ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Նելլի Թաթուլի Գափոյան

Բերգմանի տեսքի օպերատորներ ֆունկցիոնալ տարածությունների վրա $\mathbb{C}^n$-ի գնդում

Ա.01.01 — «Մաթեմատիկական անալիզ» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2017

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Нелли Татуловна Гапоян

Операторы типа Бергмана на пространствах функций в шаре из $\mathbb{C}^n$

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук по специальности
А.01.01 — "Математический анализ"

ЕРЕВАН 2017

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի Պետական Համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր Կ.Լ. Ավետիսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Հ.Մ. Հայրապետյան ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Ա.Հ. Կարապետյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՌԴ Կազանի պետական էներգետիկական համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2017թ. ապրիլի 18-ին ժ. 15^{00}-ին Երևանի Պետական Համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2017թ. մարտի -ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝ Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском Государственном Университете

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук К.Л. Аветисян
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук, профессор Г.М. Айрапетян кандидат физ.-мат. наук А.О. Карапетян
Ведущая организация:	Казанский государственный энергетический университет

Защита диссертации состоится 18-го апреля 2017 г. в 15^{00} на заседании специализированного совета ВАК 050 при ЕГУ (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан -го марта 2017г.

Ученый секретарь специализированного совета Т.Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Функциональные пространства, которые рассмотрены в настоящей работе, в принципе возникли и развились из классической теории классов Харди H^p. Основополагающие работы Харди, Литтлвуда, Ф. Рисса, М. Рисса, Сегё, Смирнова, Привалова, Бергмана, Неванлинны и их последователей выявили ту важную роль, какую играют классы Харди и их обобщения в различных вопросах гармонического анализа, граничных свойств функций, теории степенных рядов и рядов Фурье, линейных операторов, экстремальных и аппроксимационных задач. В 1920-30-х годах в работах Бергмана [11], Харди, Литтлвуда [18], [19], Зигмунда и других возникли аналоги и обобщения классов Харди, в которых равномерная норма заменяется интегральной нормой, обычно с некоторым весом. Возникают пространства Бергмана A^p_α и пространства со смешанной нормой $H(p,q,\alpha)$. В Армении исследование и развитие теории пространств Бергмана и других смежных функциональных классов началось с работ М.М. Джрбашяна (см. [2]), который, в частности, вывел интегральное представление для весовых пространств Бергмана.

Одно из направлений этих исследований — возникающие интегральные операторы (типа) Бергмана, ограниченность которых на рассматриваемых весовых пространствах открывает возможность, в частности, для нахождения их сопряженных пространств. Участвующие здесь стандартные степенные весовые функции можно заменить на более общие, так называемые нормальные весовые функции. Такое обобщение было предложено Шилдсом и Вильямсом [24], [25], в частности для решения проблем двойственности. Исследования Шилдса и Вильямса [24], [25], а также дальнейшее развитие их теории, представленные в работах [17], [16], [13], [7], [8], [23], [21], [4], [20], остались неполными в сравнении с классическим случаем степенных весовых функций. Поэтому естественно продолжить изучение операторов типа Бергмана и связанных с ними весовых пространств и их сопряженных с участием нормальных весовых функций. Заметим, что нормальные весовые функции в операторах (типа) Бергмана вполне естественны, поскольку для более быстро убывающих весовых функций операторы Бергмана оказываются неограниченными на классах Бергмана.

Цель работы.

1) Найти необходимые и достаточные условия на параметры p, a, b, α для того, чтобы интегральный оператор типа Бергмана $Q_{\varphi,\psi}$ стал ограниченным оператором в $L^p(B)$ при условии, что $\{\varphi, \psi\}$ — нормальная пара функций с индексами a и b $(0 < a < b)$ и с индексом пары α $(\alpha > b-1)$. Доказать также, что оператор $Q_{\varphi,\psi}$ является ограниченным проектором из пространства $L^p(B)$ на его подпространство.

2) Найти значения параметра β, при которых общие операторы типа Бергмана $Q_{\varphi,\psi}$, $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$ ограничены на пространствах $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой в шаре B.

3) Построить плюригармоническое воспроизводящее ядро k_w и доказать ограниченность соответствующих интегральных операторов с ядром k_w. Установить соотношения двойственности для плюригармонических пространств

$$h^1(\eta)^* \cong h_\infty(\varPhi), \qquad h_0(\varPhi)^* \cong h^1(\eta).$$

4) Определить понятие полуаналитической функции в единичном полидиске U^n. Для таких функций $f(z)$ в полидиске U^n доказать аналог известной формулы Шварца с участием n-мерного аналога ядра Шварца в полидиске.

