Министерство образования и науки Республики Армения

Ереванский Государственный Университет

Нелли Татуловна Гапоян

Операторы типа Бергмана на пространствах функций в шаре из $\mathbb{C}^n$

Специальность А.01.01 — математический анализ

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук
К.Л. Аветисян

ЕРЕВАН — 2017

Оглавление

Введение

Диссертационная работа посвящена изучению операторов бергмановского типа в различных весовых пространствах аналитических или плюригармонических функций, заданных в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Доказана ограниченность таких операторов в соответствующих пространствах, что дало возможность найти сопряженные пространства некоторых рассматриваемых весовых пространств.

Функциональные пространства, которые рассмотрены в настоящей работе, в принципе возникли и развились из классической теории классов Харди H^p. Основоположники этой теории, Харди и Ф. Рисс в 1910-20-х годах заметили, что если $f(z)$ — аналитическая функция в единичном круге $\mathbb{D}$, то ее интегральное среднее порядка $p > 0$ по окружности $|z| = r$

$$M_p(f;r) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \qquad 0 \le r < 1, \tag{0.1}$$

обладает теми же свойствами, что максимум модуля

$$M_\infty(f;r) := \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad 0 \le r < 1,$$

они возрастающие функции по r. Ф. Рисс предложил ввести класс H^p аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций, для которых величина (0.1) ограничена. Относительно нормы

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<r<1} M_p(f;r) \tag{0.2}$$

классы H^p становятся банаховыми пространствами при $1 \le p \le \infty$, а при $0 < p < 1$ классы H^p являются полными линейными метрическими пространствами относительно инвариантной метрики $\|f - g\|_{H^p}^p$.

Основополагающие работы Харди, Литтлвуда, Ф. Рисса, М. Рисса, Сегё, Смирнова, Привалова, Бергмана, Неванлинны и их последователей выявили ту важную роль, какую играют классы Харди и их обобщения в различных вопросах гармонического анализа, граничных свойств функций, теории степенных рядов и рядов Фурье, линейных операторов, экстремальных и аппроксимационных задач.

В 1920-30-х годах в работах Бергмана [19], Харди, Литтлвуда [28], [29], Зигмунда [6] и других возникли аналоги и обобщения классов Харди, в которых равномерная норма в (0.2) заменяется интегральной нормой, обычно с некоторым весом. Возникают пространства Бергмана и пространства со смешанной нормой. В Армении исследование и развитие теории пространств Бергмана и других смежных функциональных классов началось с работ М.М. Джрбашяна (см. [4], [5]), который, в частности, вывел интегральное представление для весовых пространств Бергмана.

В настоящее время теория пространств Харди понимается в широком смысле и объединяет ряд далеких друг от друга областей классического и современного анализа.

Скажем, что аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ принадлежит пространству $H(p,q,\alpha)$ $(0<p,q\leq\infty,\ \alpha>0)$ со смешанной нормой, если для $f(z)$ конечна (квази)норма

$$\|f\|_{p,q,\alpha} := \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(f;r)dr\right)^{1/q}, \qquad q<\infty,$$
$$\|f\|_{p,\infty,\alpha} := \sup_{0<r<1} (1-r)^{\alpha} M_p(f;r), \qquad q=\infty.$$

Если $(1-r)^{\alpha}M_p(f;r)=o(1)$ при $r\to 1^-$, то говорят, что аналитическая функция $f(z)$ принадлежит малому пространству $H_0(p,\infty,\alpha)$.

В частном случае $p=q$ классы $H(p,p,\alpha)=A^p_{\alpha p-1}$ сводятся к весовым пространствам Бергмана, а при $q=\infty$ получающиеся классы $H(p,\infty,\alpha)$ называют весовыми пространствами Харди. Участвующие здесь стандартные степенные весовые функции вида $(1-r)^{\beta}$ можно заменить на более общие, так называемые нормальные весовые функции. Такое обобщение было предложено Шилдсом и Вильямсом [39], [40], в частности для решения проблем двойственности.

Тематика подобных весовых пространств аналитических или иных функций широко представлена в нескольких монографиях, которые послужили базой для нашего исследования. Смотри монографии таких авторов как Бергман [20], Дюрен [23], Рудин [9], Гарнетт [2], А.Э. Джрбашян, Ф.А. Шамоян [22], Хеденмальм, Коренблюм, Жу [32], Дюрен, Шустер [24], Жу [43], а также обзоры Александрова [1] и Шведенко [15].

Нас интересуют главным образом многомерные аналоги описанных выше классов, заданные в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Пусть $B = B_n$ — открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$, и $S := \partial B$ — его граница, единичная сфера. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ обозначим через $\langle z, w\rangle := z_1\overline{w}_1 + \dots + z_n\overline{w}_n, \quad z, w \in \mathbb{C}^n$. Будем полагать $z = r\zeta,\ w = \rho\eta \in B,\ 0 \le r, \rho < 1,\ \zeta, \eta \in S,\ r = |z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$.

Символы $C(\alpha, \beta, \dots), c_\alpha, M_0, M_1$ и т.п. будут обозначать положительные постоянные, различные в разных местах и зависящие только от указанных индексов $\alpha, \beta, \dots$. Через dV обозначим лебегову меру на B, нормированную так, что $V(B) = 1$. В полярных координатах будем иметь $dV(z) = 2n\, r^{2n-1} dr d\sigma(\zeta)$. Через $H(B)$ обозначим множество всех голоморфных функций в шаре B.

Вместо стандартных степенных весовых функций Шилдс и Вильямс [39] впервые предложили использовать более общие нормальные весовые функции. Фактически, это те весовые функции, которые имеют степенные миноранты и мажоранты с положительными показателями.

Определение 0.1. *(Нормальная весовая функция, [39], [41])*

Положительная непрерывная функция $\varphi(r),\ 0 \le r < 1$, *называется нормальной, если найдутся постоянные* $0 < a < b$ *и* $0 \le r_0 < 1$ *такие, что имеют место*

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} \searrow 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\varphi(r)}{(1-r)^b} \nearrow +\infty \qquad \text{при} \quad r \to 1^-, \quad r_0 \le r < 1. \tag{0.3}$$

Здесь и далее монотонность функций всегда будем подразумевать в широком, нестрогом смысле. Кроме того, в отдельных случаях монотонность в (0.3) заменяется на более общее понятие "почти монотонности". Индексы a и b для нормальной функции φ определяются неоднозначно.

Типичными и простыми примерами нормальных функций являются функции вида

$$\varphi_{c,d}(r) := (1-r)^c \left(\log \frac{e}{1-r}\right)^d, \qquad c > 0,\ d \in \mathbb{R},$$

причем при $c = 0$ функция $\varphi_{0,d}(r) = \left(\log \frac{e}{1-r}\right)^d$ уже не будет нормальной.

Нормальные весовые функции также близко соотносятся, а в некотором смысле эквивалентны правильно меняющимся функциям и функциям класса RO, см. [10].

Функции класса RO в качестве весовых функций для различных классов аналитических функций широко применялись в серии работ Ф.А. Шамояна, см., например, [13], [14], а также [30], [31].

Определение 0.2. *(Нормальная пара, [39])*

Скажем, что пара функций $\{\varphi, \psi\}$ *составляет нормальную пару, если функция* φ *нормальна, и существует число* $\alpha > b-1$ *(индекс пары) такое, что*

$$\varphi(r)\,\psi(r) = (1-r^2)^\alpha, \qquad 0 \le r < 1. \tag{0.4}$$

Ввиду условия $\alpha > b-1$ функция ψ будет интегрируемой на интервале $(0,1)$. Как показано в [39], для нормальной функции φ всегда найдется ее нормальная пара, а при более строгом условии $\alpha > b$ функция ψ сама также будет нормальной с индексами $\alpha - b$ и $\alpha - a$. Расширим область определения таких радиальных весовых функций до шара B, положив $\varphi(z) := \varphi(|z|) = \varphi(r),\ \psi(z) := \psi(|z|) = \psi(r)$.

В **Главе 1** найдено условие на индексы нормальной весовой функции и нормальной пары, при котором весовой оператор типа Бергмана является ограниченным проектором в невесовом лебеговом пространстве $L^p(B)$.

Для $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$ определим весовые пространства Бергмана голоморфных функций:

$$A^p(\psi) = \left\{ f \in H(B)\colon\ \|f\|_{p,\psi} = \left(\int_B |f(z)\psi(z)|^p \, dV(z) \right)^{1/p} < \infty \right\},$$
$$A^p_\alpha = \left\{ f \in H(B)\colon\ \|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_B |f(z)|^p \, (1-|z|^2)^\alpha dV(z) \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Таким образом, A^p_α является частным случаем $A^p(\psi)$, когда ψ — степенная функция вида $\psi(z) = (1-|z|^2)^{\alpha/p}$. В предельном случае $p = \infty$ определяем классы $A^\infty(\psi)$ и соответствующие малые классы $A^\infty_0(\psi)$,

$$A^\infty(\psi) = \left\{ f \in H(B)\colon\ \|f\|_{\infty,\psi} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)\,\psi(z)| < \infty \right\},$$
$$A^\infty_0(\psi) = \left\{ f \in H(B)\colon\ \lim_{|z|\to 1} f(z)\,\psi(z) = 0 \right\}.$$

Шилдс и Вильямс [39] посредством нормальных весовых функций в единичном круге $\mathbb{D} = B_1$ предложили обобщения операторов Бергмана, которые для шара B

определены в работах А.И. Петросяна [8], [45] в виде

$$Q_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\,\varphi(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}\, f(w)\,dV(w), \qquad z \in B, \tag{0.5}$$

$$\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\,\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\, f(w)\,dV(w), \qquad z \in B. \tag{0.6}$$

Именно такие операторы изучаются в настоящей работе. В частном случае $\varphi(r) = (1-r^2)^\alpha$, $\psi \equiv 1$ операторы (0.5), (0.6) сводятся к классическим проекторам Бергмана, см. [9], [22], [27], [32], [37], [38], [43].

В случае $\varphi(r) = (1-r^2)^c$, $\psi(r) = (1-r^2)^d$, $c+d = \alpha$ операторы типа Бергмана (0.5), (0.6) также хорошо известны, см. [18], [27], [37], [38], [43].

В монографии Жу [43, Theorem 2.10] доказана теорема об ограниченности операторов типа (0.5), (0.6), но с обычными степенными весами.

Теорема B. *Для двух вещественных чисел $a > -1$ и $b > 0$ определим два интегральных оператора:*

$$(Qf)(z) = \big(1-|z|^2\big)^a \int_B \frac{(1-|w|^2)^b}{\big(1-\langle z,w\rangle\big)^{n+1+a+b}}\, f(w)\,dV(w)$$

и

$$(\widetilde{Q}f)(z) = \big(1-|z|^2\big)^a \int_B \frac{(1-|w|^2)^b}{\big|1-\langle z,w\rangle\big|^{n+1+a+b}}\, f(w)\,dV(w).$$

Для $1 \leqslant p < \infty$ следующие условия эквивалентны:

(a) Q ограничен по норме в $L^p(B)$;

(b) $\widetilde{Q}$ ограничен по норме в $L^p(B)$;

(c) $-pa < 1$.

Как видим, найдено необходимое и достаточное условие для ограниченности операторов.

Основным результатом Главы 1 является следующая теорема, в которой рассмотрены более общие весовые функции (а именно нормальные), однако для ограниченности операторов найдено лишь достаточное условие.

Теорема 0.1. *Пусть $\{\varphi, \psi\}$ — нормальная пара функций с индексами a и b $(0 < a < b)$ и с индексом пары α $(\alpha > b-1)$ в смысле Определений 0.1–0.2.*

При всех $1 \leqslant p < \infty$, удовлетворяющих условию

$$p(b-\alpha) < 1, \tag{0.7}$$

интегральные операторы $Q_{\varphi,\psi}$ и $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$, см. (0.5), (0.6), *являются ограниченными операторами в $L^p(B)$.*

Более того, оператор $Q_{\varphi,\psi}$ является ограниченным проектором из пространства $L^p(B)$ на его подпространство $\psi \cdot A^p(\psi)$.

В **Главе 2** мы рассматриваем более общие пространства $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой и доказываем, что весовые операторы типа Бергмана ограничены на $L(p,q,\beta)$ при подходящем выборе индексов.

Для функции $f(z) = f(r\zeta)$, заданной в шаре B, ее интегральные средние порядка p на сфере $|z| = r$ обозначены как обычно, через

$$M_p(f;r) = \big\|f(r\cdot)\big\|_{L^p(S;d\sigma)}, \qquad 0 \le r < 1,\ 0 < p \le \infty,$$

где $d\sigma$ — $(2n-1)$-мерная поверхностная мера Лебега на сфере S, нормированная так, что $\sigma(S) = 1$. Класс функций $f \in H(B)$ с "нормой" $\|f\|_{H^p} = \sup\limits_{0<r<1} M_p(f;r)$ есть обычное пространство Харди $H^p(B)$ в единичном шаре B.

Определение 0.3. *Определим пространство $L(p,q,\beta)\big(0 < p,q \le \infty,\ \beta \in \mathbb{R}\big)$ со смешанной нормой как пространство тех измеримых функций $f(z) = f(r\zeta)$ в шаре B, для которых конечна квазинорма*

$$\|f\|_{L(p,q,\beta)} = \|f\|_{p,q,\beta} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 (1-r)^{\beta q-1} M_p^q(f;r)\,dr\right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{0<r<1} (1-r)^\beta M_p(f;r), & q = \infty. \end{cases}$$

Подпространства $L(p,q,\beta)$, состоящие из голоморфных функций, обозначим через

$$H(p,q,\beta) := H(B) \cap L(p,q,\beta), \qquad \beta > 0.$$

Если $1 \le p,q \le \infty$, то $L(p,q,\beta), H(p,q,\beta)$ являются банаховыми пространствами с нормой $\|\cdot\|_{p,q,\beta}$. При $p = q < \infty$ пространства $H(p,p,\beta) = A^p_{\beta p-1}$ совпадают с весовыми классами Бергмана, а при $q = \infty$ их часто называют весовыми пространствами Харди.

Пространства со смешанной нормой для голоморфных в единичном круге функций были введены Харди и Литтлвудом в [28], [29] и развиты в дальнейшем Флеттом [25]. Смотри также монографии [9], [22], [24], [32], [43], где можно найти подробное описание весовых пространств Бергмана $H(p,p,\beta) = A^p_{\beta p-1}$ в единичном круге или шаре.

Много работ посвящено пространствам $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой или их подпространствам, состоящим из голоморфных, плюригармонических или гармонических функций в круге, шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$. Пространства $L(p,q,\beta)$ для голоморфных функций в единичном шаре $B \subset \mathbb{C}^n$ и бергмановские операторы на них подробно исследованы, например, в работах [9], [43], [27], [37], [38], для плюригармонических функций смотри [42], [33], а для голоморфных и n-гармонических функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$ смотри, например, в [18].

В **Главе 2** мы доказываем, что существуют значения параметра β, при которых общие бергмановские операторы (0.5), (0.6) ограничены на пространствах $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой в шаре B.

Основным результатом Главы 2 является следующая теорема.

