Եզրակացություն

Կարգացուցակների կառուցման բազմաթիվ խնդիրներ բերվում են տարաբնույթ պայմաններով գրաֆների կողային ներկումների խնդիրների ուսումնասիրությանը: Մասնավորապես, «պատուհան» չունեցող դասացուցակների գոյության և կառուցման խնդիրները մոդելավորվում են գրաֆների (մուլտիգրաֆների) միջակայքային կողային ներկումների միջոցով: Այս աշխատանքը նվիրված է այդպիսի ներկումների և նրանց տարբեր բնույթի ընդհանրացումների հետազոտմանը:

G մուլտիգրաֆի գագաթների և կողերի բազմությունը նշանակենք, համապատասխանաբար, $V(G)$ -ով և $E(G)$ -ով: $\Delta(G)$ -ով նշանակենք գրաֆի առավելագույն աստիճանը: $\alpha : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ֆունկցիան կոչվում է G մուլտիգրաֆի ճիշտ կողային ներկում, եթե ցանկացած $v \in V(G)$ գագաթին կից կողերը ներկված են զույգ առ զույգ տարբեր գույներով: Եթե α -ն ճիշտ կողային ներկում է, $S(v, \alpha)$ -ով նշանակում ենք v գագաթին կից կողերի գույների բազմությունը, իսկ $\underline{S}(v, \alpha)$ -ով և $\overline{S}(v, \alpha)$ -ով՝ այդ բազմության փոքրագույն և մեծագույն գույները:

$\alpha : E(G) \rightarrow \{1, \dots, t\}$ ճիշտ կողային ներկումը կոչվում է G մուլտիգրաֆի միջակայքային t -ներկում, եթե կամայական i թվի համար, $i = 1, \dots, t$, գոյություն ունի e կող, որ $\alpha(e) = i$, իսկ կամայական $v \in V(G)$ գագաթի համար $S(v, \alpha)$ բազմությունը հանդիսանում է բնական թվերի միջակայք:

\mathfrak{N}_t -ով նշանակենք այն մուլտիգրաֆների բազմությունը, որոնք ունեն միջակայքային կողային t -ներկում, իսկ \mathfrak{N} -ով՝ $\mathfrak{N} = \bigcup_{t \geq 1} \mathfrak{N}_t$, բոլոր միջակայքային կողային ներկելի գրաֆների բազմությունը: Եթե $G \in \mathfrak{N}$, $w(G)$ -ով և $W(G)$ -ով նշանակենք t -ի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները, որոնց դեպքում G -ն ունի միջակայքային կողային t -ներկում:

Քանի որ ոչ բոլոր մուլտիգրաֆները ունեն միջակայքային ներկումներ, դիտարկվում են միջակայքային կողային ներկումների ընդհանրացումներ: Կամայական G մուլտիգրաֆի α կողային ներկման համար սահմանվում է այդ ներկման դեֆիցիտը՝ $def(G, \alpha) = \sum_{v \in V(G)} (\overline{S}(v, \alpha) - \underline{S}(v, \alpha) - |S(v, \alpha)| + 1)$: G մուլտիգրաֆի դեֆիցիտը՝ $def(G)$ -ն, G -ի բոլոր ճիշտ կողային ներկումների դեֆիցիտներից նվազագույնն է: $w_{def}(G)$ -ով և $W_{def}(G)$ -ով նշանակում ենք t -ի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները, որոնց համար G -ն ունի t գույներով և $def(G)$ դեֆիցիտով ճիշտ կողային ներկում:

G և H գրաֆների $G \square H$ դեկարտյան արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H)$$

$$E(G \square H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) : (u_1 = u_2 \text{ և } v_1 v_2 \in E(H)) \text{ կամ } (v_1 = v_2 \text{ և } u_1 u_2 \in E(G))\}$$

Այս աշխատանքում դիտարկվել են մուլտիգրաֆների տարբեր դասերի՝ ջր դասին պատկանելու խնդիրներ, այդ դասին պատկանող մուլտիգրաֆների համար՝ $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի գնահատման և ճշգրիտ արժեքների որոշման խնդիրներ, միջակայքային ներկումներում մասնակցող գույների հնարավոր քանակի որոշման խնդիրներ, գրաֆների տարբեր գործողությունների նկատմամբ միջակայքային ներկելիության կայունության խնդիրներ, ինչպես նաև ուսումնասիրվել են միջակայքային ներկում չունեցող գրաֆների դեֆիցիտը և $w_{def}(G)$ ու $W_{def}(G)$ պարամետրերը:

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները:

1) Միջակայքային ներկումներ ունեցող գրաֆների և մուլտիգրաֆների $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի, ինչպես նաև միջակայքային ներկում չունեցող գրաֆների $w_{def}(G)$ և $W_{def}(G)$ պարամետրերի համար տրվել են հասանելի գնահատականներ,

2) K_{2n} լրիվ գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների և այդ գրաֆների հատուկ տիպի ֆակտորիզացիաների համարժեքության հիման վրա ստացվել են $W(K_{2n})$ պարամետրի նոր ստորին և վերին գնահատականներ, գտնվել են այդ պարամետրի ճշգրիտ արժեքները $n \leq 12$ արժեքների համար,

3) Ստացվել են լրիվ բազմակողմանի գրաֆների, արտաքին հարթ գրաֆների, ցանցերի, գլանների, տոռերի և Հեմինգի գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների գոյության վերաբերյալ արդյունքներ, $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի գնահատականներ, որոշ դեպքերում՝ նաև ճշգրիտ արժեքներ,

4) Յուրյց է տրվել գրաֆների միջակայքային ներկելիության կապը այդ գրաֆների մասնակցությամբ դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային ներկելիություն հետ, էապես ուժեղացվել են համասեռ գրաֆների մասնակցությամբ դեկարտյան արտադրյալների համար $W(G \square H)$ պարամետրի հայտնի գնահատականները, ապացուցվել է երկկողմանի գրաֆների մասնակցությամբ դեկարտյան արտադրյալների մի շարք դասերի միջակայքային ներկելիությունը,

5) Գտնվել են որոշ գրաֆների դեֆիցիտի ճշգրիտ արժեքները, հաստատվել է Բորովիցկա-Օլշեվսկայի, Դրգաշ-Բուրչարդտի և Հալուշչակի հիպոթեզը, ցույց է տրվել, որ

արտաքին հարթ գրաֆները բավարարում են դեֆիցիտի մասին հիպոթեզին, համաձայն որի ցանկացած G գրաֆի համար $def(G) \leq |V(G)|$,

6) Մասնակի լուծում է տրվել միջակայքային ներկում չունեցող փոքրագույն երկկողմանի գրաֆների մասին Ջենսեն-Տոֆտի խնդրին, կառուցվել են այդպիսի գրաֆների և մուլտիգրաֆների հայտնի փոքրագույն օրինակները, համակարգչային հաշվարկների միջոցով ցույց է տրվել, որ ոչ ավել, քան 16 գագաթ պարունակող բոլոր երկկողմանի գրաֆները ունեն միջակայքային ներկումներ:

Գրականություն

- [1] H.S. Altınakar, G. Caporossi, A. Hertz, A comparison of integer and constraint programming models for the deficiency problem, *Computers and Oper. Res.* 68, 2016, pp. 89-96.
- [2] K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable, Part I, Discharging, *Illinois Journal of Mathematics* 21, 1977, pp. 429-490.
- [3] K. Appel, W. Haken, J. Koch, Every planar map is four colorable, Part II, Reducibility, *Illinois Journal of Mathematics* 21, 1977, pp. 491-567.
- [4] A.S. Asratian, Some results on an edge coloring problem of Folkman and Fulkerson, *Discrete Math.* 223, 2000, pp. 13-25.
- [5] A.S. Asratian, R.R. Kamalian, Investigation on interval edge-colorings of graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 62, 1994, pp. 34-43.
- [6] A.S. Asratian., T.M.J. Denley, R. Haggkvist, *Bipartite graphs and their applications*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1998.
- [7] A.S. Asratian, C.J. Casselgren, P.A. Petrosyan, Some results on cyclic interval colorings of graphs, *J. Graph Theory*, 2017, ընդունված է տպագրության:
- [8] A.S. Asratian, C.J. Casselgren, J. Vandenbussche, D.B. West, Proper path-factors and interval edge-coloring of (3,4)-biregular bigraphs, *J. Graph Theory* 61, 2009, pp. 88-97.
- [9] M.A. Axenovich, On interval colorings of planar graphs, *Congressus Numerantium* 159, 2002, pp. 77-94.
- [10] M. Behzad, E.S. Mahmoodian, On topological invariants of the product of graphs, *Canad. Math. Bull.*, 12, 1969, pp. 157-166.
- [11] L.W. Beineke, R.J. Wilson, On the edge-chromatic number of a graph, *Discrete Math.* 5, 1973, pp. 15-20.
- [12] C. Berge, *Theorie des Graphes et ses Applications*, Dunod, Paris, 1958.