Методы исследования. Применяются в основном методы комплексного и функционального анализа.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер, ее результаты могут быть применены в задачах теории функций одного и нескольких комплексных переменных, теории операторов и функционального анализа.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры общей математики факультета математики и механики ЕГУ, на ежегодних сессиях Армянского математического союза, на российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях автора, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 75 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитированной литературы, включающего 50 наименований.

Содержание работы

Диссертационная работа посвящена изучению операторов бергмановского типа в различных весовых пространствах аналитических или плюригармонических функций, заданных в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Доказана ограниченность таких операторов в соответствующих пространствах, что дало возможность найти сопряженные пространства некоторых рассматриваемых весовых пространств. Тематика подобных весовых пространств аналитических или иных функций широко представлена в нескольких монографиях, которые послужили базой для нашего исследования. Смотри монографии таких авторов как Бергман [12], Рудин [5], Гарнетт [1], А.Э. Джрбашян, Ф.А. Шамоян [13], Хеденмальм, Коренблюм, Жу [21], Дюрен, Шустер [14], Жу [27].

Нас интересуют главным образом многомерные аналоги описанных выше классов, заданные в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Пусть $B = B_n$ — открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$, и $S := \partial B$ — его граница, единичная сфера. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ обозначим через $\langle z, w\rangle := z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_n\overline{w}_n, \quad z, w \in \mathbb{C}^n$. Будем полагать $z = r\zeta,\ w = \rho\eta \in B,\ 0 \le r, \rho < 1,\ \zeta, \eta \in S,\ r = |z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$.

Вместо стандартных степенных весовых функций Шилдс и Вильямс [24] впервые предложили использовать более общие нормальные весовые функции. Фактически, это те весовые функции, которые имеют степенные миноранты и мажоранты с положительными показателями.

Определение 1. *(Нормальная весовая функция, [24], [26]) Положительная непрерывная функция* $\varphi(r),\ 0 \le r < 1$*, называется нормальной, если найдутся постоянные* $0 < a < b$ *и* $0 \le r_0 < 1$ *такие, что имеют место*

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} \searrow 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\varphi(r)}{(1-r)^b} \nearrow +\infty \qquad \text{при} \quad r \to 1^-, \quad r_0 \le r < 1. \quad (1)$$

В отдельных случаях монотонность в (1) заменяется на более общее понятие "почти монотонности". Индексы a и b для нормальной функции φ определяются неоднозначно. Типичными и простыми примерами нормальных функций являются функции вида $\varphi_{c,d}(r) := (1-r)^c \left(\log \dfrac{e}{1-r}\right)^d$, $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$, причем при $c = 0$ функция $\varphi_{0,d}(r)$ уже не будет нормальной. Нормальные весовые функции также близко соотносятся, а в некотором смысле эквивалентны правильно меняющимся функциям и функциям класса RO, см. [6]. Функции класса RO в качестве весовых функций для различных классов аналитических функций широко применялись в серии работ Ф.А. Шамояна, см., например, [7], [8], а также [20].

Определение 2. *(Нормальная пара,* [24]*) Скажем, что пара функций* $\{\varphi, \psi\}$ *составляет нормальную пару, если функция* φ *нормальна, и существует число* $\alpha > b - 1$ *(индекс пары) такое, что*

$$\varphi(r)\,\psi(r) = (1-r^2)^\alpha, \qquad 0 \le r < 1. \tag{2}$$

Расширим область определения таких радиальных весовых функций до шара B, положив $\varphi(z) := \varphi(|z|) = \varphi(r)$, $\psi(z) := \psi(|z|) = \psi(r)$.

В **Главе 1** найдено условие на индексы нормальной весовой функции и нормальной пары, при котором весовой оператор типа Бергмана является ограниченным проектором в невесовом лебеговом пространстве $L^p(B)$.

Шилдс и Вильямс [24] посредством нормальных весовых функций в единичном круге $\mathbb{D} = B_1$ предложили обобщения операторов Бергмана, которые для шара B определены в работах А.И. Петросяна [4], [29] в виде

$$Q_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\,\varphi(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}\, f(w)\, dV(w), \qquad z \in B, \tag{3}$$

$$\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\,\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\, f(w)\, dV(w), \qquad z \in B. \tag{4}$$

Именно такие операторы изучаются в настоящей работе. В частном случае $\varphi(r) = (1-r^2)^\alpha$, $\psi \equiv 1$ операторы (3), (4) сводятся к классическим проекторам Бергмана, см. [5], [13], [17], [21], [23], [27]. В случае $\varphi(r) = (1-r^2)^c$, $\psi(r) = (1-r^2)^d$, $c+d = \alpha$ операторы типа Бергмана (3), (4) также хорошо известны, см. [10], [17], [23], [27].