Теорема 0.2. *Пусть $1 \le p, q \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\{\varphi, \psi\}$ — нормальная пара функций с индексами a и b $(0 < a < b)$ и с индексом пары α $(\alpha > b-1)$ в смысле Определений 0.1–0.2.*

Если $b - \alpha < \beta < 1 + a$, то операторы $Q_{\varphi,\psi}$ и $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$ ограниченно действуют из пространства $L(p,q,\beta)$ в себя, т.е.

$$Q_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \longrightarrow L(p,q,\beta), \tag{0.8}$$

$$\widetilde{Q}_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \longrightarrow L(p,q,\beta). \tag{0.9}$$

Если в Теореме 0.1 для частного случая $1 \le p = q = 1/\beta < \infty$, т.е. для невесового класса $L(p,p,1/p) = L^p(B)$, результат установлен в [8], [45] методом так называемого теста Шура ([9], [22], [32], [43]), то в Теореме 0.2 метод теста Шура не подходит. Поэтому мы применяем новый метод — вначале обобщаем известные неравенства Харди с использованием нормальных функций, а затем применяем их для получения необходимых интегральных оценок. Более частные случаи операторов Бергмана со степенными весами изучены в [9], [27], [32], [37], [38], [43].

Фактически, в Теореме 0.2 мы обобщаем Теорему 0.1 и результат из [8] в трех направлениях: во-первых, предполагаем все значения $1 \le p \le \infty$, во-вторых, рассматриваем весовые пространства, в-третьих, вместо пространств Бергмана рассматриваем более общие пространства $L(p, q, \beta)$ со смешанной нормой. При этом вместо неподходящего теста Шура мы применяем обобщения неравенства Харди.

В **Главе 3** мы переходим к нахождению и изучению сопряженных пространств некоторых весовых пространств плюригармонических функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Для аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$ или в единичном шаре B из $\mathbb{C}^n$ хорошо известны соотношения двойственности по шкале весовых пространств Бергмана A^p_α.

Класс Блоха $\mathcal{B}$ аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций $f(z)$ определяется как

$$\mathcal{B} = \left\{ f(z) \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)| < +\infty \right\}.$$

Класс Блоха становится банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|_{\mathcal{B}^\infty} := |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)|.$$

Определим малый класс Блоха $\mathcal{B}_0$ как

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ f(z) \in H(\mathbb{D}) : \lim_{|z|\to 1} (1 - |z|^2)|f'(z)| = 0 \right\}.$$

Класс Блоха $\mathcal{B}$ в некотором смысле является предельным для весовых пространств Бергмана A^p_α при $p \to \infty$, а также является сопряженным пространством для A^1_α. С другой стороны, малый класс Блоха $\mathcal{B}_0$ является предсопряженным пространством для A^1_α, см. [21], [16],

$$\big(\mathcal{B}_0\big)^* \cong A^1_\alpha, \qquad \big(A^1_\alpha\big)^* \cong \mathcal{B}. \tag{0.10}$$

Более того, можно обобщить соотношения (0.10) с участием нормальной пары весовых функций, см. [39], [40],

$$\big(A^\infty_0(\varphi)\big)^* \cong A^1(\psi), \qquad \big(A^1(\psi)\big)^* \cong A^\infty(\varphi). \tag{0.11}$$

Аналогичные соотношения справедливы для соответствующих пространств гармонических функций, см. [40], [36].

В Главе 3 мы обобщаем соотношения (0.11) и распространяем на плюригармонические функции в шаре B из $\mathbb{C}^n$. С этой целью мы вводим новое плюригармоническое воспроизводящее ядро k_w, которое не записывается в явном конечном виде, что затрудняет получение необходимых оценок. Используются прежние обозначения, а также $h(B)$ — векторное пространство комплекснозначных, плюригармонических в B функций с обычным скалярным произведением и поточечным сложением.

Пусть $\Phi(r)$ является весовой функцией и пусть η является весовой мерой. Для функций $u \in h(B)$ определим нормы

$$\|u\|_{\Phi} = \sup\{|u(z)|\Phi(z); z \in B\} = \sup\{M_\infty(u,r)\Phi(r); r < 1\},$$

$$\|u\|_{\eta} = \int_S \int_0^1 |u(r\xi)|\, d\eta(r) d\sigma(\xi) = \int_0^1 M_1(u,r)\, d\eta(r),$$

где $M_\infty(u,r) = \sup\{|u(z)|;\ |z| = r\},\ M_1(u,r) = \displaystyle\int_S |u(r\xi)|\, d\sigma(\xi)$.

Теперь определим следующие пространства плюригармонических функций:

$h_\infty(\Phi) = \big\{u \in h(B); \|u\|_\Phi < \infty\big\}$,

$h_0(\Phi) = \big\{u \in h(B); \lim_{r\to 1} M_\infty(u,r)\Phi(r) = 0\big\}$,

$h^1(\eta) = \big\{u \in h(B); \|u\|_\eta < \infty\big\}$.

Все эти пространства представляют собой нормированные, линейные пространства. Очевидно, $h_0(\Phi) \subset h_\infty(\Phi)$, следовательно, мы можем использовать норму $\|u\|_\Phi$ на $h_0(\Phi)$.

Нами решена следующая проблема для плюригармонических функций: для данной весовой функции $\Phi(r)$ мы находим конечную, положительную борелевскую меру η на $[0,1)$ такую, что $h_0(\Phi)^* \cong h^1(\eta)$ и $h^1(\eta)^* \cong h_\infty(\Phi)$. Введем меру $d\mu = \Phi\, d\eta$ и меру μ', определенную так, чтобы имело место

$$\int_0^1 f(r)\, d\mu'(r) = \int_0^1 f(r^2)\, d\mu(r), \qquad f \in C[0,1].$$

Теорема 0.3. *Пусть*

$$\begin{cases} t_m := \displaystyle\int_0^1 r^m\, d\mu'(r) = \int_0^1 r^{2m}\, d\mu(r), \qquad m = 0,1,2,\dots \\ k_w(z) := \displaystyle\sum_{|p|=0}^{\infty} t_{|p|}^{-1} c(n,|p|)\langle w,z\rangle^{|p|} + \sum_{|p|=1}^{\infty} t_{|p|}^{-1} c(n,|p|)\langle z,w\rangle^{|p|}, \end{cases} \tag{0.12}$$

где $\langle z,w\rangle=\sum_{k=1}^n z_k\bar w_k,\quad z,w\in\mathbb{C}^n,$

$$c(n,|p|):=\frac{(n-1+|p|)!}{(n-1)!|p|!}$$

и p *является* n*-индексом:* $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n),\quad p!=\prod_{k=1}^n p_k!,\quad |p|=\sum_{k=1}^n p_k.$

Определим соотношение

$$\langle u,v\rangle_h:=\int_S\int_0^1 u(r\xi)v(r\bar\xi)\,\varPhi(r)\,d\eta(r)d\sigma(\xi),\qquad u\in h_\infty(\varPhi),\ v\in h^1(\eta).\tag{0.13}$$

Тогда k_w *является плюригармонической функцией в* $\{z;\,|z|<|w|^{-1}\}$ *и представляет собой воспроизводящее ядро, связанное с билинейной формой* (0.13), *т.е.*

$$u(w)=\langle u,k_w\rangle_h\qquad \text{для любой}\quad u\in h_\infty(\varPhi),$$

$$v(w)=\langle k_w,v\rangle_h\qquad \text{для любой}\quad v\in h^1(\eta).$$

Заметим, что хорошо известны плюригармонические воспроизводящие ядра типа (0.12) в том специальном случае, когда они определяются посредством степенных весовых функций и ассоциируются с весовыми классами плюригармонических функций со степенными весами, см. работы Андерссона [17] для шара и А. Карапетяна [33] для более общих областей. Такие плюригармонические ядра приобретают конечный вид и явно записываются в виде

$$k_\alpha(z,w)=\frac{2\,\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{\alpha+n+1}}+\frac{1}{(1-\langle w,z\rangle)^{\alpha+n+1}}-1\right],\quad z,w\in B,$$

$\alpha>-1,$ что совпадает (с точностью до постоянного сомножителя) с плюригармоническими воспроизводящими ядрами из [17], [33].

Основным результатом Главы 3 является следующая теорема.

Теорема 0.4. *Допустим* $\varPhi$ *является весовой функцией,* η *является весовой мерой и* k_w *есть соответствующее воспроизводящее ядро* (0.12). *Рассмотрим линейные интегральные операторы вида*

$$(Tf)(w):=\int_S\int_0^1 k_w(r\bar\xi)\,f(r\xi)\,d\eta(r)d\sigma(\xi),\qquad f\in L^\infty(B),$$
$$(S\nu)(w):=\int_B k_w(\bar z)\,\varPhi(z)\,d\nu(z)\qquad \nu\in M(B),$$

где $M(B)$ *— пространство всех конечных борелевских мер на* B *с нормой полной вариации. Тогда следующие условия эквивалентны друг другу:*

(i) $\|k_w\|_\eta \leq \dfrac{C}{\Phi(w)}, \qquad w \in B.$

(ii) *T — ограниченный оператор из $L^\infty(B)$ в $h_\infty(\Phi)$.*

(iii) *S — ограниченный оператор из $M(B)$ в $h^1(\eta)$.*

(iv) $h^1(\eta)^* \cong h_\infty(\Phi)$.

(v) $h_0(\Phi)^* \cong h^1(\eta)$.

В последнем параграфе настоящей работы определен класс полуаналитических функций в полидиске как обобщение понятия аналитической функции. С. Бергман [20] предложил следующую идею для случая $n = 2$: любой 2-гармонической функции поставить в соответствие комплекснозначную функцию $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$ такую, что

1) $f(z_1, z_2)$ голоморфна по z_1 для фиксированной z_2;

2) $v(0, z_2) \equiv 0$.

Полученный класс функций Бергман назвал "расширенным классом комплексных функций". Эти функции могут быть изучены с помощью методов теории потенциалов, так как задача Дирихле со значениями, заданными на остове T^2, всегда имеет решение в классе всех 2-гармонических функций. Однако этот класс не является расширением класса голоморфных функций, так как голоморфные функции не обязательно удовлетворяют условию 2) для мнимой части.

А.И. Петросян [7], [34] ввел в бидиске модифицированную версию функций Бергмана (класс полуаналитических функций), который имеет следующее преимущество: в том особом случае, когда вещественная часть полуаналитической функции плюригармоничная, сама функция голоморфна. Таким образом, любая голоморфная функция также полуаналитическая. В настоящей работе понятие полуаналитичности определяется для функций произвольного числа переменных.

Определение 0.4. *Функция $f(z) = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, определенная в единичном полидиске U^n, называется полуаналитической, если* *a) Функция* $\operatorname{Re} f(z)$ *n-гармоническая;*

b) Для фиксированных $z_{k+1}, \dots, z_n$ *функции* $f(0, \dots, 0, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$ *являются голоморфными в диске* $|z_k| < 1$, $k = 1, \dots, n$.

Обратим внимание на то, что в одномерном случае (т.е. $n = 1$) n-гармоничность есть просто гармоничность, а полуаналитичность совпадает с аналитичностью.

Для полуаналитических функций нами доказан аналог известной формулы Шварца для аналитических функций.

Теорема 0.5. *Пусть $f(z)$ полуаналитическая в единичном полидиске U^n функция, и пусть $\rho_1, \dots, \rho_n$ – произвольные числа из интервала $(0, 1)$. Тогда для любого*

$$z \in \{z = (z_1, \dots, z_n) \colon\ |z_k| < \rho_k,\ k = 1, \dots, n\}$$

имеет место следующая формула

$$f(z_1, \dots, z_n) = iv(0, \dots, 0) + \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} S_n\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}, \dots, \frac{z_n}{\rho_n} e^{-i\theta_n}\right) u\big(\rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_n e^{i\theta_n}\big)\, d\theta_1 \cdots d\theta_n,$$

где

$$S_n(z_1, \dots, z_n) = \prod_{j=1}^{n} P(z_j) + i \sum_{j=1}^{n} Q(z_j) \prod_{k=j+1}^{n} P(z_k) \tag{0.14}$$

n-мерный аналог ядра Шварца. Заметим, что для случая $n = 1$ функция $S_n(z_1, \dots, z_n)$ совпадает с обычным ядром Шварца: $S_n = S$.

В качестве следствия получаем результат о мнимой части полуаналитической функции.

Теорема 0.6. *Мнимая часть произвольной полуаналитической функции $f = u + iv$ является n-гармонической функцией.*

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в работах [44]–[48].

Глава 1

Ограниченные проекторы на пространствах $L^p(B)$ в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$

1.1 Определения и обозначения

Символы $C(\alpha, \beta, \dots), c_\alpha, M_1, M_2$ и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных местах и зависящие только от указанных индексов $\alpha, \beta, \dots$.

Символ $A \approx B$ означает, что существуют положительные постоянные C_1 и C_2 (несущественные по своим значениям и независимые от участвующих функций и переменных) такие, что $C_1|A| \le |B| \le C_2|A|$.

Для функций $f(z)$ и $g(z)$ символ $f(z) \sim g(z)$ при $z \to z_0$ означает, что $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 1$. Всюду ниже будем пользоваться следующими обозначениями для $\mathbb{C}^n$:

$\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w}_k$ — скалярное произведение для точек $z, w \in \mathbb{C}^n$;

$|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$ — соответствующая норма;

$B = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| < 1\}$ — открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$;

$S = \partial B = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| = 1\}$ — его граница, т.е. единичная сфера в $\mathbb{C}^n$;

$H(B)$ — множество всех функций, голоморфных в B;

$d\sigma(\zeta)$ — поверхностная мера Лебега на сфере S, нормированная так, что $\sigma(S) = 1$;

$d\nu$ — ненормированная объемная мера Лебега в $\mathbb{C}^n$;

$dV(z)$ — мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, нормированная так, что $V(B) = 1$, и поэтому

$$d\nu(z) = \nu(B)\, dV(z) = |B|\, dV(z),$$

а в полярных координатах будем иметь

$$dV(z) = 2n\, r^{2n-1} dr\, d\sigma(\zeta), \qquad z = r\zeta, \quad 0 \le r < 1, \quad \zeta \in S;$$

$dV_\alpha(z) := \gamma_\alpha (1 - |z|^2)^\alpha\, d\nu(z)$ — весовая мера Лебега, $V_\alpha(B) = 1$, $\alpha > -1$, где $\gamma_\alpha := \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+1)}$ — нормирующий множитель.

Определение 1.1. *Пространство Лебега $L^p(B)$ определяется как множество всех измеримых функций f в B, для которых*

$$\|f\|_{L^p(B)} = \|f\|_p := \left(\int_B |f(z)|^p\, dV(z) \right)^{1/p} < +\infty, \qquad 0 < p < \infty.$$

Подпространство $L^p(B)$, состоящее из аналитических функций, обозначим через

$$A^p(B) := H(B) \cap L^p(B).$$

Обычно $A^p(B)$ называют (невесовыми) классами Бергмана в шаре B.

Далее будем работать с весовыми классами Бергмана, причем весовыми функциями будут главным образом так называемые нормальные функции. Понятие нормальной функции и нормальной пары весовых функций впервые было введено в работе Шилдса и Вильямса [39], оно оказалось удобным для формулировки утверждений, связанных с оценками интегралов и для описания проекторов, заданных в весовых пространствах.