- [13] M. Borowiecka-Olszewska, E. Drgas-Burchardt, The deficiency of all generalized Hertz graphs and minimal consecutively non-colourable graphs in this class. *Discrete Math.* 339, 2016, pp. 1892-1908.
- [14] M. Borowiecka-Olszewska, E. Drgas-Burchardt, M. Hałuszczak, On the structure and deficiency of k -trees with bounded degree, *Discrete Appl. Math.* 201, 2016, pp. 24-37.
- [15] M. Bouchard, A. Hertz, G. Desaulniers, Lower bounds and a tabu search algorithm for the minimum deficiency problem, *J. Comb. Optim.* 17, 2009, pp. 168-191.
- [16] C.J. Casselgren, P.A. Petrosyan, B. Toft, On interval and cyclic interval edge colorings of $(3,5)$ -biregular graphs, *Discrete Mathematics*, 2017, ընդունված է տպագրության:
- [17] C.J. Casselgren, B. Toft, On interval edge colorings of biregular bipartite graphs with small vertex degrees, *J. Graph Theory* 80, 2015, pp. 83-97.
- [18] CrowdProcess distributed computing platform [անցանց]. <http://www.crowdprocess.com/>
- [19] D. de Werra, Balanced schedules, *INFOR*. N9, 1971, pp. 230-237.
- [20] D. de Werra, Investigations on an edge coloring problem, *Discrete Math.* 1, 1971, pp. 167-179.
- [21] D. de Werra, Ph. Solot, Compact cylindrical chromatic scheduling, *SIAM J. Discrete Math.* 4, 1991, pp. 528-534.
- [22] A.L. Dulmage, N.S. Mendelsohn, Some graphical properties of matrices with nonnegative entries, *Acquat. Math.*, 2, 1969, pp. 150-162.
- [23] P. Erdős, A.L. Rubin, H. Taylor, Choosability in graphs, *Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congr. Numer.* 26, 1979, pp. 125-157.
- [24] S. Even, A. Itai, A. Shamir, On the complexity of timetable and multicommodity flow problems, *SIAM J. Comput.* 5 (4), 1976, pp. 691-703.
- [25] Y. Feng, Q. Huang, Consecutive edge-coloring of the generalized θ -graph, *Discrete Appl. Math.* 155, 2007, pp. 2321-2327.

- [26] S. Fiorini, On the chromatic index of outerplanar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 18, 1975, pp. 35-38.
- [27] J. Folkman, D.R. Fulkerson, Edge colourings in bipartite graphs, in *Combinatorial Mathematics and its Applications*, University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1969, pp. 561-577.
- [28] K. Giaro, The complexity of consecutive Δ -coloring of bipartite graphs: 4 is easy, 5 is hard, *Ars Combin.* 47, 1997, pp. 287-298.
- [29] K. Giaro, Compact task scheduling on dedicated processors with no waiting periods, PhD thesis, Technical University of Gdansk, EIT faculty, Gdansk, 1999 (լիհերեն).
- [30] K. Giaro, M. Kubale, Consecutive edge-colorings of complete and incomplete Cartesian products of graphs, *Cong. Num.* 128, 1997, pp. 143-149.
- [31] K. Giaro, M. Kubale, Compact scheduling of zero-one time operations in multi-stage systems, *Discrete Appl. Math.* 145, 2004, pp. 95-103.
- [32] K. Giaro, M. Kubale, M. Malafiejski, On the deficiency of bipartite graphs, *Discrete Appl. Math.* 94, 1999, pp. 193-203.
- [33] K. Giaro, M. Kubale, M. Malafiejski, Consecutive colorings of the edges of general graphs, *Discrete Math.* 236, 2001, pp. 131-143.
- [34] D. Hanson, C.O.M. Loten, A lower bound for interval colouring bi-regular bipartite graphs, *Bulletin of the ICA* 18, 1996, pp. 69-74.
- [35] D. Hanson, C.O.M. Loten, B. Toft, On interval colorings of bi-regular bipartite graphs, *Ars Combin.* 50, 1998, pp. 23-32.
- [36] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- [37] H.J. Fleischner, D.P. Geller, F. Harary, Outerplanar graphs and weak duals, *J. Indian Math. Soc.* 38, 1974, pp. 215-219.
- [38] H.M. Hansen, Scheduling with minimum waiting periods, Master's Thesis, Odense University, Odense, Denmark, 1992 (դանիերեն).