В монографии Жу [27, Theorem 2.10] доказана теорема об ограниченности операторов типа (3), (4), но с обычными степенными весами.

Теорема B. *Для двух вещественных чисел* $a > -1$ *и* $b > 0$ *определим два* *интегральных оператора:*

$$(Qf)(z) = \big(1-|z|^2\big)^a \int_B \frac{(1-|w|^2)^b}{\big(1-\langle z,w\rangle\big)^{n+1+a+b}}\, f(w)\, dV(w)$$

и

$$(\widetilde{Q}f)(z) = \big(1-|z|^2\big)^a \int_B \frac{(1-|w|^2)^b}{\big|1-\langle z,w\rangle\big|^{n+1+a+b}}\, f(w)\, dV(w).$$

Для $1 \leqslant p < \infty$ *следующие условия эквивалентны:*

(a) Q *ограничен по норме в* $L^p(B)$*;*

(b) $\widetilde{Q}$ *ограничен по норме в* $L^p(B)$*;*

(c) $-pa < 1$*.*

Как видим, найдено необходимое и достаточное условие для ограниченности операторов.

Основным результатом Главы 1 является следующая теорема, в которой рассмотрены более общие весовые функции (а именно нормальные), однако для ограниченности операторов найдено лишь достаточное условие.

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi,\psi\}$ *— нормальная пара функций с индексами* a *и* b $(0<a<b)$ *и с индексом пары* α $(\alpha > b-1)$ *в смысле Определений 1–2.*

При всех $1 \leqslant p < \infty$*, удовлетворяющих условию* $p(b-\alpha) < 1$*, интегральные операторы* $Q_{\varphi,\psi}$ *и* $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$*, см.* (3), (4)*, являются ограниченными операторами в* $L^p(B)$*. Более того, оператор* $Q_{\varphi,\psi}$ *является ограниченным проектором из пространства* $L^p(B)$ *на его подпространство* $\psi \cdot A^p(\psi)$*.*

В **Главе 2** мы рассматриваем более общие пространства $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой и доказываем, что весовые операторы типа Бергмана ограничены на $L(p,q,\beta)$ при подходящем выборе индексов.

Для функции $f(z)=f(r\zeta)$, заданной в шаре B, ее интегральные средние порядка p на сфере $|z|=r$ обозначены как обычно, через

$$M_p(f;r) = \big\|f(r\cdot)\big\|_{L^p(S;d\sigma)}, \qquad 0 \le r < 1,\ 0 < p \le \infty,$$

где $d\sigma$ — $(2n{-}1)$-мерная поверхностная мера Лебега на сфере S, нормированная так, что $\sigma(S)=1$. Класс функций $f \in H(B)$ с "нормой" $\|f\|_{H^p} = \sup\limits_{0<r<1} M_p(f;r)$ есть обычное пространство Харди $H^p(B)$ в единичном шаре B.

Определение 3. *Определим пространство* $L(p,q,\beta)\big(0<p,q\le\infty,\ \beta\in\mathbb{R}\big)$ *со смешанной нормой как пространство тех измеримых функций* $f(z)=f(r\zeta)$ *в шаре* B*, для которых конечна квазинорма*

$$\|f\|_{L(p,q,\beta)}=\|f\|_{p,q,\beta}:=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^1(1-r)^{\beta q-1}M_p^q(f;r)\,dr\right)^{1/q}, & 0<q<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{0<r<1}\,(1-r)^{\beta}M_p(f;r), & q=\infty.\end{cases}$$

Подпространства $L(p,q,\beta)$*, состоящие из голоморфных функций, обозначим через* $H(p,q,\beta):=H(B)\cap L(p,q,\beta),\ \beta>0.$

Если $1\le p,q\le\infty$, то $L(p,q,\beta),H(p,q,\beta)$ являются банаховыми пространствами с нормой $\|\cdot\|_{p,q,\beta}$. При $p=q<\infty$ пространства $H(p,p,\beta)=A^p_{\beta p-1}$ совпадают с весовыми классами Бергмана. Пространства со смешанной нормой для голоморфных в единичном круге функций были введены Харди и Литтлвудом в [18], [19] и развиты в дальнейшем Флеттом [15]. Смотри также монографии [5], [13], [14], [21], [27], где можно найти подробное описание весовых пространств Бергмана $H(p,p,\beta)=A^p_{\beta p-1}$ в единичном круге или шаре. Много работ посвящено пространствам $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой или их подпространствам, состоящим из голоморфных, плюригармонических или гармонических функций в круге, шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$. Пространства $L(p,q,\beta)$ для голоморфных функций в единичном шаре $B\subset\mathbb{C}^n$ и бергмановские операторы на них подробно исследованы, например, в работах [5], [27], [17], [23], для плюригармонических функций смотри [22], а для n-гармонических функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$ смотри, например, в [10].