Определение 1.2. *Положительная и непрерывная на $[0, 1)$ функция φ называется нормальной, если существуют константы $0 < \varepsilon < k$ и $0 \le r_0 < 1$, такие, что*

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi(r)}{(1-r)^\varepsilon} \quad \text{убывает при} \quad r_0 \le r < 1 \quad \text{и} \quad \lim_{r\to 1^-} \frac{\varphi(r)}{(1-r)^\varepsilon} = 0, \\ &\frac{\varphi(r)}{(1-r)^k} \quad \text{возрастает при} \quad r_0 \le r < 1 \quad \text{и} \quad \lim_{r\to 1^-} \frac{\varphi(r)}{(1-r)^k} = \infty. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Иногда монотонность в (1.1) будем понимать в смысле более общего понятия "почти монотонности".

Заметим, что индексы k и ε определяются функцией φ неоднозначно.

Определение 1.3. *Скажем, что пара функций $\{\varphi, \psi\}$ составляет нормальную пару, если φ нормальна и для некоторого k, удовлетворяющего (1.1), существует такое число $\alpha > k-1$, что* $\varphi(r)\psi(r) = (1-r^2)^\alpha$, $0 \le r < 1$.

Отметим, что условие $\alpha > k-1$ обеспечивает интегрируемость ψ на $[0,1)$. Если же $\alpha > k$, то функция ψ также нормальна с соответствующими степенями $\alpha - k$ и $\alpha - \varepsilon$, причем вместо убывания функции $\dfrac{\varphi(r)}{(1-r)^{\alpha-k}}$ будем понимать ее "почти убывание".

1.2 Весовые пространства $A^p_\alpha, A^p(\psi)$

Всюду ниже предполагается, что $\{\varphi, \psi\}$ — нормальная пара весовых функций. Продолжим эти функции в B, положив $\varphi(z) = \varphi(|z|)$, $\psi(z) = \psi(|z|)$ и для $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$ определим весовые пространства Бергмана голоморфных функций:

$$A^p(\psi) = \left\{ f \in H(B) \colon \ \|f\|_{p,\psi} = \left(\int_B |f(z)\psi(z)|^p \, dV(z) \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

$$A^p_\alpha = \left\{ f \in H(B) \colon \ \|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_B |f(z)|^p \, (1-|z|^2)^\alpha dV(z) \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Таким образом, A^p_α является частным случаем $A^p(\psi)$, когда ψ — степенная функция вида $\psi(z) = (1-|z|^2)^{\alpha/p}$.

Предложение 1.1. *Пространства $A^p(\psi)$ являются банаховыми.*

Доказывается тем же методом, что в [8], где рассмотрен случай $p = 1$.

Рассмотрим отображения $T_p : A^p(\psi) \mapsto L^p(B)$, $1 \leqslant p < \infty$, определяемые равенствами $T_p(g) = \psi g$. Очевидно, они являются изометриями. Области их значений являются замкнутыми подпространствами $L^p(B)$, и для них мы используем обозначение: $TA^p = T_p\big(A^p(\psi)\big)$.

Рассмотрим следующий интегральный оператор

$$(Qf)(z) = \gamma_\alpha \int_B \frac{\psi(z)\varphi(w)}{(1-\langle z, w\rangle)^{n+1+\alpha}} \, f(w) \, dV(w), \tag{1.2}$$

где

$$\gamma_\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}.$$

В работе [39] доказана ограниченность этого оператора в пространстве $L^1(B)$ в одномерном случае ($n=1$). В [8] этот результат распространен на случай произвольного n, а именно доказана следующая теорема.

Теорема A. *Оператор (1.2) ограничен в $L^1(B)$, более того, он является ограниченным проектором на подпространство TA^1.*

Возникает естественная задача: выяснить, при каких p оператор Q является ограниченным проектором в $L^p(B)$. Выяснению этого вопроса и посвящена настоящая глава. Ее основным результатом является Теорема 1.2, см. ниже. Отметим, что в ней условие $p(k-\alpha)<1$ ограниченности оператора Q является достаточным, но не необходимым. Это и понятно, ведь число k в определении (1.1) нормальной функции неоднозначно.

В случае, когда весовые функции являются степенными, указанное условие является также и необходимым. Пусть $\varphi(r)=(1-r)^b$, $\psi(r)=(1-r)^a$, $a+b=\alpha$. Процитируем интересующий нас случай из [43, Theorem 2.10] в следующем виде:

Теорема B. *Для двух вещественных чисел $a>-1$ и $b>0$ определим два интегральных оператора:*

$$(Qf)(z) = \left(1-|z|^2\right)^a \int_B \frac{(1-|w|^2)^b}{\left(1-\langle z,w\rangle\right)^{n+1+a+b}}\, f(w)\, dV(w)$$

и

$$(\widetilde{Q}f)(z) = \left(1-|z|^2\right)^a \int_B \frac{(1-|w|^2)^b}{\left|1-\langle z,w\rangle\right|^{n+1+a+b}}\, f(w)\, dV(w).$$

Для $1\leqslant p<\infty$ следующие условия эквивалентны:

(a) Q ограничен в $L^p(B)$.

(b) $\widetilde{Q}$ ограничен в $L^p(B)$.

(c) $-pa<1$.

С одной стороны, в Теореме B рассмотрен случай произвольных $p\geqslant 1$. С другой стороны, в Теореме A рассмотрен случай общих весовых функций, а не только степенных, хотя и только для $p=1$.

Ниже в Разделах 1.4 и 2.4 мы обобщим Теоремы A и B на общие операторы типа Бергмана и более общие пространства.

1.3 Вспомогательные интегральные оценки

Нам потребуется несколько известных интегральных формул и оценок, представленных в следующих трех леммах.

Лемма 1.1. *Пусть $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультииндекс с $m_j \geq 0$, $m_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha > -1$. Тогда*

$$\int_S \left|\zeta^m\right|^2 d\sigma(\zeta) = \int_S |\zeta_1|^{2m_1} \cdots |\zeta_n|^{2m_n} \, d\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!\, m!}{(n-1+|m|)!}, \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \int_B \left|z^m\right|^2 dV_\alpha(z) &= \gamma_\alpha \int_B \left|z^m\right|^2 (1-|z|^2)^\alpha \, d\nu(z) = \\ &= \gamma_\alpha \int_B |z_1|^{2m_1} \cdots |z_n|^{2m_n} (1-|z|^2)^\alpha \, d\nu(\zeta) = \frac{m!\, \Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+|m|+1)}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\gamma_\alpha := \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+1)}$ — нормирующий множитель такой, что $V_\alpha(B) = 1$.

Доказательство. Отождествляя $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, будем высчитывать интеграл

$$I := \int_{\mathbb{C}^n} \left|z^m\right|^2 e^{-|z|^2} \, d\nu(z)$$

двумя разными методами. Первым методом по теореме Фубини будем иметь

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{C}^n} \left|z^m\right|^2 e^{-|z|^2} \, d\nu(z) = \int_{\mathbb{C}^n} |z_1|^{2m_1} \cdots |z_n|^{2m_n} e^{-|z_1|^2 - \cdots - |z_n|^2} \, d\nu(z) = \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^2} |z_k|^{2m_k} e^{-|z_k|^2} \, d\nu(z_k) = \prod_{k=1}^n 2\pi \int_0^{+\infty} \rho^{2m_k} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho = \\ &= \pi^n \prod_{k=1}^n \int_0^{+\infty} r^{m_k} e^{-r} \, dr = \pi^n \prod_{k=1}^n \Gamma(m_k+1) = \pi^n \prod_{k=1}^n m_k! = \pi^n \, m!. \end{aligned}$$

Вторым методом, немедленно переходя к полярным координатам, получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{C}^n} \left|z^m\right|^2 e^{-|z|^2} \, d\nu(z) = 2n\,|B| \int_0^\infty \left[\int_S \left|z^m\right|^2 e^{-|z|^2} \, d\sigma(\zeta)\right] r^{2n-1} \, dr = \\ &= 2n\,|B| \int_0^\infty \left[\int_S \left|\zeta^m\right|^2 d\sigma(\zeta)\right] r^{2|m|} e^{-r^2} r^{2n-1} \, dr = \\ &= 2n\,|B| \left[\int_S \left|\zeta^m\right|^2 d\sigma(\zeta)\right] \left[\int_0^\infty r^{2|m|+2n-1} e^{-r^2} \, dr\right] = \\ &= 2n\,|B| \left[\int_S \left|\zeta^m\right|^2 d\sigma(\zeta)\right] \left[\int_0^\infty r^{2|m|+2n-2} e^{-r^2} r \, dr\right] = \end{aligned}$$

$$= n\,|B| \left[\int_S \left|\zeta^m\right|^2 d\sigma(\zeta)\right] \left[\int_0^\infty r^{|m|+n-1}\, e^{-r}\, dr\right] =$$

$$= n\,|B|\,\Gamma(|m|+n) \left[\int_S \left|\zeta^m\right|^2 d\sigma(\zeta)\right] = n\,|B|\,(|m|+n-1)! \int_S \left|\zeta^m\right|^2 d\sigma(\zeta).$$

Сравнивая оба полученных значения, получаем

$$I = n\,|B|\,(|m|+n-1)! \int_S \left|\zeta^m\right|^2 d\sigma(\zeta) = \pi^n\, m!,$$

т.е.

$$\int_S \left|\zeta^m\right|^2 d\sigma(\zeta) = \frac{\pi^n\, m!}{n\,|B|\,(|m|+n-1)!}$$

Чтобы завершить рассчет, подставим сюда $m = (0, 0, \ldots, 0)$ и найдем объем $|B|$ шара B,

$$n\,|B|\,(n-1)! \int_S d\sigma(\zeta) = \pi^n, \qquad |B| = \frac{\pi^n}{n!}.$$

Отсюда получаем доказанной формулу (1.3)

$$\int_S \left|\zeta^m\right|^2 d\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!\, m!}{(|m|+n-1)!}.$$

Чтобы доказать формулу (1.4), вновь воспользуемся переходом к полярными координатам, $\left|z^m\right| = r^{|m|} \left|\zeta^m\right|$, а затем — доказанной формулой (1.3),

$$\begin{aligned}
\int_B \left|z^m\right|^2 dV_\alpha(z) &= \gamma_\alpha \int_B \left|z^m\right|^2 (1-|z|^2)^\alpha\, d\nu(z) = \\
&= 2n\,\gamma_\alpha \int_0^1 \left[\int_S \left|\zeta^m\right|^2 d\sigma(\zeta)\right] (1-r^2)^\alpha\, r^{2|m|+2n-1}\, dr = \\
&= 2n\,\gamma_\alpha\, \frac{(n-1)!\, m!}{(|m|+n-1)!} \int_0^1 (1-r^2)^\alpha\, r^{2|m|+2n-1}\, dr = \\
&= 2\,\gamma_\alpha\, \frac{n!\, m!}{(|m|+n-1)!} \int_0^1 (1-r^2)^\alpha\, r^{2|m|+2n-2}\, r\, dr = \\
&= \gamma_\alpha\, \frac{n!\, m!}{(|m|+n-1)!} \int_0^1 (1-t)^\alpha\, t^{|m|+n-1}\, dt = \\
&= \gamma_\alpha\, \frac{n!\, m!}{(|m|+n-1)!}\, B(\alpha+1, |m|+n) = \\
&= \gamma_\alpha\, \frac{n!\, m!}{(|m|+n-1)!}\, \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(|m|+n)}{\Gamma(\alpha+1+|m|+n)} = \\
&= \gamma_\alpha\, n!\, m!\, \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1+|m|+n)} = \\
&= n!\, m!\, \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+1)}\, \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1+|m|+n)} = \\
&= n!\, m!\, \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+1+|m|+n)} = \frac{m!\,\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1+|m|+n)},
\end{aligned}$$

что и требовалось показать. $\square$

Лемма 1.2. *Пусть $\alpha > -1$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда интегралы*

$$I_\beta(z) := \int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{n+\beta}}, \qquad z \in B, \tag{1.5}$$

$$J_{\alpha,\beta}(z) := \int_B \frac{(1-|w|^2)^\alpha\, dV(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{1+n+\alpha+\beta}}, \qquad z \in B, \tag{1.6}$$

имеют следующие асимптотические оценки:

(i) *Если $\beta < 0$, то $I_\beta(z) \approx J_{\alpha,\beta}(z) \approx 1$ в шаре $z \in B$.*

(ii) *Если $\beta = 0$, то*

$$I_\beta(z) \approx J_{\alpha,\beta}(z) \approx \log\frac{1}{1-|z|^2}, \qquad z \in B.$$

(iii) *Если $\beta > 0$, то*

$$I_\beta(z) \approx J_{\alpha,\beta}(z) \approx \frac{1}{(1-|z|^2)^\beta}, \qquad z \in B.$$

Доказательство. Биномиальный ряд

$$\frac{1}{(1-t)^\lambda} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\lambda)}\, t^k, \qquad t \in \mathbb{C}, \quad |t| < 1, \quad \lambda \neq 0, -1, -2, \dots,$$

сходится в единичном круге $\mathbb{D}$, если только λ не является целым неположительным числом. Выберем $\lambda := \frac{1}{2}(n+\beta)$. Тогда

$$\frac{1}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{n+\beta}} = \frac{1}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2\lambda}} = \left|\sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\lambda)}\, \langle z,\zeta\rangle^k\right|^2, \qquad z \in B, \quad \zeta \in S.$$

При фиксированном $z \in B$, функции $\langle z,\zeta\rangle^k$ и $\langle z,\zeta\rangle^j$ ортогональны в $L^2(S,d\sigma)$ при $k \neq m$, т.е.

$$\Big\langle \langle z,\zeta\rangle^k, \langle z,\zeta\rangle^m \Big\rangle_{L^2(S,d\sigma)} = \int_S \langle z,\zeta\rangle^k \cdot \overline{\langle z,\zeta\rangle^m}\, d\sigma(\zeta) = 0, \qquad k \neq m, \quad k,m \geq 0.$$

Действительно, после раскрытия скобок в произведении

$$\langle z,\zeta\rangle^k \cdot \overline{\langle z,\zeta\rangle^m} = \big(z_1\overline{\zeta_1} + \cdots + z_n\overline{\zeta_n}\big)^k \big(\overline{z_1}\zeta_1 + \cdots + \overline{z_n}\zeta_n\big)^m,$$

ни в каком слагаемом типа $\zeta_i^p\,\zeta_j^q\,\zeta_\ell^s\,\overline{\zeta}_i^\kappa\,\overline{\zeta}_j^\lambda\,\overline{\zeta}_\ell^\gamma$ суммарный показатель степени не будет равен нулю. Этот факт дает возможность представить интеграл $I_\beta(z)$ в виде

$$I_\beta(z) = \int_S \left|\sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\lambda)}\, \langle z,\zeta\rangle^k\right|^2 d\sigma(\zeta) = \sum_{k=0}^\infty \left|\frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\lambda)}\right|^2 \int_S \big|\langle z,\zeta\rangle\big|^{2k}\, d\sigma(\zeta).$$

Вычислим последний интеграл. Не теряя общности, можно считать, что $z = re_1 = (r, 0, 0, \dots, 0)$. И тогда, очевидно, $\langle z, \zeta\rangle = r\zeta_1 = |z|\zeta_1$, что влечет формулу

$$\int_S \bigl|\langle z, \zeta\rangle\bigr|^{2k}\, d\sigma(\zeta) = |z|^{2k} \int_S |\zeta_1|^{2k}\, d\sigma(\zeta).$$