- [39] P. Hudák, F. Kardoš, T. Madaras, M. Vrbjarová, On improper interval edge colourings, Czechoslovak Mathematical Journal 66 (4), 2016, pp. 1119-1128.
- [40] T.R. Jensen, B. Toft, Graph coloring problems, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1995.
- [41] R.R. Kamalian, P.A. Petrosyan, A note on upper bounds for the maximum span in interval edge-colorings of graphs, Discrete Math. 312, 2012, pp. 1393-1399.
- [42] D. König, *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Math. Ann. 77, 1916, pp. 453-465.
- [43] M. Kubale, Graph Colorings, American Mathematical Society, 2004.
- [44] E. Kubicka, The chromatic sum of a graph, PhD Thesis, Western Michigan University, 1989.
- [45] B.D. McKay, A. Piperno, Practical Graph Isomorphism, II, J Symbolic Computation, vol. 60, 2014, pp. 94-112.
- [46] P.A. Petrosyan, Interval edge-colorings of complete graphs and n-dimensional cubes, Discrete Math. 310, 2010, pp. 1580-1587.
- [47] P.A. Petrosyan, Interval edge colorings of some products of graphs, Discuss. Math. Graph Theory 31(2), 2011, pp. 357-373.
- [48] P.A. Petrosyan, Interval colorings of complete balanced multipartite graphs, arxiv:1211.5311, 2012.
- [49] P.A. Petrosyan, On Interval Non-Edge-Colorable Eulerian Multigraphs, arxiv:1311.2210, 2013.
- [50] P.A. Petrosyan, On Interval Edge-Colorings of Outerplanar Graphs, Ars Combin. 132, 2017, pp. 127-135.
- [51] P.A. Petrosyan, H.Z. Arakelyan, On a generalization of interval edge colorings of graphs. Transactions of IPIA of NAS RA, Math. Probl. of Comp. Sci. 29, 2007, pp. 26-32.

- [52] P.A. Petrosyan, G.H. Karapetyan, Lower bounds for the greatest possible number of colors in interval edge colorings of bipartite cylinders and bipartite tori, Proceedings of the CSIT Conference, Yerevan, 2007, pp. 86-88.
- [53] P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, On a generalization of interval edge-colorings of graphs, 15th Workshop on Graph Theory, Colourings, Independence and Domination, Szklarska Poreba, Poland, 2013, p. 44.
- [54] P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, Interval non-edge-colorable bipartite graphs and multigraphs, J. Graph Theory 76, 2014, pp. 200-216.
- [55] P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, H.G. Tananyan, Interval edge-colorings of Cartesian products of graphs, CID abstracts, 2011, p.44. <http://www.cid.uz.zgora.pl/2011/files/AbstractsPdf/Khachatrian.pdf>
- [56] P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, H.G. Tananyan, Interval edge-colorings of Cartesian products of graphs I, Discuss. Math. Graph Theory 33(3), 2013, pp. 613-632.
- [57] P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, L.E. Yepremyan, H.G. Tananyan, Interval edge-colorings of graph products, Proceedings of the CSIT Conference, 2011, pp. 89-92.
- [58] P.A. Petrosyan, S.T. Mkhitaryan, Interval cyclic edge-colorings of graphs, Discrete Math. 339, 2016, pp. 1848-1860.
- [59] A.V. Pyatkin, Interval coloring of (3,4)-biregular bipartite graphs having large cubic subgraphs, J. Graph Theory 47, 2004, pp. 122-128.
- [60] G. Sabidussi, Graph multiplication, Math. Z. 72, 1960, pp. 446-457.
- [61] C.E. Shannon, A theorem on colouring the lines of a network, J. Math. Phys. 28, 1949, pp. 148-151.
- [62] A. Schwartz, The deficiency of a regular graph. Discrete Math. 306, 2006, pp. 1947-1954.
- [63] M. Stiebitz, D. Scheide, B. Toft, L.M. Favrholdt, Graph Edge Coloring: Vizing's Theorem and Goldberg's Conjecture, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 2012.