В **Главе 2** мы доказываем, что существуют значения параметра β, при которых общие бергмановские операторы (3), (4) ограничены на пространствах $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой в шаре B.

Основным результатом Главы 2 является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $1\le p,q\le\infty,\ \beta\in\mathbb{R},\ \ \{\varphi,\psi\}$ *— нормальная пара функций с индексами* a *и* b $(0<a<b)$ *и с индексом пары* α $(\alpha>b-1)$ *в смысле Определений 1–2. Если* $b-\alpha<\beta<1+a$*, то операторы* $Q_{\varphi,\psi}$ *и* $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$ *ограниченно действуют из пространства* $L(p,q,\beta)$ *в себя.*

Если в Теореме 1 для частного случая $1\le p=q=1/\beta<\infty$, т.е. для невесового класса $L(p,p,1/p)=L^p(B)$, результат установлен в [4], [29] методом так называемого теста Шура ([5], [13], [21], [27]), то в Теореме 2 метод теста Шура не подходит. Поэтому мы применяем новый метод — вначале обобщаем известные неравенства Харди с использованием нормальных функций, а затем применяем их для получения необходимых интегральных оценок. Более частные случаи операторов Бергмана со степенными весами изучены в [5], [17], [21], [23], [27].

Фактически, в Теореме 2 мы обобщаем Теорему 1 и результат из [4] в трех направлениях: во-первых, предполагаем все значения $1 \le p \le \infty$, во-вторых, рассматриваем весовые пространства, в-третьих, вместо пространств Бергмана рассматриваем более общие пространства $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой. При этом вместо неподходящего теста Шура мы применяем обобщения неравенства Харди.

В **Главе 3** мы переходим к нахождению и изучению сопряженных пространств некоторых весовых пространств плюригармонических функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Для аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$ или в единичном шаре B из $\mathbb{C}^n$ хорошо известны соотношения двойственности по шкале весовых пространств Бергмана A^p_α. Чтобы вывести плюригармонические аналоги сопряженных пространств, мы вводим новое плюригармоническое воспроизводящее ядро k_w, которое не записывается в явном конечном виде, что затрудняет получение необходимых оценок.

Пусть $\varPhi(r)$ является весовой функцией и пусть η является весовой мерой. Для плюригармонических функций $u \in h(B)$ определим нормы

$$\|u\|_\varPhi = \sup\{|u(z)|\varPhi(z); z \in B\} = \sup\{M_\infty(u,r)\varPhi(r); r < 1\},$$

$$\|u\|_\eta = \int_S \int_0^1 |u(r\xi)|\, d\eta(r) d\sigma(\xi) = \int_0^1 M_1(u,r)\, d\eta(r).$$

Теперь определим следующие пространства плюригармонических функций:

$h_\infty(\varPhi) = \big\{u \in h(B); \|u\|_\varPhi < \infty\big\}$,

$h_0(\varPhi) = \big\{u \in h(B); \lim_{r\to 1} M_\infty(u,r)\varPhi(r) = 0\big\}$,

$h^1(\eta) = \big\{u \in h(B); \|u\|_\eta < \infty\big\}$.

Нами решена следующая проблема для плюригармонических функций: для данной весовой функции $\varPhi(r)$ мы находим конечную, положительную борелевскую меру η на $[0,1)$ такую, что $h_0(\Phi)^* \cong h^1(\eta)$ и $h^1(\eta)^* \cong h_\infty(\Phi)$. Введем меру $d\mu = \Phi\, d\eta$ и меру μ', определенную так, чтобы имело место

$$\int_0^1 f(r)\, d\mu'(r) = \int_0^1 f(r^2)\, d\mu(r), \qquad f \in C[0,1].$$

Теорема 3. *Пусть*

$$\begin{cases} t_m := \int_0^1 r^m\, d\mu'(r) = \int_0^1 r^{2m}\, d\mu(r), \qquad m = 0,1,2,\dots \\ k_w(z) := \sum_{|p|=0}^{\infty} t_{|p|}^{-1} c(n,|p|) \langle w,z\rangle^{|p|} + \sum_{|p|=1}^{\infty} t_{|p|}^{-1} c(n,|p|) \langle z,w\rangle^{|p|}, \end{cases} \tag{5}$$

где $\langle z,w\rangle = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k, \quad z,w \in \mathbb{C}^n,\ c(n,|p|) := \dfrac{(n-1+|p|)!}{(n-1)!|p|!}$ *и p является n-индексом:* $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n), \quad p! = \prod_{k=1}^n p_k!, \quad |p| = \sum_{k=1}^n p_k$.
Определим соотношение

$$\langle u,v\rangle_h := \int_S \int_0^1 u(r\xi) v(r\bar{\xi})\, \Phi(r)\, d\eta(r) d\sigma(\xi), \qquad u \in h_\infty(\Phi),\ v \in h^1(\eta). \tag{6}$$