Далее применим Лемму 1.1, формулу (1.3),

$$\int_S \bigl|\langle z, \zeta\rangle\bigr|^{2k}\, d\sigma(\zeta) = |z|^{2k} \int_S |\zeta_1|^{2k}\, d\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!\,k!}{(n-1+k)!}\,|z|^{2k} = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k)}\,|z|^{2k}.$$

Подставим

$$\begin{aligned} I_\beta(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\lambda)}\right|^2 \int_S \bigl|\langle z, \zeta\rangle\bigr|^{2k}\, d\sigma(\zeta) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\lambda)}\right|^2 \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k)}\,|z|^{2k} = \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma^2(\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k)}\,|z|^{2k}. \end{aligned}$$

Вспомним асимптотическую формулу Стирлинга

$$\Gamma(1+k) \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \sim \sqrt{2\pi}\,\frac{k^{k+1/2}}{e^k} \approx \frac{k^{k+1/2}}{e^k}, \qquad k \to +\infty,$$

благодаря которой получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(\lambda+k+1)} &\sim \frac{\sqrt{2\pi(k+n)}\,\left(\frac{k+n}{e}\right)^{k+n}}{\sqrt{2\pi(k+\lambda)}\,\left(\frac{k+\lambda}{e}\right)^{k+\lambda}} \sim e^{\lambda-n}\,\frac{(k+n)^{k+n}}{(k+\lambda)^{k+\lambda}} = e^{\lambda-n}\,\frac{(k+n)^k}{(k+\lambda)^k}\,\frac{(k+n)^n}{(k+\lambda)^\lambda} \sim \\ &\sim e^{\lambda-n}\,\frac{(k+n)^k}{(k+\lambda)^k}\,k^{n-\lambda} = e^{\lambda-n}\,\frac{(1+n/k)^k}{(1+\lambda/k)^k}\,k^{n-\lambda} \sim e^{\lambda-n}\,\frac{e^n}{e^\lambda}\,k^{n-\lambda} = k^{n-\lambda}, \end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(\lambda+k+1)} \sim (k+1)^{n-\lambda} \sim k^{n-\lambda} \qquad \text{или} \qquad \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(\lambda+k)} \sim k^{n-\lambda}, \qquad k \to +\infty.$$

Следовательно, при $k \to +\infty$

$$\frac{\Gamma^2(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k)} = \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)}\,\frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(k+n)} \sim k^{\lambda-1}\,k^{\lambda-n} = k^{2\lambda-n-1} = k^{n+\beta-n-1} = k^{\beta-1}.$$

Отсюда

$$I_\beta(z) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma^2(\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k)}\,|z|^{2k} \sim \frac{\Gamma(n)}{\Gamma^2(\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} k^{\beta-1}\,|z|^{2k} \approx \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\beta-1}\,|z|^{2k}.$$

Таким образом,

$$I_\beta(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\beta-1}\,|z|^{2k}. \tag{1.7}$$

Если $\beta < 0$, то

$$I_\beta(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\beta-1}\, |z|^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{(k+1)^{1-\beta}} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{1-\beta}} \approx 1, \qquad |z| \to 1^-.$$

Если $\beta = 0$, то

$$I_0(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-1}\, |z|^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{k+1} = \frac{1}{|z|^2} \log \frac{1}{1-|z|^2} \sim \log \frac{1}{1-|z|^2}, \qquad |z| \to 1^-.$$

Если $\beta > 0$, то вновь по асимптотической формуле

$$\frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(k+1)} \sim (k+1)^{\beta-1}$$

и биноминальной формуле будем иметь

$$\begin{aligned} I_\beta(z) &\approx \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\beta-1}\, |z|^{2k} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(k+1)}\, |z|^{2k} \approx \\ &\approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(k+1)}\, |z|^{2k} = \frac{1}{(1-|z|^2)^\beta}, \qquad |z| \to 1^-. \end{aligned}$$

Теперь перейдем к оценке интеграла $J_{\alpha,\beta}(z)$. Представим интеграл в полярных координатах, и затем воспользуемся разложением в ряд предыдущего интеграла $I_\beta(z)$,

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\beta}(z) &= \int_B \frac{(1-|w|^2)^\alpha\, dV(w)}{|1-\langle z, w\rangle|^{1+n+\alpha+\beta}} = \\ &= 2n \int_0^1 (1-\rho^2)^\alpha \left[\int_S \frac{d\sigma(\eta)}{|1-\langle z, \rho\eta\rangle|^{1+n+\alpha+\beta}} \right] \rho^{2n-1}\, d\rho = \\ &= 2n \int_0^1 (1-\rho^2)^\alpha \left[\int_S \frac{d\sigma(\eta)}{|1-\langle \rho z, \eta\rangle|^{1+n+\alpha+\beta}} \right] \rho^{2n-1}\, d\rho = \\ &= 2n \int_0^1 (1-\rho^2)^\alpha\, I_{1+\alpha+\beta}(\rho z)\, \rho^{2n-1}\, d\rho \approx \\ &\approx 2n \int_0^1 (1-\rho^2)^\alpha \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\alpha+\beta}\, \rho^{2k}\, |z|^{2k} \right] \rho^{2n-1}\, d\rho = \\ &= 2n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\alpha+\beta}\, |z|^{2k} \left[\int_0^1 (1-\rho^2)^\alpha\, \rho^{2k+2n-1}\, d\rho \right] = \\ &= 2n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\alpha+\beta}\, |z|^{2k} \left[\int_0^1 (1-\rho^2)^\alpha\, \rho^{2k+2n-2}\, \rho\, d\rho \right] = \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\alpha+\beta}\, |z|^{2k} \left[\int_0^1 (1-t)^\alpha\, t^{k+n-1}\, d\rho \right] = \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(n+k)}{\Gamma(1+\alpha+k+n)}\, (k+1)^{\alpha+\beta}\, |z|^{2k} \sim \end{aligned}$$

$$\sim n\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^{\alpha+\beta}}{(k+n)^{\alpha+1}}\,|z|^{2k}\sim$$
$$\sim n\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\beta-1}\,|z|^{2k}\approx\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\beta-1}\,|z|^{2k}.$$

Таким образом,

$$J_{\alpha,\beta}(z)\approx\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\beta-1}\,|z|^{2k}. \tag{1.8}$$

Получили совпадающее с (1.7) разложение в ряд, т.е. $I_\beta(z)\approx J_{\alpha,\beta}(z)$, что завершает доказательство Леммы 1.2. □

Лемма 1.3. *Справедливы следующие интегральные оценки:*

$$\int_0^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^{\beta}}\,dt\approx\begin{cases}\dfrac{1}{(1-r)^{\beta-\alpha}}, & \beta>\alpha,\\[2mm] 1, & \beta<\alpha,\\[2mm] \log\dfrac{e}{1-r}, & \beta=\alpha,\end{cases}\qquad 0\le r<1,\ \alpha>0. \tag{1.9}$$

Во всех оценках неявно участвующие постоянные зависят лишь от α,β.

Доказательство. Вначале заметим, что все оценки (1.9), довольно очевидны, если брать $0\le r\le\frac12$. Поэтому достаточно доказать оценки для $\frac12\le r<1$.

Вначале положим $\beta>\alpha>0$. Тогда

$$\int_0^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^{\beta}}\,dt=\int_0^r\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^{\beta}}\,dt+\int_r^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^{\beta}}\,dt\le$$
$$\le\int_0^r\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-t)^{\beta}}\,dt+\frac{1}{(1-r)^{\beta}}\int_r^1(1-t)^{\alpha-1}\,dt=$$
$$=\frac{-1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{(1-r)^{\beta-\alpha}}-1\right)+\frac{1}{\alpha(1-r)^{\beta}}(1-r)^{\alpha}\le$$
$$\le\left(\frac{1}{\beta-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{(1-r)^{\beta-\alpha}}.$$

Обратно,

$$\int_0^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^{\beta}}\,dt\ge\int_r^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^{\beta}}\,dt\ge\frac{1}{(1-r^2)^{\beta}}\int_r^1(1-t)^{\alpha-1}\,dt=$$
$$=\frac{1}{\alpha(1-r^2)^{\beta}}(1-r)^{\alpha}\ge\frac{1}{\alpha\,2^{\beta}}\,\frac{1}{(1-r)^{\beta-\alpha}}.$$

Случай $\beta>\alpha>0$ доказан. Теперь положим $\beta<\alpha$. Тогда

$$\int_0^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^{\beta}}\,dt\le\int_0^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-t)^{\beta}}\,dt=\frac{1}{\alpha-\beta},$$
$$\int_0^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^{\beta}}\,dt\ge\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}\,dt=\frac{1}{\alpha}.$$

Теперь положим $\beta = \alpha$. Достаточно показать асимптотическую оценку (1.9) при $r \to 1^-$. Преобразуем интеграл с заменой переменного формулой $\frac{1-t}{1-rt} = x$,

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\alpha}\,dt = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1-rx}\,dx = \frac{1}{r^\alpha}\int_0^r \frac{\eta^{\alpha-1}}{1-\eta}\,d\eta \sim \log\frac{1}{1-r} \qquad \text{при} \quad r \to 1^-,$$

хотя бы по правилу Лопиталя. Оценки (1.9) полностью доказаны. □

Замечание 1.1. *Доказательство первой оценки сверху в* (1.9) *можно найти в [39].*

В следующих двух леммах участвуют уже нормальные весовые функции и нормальная пара.

Лемма 1.4. *Если*

$$-(1+\varepsilon) < qs < \alpha - k, \tag{1.10}$$

то существует постоянная M_0, такая что

$$\int_B \frac{(1-|w|^2)^{qs}\,\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\,dV(w) \leqslant M_0\,\frac{(1-|z|^2)^{qs}}{\psi(z)}.$$

Доказательство. Так как, согласно определению нормальной пары функций, $\varphi(r)\psi(r) = (1-r^2)^\alpha$ при $0 \leqslant r < 1$, то достаточно показать, что

$$\int_B \frac{\varphi(w)\,dV(w)}{(1-|w|^2)^{\beta/p}\,|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}} \leqslant M_0\,\frac{\varphi(z)}{(1-|z|^2)^{(\beta/p)+\alpha}}.$$

Пусть $w = r\zeta$, где $r = |w|$, $\zeta \in S$. Так как $\alpha + 1 > 0$, то согласно Лемме 1.2 существует постоянная C такая, что

$$\int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\langle z,r\zeta\rangle|^{n+1+\alpha}} \leqslant \frac{C}{(1-|z|^2r^2)^{\alpha+1}}.$$

Используя выражение для элемента нормированного объема dV в полярных координатах $dV(w) = 2n\,r^{2n-1}\,dr\,d\sigma(\zeta)$, $\quad w = r\zeta$, где $\quad \zeta \in S$, (см. [43, Lemma 1.8]), получим

$$\begin{aligned}
&\int_B \frac{(1-|w|^2)^{qs}\,\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\,dV(w) = \\
&\quad = 2n\int_0^1 \left(1-r^2\right)^{qs}\varphi(r)r^{2n-1}\left(\int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\langle z,r\zeta\rangle|^{n+1+\alpha}}\right)dr \leqslant \\
&\quad \leqslant C\int_0^1 \frac{(1-r^2)^{qs}\,\varphi(r)}{(1-(|z|r)^2)^{\alpha+1}}\,dr \leqslant C_1\int_0^1 \frac{(1-r)^{qs}\,\varphi(r)}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

На последнем шаге мы заменили $(1-r^2)$ на $(1-r)$, и $\bigl(1-(|z|r)^2\bigr)$ на $(1-|z|r)$, поэтому постоянная C заменилась на некоторою другую постоянную C_1.

Разделим последний интеграл на три части.

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^{qs}\,\varphi(r)}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr = \int_0^{r_0} \frac{(1-r)^{qs}\,\varphi(r)}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr + \\ + \int_{r_0}^{|z|} \frac{(1-r)^{qs}\,\varphi(r)}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr + \int_{|z|}^{1} \frac{(1-r)^{qs}\,\varphi(r)}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr = \\ = I_1 + I_2 + I_3. \tag{1.12}$$

Очевидно, I_1 ограничен при всех z. Следовательно существует постоянная C_2 такая, что

$$I_1 \leqslant C_2\varphi(z)\left(1-|z|^2\right)^{qs-\alpha} \leqslant M_0\,\frac{(1-|z|^2)^{qs}}{\psi(z)}. \tag{1.13}$$

(Здесь мы воспользовались тем, что согласно условию леммы, $qs-\alpha+k<0$, поэтому правая часть (3.18) отграничена от нуля, а также тем, что $\varphi(z)\psi(z) = (1-|z|^2)^{\alpha}$). Из определения нормальной функции (1.1) имеем

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^k} \leqslant C\frac{\varphi(z)}{(1-|z|)^k} \quad \text{при} \quad r_0 < r \leqslant |z|. \tag{1.14}$$

Следовательно,

$$I_2 = \int_{r_0}^{|z|} \frac{(1-r)^{qs}\,\varphi(r)}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr = \int_{r_0}^{|z|} \frac{\varphi(r)\,(1-r)^{k+qs}}{(1-r)^k(1-|z|r)^{\alpha+1}}dr \leqslant \\ \leqslant C\frac{\varphi(z)}{(1-|z|)^k}\int_{r_0}^{|z|} \frac{(1-r)^{k+qs}}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}dr.$$

Из условий (1.10) следует $k+qs > \varepsilon + qs > -1$ и $\alpha+1 > k+qs+1$, и применяя Лемму 1.3, будем иметь

$$\int_{r_0}^{|z|} \frac{(1-r)^{k+qs}}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}dr \leqslant \int_0^1 \frac{(1-r)^{k+qs}}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}dr \leqslant C_3\,(1-|z|)^{k+qs-\alpha},$$

где C_3 — некая постоянная. Следовательно,

$$I_2 \leqslant C\,\frac{\varphi(z)}{(1-|z|)^k}\int_{r_0}^{|z|} \frac{(1-r)^{k+qs}}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}dr \leqslant \\ \leqslant C\,\frac{\varphi(z)}{(1-|z|)^k}\,(1-|z|)^{k+qs-\alpha} \leqslant C\,\varphi(z)\left(1-|z|^2\right)^{qs-\alpha} = C\,\frac{(1-|z|^2)^{qs}}{\psi(z)}.$$

Перейдем теперь к I_3. Так как

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\varepsilon}} \leqslant C\frac{\varphi(z)}{(1-|z|)^{\varepsilon}} \quad \text{при} \quad |z|<r<1, \tag{1.15}$$

то

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{|z|}^1 \frac{(1-r)^{qs}\,\varphi(r)}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr = \int_{|z|}^1 \frac{\varphi(r)\,(1-r)^{\varepsilon+qs}}{(1-r)^{\varepsilon}\,(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr \leqslant \\ &\leqslant C\frac{\varphi(z)}{(1-|z|)^{\varepsilon}}\int_{|z|}^1 \frac{(1-r)^{\varepsilon+qs}}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr \leqslant C\frac{\varphi(z)}{(1-|z|)^{\varepsilon}}\int_0^1 \frac{(1-r)^{\varepsilon+qs}}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr. \end{aligned}$$

Из условий (1.10) следует $\varepsilon+qs>-1$ и $\alpha+1>k+qs+1>\varepsilon+qs+1$. Снова пользуясь Леммой 1.3, получаем