- [64] K.J. Supowit, Finding a maximum planar subset of nets in a channel, IEEE Trans. Comput. Aided Design CAD 6(1), 1987, pp. 93-94.
- [65] Н.Н. Тepyан, P.A. Petrosyan, Interval edge-colorings of composition of graphs, Discrete Appl. Math. 217, 2017, pp. 368-374.
- [66] D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [67] F. Yang, X. Li, Interval coloring of (3,4)-biregular bigraphs having two (2,3)-biregular bipartite subgraphs, Applied Math. Letters 24, 2011, pp. 1574-1577.
- [68] A.C. Асратян, P.P. Камалян, Интервальные раскраски ребер мультиграфа, Прикладная математика, вып. 5, 1987, стр. 25-34.
- [69] В.Г. Визинг, Декартовое произведение графов, Вычис. Системы 9, 1963, стр. 30-43.
- [70] В.Г. Визинг, Хроматический класс мультиграфов, Кибернетика 3, 1965, стр. 29-39.
- [71] В.Г. Визинг, Критические графы с данным хроматическим классом, Дискретный анализ 5, 1965, стр. 9-17.
- [72] В.Г. Визинг, Раскраска вершин графа в предписанные цвета, Методы дискретного анализа 29, 1976, стр. 3-10.
- [73] P.P. Камалян, Интервальные раскраски полных двудольных графов и деревьев, Препринт ВЦ АН Арм. ССР и ЕГУ, Ереван, 1989, 11 стр.
- [74] P.P. Камалян, Интервальные реберные раскраски графов, канд. дисс., Новосибирск, 1990.
- [75] P.P. Камалян, Об одном классе планарных двудольных графов, не имеющих интервальной реберной раскраски, Գիտական հոդվածների ժողովածու, ԵՊՀ հջլանի մասնաճյուղ, 2010, стр. 149-151
- [76] P.P. Камалян, А.Н. Мирумян, Интервальные реберные раскраски двудольных графов одного класса, Доклады НАН РА, том 97, N 4, 1997, стр. 3-5.

- [77] П.А. Петросян, Г.А. Хачатрян, Интервальные реберные раскраски декартовых произведений регулярных графов, Пятая годовичная научная конференция РАУ, Сборник научных работ, 2010, стр. 241-248.
- [78] А.В. Пяткин, Об интервальной (1,1)-раскраске инциденторов интервально раскрашиваемых графов, Дискретн. анализ и исслед. опер. 22:2, 2015, стр. 63-72.
- [79] С.В. Севастьянов, Об интервальной раскрашиваемости ребер двудольного графа, Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач, вып. 50, 1990, стр. 61-72.
- [80] Լ. Եփրեմյան, Գրաֆների արտադրյալների միջակայքային ներկումների մասին, մագիստրոսական թեզ, Երևանի Պետական Համալսարան, 2011, 56 էջ:
- [81] Ա. Խչոյան, Ենթախորանարդ գրաֆների և մուլտիգրաֆների միջակայքային կողային ներկումներ, ավարտական աշխատանք, Երևանի Պետական Համալսարան, 2010, 30 էջ:
- [82] Տ. Մամիկոնյան, graphonline բաշխված համակարգ [անցանց]. <https://github.com/sarahmiracle/graphonline>
- [83] Պ.Ա. Պետրոսյան, Վ.Վ. Մկրտչյան, Ռ.Ռ. Քամալյան, Գրաֆների տեսություն, ուսումն. ձեռն., Երևան, ԵՊՀ հրատ., 2015:

Հավելված

Ստորև ներկայացնում ենք այն ծրագիրը, որի օգնությամբ կառուցվել են փոքրաթիվ գազաթներով երկկողմանի գրաֆների միջակայքային ներկումները (Թեորեմներ 3.4.2, 3.4.3 և 3.4.4):

```
1 var colorBipartiteGraph = function (b, m, n, timelimit) {
2   // the main coloring function
3   // b is the biadjacency matrix of size m x n
4   var E;
5   var arrCol;
6   var arrRow;
7
8   var degRow;
9   var degCol;
10
11  var i, j, k;
12
13  var iter = 0, finish = false;
14
15  var setColor = function (row, col, x) {
16    // x is the color
17    E[row][col] = x;
18    for (i = row + 1; i < m; i++)
19      arrCol[i][col] |= 1 << x;
20    for (j = col + 1; j < n; j++)
21      arrRow[row][j] |= 1 << x;
22  };
23  var removeColor = function (row, col) {
24    var x = E[row][col];
25    for (i = row + 1; i < m; i++)
26      arrCol[i][col] &= ~(1 << x);
27    for (j = col + 1; j < n; j++)
28      arrRow[row][j] &= ~(1 << x);
29  };
30
31  var maxBit = function (n) {
32    // if n==0, x will stay undefined.
33    // But it never happens for connected graphs.
34    var sh = 0, x;
35    while (n != 0) {
36      if (n & 1)
37        x = sh;
38      sh++;
39      n >>= 1;
40    }
41    return x;
42  };
43  var minBit = function (n) {
44    if (n == 0) {
```

```

45         alert("n is 0, there are no 1 bits"); // this never happens
46         return -1;
47     }
48
49     var x = 0;
50     while ((n & 1) == 0) {
51         n >>= 1;
52         x++;
53     }
54     return x;
55 };
56
57 var nextNumbers = function (row, col) {
58     // returns the set of possible colors for the given matrix cell
59     // the colors used on the same row/column will not be added to the set
60     var TAB = [], TABcount;
61     var downLimit = 1;
62
63     var isArrCol = arrCol[row][col] != 0;
64     var isArrRow = arrRow[row][col] != 0;
65
66     var x;
67     if (isArrCol) {
68         x = maxBit(arrCol[row][col]) - degCol[col] + 1;
69         if (downLimit < x)
70             downLimit = x;
71     }
72
73     if (isArrRow) {
74         x = maxBit(arrRow[row][col]) - degRow[row] + 1;
75         if (downLimit < x)
76             downLimit = x;
77     }
78
79     var upLimit = 100;
80     if (isArrCol)
81         upLimit = minBit(arrCol[row][col]) + degCol[col] - 1;
82     if (isArrRow) {
83         x = minBit(arrRow[row][col]) + degRow[row] - 1;
84         if (upLimit > x)
85             upLimit = x;
86     }
87
88     // collect all 1 bits (from rows and columns)
89     var bits = arrRow[row][col] | arrCol[row][col];
90     // first downLimit bits are not important
91     bits >>= downLimit;
92
93     for (i = downLimit; i <= upLimit; i++) {
94         if (!(bits & 1))
95             TAB.push(i);
96         bits >>= 1;
97     }
98

```

```

99     shuffle(TAB);
100
101     return TAB;
102 };
103
104 var recurse = function (ii, jj) {
105     iter++;
106     if (iter > timelimit) {
107         finish = true;
108         return false;
109     }
110
111     if (jj == n)
112         return true;    // coloring is there
113     if (b[ii][jj] == 0)
114         return recurse(ii == m - 1 ? 0 : ii + 1, jj + (ii == m - 1));    //
            jump to the next empty cell
115
116     var TAB = nextNumbers(ii, jj);
117     // shuffling the set significantly improves the average speed of the
            algorithm
118     TAB = shuffle(TAB);
119     var TABcount = TAB.length;
120
121     var c = 0;
122     var B;
123     do {
124         if (c >= TABcount)
125             return false;
126         setColor(ii, jj, TAB[c++]);
127         B = recurse(ii == m - 1 ? 0 : ii + 1, jj + (ii == m - 1));
128
129         if (finish) return false; // no coloring found
130
131         if (!B)
132             removeColor(ii, jj); // remove the color and try another one
133     } while (!B);
134
135     return true;
136 };
137
138 var shuffle = function (o) {
139     for (var j, x, i = o.length; i; j = Math.floor(Math.random() * i), x = o
        [--i], o[i] = o[j], o[j] = x);
140     return o;
141 };
142
143 var findColoring = function (corner) {
144     // corner is the color of the first cell
145     corner = corner || 1;
146     // precompute the degrees
147     degRow = [];
148     degCol = [];
149     for (i = 0; i < m; i++)

```

```

150         degRow[i] = 0;
151     for (j = 0; j < n; j++)
152         degCol[j] = 0;
153
154     E = [];
155     arrRow = [];
156     arrCol = [];
157     for (i = 0; i < m; i++) {
158         E[i] = [];
159         arrCol[i] = [];
160         arrRow[i] = [];
161         for (j = 0; j < n; j++) {
162             if (b[i][j]) {
163                 arrCol[i][j] = 0;
164                 arrRow[i][j] = 0;
165                 degRow[i]++;
166                 degCol[j]++;
167             }
168             E[i][j] = 0;
169         }
170     }
171
172     // set the first color (this will not be changed later)
173     setColor(0, 0, corner);
174
175     var B = recurse(1, 0);
176
177     if (finish) return false;
178
179     if (!B) {
180         if (corner == 5) {
181             return false;
182         }
183         return findColoring(corner + 1);
184     }
185     return E;
186 };
187
188 return findColoring(15); // use large enough number
189 };

```