Тогда k_w является плюригармонической функцией в $\{z;\, |z| < |w|^{-1}\}$ и представляет собой воспроизводящее ядро, связанное с билинейной формой (6), *т.е.*

$$u(w) = \langle u, k_w\rangle_h \qquad \text{для любой} \quad u \in h_\infty(\Phi),$$

$$v(w) = \langle k_w, v\rangle_h \qquad \text{для любой} \quad v \in h^1(\eta).$$

Заметим, что хорошо известны плюригармонические воспроизводящие ядра типа (5) в том специальном случае, когда они определяются посредством степенных весовых функций и ассоциируются с весовыми классами плюригармонических функций со степенными весами, см. работы Андерссона [9] для шара и А. Карапетяна [22] для более общих областей. Такие плюригармонические ядра приобретают конечный вид и явно записываются в виде

$$k_\alpha(z,w) = \frac{2\,\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+1)} \left[\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{\alpha+n+1}} + \frac{1}{(1-\langle w,z\rangle)^{\alpha+n+1}} - 1 \right],$$

$z,w \in B,\ \alpha > -1,$ что совпадает (с точностью до постоянного сомножителя) с плюригармоническими воспроизводящими ядрами из [9], [22].

Основным результатом Главы 3 является следующая теорема.

Теорема 4. *Допустим Φ является весовой функцией, η является весовой мерой и k_w есть соответствующее воспроизводящее ядро* (5). *Рассмотрим линейные интегральные операторы вида*

$$(Tf)(w) := \int_S \int_0^1 k_w(r\bar{\xi})\, f(r\xi)\, d\eta(r) d\sigma(\xi), \qquad f \in L^\infty(B),$$
$$(S\nu)(w) := \int_B k_w(\bar{z})\, \Phi(z)\, d\nu(z) \qquad \nu \in M(B),$$

где $M(B)$ — пространство всех конечных борелевских мер на B с нормой полной вариации. Тогда следующие условия эквивалентны друг другу:

(i) $\|k_w\|_\eta \leq \dfrac{C}{\Phi(w)}, \qquad w \in B.$

(ii) *T — ограниченный оператор из $L^\infty(B)$ в $h_\infty(\Phi)$.*

(iii) *S — ограниченный оператор из $M(B)$ в $h^1(\eta)$.*

(iv) $h^1(\eta)^* \cong h_\infty(\Phi)$.

(v) $h_0(\Phi)^* \cong h^1(\eta)$.

В последнем параграфе настоящей работы определен класс полуаналитических функций в полидиске как обобщение понятия аналитической функции.

С. Бергман [12] предложил следующую идею для случая $n = 2$: любой 2-гармонической функции поставить в соответствие комплекснозначную функцию $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$ такую, что

1) $f(z_1, z_2)$ голоморфна по z_1 для фиксированной z_2;

2) $v(0, z_2) \equiv 0$.

Полученный класс функций Бергман назвал "расширенным классом комплексных функций". Эти функции могут быть изучены с помощью методов теории потенциалов, так как задача Дирихле со значениями, заданными на остове T^2, всегда имеет решение в классе всех 2-гармонических функций. Однако этот класс не является расширением класса голоморфных функций, так как голоморфные функции не обязательно удовлетворяют условию 2) для мнимой части.

А.И. Петросян [3] ввел в бидиске модифицированную версию функций Бергмана (класс полуаналитических функций), который имеет следующее преимущество: в том особом случае, когда вещественная часть полуаналитической функции плюригармоничная, сама функция голоморфна. Таким образом, любая голоморфная функция также полуаналитическая. В настоящей работе понятие полуаналитичности определяется для функций произвольного числа переменных.

Определение 4. *Функция $f(z) = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, определенная в единичном полидиске U^n, называется полуаналитической, если*

a) Функция $\operatorname{Re} f(z)$ n-гармоническая;

b) Для фиксированных $z_{k+1}, \ldots, z_n$ функции $f(0, \ldots, 0, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n)$ являются голоморфными в диске $|z_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n$.

Обратим внимание на то, что в одномерном случае (т.е. $n = 1$) n-гармоничность есть просто гармоничность, а полуаналитичность совпадает с аналитичностью.

Для полуаналитических функций нами доказан аналог известной формулы Шварца для аналитических функций.