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^{\varepsilon+qs}}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr \leqslant C\,(1-|z|)^{\varepsilon+qs-\alpha},$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} I_3 &\leqslant C\frac{\varphi(z)}{(1-|z|)^{\varepsilon}}\int_0^1 \frac{(1-r)^{\varepsilon+qs}}{(1-|z|r)^{\alpha+1}}\,dr \leqslant \\ &\leqslant C\,\varphi(z)\,(1-|z|)^{qs-\alpha} \leqslant C\,\varphi(z)\left(1-|z|^2\right)^{qs-\alpha}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

где постоянная C не зависит от z. Объединяя полученные результаты (1.11)–(1.16), получим, что существует постоянная M_0 такая, что

$$\int_B \frac{(1-|w|^2)^{qs}\,\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\,dV(w) \leqslant M_0\,\varphi(z)\left(1-|z|^2\right)^{qs-\alpha} = M_0\,\frac{(1-|z|^2)^{qs}}{\psi(z)}$$

при $-(1+\varepsilon)<qs<\alpha-k$. Лемма доказана. □

Лемма 1.5. *Пусть*

$$k-\alpha-1<ps<\varepsilon. \tag{1.17}$$

Тогда существует постоянная M_1, такая что

$$\int_B \frac{(1-|z|^2)^{ps}\,\psi(z)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\,dV(z) \leqslant M_1\frac{(1-|w|^2)^{ps}}{\varphi(w)}.$$

Доказательство. Имеем $\varphi(z)\psi(z)=(1-|z|^2)^{\alpha}$. Следовательно, мы должны доказать, что для некоторой константы M_1

$$\int_B \frac{(1-|z|^2)^{ps+\alpha}}{\varphi(z)\,|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\,dV(z) \leqslant M_1\frac{(1-|w|^2)^{ps}}{\varphi(w)}.$$

Как и при доказательстве предыдущей леммы, переходим к полярным координатам, применяем Лемму 1.2, делим полученный интеграл на три части и оцениваем каждую часть в отдельности. При этом учитываем, что вместо неравенств (1.14) и (1.15) следует использовать неравенства

$$\frac{(1-r)^{\varepsilon}}{\varphi(r)} \leqslant C\frac{(1-|w|)^{\varepsilon}}{\varphi(w)} \quad \text{при} \quad r_0 < r \leqslant |w|,$$
$$\frac{(1-r)^{k}}{\varphi(r)} \leqslant C\frac{(1-|w|)^{k}}{\varphi(w)} \quad \text{при} \quad |w| < r < 1.$$

Дальнейшие подробности аналогичны доказательству предыдущей леммы с незначительными изменениями, и мы их опускаем. □

1.4 Ограниченные проекторы на $L^p(B)$

Нам понадобится следующий удобный критерий для проверки L^p-ограниченности операторов, известный под названием "критерий (или тест) Шура", доказательство которого можно найти, например, в [32, Theorem 1.8] или в [43, Theorem 2.9].

Теорема 1.1 (Критерий Шура). *Пусть* (X,μ) *— пространство с мерой,* $1<p<\infty$ *и* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. *Для неотрицательного ядра* $H(x,y)$ *рассмотрим следуюший интегральный оператор*

$$(Tf)(x) = \int_X H(x,y)f(y)d\mu(y).$$

Если существуют строго положительная функция h *на* X *и положительная постоянная* C *такие, что*

$$\int_X H(x,y)h(y)^q d\mu(y) \leqslant Ch(x)^q$$

для почти всех $x \in X$ *и*

$$\int_X H(x,y)h(x)^p d\mu(x) \leqslant Ch(y)^p$$

для почти всех $y\in X$*, то оператор* T *ограничен в* $L^p(X,\mu)$ *и* $\|T\| \leqslant C$.

Вспомним воспроизводящую интегральную формулу для класса $A^1_\alpha(B)$, см., например, [22], [43],

$$f(z) = \big(P_\alpha f\big)(z), \qquad z\in B, \qquad f\in A^1_\alpha(B), \tag{1.18}$$

где

$$(P_\alpha f)(z) := \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} \int_B \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}} f(w)\, dV(w). \tag{1.19}$$

Хорошо известно ([22], [43]), что оператор P_α непрерывно проектирует лебегово пространство $L^p(B)$ на его голоморфное подпространство $A^p(B)$, $1 \le p < \infty$. В следующей теореме мы обобщаем и распространяем этот результат на общие операторы типа Бергмана с участием нормальных весовых функций.

Теорема 1.2. *При всех $1 \leqslant p < \infty$, удовлетворяющих условию*

$$p(k-\alpha) < 1, \tag{1.20}$$

интегральный оператор

$$(Qf)(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} \int_B \frac{\psi(z)\varphi(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}} f(w)\, dV(w) \tag{1.21}$$

является ограниченным проектором в $L^p(B)$.

Доказательство. Прежде всего докажем ограниченность Q. Рассмотрим сперва случай $1 < p < \infty$. Достаточно доказать ограниченность оператора

$$(Tf)(z) = \int_B \frac{\psi(z)\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}} f(w)\, dV(w) \tag{1.22}$$

с положительным ядром, так как из ограниченности (1.22) очевидным образом следует ограниченность (1.21). Согласно критерию Шура, достаточно найти подходящую функцию h, для которой выполнялись бы следующие неравенства

$$\int_B \frac{\psi(z)\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}} h(w)^q dV(w) \leqslant M h(z)^q,$$

$$\int_B \frac{\psi(z)\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}} h(z)^p dV(z) \leqslant M h(w)^p.$$

Будем искать функцию h в виде $h(z) = (1-|z|^2)^s$. То есть, мы должны доказать, что

$$\int_B \frac{(1-|w|^2)^{qs}\,\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\, dV(w) \leqslant M \frac{(1-|z|^2)^{qs}}{\psi(z)}\,, \tag{1.23}$$

$$\int_B \frac{(1-|z|^2)^{ps}\,\psi(z)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\, dV(z) \leqslant M \frac{(1-|w|^2)^{ps}}{\varphi(w)}\,. \tag{1.24}$$

Согласно леммам 1.4 и 1.5, неравенства (1.23) и (1.24) справедливы при условиях

$$-\frac{1+\varepsilon}{q} < s < \frac{\alpha-k}{q} \quad \text{и} \quad \frac{k-\alpha-1}{p} < s < \frac{\varepsilon}{p}\,.$$

Здесь $M = \max\{M_0, M_1\}$. Остается выяснить, при каких значениях p пересечение интервалов

$$\left(-\frac{1+\varepsilon}{q},\ \frac{\alpha-k}{q}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{k-\alpha-1}{p},\ \frac{\varepsilon}{p}\right)$$

непусто. Очевидно, $-\dfrac{1+\varepsilon}{q} < \dfrac{\varepsilon}{p}$. Поэтому указанное пересечение непусто тогда и только тогда, если $\dfrac{k-\alpha-1}{p} < \dfrac{\alpha-k}{q}$. Учитывая, что $\dfrac{1}{q} = 1-\dfrac{1}{p}$, из этого неравенства получаем $p(k-\alpha) < 1$. То есть, при $p(k-\alpha) < 1 \quad (1 < p < \infty)$ оператор (1.22) ограничен в $L^p(B)$.

Утверждение теоремы для оставшегося случая $p = 1$ следует из Теоремы A. В самом деле, условие (1.20) в этом случае эквивалентно условию $\alpha > k-1$ нормальности пары $\{\varphi, \psi\}$ (см. Определение 1.3).

Докажем, что Q является проекционным оператором из пространства $L^p(B)$ на его подпространство $\psi \cdot A^p(\psi)$. Очевидно, множество значений Q принадлежит $\psi \cdot A^p(\psi)$. Покажем, что на $\psi \cdot A^p(\psi)$ оператор Q является тождественным.

Пусть $f \in \psi \cdot A^p(\psi)$. Тогда $f = \psi g$, где $g \in A^p(\psi)$. Имеем

$$Q(f) = Q(\psi g) = \psi P_\alpha(g) = \psi g = f.$$

Равенство $P_\alpha(g) = g$ следует из того, что $A^p(\psi) \subset A^1(\psi) \subset A^1_\alpha$, а в пространстве A^1_α ядро $K_\alpha(z,w)$ является воспроизводящим, см. (1.18). $\square$

Отметим, что случай $n = 1$ Теоремы 1.2 рассмотрен в [35].

Теперь в качестве простого частного следствия получаем аналогичный результат для классического проектора Бергмана P_α.

Следствие 1.1. *При всех* $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha > 0$, *интегральный оператор Бергмана*

$$(P_\alpha f)(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} \int_B \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}\, f(w)\, dV(w) \tag{1.25}$$

является ограниченным проектором из $L^p(B)$ *на* $A^p(B)$.

Доказательство. Рассмотрим частный случай, когда φ является степенной функцией: $\varphi(r) = (1-r)^{\alpha}$, где $\alpha > 0$ и $\psi(r) \equiv 1$. Тогда соответствующий оператор Q приобретает вид (1.25). Для любого заданного $1 \leqslant p < \infty$ число $k > \alpha$ можно взять настолько близким к α, чтобы выполнялось условие (1.20) Теоремы 1.2. $\square$

Отметим еще, что утверждение Следствия 1.1 вытекает и из Теоремы B при $a = 0$, а также из теоремы Рудина–Форелли (см. [9, Теор. 7.1.4.]).

Глава 2

Операторы типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой в шаре из $\mathbb{C}^n$

2.1 Определения и обозначения

Пусть как и ранее $B = B_n$ — открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$, и $S := \partial B$ — его граница, единичная сфера. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ обозначается через $\langle z, w\rangle := z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_n\overline{w}_n,\ z, w \in \mathbb{C}^n$. Будем полагать $z = r\zeta,\ w = \rho\eta \in B,\ 0 \le r, \rho < 1,\ \zeta, \eta \in S$, $r = |z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$. Множество всех голоморфных функций в шаре B обозначим через $H(B)$. Для функции $f(z) = f(r\zeta)$, заданной в шаре B, ее интегральные средние порядка p на сфере $|z| = r$ обозначены как обычно, через

$$M_p(f;r) = \big\|f(r\cdot)\big\|_{L^p(S;d\sigma)}, \qquad 0 \le r < 1,\ 0 < p \le \infty,$$

где $d\sigma$ — $(2n-1)$-мерная поверхностная мера Лебега на сфере S, нормированная так, что $\sigma(S) = 1$. Класс функций $f \in H(B)$ с "нормой" $\|f\|_{H^p} = \sup\limits_{0<r<1} M_p(f;r)$ есть обычное пространство Харди $H^p(B)$ в единичном шаре B.

Определение 2.1. *Определим пространство* $L(p, q, \beta)\big(0 < p, q \le \infty,\ \beta \in \mathbb{R}\big)$ *со смешанной нормой как пространство тех измеримых функций* $f(z) = f(r\zeta)$ *в шаре* B, *для которых конечна квазинорма*

$$\|f\|_{L(p,q,\beta)} = \|f\|_{p,q,\beta} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 (1-r)^{\beta q-1} M_p^q(f;r)\,dr\right)^{1/q}, & 0<q<\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{0<r<1} (1-r)^{\beta} M_p(f;r), & q=\infty. \end{cases}$$

Подпространства $L(p,q,\beta)$, состоящие из голоморфных функций, обозначим через

$$H(p,q,\beta) := H(B) \cap L(p,q,\beta), \qquad \beta > 0.$$

Если $1 \le p, q \le \infty$, то $L(p,q,\beta), H(p,q,\beta)$ являются банаховыми пространствами с нормой $\|\cdot\|_{p,q,\beta}$. При $p=q<\infty$ пространства $H(p,p,\beta)$ совпадают с весовыми классами Бергмана, а при $q=\infty$ их часто называют весовыми пространствами Харди.

Пространства со смешанной нормой значимы не только сами по себе, но и тем, что они весьма близки другим не менее важным функциональным пространствам таким, как весовые пространства Бесова, Соболева, Блоха, Дирихле, Зигмунда, Харди, Бергмана, Неванлинны. Впервые пространства со смешанной нормой для голоморфных в единичном круге функций были введены Харди, Литтлвудом, Пэли [28], [29] и развиты в дальнейшем Флеттом [25] и другими авторами. Мы отсылаем также к монографиям [22], [24], [32], посвященным весовым пространствам Бергмана $H(p,p,\beta)$ в единичном круге. Хорошо изучены также пространства $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой и их подпространства, состоящие из голоморфных, плюригармонических или гармонических функций в круге, шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$. Пространства $H(p,q,\beta)$ для голоморфных функций в единичном шаре $B \subset \mathbb{C}^n$ и бергмановские операторы на них подробно исследованы, например, в работах [9], [43], [27], [37], [38], а для голоморфных и n-гармонических функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$ смотри, например, в [18].

Для вещественных функций определим "почти монотонные" функции.

Определение 2.2. *Вещественную функцию $g(t)$ назовем почти убывающей, если существует постоянная $C>0$ такая, что $g(t_1) \ge Cg(t_2)$ для любых $t_1 < t_2$. Аналогично, условием $g(t_1) \le Cg(t_2)$, $t_1 < t_2$, определяется почти возрастающая функция.*

Вместо стандартных степенных весовых функций Шилдс и Вильямс [39] впервые предложили использовать более общие нормальные весовые функции. Фактически это те весовые функции, которые имеют степенные миноранты и мажоранты с положительными показателями. Напомним определения нормальной функции и нормальной пары.

Определение 2.3. *(Нормальная весовая функция, [39], [41])*

Положительная непрерывная функция $\varphi(r)$, $0 \le r < 1$, *называется нормальной, если найдутся постоянные* $0 < a < b$ *и* $0 \le r_0 < 1$ *такие, что имеют место*

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} \searrow 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\varphi(r)}{(1-r)^b} \nearrow +\infty \qquad \text{при} \quad r \to 1^-, \quad r_0 \le r < 1. \tag{2.1}$$

Здесь и далее монотонность функций всегда будем подразумевать в широком, нестрогом смысле. Кроме того, в отдельных случаях монотонность в (2.1) заменяется на более общее понятие "почти монотонности". Индексы a и b для нормальной функции φ определяются неоднозначно.

Типичными и простыми примерами нормальных функций являются функции вида

$$\varphi_{c,d}(r) = (1-r)^c \left(\log \frac{e}{1-r}\right)^d, \qquad c > 0,\ d \in \mathbb{R},$$

причем при $c = 0$ функция $\varphi_{0,d}(r) = \left(\log \frac{e}{1-r}\right)^d$ уже не будет нормальной.

Определение 2.4. *(Нормальная пара, [39])*

Скажем, что пара функций $\{\varphi, \psi\}$ *составляет нормальную пару, если функция* φ *нормальна, и существует число* $\alpha > b - 1$ *(индекс пары) такое, что*

$$\varphi(r)\,\psi(r) = (1-r^2)^\alpha, \qquad 0 \le r < 1. \tag{2.2}$$

Ввиду условия $\alpha > b - 1$ функция ψ будет интегрируемой на интервале $(0,1)$. Как показано в [39], для нормальной функции φ всегда найдется ее нормальная пара, а при более строгом условии $\alpha > b$ функция ψ сама также будет нормальной с индексами $\alpha - b$ и $\alpha - a$.