Теорема 5. *Пусть $f(z)$ — полуаналитическая в единичном полидиске U^n функция, и пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — произвольные числа из интервала $(0, 1)$. Тогда для любого z, $|z_k| < \rho_k$, $k = 1, \ldots, n$, имеет место следующая формула*

$$f(z) = iv(0, \ldots, 0) + \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} S_n \left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}, \ldots, \frac{z_n}{\rho_n} e^{-i\theta_n} \right) u\big(\rho_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \rho_n e^{i\theta_n}\big)\, d\theta,$$

где $d\theta = d\theta_1 \cdots d\theta_n$,

$$S_n(z_1, \ldots, z_n) := \prod_{j=1}^{n} P(z_j) + i \sum_{j=1}^{n} Q(z_j) \prod_{k=j+1}^{n} P(z_k) \tag{7}$$

n-мерный аналог ядра Шварца. Заметим, что для случая $n = 1$ функция $S_n(z_1, \ldots, z_n)$ совпадает с обычным ядром Шварца: $S_n = S$.

В качестве следствия получаем результат о мнимой части полуаналитической функции.

Теорема 6. *Мнимая часть произвольной полуаналитической функции $f = u + iv$ является n-гармонической функцией.*

Список литературы

[1] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.

[2] М.М. Джрбашян, О проблеме представления аналитических функций, *Сообщ. Инст. Матем. Мех. Акад. Наук Арм. ССР*, **2**, 3–40 (1948).

[3] А.И. Петросян, Об интегральном представлении функций в бицилиндре, *Известия НАН Армении, Математика*, **9**, No. 1, 3–13 (1974).

[4] А.И. Петросян, Ограниченные проекторы в пространствах функций, голоморфных в единичном шаре, *Известия НАН Армении, Математика*, **46**, No.5, 53–64 (2011).

[5] У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$, М., Мир, 1984.

[6] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, М., Наука, 1985.

[7] Ф.А. Шамоян, Диагональное отображение и проблема представления в анизотропных пространствах функций, голоморфных в полидиске, *Сибирск. Мат. ж.*, **31**, No. 2, 197–215 (1990).

[8] Ф.А. Шамоян, Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций, *Сибирск. Мат. ж.*, **40**, No. 6, 1422–1440 (1999).

[9] M. Andersson, Formulas for the L^2-minimal solutions of the $\partial\overline{\partial}$-equation in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Math. Scand.*, **56**, 43–69 (1985).

[10] K. Avetisyan, Continuous inclusions and Bergman type operators in n-harmonic mixed norm spaces on the polydisc, *J. Math. Anal. Appl.*, **291**, 727–740 (2004).

[11] S. Bergman, Über unendliche Hermitische Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, *Math. Z.*, **29**, 641–677 (1929).

[12] S. Bergman, *The Kernel Functions and Conformal Mapping*, AMS, 2nd Edition, 1970.

[13] A.E. Djrbashian and F.A. Shamoian, *Topics in the Theory of A^p_α Spaces*, Teubner–Texte zur Math., b. 105, Teubner, Leipzig, 1988.

[14] P. Duren and A. Schuster, *Bergman spaces*, AMS, Providence, Rhode Island, 2004.

[15] T.M. Flett, The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **38**, 746–765 (1972).

[16] S. Gadbois, Mixed-norm generalizations of Bergman spaces and duality, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**, No. 4, 1171–1180 (1988).

[17] M. Jevtić, Bounded projections and duality in mixed-norm spaces of analytic functions, *Complex Variables Theory Appl.*, **8**, 293–301 (1987).

[18] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, Some properties of fractional integrals (II), *Math. Z.*, **34**, 403–439 (1932).

[19] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions, *Quart. J. Math. (Oxford)*, **12**, 221–256 (1941).

[20] A.V. Harutyunyan, Bloch spaces of holomorphic functions in the polydisk, *J. Function Spaces Appl.*, **5**, No. 3, 213–230 (2007).

[21] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2000.

[22] A.H. Karapetyan, Bounded projections in weighted function spaces in a generalized unit disc, *Annales Polon. Math.*, **62**, No. 3, 193–218 (1995).

[23] G. Ren and J. Shi, Bergman type operators on mixed norm spaces with applications, *Chinese Ann. Math., Ser. B*, **18**, No. 3, 265–276 (1997).

[24] A.L. Shields and D.L. Williams, Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **162**, 287–302 (1971).

[25] A.L. Shields and D.L. Williams, Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions, *J. Reine Angew. Math.*, **299-300**, 256–279 (1978).

[26] A.L. Shields and D.L. Williams, Bounded projections and the growth of harmonic conjugates in the unit disc, *Michigan Math. J.*, **29**, 3–25 (1982).

[27] K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Graduate Texts in Mathematics **226**, Springer-Verlag, New York, 2005.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи

[28] A.I. Petrosyan, N.T. Gapoyan, On functions semi-analytical in the polydisc, *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, No. 2, 3–7 (2009).