Расширим область определения таких радиальных весовых функций до шара B, положив $\varphi(z) := \varphi(|z|) = \varphi(r)$, $\psi(z) := \psi(|z|) = \psi(r)$.

Посредством нормальных весовых функций Шилдс и Вильямс [39] в единичном круге $\mathbb{D} = B_1$ предложили обобщения операторов Бергмана, которые для шара B

определены в работах А.И. Петросяна [8], [45] в виде

$$Q_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\,\varphi(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}\, f(w)\, dV(w), \qquad z \in B, \tag{2.3}$$

$$\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\,\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\, f(w)\, dV(w), \qquad z \in B. \tag{2.4}$$

В частном случае $\varphi(r) = (1-r^2)^\alpha$, $\psi \equiv 1$ операторы (2.3), (2.4) сводятся к классическим проекторам Бергмана, см. [9], [22], [27], [32], [37], [38], [43].

В случае $\varphi(r) = (1-r^2)^c$, $\psi(r) = (1-r^2)^d$, $c+d = \alpha$ операторы типа Бергмана (2.3), (2.4) также хорошо известны, см. [18], [27], [37], [38], [43].

В настоящей главе мы доказываем, что существуют значения параметра β, при которых общие операторы (2.3), (2.4) ограничены на пространствах $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой в шаре B.

Основным результатом Главы 2 является следующая теорема, доказательство которой содержится далее в параграфе 2.4.

Теорема 2.1. *Пусть $1 \le p, q \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\{\varphi, \psi\}$ — нормальная пара функций с индексами a и b $(0 < a < b)$ и с индексом пары α $(\alpha > b-1)$ в смысле Определений 2.3–2.4. Если $b - \alpha < \beta < 1 + a$, то операторы $Q_{\varphi,\psi}$ и $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$ ограниченно действуют из пространства $L(p,q,\beta)$ в себя, т.е.*

$$Q_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \longrightarrow L(p,q,\beta), \tag{2.5}$$

$$\widetilde{Q}_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \longrightarrow L(p,q,\beta). \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. *В частном случае $1 \le p = q = 1/\beta < \infty$, т.е. для невесового класса $L(p,p,1/p)$, Теорема 2.1 установлена в [8], [45], но другим методом с использованием так называемого теста Шура ([9], [22], [32], [43]), который не подходит в нашем случае. Еще более частные случаи операторов Бергмана со степенными весами изучены в [9], [27], [32], [37], [38], [43].*

Замечание 2.2. *Фактически, в Теореме 2.1 мы обобщаем результат из [8], [45] в трех направлениях: во-первых, предполагаем все значения $1 \le p \le \infty$, во-вторых, рассматриваем весовые пространства, в-третьих, вместо пространств Бергмана рассматриваем более общие пространства $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой. При этом вместо неподходящего теста Шура мы применяем обобщения неравенства Харди.*

2.2 Поточечные оценки и оператор растяжения в пространствах со смешанной нормой $H(p,q,\alpha)$

Начнем с известной поточечной оценки функции из класса Харди H^p.

Лемма 2.1. *Если $f \in H^p(B)$ для некоторого p, $0 < p \le \infty$, то справедлива оценка*

$$|f(z)| \le \frac{C(p,n)\,\|f\|_{H^p}}{(1-|z|)^{n/p}}, \qquad z \in B. \tag{2.7}$$

Показатель n/p наилучший, т.е. его уменьшить нельзя.

Доказательство. Во-первых, заметим, что показатель n/p нельзя заменить на меньший. Голоморфная функция

$$f(z) = \frac{1}{(1-z_1)^\alpha} \in H^p, \qquad 0 < \alpha < \frac{n}{p},$$

принадлежит классу Харди H^p (см. Лемму 1.2 (i)) и удовлетворяет оценке

$$|f(z)| = \frac{1}{|1-z_1|^\alpha} \le \frac{1}{(1-|z_1|)^\alpha} = \frac{(1+|z_1|)^\alpha}{(1-|z_1|)^\alpha(1+|z_1|)^\alpha} \le \frac{2^\alpha}{(1-|z_1|^2)^\alpha} \le$$
$$\le \frac{2^\alpha}{(1-|z_1|^2-\dots-|z_n|^2)^\alpha} = \frac{2^\alpha}{(1-|z|^2)^\alpha} \le \frac{2^\alpha}{(1-|z|)^\alpha} < \frac{2^\alpha}{(1-|z|)^{n/p}}.$$

Поскольку число $\alpha < n/p$ произвольно и можно выбрать сколь угодно близким к n/p, то заключаем, что показатель n/p нельзя заменить на любой меньший $n/p-\varepsilon$, ибо потом можно выбрать $n/p-\varepsilon < \alpha < n/p$.

Доказательство самой оценки легко следует, если обратиться к методу $\mathcal{M}$-гармонической мажоранты и оценке инвариантного ядра Пуассона

$$P(z,\zeta) = \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2n}} \le \left(\frac{1-|z|^2}{(1-|z|)^2}\right)^n = \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^n \le \frac{2^n}{(1-|z|)^n},$$

см. [9], [43]. □

Лемма 2.2. *Если $f \in H(B)$, $0 < p \le \infty$, то справедлива оценка*

$$M_\infty(f;r^2) \le C(p,n)\,\frac{M_p(f;r)}{(1-r^2)^{n/p}}, \qquad 0 \le r < 1.$$

Доказательство. Рассмотрим растяжение $f_\rho(z) := f(\rho z)$, $0 < \rho < 1$, функции f. Очевидно, что $f_\rho(z) \in H(|z| < 1/\rho) \subset H(\overline{B}) \subset H^p(B)$, и поэтому можно применить Лемму 2.1 по отношению к функции f_ρ,

$$|f_\rho(z)| \leq \frac{C(p,n)\,\|f_\rho\|_{H^p}}{(1-|z|^2)^{n/p}}, \qquad z \in B,$$

или

$$|f(\rho z)| = |f(\rho r \zeta)| \leq C(p,n)\,\frac{\sup_{0<r<1} M_p(f;\rho r)}{(1-r^2)^{n/p}} = C(p,n)\,\frac{M_p(f;\rho)}{(1-r^2)^{n/p}}, \qquad 0 < \rho, r < 1.$$

Ввиду произвольности r и ρ можно взять $\rho = r$ и получить

$$|f(r^2\zeta)| \leq C(p,n)\,\frac{M_p(f;r)}{(1-r^2)^{n/p}}, \qquad 0 < r < 1,$$

или

$$M_\infty(f;r^2) \leq C(p,n)\,\frac{M_p(f;r)}{(1-r^2)^{n/p}}, \qquad 0 < r < 1,$$

что и требовалось показать. □

Теорема 2.2. *Если $f \in H(p,q,\alpha)$ для некоторых $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$, то справедлива оценка*

$$|f(z)| \leq C(p,q,\alpha,n)\,\frac{\|f\|_{L(p,q,\alpha)}}{(1-|z|)^{\alpha+n/p}}, \qquad z \in B.$$

Показатель $\alpha + n/p$ наилучший, т.е. его уменьшить нельзя.

Доказательство. Положим вначале $0 < q < \infty$. Тогда неравенство из Следствия 2.2

$$M_\infty(f;\rho) \leq C(p,n)\,\frac{M_p(f;\sqrt{\rho})}{(1-\rho)^{n/p}}, \qquad 0 \leq \rho < 1,$$

возведем в степень q,

$$(1-\rho)^{nq/p}\, M_\infty^q(f;\rho) \leq C\, M_p^q(f;\sqrt{\rho}),$$

$$(1-\rho)^{\alpha q-1}\,(1-\rho)^{nq/p}\, M_\infty^q(f;\rho) \leq C\,(1-\rho)^{\alpha q-1}\, M_p^q(f;\sqrt{\rho}),$$

и проинтегрируем с весом $(1-\rho)^{\alpha q-1}$ по интервалу $(r,1)$,

$$\int_r^1 (1-\rho)^{nq/p+\alpha q-1}\, M_\infty^q(f;\rho)\,d\rho \leq C \int_r^1 (1-\rho)^{\alpha q-1}\, M_p^q(f;\sqrt{\rho})\,d\rho \leq C\|f\|^q_{H(p,q,\alpha)}.$$

Далее воспользуемся монотонностью средних $M_\infty(f;\rho)$ по радиальной переменной ρ, или же по принципу максимума для голоморфной функции

$$\begin{aligned}\|f\|^q_{H(p,q,\alpha)} &\geq C\int_r^1 (1-\rho)^{nq/p+\alpha q-1}\, M^q_\infty(f;\rho)\,d\rho \geq \\ &\geq C\,M^q_\infty(f;r)\int_r^1 (1-\rho)^{q(n/p+\alpha)-1}\,d\rho = C\,M^q_\infty(f;r)\,\frac{(1-\rho)^{q(n/p+\alpha)}}{-q(n/p+\alpha)}\bigg|_r^1 = \\ &= C\,M^q_\infty(f;r)\,\frac{(1-r)^{q(n/p+\alpha)}}{q(n/p+\alpha)} = C\,(1-r)^{q(n/p+\alpha)}\,M^q_\infty(f;r),\end{aligned}$$

или

$$(1-r)^{n/p+\alpha}\,M_\infty(f;r) \leq C\|f\|_{H(p,q,\alpha)}, \qquad 0\leq r<1,$$

что и требовалось показать.

Теперь положим $q=\infty$. В неравенстве из Следствия 2.2

$$M_\infty(f;\rho) \leq C(p,n)\,\frac{M_p(f;\sqrt{\rho})}{(1-\rho)^{n/p}}, \qquad 0\leq\rho<1,$$

просто возьмем супремум по интервалу $(r,1)$,

$$(1-\rho)^\alpha\,(1-\rho)^{n/p}\,M_\infty(f;\rho) \leq C\,(1-\rho)^\alpha\,M_p(f;\sqrt{\rho}),$$

$$\sup_{r<\rho<1}(1-\rho)^{\alpha+n/p}\,M_\infty(f;\rho) \leq C\sup_{r<\rho<1}(1-\rho)^\alpha\,M_p(f;\sqrt{\rho}) \leq C\|f\|_{H(p,\infty,\alpha)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\|f\|_{H(p,\infty,\alpha)} &\geq C\sup_{r<\rho<1}(1-\rho)^{\alpha+n/p}\,M_\infty(f;\rho) \geq \\ &\geq C\,M_\infty(f;r)\sup_{r<\rho<1}(1-\rho)^{\alpha+n/p} = C(1-r)^{\alpha+n/p}\,M_\infty(f;r),\end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Теперь, заметим, что показатель $\alpha+n/p$ нельзя заменить на меньший. Голоморфная функция

$$f(z) = \frac{1}{(1-z_1)^\beta} \in H(p,q,\alpha), \qquad 0<\beta<\alpha+\frac{n}{p},$$

принадлежит классу $H(p,q,\alpha)$ (см. Лемму 1.2 (i)) и удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned}|f(z)| = \frac{1}{|1-z_1|^\beta} &\leq \frac{1}{(1-|z_1|)^\beta} = \frac{(1+|z_1|)^\beta}{(1-|z_1|)^\beta(1+|z_1|)^\beta} \leq \frac{2^\beta}{(1-|z_1|^2)^\beta} \leq \\ &\leq \frac{2^\beta}{(1-|z_1|^2-\cdots-|z_n|^2)^\beta} = \frac{2^\beta}{(1-|z|^2)^\beta} \leq \frac{2^\beta}{(1-|z|)^\beta} < \frac{2^\beta}{(1-|z|)^{\alpha+n/p}}.\end{aligned}$$

Поскольку число $\beta < \alpha + n/p$ произвольно и можно выбрать сколь угодно близким к $\alpha + n/p$, то заключаем, что показатель $\alpha + n/p$ нельзя заменить на любой меньший $\alpha + n/p - \varepsilon$, ибо потом можно выбрать $\alpha + n/p - \varepsilon < \beta < \alpha + n/p$. $\square$

Теорема 2.2 позволяет заключить, что для каждой точки $z \in B$ линейный функционал $z \mapsto f(z)$, называемый "значением в точке" (point evaluation), непрерывен на $H(p, q, \alpha)$.

Этот факт, в свою очередь, позволяет заключить, что пространство $H(p, q, \alpha)$ замкнуто в $L(p, q, \alpha)$.

Лемма 2.3. *Если* $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$, *то* $H(p, q, \alpha)$ *— замкнутое подпространство пространства* $L(p, q, \alpha)$, *и следовательно при* $1 \leq p, q \leq \infty$ $H(p, q, \alpha)$ *банахово с нормой* $\|\cdot\|_{L(p,q,\alpha)}$.

Доказательство. Пусть $f_j \in H(p, q, \alpha) \subset L(p, q, \alpha)$, $j = 1, 2, \ldots$ и $f_j \longrightarrow f$, $j \to \infty$ по норме пространства $L(p, q, \alpha)$, т.е. $\|f_j - f\|_{L(p,q,\alpha)} \to 0$ при $j \to \infty$. Ясно, что $f \in L(p, q, \alpha)$. Докажем, что $f \in H(p, q, \alpha)$, или же, функция $f \in L(p, q, \alpha)$ эквивалентна некоторой функции из $H(p, q, \alpha)$.

Из сходимости $\{f_j\}$ по норме следует, что существует подпоследовательность $\{f_{j_k}\}$, почти всюду сходящаяся поточечно к предельной функции $f(z)$, т.е $f_{j_k}(z) \longrightarrow f(z)$ п.в. при $k \to \infty$.

С другой стороны, согласно Теореме 2.2 для любого компакта $K \subset B$

$$\max_{z \in K} |f_j(z) - f_i(z)| \leq C(K, p, q, \alpha, n) \, \|f_j - f_i\|_{L(p,q,\alpha)}, \qquad j, i \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{f_j\}$ равномерно фундаментальна (и значит сходящаяся) на компактах в B, следовательно сходится к некоторой голоморфной функции $g(z) \in H(B)$. Поэтому $f(z) = g(z)$ для почти всех $z \in B$, следовательно функция $f(z)$ продолжается до голоморфной функции $g(z)$, и можем отождествить $f(z) = g(z)$ для всех $z \in B$, а значит $f \in H(B)$, $f \in H(p, q, \alpha)$, что и требовалось показать. $\square$

Следствие 2.1. *Если* $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, *то* A^p_α *— замкнутое подпространство пространства* L^p_α, *и следовательно при* $1 \leq p < \infty$ A^p_α *банахово с нормой* $\|\cdot\|_{L^p_\alpha}$.

Теперь перейдем к оператору растяжения в классах Бергмана $A^p_\alpha(B)$, см. [43], [26], и покажем, что он непрерывен.

Лемма 2.4. *Для произвольной функции* $f(z) \in A^p_\alpha(B),\ 0 < p < \infty,\ \alpha > -1$, *и ее растянутой функции* $f_\lambda(z) := f(\lambda z),\ 0 < \lambda < 1$,

$$\|f - f_\lambda\|_{L^p_\alpha} \longrightarrow 0 \qquad \textit{при} \qquad \lambda \to 1^-. \tag{2.8}$$

Доказательство. Запишем бергмановскую норму функции $f - f_\lambda$ и оценим, расщепляя интеграл по шару B_δ с некоторым произвольным радиусом $\delta,\ 0 < \delta < 1$, и остальной части шара B,

$$\begin{aligned}\|f - f_\lambda\|^p_{L^p_\alpha} &= \int_B (1-|z|)^\alpha\, |f(z) - f_\lambda(z)|^p\, dV(z) = \\ &= \int\limits_{|z|<\delta} (1-|z|)^\alpha\, |f(z) - f_\lambda(z)|^p\, dV(z) + \int\limits_{\delta<|z|<1} (1-|z|)^\alpha\, |f(z) - f_\lambda(z)|^p\, dV(z) \le \\ &\le \int\limits_{|z|<\delta} (1-|z|)^\alpha\, |f(z) - f_\lambda(z)|^p\, dV(z) + C_p \int\limits_{\delta<|z|<1} (1-|z|)^\alpha\, |f(z)|^p\, dV(z). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь воспользовались свойством монотонного возрастания средних $M_p(f;r)$ относительно r. Далее, для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon),\ 0 < \delta < 1$, настолько близким к единице, чтобы последний интеграл в (2.9) стал меньше $\varepsilon/2$, а затем устремляя $\lambda \to 1^-$, можно сделать так, чтобы и первый интеграл в (2.9) стал меньше $\varepsilon/2$. □

Теперь покажем, что растяжения непрерывны в классах $H(p, q, \alpha)$, см. [26].

Лемма 2.5. *Для произвольной функции* $f(z) \in H(p, q, \alpha),\ 0 < p \le \infty,\ 0 < q < \infty,\ \alpha > 0$, *и ее растянутой функции* $f_\lambda(z) := f(\lambda z),\ 0 < \lambda < 1$,

$$\|f - f_\lambda\|_{L(p,q,\alpha)} \longrightarrow 0 \qquad \textit{при} \qquad \lambda \to 1^-. \tag{2.10}$$

Доказательство. Свойство монотонного возрастания средних $M_p(f;r)$ относительно r позволяет оценить

$$\begin{aligned} M^p_p(f - f_\lambda; r) &= \int_S |f(r\zeta) - f(\lambda r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta) \le \\ &\le \max\left\{2^{p-1}, 1\right\} \int_S \Big(|f(r\zeta)|^p + |f(\lambda r\zeta)|^p\Big)\, d\sigma(\zeta) \le \\ &\le 2\max\left\{2^{p-1}, 1\right\} \int_S |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta) = C_p\, M^p_p(f;r), \qquad 0 < p < \infty. \end{aligned}$$

При $p = \infty$, очевидно, имеет место такое же неравенство, и поэтому

$$M_p(f - f_\lambda; r) \le C_p\, M_p(f; r) \qquad \text{для всех} \qquad 0 < p \le \infty.$$

Теперь запишем смешанную норму функции $f - f_\lambda$ и оценим, расщепляя интеграл по интервалу $(0,1)$ некоторым произвольным δ, $0 < \delta < 1$,

$$\begin{aligned} \|f - f_\lambda\|^q_{L(p,q,\alpha)} &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(f - f_\lambda; r)\, dr \le \\ &\le \int_0^\delta (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(f - f_\lambda; r)\, dr + C_p^q \int_\delta^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(f; r)\, dr. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$, $0 < \delta < 1$, настолько близким к единице, чтобы последний интеграл в (2.11) стал меньше $\varepsilon/2$, а затем устремляя $\lambda \to 1^-$, можно сделать так, чтобы и первый интеграл в (2.11) стал меньше $\varepsilon/2$. $\square$

2.3 Неравенства Харди и другие интегральные неравенства

Широко известны классические неравенства Харди, см., например, [11], [25],

$$\int_0^1 x^{-\beta-1} \left(\int_0^x h(t)\, dt\right)^p dx \le C(p,\beta) \int_0^1 x^{p-\beta-1}\, h^p(x)\, dx, \tag{2.12}$$

$$\int_0^1 (1-r)^{\beta-1} \left(\int_0^r h(t)\, dt\right)^p dr \le C(p,\beta) \int_0^1 (1-r)^{p+\beta-1}\, h^p(r)\, dr, \tag{2.13}$$

$$\int_0^1 (1-r)^{-\beta-1} \left(\int_r^1 h(t)\, dt\right)^p dr \le C(p,\beta) \int_0^1 (1-r)^{p-\beta-1}\, h^p(r)\, dr, \tag{2.14}$$

где $1 \le p < \infty$, $\beta > 0$, $h(r) \ge 0$.

Отметим, что неравенство (2.14) выводится из (2.12) линейной заменой переменных интегрирования.

Для последующих доказательств нам понадобятся также обобщения неравенств (2.13) и (2.14).

Лемма 2.6. *Пусть $1 \le p < \infty$, $\gamma > 0$, $h(r) \ge 0$. Для положительной непрерывной функции $\varphi(r)$, $0 \le r < 1$, найдутся постоянные $b \in \mathbb{R}$, $\gamma - pb > 0$, и $0 \le r_0 < 1$ такие, что*

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^b} \nearrow \qquad \text{при} \quad r_0 \le r < 1. \tag{2.15}$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^{\gamma-1}}{\varphi^p(r)} \left(\int_0^r h(t)\,dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,b,r_0) \int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)}\, h^p(r)\,dr. \tag{2.16}$$

Доказательство. Применим неравенство Харди (2.13) по отношению к функции $\frac{(1-r)^b}{\varphi(r)}\,h(r)$ и с индексом $\beta = \gamma - pb > 0$,

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-pb-1} \left(\int_0^r \frac{(1-t)^b}{\varphi(t)}\, h(t)\,dt\right)^p dr \le C \int_0^1 (1-r)^{p+\gamma-pb-1} \left(\frac{(1-r)^b}{\varphi(r)}\, h(r)\right)^p dr,$$

где постоянная C зависит лишь от p, γ, b. Ввиду условия (2.15), монотонного убывания функции $\frac{(1-r)^b}{\varphi(r)}$ на интервале $(r_0, 1)$ и непрерывности на $[0, 1)$ получаем

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-pb-1} \frac{(1-r)^{pb}}{\varphi^p(r)} \left(\int_0^r h(t)\,dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,b,r_0) \int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)}\, h^p(r)\,dr,$$

что совпадает с (2.16). □

Замечание 2.3. *Схожее с неравенством* (2.16) *другое неравенство типа Харди с участием нормальных весовых функций можно найти в [38].*

Нам понадобится также другая разновидность неравенства (2.16).

Лемма 2.7. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $h(r) \ge 0$. *Для положительной непрерывной функции* $\varphi(r)$, $0 \le r < 1$, *найдутся постоянные* $a \in \mathbb{R}$, $\gamma - pa < 0$, *и* $0 \le r_0 < 1$ *такие, что*

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} \searrow \qquad \text{при} \quad r_0 \le r < 1. \tag{2.17}$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^{\gamma-1}}{\varphi^p(r)} \left(\int_r^1 h(t)\,dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,a,r_0) \int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)}\, h^p(r)\,dr. \tag{2.18}$$

Доказательство. Применим неравенство Харди (2.14) по отношению к функции $\frac{(1-r)^a}{\varphi(r)}\,h(r)$ и с индексом $-\beta = \gamma - pa < 0$,

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-pa-1} \left(\int_r^1 \frac{(1-t)^a}{\varphi(t)}\, h(t)\,dt\right)^p dr \le C \int_0^1 (1-r)^{p+\gamma-pa-1} \left(\frac{(1-r)^a}{\varphi(r)}\, h(r)\right)^p dr,$$

где постоянная C зависит лишь от p, γ, a. Ввиду условия (2.17), монотонного возрастания функции $\frac{(1-r)^a}{\varphi(r)}$ на интервале $(r_0, 1)$ и непрерывности на $[0, 1)$ получаем

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-pa-1} \frac{(1-r)^{pa}}{\varphi^p(r)} \left(\int_r^1 h(t)\,dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,a,r_0) \int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)}\, h^p(r)\,dr,$$

что совпадает с (2.18). □

Замечание 2.4. *Условия монотонности в Леммах 2.6 и 2.7 можно без какого-либо ущерба заменить на более слабое условие почти монотонности.*

Следующая лемма является вариантом схожих оценок из [39], [37], [8], [45].

Лемма 2.8. *Пусть φ — нормальная функция с индексами a и b $(0 < a < b)$ и с индексом пары α $(\alpha > b-1)$ в смысле Определений 2.3–2.4.*

Если $\ b-\alpha < \beta < 1+a$, *то*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^{\beta}}\,d\rho \le C(\alpha,\beta,a,b,r_0)\,\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}}, \qquad 0\le r<1. \tag{2.19}$$

Доказательство. Условие $\beta < 1+a$ обеспечивает сходимость интеграла (2.19). Достаточно доказать неравенство (2.19) для r, близких к 1. Возьмем $r,\ r_0 < r < 1$, и разобьем интеграл (2.19) на три части,

$$\begin{aligned} J &:= \int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^{\beta}}\,d\rho = \\ &= \left(\int_0^{r_0} + \int_{r_0}^{r} + \int_r^1\right) \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^{\beta}}\,d\rho =: J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Интеграл J_1 ограничен некоторой постоянной $C(\alpha,\beta,r_0)$. Для оценок интегралов J_2 и J_3 используем условия нормальности (2.1) и Лемму 1.3,

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{r_0}^{r} \frac{\varphi(\rho)}{(1-\rho)^b}\,\frac{(1-\rho)^b}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^{\beta}}\,d\rho \le C\frac{\varphi(r)}{(1-r)^b}\int_{r_0}^{r}\frac{(1-\rho)^{b-\beta}}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,d\rho \le \\ &\le C(\alpha,\beta,b)\,\frac{\varphi(r)}{(1-r)^b}\,\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\beta-b}} = C(\alpha,\beta,b)\,\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\beta > b-\alpha > a-\alpha$, то аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{r}^{1} \frac{\varphi(\rho)}{(1-\rho)^a}\,\frac{(1-\rho)^a}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^{\beta}}\,d\rho \le C\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a}\int_{r}^{1}\frac{(1-\rho)^{a-\beta}}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,d\rho \le \\ &\le C(\alpha,\beta,a)\,\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a}\,\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\beta-a}} = C(\alpha,\beta,a)\,\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы. □

2.4 Ограниченность операторов типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой $H(p,q,\alpha)$

Для успешной оценки операторов типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой $H(p,q,\alpha)$ сперва потребуются оценки интегральных средних операторов $Q_{\varphi,\psi}$ и $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$.

Лемма 2.9. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\alpha > -1$, $\{\varphi, \psi\}$ *— пара положительных весовых функций. Тогда имеет место оценка*

$$M_p\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f); r\big) \le C(p,n,\alpha)\,\psi(r)\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_p(f;\rho)\,d\rho, \quad 0 \le r < 1. \tag{2.20}$$

Доказательство. Перейдем к полярным координатам в интегральном представлении $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(z)$,

$$\big|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(z)\big| \le \psi(z)\int_B \frac{\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\,|f(w)|\,dV(w) =$$
$$= 2n\,\psi(z)\int_0^1 \left[\int_S \frac{|f(\rho\eta)|}{|1-\langle z,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\,d\sigma(\eta)\right]\varphi(\rho)\,\rho^{2n-1}\,d\rho,$$

и перепишем его в виде

$$\big|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(r\zeta)\big| \le 2n\,\psi(r)\int_0^1 \left[\int_S \frac{|f(\rho\eta)|}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\,d\sigma(\eta)\right]\varphi(\rho)\,\rho^{2n-1}\,d\rho = \tag{2.21}$$
$$= 2n\,\psi(r)\int_0^1 g(r,\rho,\zeta)\,\varphi(\rho)\,\rho^{2n-1}\,d\rho, \tag{2.22}$$

где обозначено

$$g(r,\rho,\zeta) := \int_S \frac{|f(\rho\eta)|}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\,d\sigma(\eta).$$

Если $p=\infty$, то немедленно получаем из (2.21) по Лемме 1.2,

$$M_\infty\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f); r\big) \le 2n\,\psi(r)\int_0^1 M_\infty(f;\rho)\sup_{\zeta\in S}\left[\int_S \frac{d\sigma(\eta)}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\right]\varphi(\rho)\,\rho^{2n-1}\,d\rho \le$$
$$\le C(n,\alpha)\,\psi(r)\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_\infty(f;\rho)\,d\rho.$$

Если $p=1$, то интегрированием (2.21) немедленно получаем требуемое неравенство (2.20), воспользовавшись теоремой Фубини и Леммой 1.2.

Если $1<p<\infty$, то по неравенству Гельдера и Лемме 1.2

$$g(r,\rho,\zeta) \le \left(\int_S \frac{|f(\rho\eta)|^p\,d\sigma(\eta)}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\right)^{1/p}\left(\int_S \frac{d\sigma(\eta)}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\right)^{1/p'} \le$$
$$\le \frac{C(p,n,\alpha)}{(1-r\rho)^{(1+\alpha)/p'}}\left(\int_S \frac{|f(\rho\eta)|^p\,d\sigma(\eta)}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\right)^{1/p},$$

где p' — сопряженный индекс, $1/p+1/p'=1$. Далее, проинтегрируем по переменной ζ

на сфере S и вновь воспользуемся Леммой 1.2,

$$\begin{aligned}\big\|g(r,\rho,\cdot)\big\|^p_{L^p(S;d\sigma)} &\le \frac{C(p,n,\alpha)}{(1-r\rho)^{(1+\alpha)p/p'}}\int_S\left(\int_S\frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\right)|f(\rho\eta)|^p\,d\sigma(\eta)\le\\ &\le \frac{C(p,n,\alpha)}{(1-r\rho)^{(1+\alpha)p/p'}(1-r\rho)^{1+\alpha}}\int_S|f(\rho\eta)|^p\,d\sigma(\eta)=\\ &=\frac{C(p,n,\alpha)}{(1-r\rho)^{(1+\alpha)p}}\,M_p^p(f;\rho),\end{aligned}$$

или

$$\big\|g(r,\rho,\cdot)\big\|_{L^p(S;d\sigma)}\le\frac{C(p,n,\alpha)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_p(f;\rho). \tag{2.23}$$

Теперь вернемся к неравенству (2.22) и применим неравенство Минковского, а затем — оценку (2.23),

$$\begin{aligned}M_p\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f);r\big)&\le 2n\,\psi(r)\int_0^1\big\|g(r,\rho,\cdot)\big\|_{L^p(S;d\sigma)}\,\varphi(\rho)\,\rho^{2n-1}\,d\rho\le\\ &\le C(p,n,\alpha)\,\psi(r)\int_0^1\frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_p(f;\rho)\,d\rho,\end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы. □

Перейдем к непосредственному доказательству основной теоремы Главы 2.

Доказательство Теоремы 2.1. Поскольку $\big|Q_{\varphi,\psi}(f)(z)\big|\le\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(|f|)(z)$, то достаточно доказать лишь ограниченность (2.6) оператора $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(|f|)$.