[29] A.I. Petrosyan, N.T. Gapoyan, Bounded projectors on L^p spaces in the unit ball, *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, No. 1, 17–23 (2013).

[30] N.T. Gapoyan, Duality in spaces of functions pluriharmonic in the unit ball in $\mathbb{C}^n$, *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, No. 2, 15–21 (2016).

[31] К. Аветисян, Н. Гапоян, Операторы типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой в шаре из $\mathbb{C}^n$, *Известия НАН Армении, Математика*, **51**, No. 5, 3–12 (2016).

———————————————————————————

Тезисы конференций

[32] A.I. Petrosyan, N.T. Gapoyan, On functions semi-analytical in the sense of Bergman in the unit polydisk, Третье российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам, Цахкадзор, Армения, 4-8 Окт., 2010, Тезисы конференции, с. 123–126, 2010.

[33] N.T. Gapoyan, On bounded projections on L^p spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, Armenian Mathematical Union Annual Session Dedicated to 1400 anniversary of Anania Shirakatsy, Abstracts, p. 32, Yerevan, 2012.

[34] K.L. Avetisyan, N.T. Gapoyan, On normal weighted Bergman type operators on mixed norm spaces, Armenian Mathematical Union Annual Session 2016, Dedicated to the 110th anniversary of A. Shahinyan, Abstracts, p. 18, Yerevan, 2016.

Ամփոփագիր

Ատենախոսությունում հետազոտված են Բերգմանի տեսքի կշռային օպերատոր–ներ $\mathbb{C}^n$-ի B միավոր գնդում տրված անալիտիկ և պլյուրիհարմոնիկ ֆունկցիաների տարբեր տարածություններում: Ապացուցված է այդպիսի օպերատորների սահմա–նափակությունը համապատասխան տարածություններում, ինչը հնարավորություն է տվել գտնել դիտարկվող կշռային տարածությունների համալուծ տարածությունները:

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- Ապացուցված է, որ Բերգմանի տեսքի
$$Q_{\varphi,\psi}(f)(z) = \int_B \frac{\psi(z)\,\varphi(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}\, f(w)\, dV(w), \qquad z \in B,$$
օպերատորը սահմանափակ է $L^p(B)$-ում պայմանով, որ $\{\varphi,\psi\}$-ն նորմալ ֆունկցիաների զույգ է a և b $(0 < a < b)$ ինդեքսներով և զույգի α $(\alpha > b-1)$ ինդեքսով, իսկ $1 \leqslant p < \infty$ ցուցիչը բավարարում է $p(b-\alpha) < 1$ պայմանին: Ավելին, $Q_{\varphi,\psi}$ օպերատորը սահմանափակ պրոյեկտոր է $L^p(B)$ տարածությունից իր $\psi \cdot A^p(\psi)$ ենթատարածության վրա:

- Գտնված են β պարամետրի այնպիսի արժեքներ, $b-\alpha < \beta < 1+a$, որոնց համար Բերգմանի տեսքի $Q_{\varphi,\psi}$, $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$ օպերատորները սահմանափակ են խառը նորմով $L(p,q,\beta)$ տարածությունների վրա B գնդում: Այն է, եթե $1 \leq p,q \leq \infty$, $\{\varphi,\psi\}$-ն նորմալ ֆունկցիաների զույգ է a և b $(0 < a < b)$ ինդեքսներով և զույգի α $(\alpha > b-1)$ ինդեքսով, ինչպես նաև $b-\alpha < \beta < 1+a$, ապա $Q_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \longrightarrow L(p,q,\beta)$ և $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \longrightarrow L(p,q,\beta)$:

- Կառուցված է պլյուրիհարմոնիկ վերարտադրող k_w կորիզ տրված կշռային Φ ֆունկցիայի և η չափի համար,
$$\begin{cases} t_m := \displaystyle\int_0^1 r^{2m}\,\Phi(r)\,d\eta(r), \qquad m = 0,1,2,\dots \\ k_w(z) := \displaystyle\sum_{|p|=0}^{\infty} t_{|p|}^{-1} c(n,|p|)\langle w,z\rangle^{|p|} + \sum_{|p|=1}^{\infty} t_{|p|}^{-1} c(n,|p|)\langle z,w\rangle^{|p|}, \end{cases}$$
որտեղ $c(n,|p|) := \dfrac{(n-1+|p|)!}{(n-1)!|p|!}$: Ապացուցված է k_w կորիզով համապա–տասխան ինտեգրալ օպերատորների սահմանափակությունը: Սա բերել է պլյու–րիհարմոնիկ տարածությունների $h^1(\eta)^* \cong h_\infty(\Phi)$ և $h_0(\Phi)^* \cong h^1(\eta)$

երկակիության առնչությունների, ընդ որում այս առնչությունների համար սպաց-ված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ: Հատուկ դեպքում, երբ կշիռները տրված են ասփիճանային տեսքով, k_w կորիզը հանգում է լավ հայտնի պլյուրիհարմոնիկ վերարտադրող կորիզի:

- Ներմուծված է կիսաանալիտիկ ֆունկցիայի հասկացությունը պոլիդիսկում: Միավոր U^n պոլիդիսկում տրված $f(z) = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ֆունկցիան կոչվում է կիսաանալիտիկ, եթե

  ա) $\operatorname{Re} f(z)$ ֆունկցիան n-հարմոնիկ է;

  բ) Ֆիքսված $z_{k+1}, \ldots, z_n$ համար $f(0, \ldots, 0, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n)$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է $|z_k| < 1$ շրջանում, $k = 1, \ldots, n$:

  Նկատենք, որ պոլիդիսկում հոլոմորֆ ֆունկցիաները կիսաանալիտիկ են:

  Կիսաանալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիաների համար U^n պոլիդիսկում ապացուցված է Շվարցի հայտնի բանաձևի նմանակը Շվարցի n-չափանի կորիզի մասնակ-ցությամբ:

Summary

In this Thesis, some Bergman type weighted operators are studied in various spaces of analytic or pluriharmonic functions given in the unit ball B in $\mathbb{C}^n$. We prove boundedness of such operators in corresponding spaces, which makes possible to find the dual spaces for the weighted spaces considered.

The following principal results have been obtained in the Thesis:

- It is proved that Bergman type integral operator

$$Q_{\varphi,\psi}(f)(z) = \int_B \frac{\psi(z)\,\varphi(w)}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+\alpha}}\, f(w)\, dV(w), \qquad z \in B,$$

  is bounded in $L^p(B)$ provided that $\{\varphi, \psi\}$ is a normal pair of functions with indices a and b $(0 < a < b)$, and with the index of the pair α $(\alpha > b-1)$, and also the exponent $1 \leqslant p < \infty$ satisfies $p(b - \alpha) < 1$. Moreover, the operator $Q_{\varphi,\psi}$ is a bounded projection of the space $L^p(B)$ onto its subspace $\psi \cdot A^p(\psi)$.

- Some parameters β are found, $b-\alpha<\beta<1+a$, under which Bergman type operators $Q_{\varphi,\psi}$, $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$ are bounded on mixed norm spaces $L(p,q,\beta)$ over the ball B. Namely, if $1\le p,q\le\infty$, $\{\varphi,\psi\}$ is a normal pair of functions with indices a and b $(0<a<b)$, and with the index of the pair α $(\alpha>b-1)$, and also $b-\alpha<\beta<1+a$, then $Q_{\varphi,\psi}:L(p,q,\beta)\longrightarrow L(p,q,\beta)$ and $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}:L(p,q,\beta)\longrightarrow L(p,q,\beta)$.

- Pluriharmonic reproducing kernel k_w is constructed for given weight function Φ and measure η,

$$\begin{cases} t_m := \displaystyle\int_0^1 r^{2m}\,\Phi(r)\,d\eta(r), \qquad m=0,1,2,\dots \\ k_w(z) := \displaystyle\sum_{|p|=0}^{\infty} t_{|p|}^{-1} c(n,|p|)\langle w,z\rangle^{|p|} + \sum_{|p|=1}^{\infty} t_{|p|}^{-1} c(n,|p|)\langle z,w\rangle^{|p|}, \end{cases}$$

  where $c(n,|p|) := \dfrac{(n-1+|p|)!}{(n-1)!|p|!}$. Boundedness of corresponding integral operators with kernel k_w is proved. This implies the duality relations for pluriharmonic spaces $h^1(\eta)^*\cong h_\infty(\Phi)$ and $h_0(\Phi)^*\cong h^1(\eta)$, such that necessary and sufficient conditions for these relations are found. For a special case of power weights, the kernel k_w reduces to a well-known pluriharmonic reproducing kernel.

- Notion of semianalytic function is introduced in the polydisc.

  A function $f(z)=f(z_1,z_2,\dots,z_n)$ given in the unit polydisc U^n is said to be semianalytic if

  a) $\operatorname{Re} f(z)$ is n-harmonic;

  b) For fixed $z_{k+1},\dots,z_n$, the function $f(0,\dots,0,z_k,z_{k+1},\dots,z_n)$ is holomorphic in the disc $|z_k|<1$, $k=1,\dots,n$.

  Note that any holomorphic function is semianalytic. For semianalytic functions $f(z)$ in the polydisc, it is proved an analogue of well-known Schwarz formula with the use of n-dimensional analogue of Schwarz kernel.