Вначале положим $1\le q<\infty$. По Лемме 2.9 имеем

$$M_p\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f);r\big)\le C(p,n,\alpha)\,\psi(r)\int_0^1\frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_p(f;\rho)\,d\rho,\quad 0\le r<1. \tag{2.24}$$

Проинтегрируем теперь по радиальной переменной так, чтобы получить смешанную норму,

$$\begin{aligned}\big\|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)\big\|^q_{L(p,q,\beta)}&=\int_0^1(1-r)^{\beta q-1}M_p^q\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f);r\big)\,dr\le\\ &\le C\int_0^1(1-r)^{\beta q-1}\,\psi^q(r)\left[\int_0^1\frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr.\end{aligned}$$

Далее воспользуемся условием (2.2) Определения 2.4 нормальной пары, а затем разобьем интеграл на две части,

$$\big\|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)\big\|^q_{L(p,q,\beta)}\le C\int_0^1\frac{(1-r)^{\alpha q+\beta q-1}}{\varphi^q(r)}\left[\int_0^1\frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr=$$

$$\le C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q+\beta q-1}}{\varphi^q(r)}\left[\left(\int_0^r+\int_r^1\right)\frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr \le$$

$$\le I_1+I_2. \tag{2.25}$$

Интегралы I_1 и I_2 оценим по отдельности, используя неравенства типа Харди из Лемм 2.6 и 2.7. По отношению к интегралу I_1 можно применить неравенство (2.16), ибо условие $\alpha q+\beta q-bq>0$ равносильно $\beta>b-\alpha$,

$$\begin{aligned} I_1 := C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q+\beta q-1}}{\varphi^q(r)}\left[\int_0^r \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr \le \\ \le C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q+\beta q-1+q}}{\varphi^q(r)}\left[\frac{\varphi(r)}{(1-r^2)^{1+\alpha}}\,M_p(f;r)\right]^q dr \le \\ \le C\int_0^1 (1-r)^{\beta q-1}M_p^q(f;r)\,dr = C(n,p,q,\beta,\alpha,b,r_0)\,\|f\|^q_{L(p,q,\beta)}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

По отношению к интегралу I_2 можно применить неравенство (2.18), ибо условие $\beta q-q-aq<0$ равносильно $\beta<1+a$,

$$\begin{aligned} I_2 := C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q+\beta q-1}}{\varphi^q(r)}\left[\int_r^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr \le \\ \le C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta q-q-1}}{\varphi^q(r)}\left[\int_r^1 \varphi(\rho)\,M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr \le \\ \le C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta q-q-1+q}}{\varphi^q(r)}\Big[\varphi(r)\,M_p(f;r)\Big]^q dr = \\ = C\int_0^1 (1-r)^{\beta q-1}M_p^q(f;r)\,dr = C(n,p,q,\beta,\alpha,a,r_0)\,\|f\|^q_{L(p,q,\beta)}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Неравенства (2.25), (2.26), (2.27) вместе дают требуемое неравенство

$$\big\|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)\big\|_{L(p,q,\beta)} \le C\,\|f\|_{L(p,q,\beta)},$$

где постоянная $C=C(n,p,q,\beta,\alpha,a,b,r_0)>0$ зависит лишь от указанных параметров.

Теперь положим $q=\infty$. Из неравенства (2.24) с применением Леммы 2.8 выводим

$$\begin{aligned} M_p\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f);r\big) \le C(p,n,\alpha)\,\psi(r)\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^\beta}\,(1-\rho)^\beta\,M_p(f;\rho)\,d\rho \le \\ \le C\,\psi(r)\,\|f\|_{L(p,\infty,\beta)}\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^\beta}\,d\rho \le \\ \le C\,\psi(r)\,\|f\|_{L(p,\infty,\beta)}\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}} \le \\ \le C(p,n,\alpha,\beta,a,b,r_0)\,\|f\|_{L(p,\infty,\beta)}\frac{1}{(1-r)^\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left\|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)\right\|_{L(p,\infty,\beta)} \leq C\,\|f\|_{L(p,\infty,\beta)},$$

где постоянная $C = C(p,n,\alpha,\beta,a,b,r_0) > 0$ зависит лишь от указанных параметров. Этим Теорема 2.1 полностью доказана. $\square$

Глава 3

Двойственность в пространствах функций, плюригармонических в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$

3.1 Весовые пространства плюригармонических функций

Положительная, непрерывная и убывающая функция Φ, определенная на $[0, 1)$, называется *весовой функцией*, если

$$\lim_{r \to 1} \Phi(r) = 0.$$

Положительная, конечная борелевская мера η на $[0, 1)$ называется *весовой мерой*, если ее носитель не принадлежит никакому интервалу вида $[0, \rho)$, $0 < \rho < 1$.

В настоящей главе мы рассматриваем проблему двойственности в случае плюригармонических функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Используются прежние обозначения, а также $h(B)$ — векторное пространство комплекснозначных, плюригармонических в B функций с обычным скалярным произведением и поточечным сложением.

Пусть $\Phi(r)$ является весовой функцией и пусть η является весовой мерой. Продолжим Φ на всю B, определяя ее Φ в точке $z \in B$ следующим образом $\Phi(z) = \Phi(|z|)$.

Для функций $u \in h(B)$ определим нормы

$$\|u\|_\Phi = \sup\{|u(z)|\Phi(z); z \in B\} = \sup\{M_\infty(u,r)\Phi(r); r < 1\},$$

$$\|u\|_\eta = \int_S \int_0^1 |u(r\xi)|\, d\eta(r) d\sigma(\xi) = \int_0^1 M_1(u,r)\, d\eta(r),$$

где

$$M_\infty(u,r) = \sup\{|u(z)|;\ |z| = r\}, \qquad M_1(u,r) = \int_S |u(r\xi)|\, d\sigma(\xi).$$

Теперь определим следующие линейные, нормированные пространства плюригармонических функций:

$h_\infty(\Phi) = \{u \in h(B); \|u\|_\Phi < \infty\}$,

$h_0(\Phi) = \{u \in h(B); \lim_{r\to 1} M_\infty(u,r)\Phi(r) = 0\}$,

$h^1(\eta) = \{u \in h(B); \|u\|_\eta < \infty\}$.

Ввиду вложения $h_0(\Phi) \subset h_\infty(\Phi)$, мы можем использовать норму $\|u\|_\Phi$ на $h_0(\Phi)$.

Нами решена следующая проблема для плюригармонических функций: для данной весовой функции мы находим конечную, положительную борелевскую меру η на $[0,1)$ такую, что $h^1(\eta)^* \cong h_\infty(\Phi)$ и $h_0(\Phi)^* \cong h^1(\eta)$.

Впервые упомянутую задачу формулировали и дали решение Шилдс и Вильямс для аналитических и гармонических функций в единичном круге комплексной плоскасти. Недавно в [36] А. Петросяном и Е. Мкртчяном задача была решена для функций, гармонических в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$.

3.2 Предварительные утверждения

В следующих двух предложениях установливаются некоторые основные факты о вышеупомянутых пространствах.

Предложение 3.1. *Обозначим через h любое из пространств $h_\infty(\Phi), h_0(\Phi)$ или $h^1(\eta)$. Тогда имеет место следующее:*

(i) *Если b является подмножеством множества h, то функции из b равномерно ограничены на каждом компактном подмножестве $K \subset B$.*

(ii) *Если u_n является последовательностью Коши в h,то она сходится равномерно на каждом компактном подмножестве $K \subset B$.*

(iii) *Функционал значение в точке (point evaluation) в любой точке B предстовляет собой линейный ограниченный функционал на h.*

(iv) *h является банаховым пространством.*

(v) *$h_0(\Phi)$ есть замкнутое подпространство пространства $h_\infty(\Phi)$.*

Доказательство. В [8, Prop. 2] было получено неравенство, которое по нашим обозначениям будет иметь следующий вид $u \in h^1(\eta)$:

$$|u(z)| \leq \frac{2^{2n}}{(1-|z|)^{2n-1}} \left(\int_{(1+|z|)/2}^{1} |d\eta(r)| \right)^{-1} \|u\|_\eta, \qquad z \in B.$$

Это дает нам доказательсво для (i) и для (iii) когда $u \in h^1(\eta)$. В случае $h_\infty(\Phi)$ и $h_0(\Phi)$ эти утверждения очевидны. Легко видеть также, что (ii) следует из (i). Необходимо только установить полноту, которая легко доказывается в случае $h_\infty(\Phi)$ и $h_0(\Phi)$. Пусть $u_j \in h_\infty(\Phi)$. На любом компактном подмножестве K функция $\Phi(z)$ не принимает значение нуль, следовательно,

$$|u_j(z) - u_k(z)| \leq C\varphi(z)|u_j(z) - u_k(z)| = C\|u_j - u_k\|_\Phi, \qquad z \in K.$$

Поскольку u_j есть фундаментальная последовательность в $h_\infty(\Phi)$,то u_j сходится равномерно к некоторой плюригармонической в B функции u, на компактных подмножествах $K \subset B$. Очевидно, u_j сходится к u в $h_\infty(\Phi)$. Теперь предположим что u_j есть фундаментальная последовательность в $h^1(\eta)$, и пусть K компактное подмножество B. Из условии (ii) следует, что существует постоянная $C = C(K)$ такая, что $\max_{z\in K} |u(z)| \leq C\|u\|_\eta$ для любой $u \in h^1(\eta)$. Таким образом $|u_j(z) - u_k(z)| \leq C\|u_j - u_k\|_\eta$ для любой $z \in K$ и для любых j, k. Так как u_j — фундаментальная последовательность в $h^1(\eta)$, то u_j сходится равномерно к некоторой плюригармонической в B функции u, на компактных подмножествах $K \subset B$. И снова в силу фундаментальности u_j мы имеем

$$\int_S \int_0^1 \mid u_j(r\xi) \mid \, d\eta(r) d\sigma(\xi) = \|u_j\|_\eta \leq \|u_j - u_k\|_\eta + \|u_k\|_\eta \leq C.$$

По лемме Фату

$$\|u\|_\eta = \int_S \int_0^1 \mid u(r\xi) \mid \, d\eta(r) d\sigma(\xi) \leq C,$$

т.е. $u \in h^1(\eta)$. Условие (v) следует из (iv) □

Для $u \in h(B)$ обозначим $u_\rho(z) = u(\rho z)$, $0 \leq \rho \leq 1$.

Предложение 3.2. (i) *Если $u \in h^1(\eta)$ или $u \in h_0(\Phi)$, то $u_\rho \to u$ по норме, как только $\rho \to 1$.*

(ii) *Если $u \in h_\infty(\Phi)$, то $\|u_\rho\|_\Phi \leq \|u\|_\Phi$ и $u_\rho \to u$ поточечно в B.*

(iii) *Множество плюригармонических многочленов всюду плотно в $h^1(\eta)$ и в $h_0(\Phi)$.*

(iv) *Каждая $u \in h_\infty(\Phi)$ является (точечным) пределом некоторой ограниченной по норме последовательности многочленов.*

Доказательство. (i) В случае $h_0(\Phi)$ доказательство очевидно. Для $u \in h^1(\eta)$ и $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < 1$ такую, что

$$\int_\delta^1 M_1(u, r) \, d\eta(r) < \varepsilon.$$

Так как $M_1(u_\rho, r) \leq M_1(u, r)$, мы имеем

$$\int_\delta^1 M_1(u_\rho, r) \, d\eta(r) < \varepsilon, \qquad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Выберем ρ такое, что $|u - u_\rho| < \varepsilon$ на диске $|z| \leq \delta$. Тогда имеет место следующее

$$\begin{aligned} \|u_\rho - u\|_\eta &= \int_0^1 \int_S |u(\rho r\xi) - u(r\xi)| \, d\sigma(\xi) d\eta(r) \leq \\ &\leq \int_0^\delta \int_S |u(\rho r\xi) - u(r\xi)| \, d\sigma(\xi) d\eta(r) + \int_\delta^1 \int_S (|u(\rho r\xi)| + |u(r\xi)|) \, d\sigma(\xi) d\eta(r) \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{|z| \leq \delta} d\eta(r) d\sigma(\xi) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Часть (ii) очевидо получается из принципа максимума и непрерывности.

Хорошо известно, что любую функцию, плюригармоническую в окресности $\bar{B}$, можно равномерно на $\bar{B}$ приближать плюригармоническими многочленами. Используя этот факт, мы получем доказательства для (iii) и (iv). □

3.3 Двойственность, проекции, воспроизводящие ядра

Пусть Φ — заданная весовая функция, мы хотим найти весовую меру η такую, чтобы имели место следующие соотношения двойственности

$$h^1(\eta)^* \cong h_\infty(\Phi), \qquad h_0(\Phi)^* \cong h^1(\eta).$$

Это означает, что если $u \in h_\infty(\Phi)$ и если мы определим функционал l_u через некоторую билинейную форму $l_u(v) = \langle u, v\rangle_h$ для любой $v \in h^1(\eta)$, то $l_u \in h^1(\eta)^*$, и имеет место неравенство $\|l_u\| \leq C\|u\|_\Phi$.

Обратно, если $l \in h^1(\eta)^*$, то существует единственная функция $u \in h_\infty(\Phi)$ такая, что $l = l_u$ и имеет место $\|u\|_\Phi \leq C\|l\|$.

Аналогичные замечания относятся и ко второму соотношению двойственности.

Предположим, что имеем некоторую весовую функцию Φ и весовую меру η. Введем меру

$$d\mu = \Phi\, d\eta \tag{3.1}$$

и меру μ', определенную так, чтобы имело место

$$\int_0^1 f(r)\, d\mu'(r) = \int_0^1 f(r^2)\, d\mu(r), \qquad f \in C[0,1].$$

Предложение 3.3. *Пусть*

$$\begin{cases} t_m := \displaystyle\int_0^1 r^m\, d\mu'(r) = \int_0^1 r^{2m}\, d\mu(r), \qquad m = 0, 1, 2, \dots \\ k_w(z) := \displaystyle\sum_{|p|=0}^{\infty} t_{|p|}^{-1} c(n, |p|)\langle w, z\rangle^{|p|} + \sum_{|p|=1}^{\infty} t_{|p|}^{-1} c(n, |p|)\langle z, w\rangle^{|p|}, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k, \quad z, w \in \mathbb{C}^n$,

$$c(n, |p|) := \frac{(n-1+|p|)!}{(n-1)!|p|!}$$

и p является n-индексом: $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n), \quad p! = \prod_{k=1}^n p_k!, \quad |p| = \sum_{k=1}^n p_k$.

Определим билинейное соотношение

$$\langle u, v\rangle_h := \int_S \int_0^1 u(r\xi)\, v(r\bar{\xi})\, \Phi(r)\, d\eta(r) d\sigma(\xi), \qquad u \in h_\infty(\Phi),\ v \in h^1(\eta). \tag{3.3}$$

Тогда k_w является плюригармонической функцией в $\{z;\ |z| < |w|^{-1}\}$ и представляет собой воспроизводящее ядро, связанное с билинейной формой (3.3), т.е.

$$u(w) = \langle u, k_w \rangle_h \qquad \text{для любой} \quad u \in h_\infty(\varPhi),$$

$$v(w) = \langle k_w, v \rangle_h \qquad \text{для любой} \quad v \in h^1(\eta).$$

Доказательство. Поскольку мера μ' не обращается в нуль ни в какой окресности точки 1, то

$$t_k \geq \int_\rho^1 r^k\, d\mu'(r) \geq \rho^k \int_\rho^1 d\mu'(r), \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда следует, что для любого $0 < \rho < 1$, $t_k^{-1} = O(\rho^{-k}),\ k \to \infty$.

Тогда, используя неравенство $|\langle z, w \rangle| \leq |z||w|$ и формулу Стирлинга мы получим, что последовательность в правой части выражения (3.2) абсолютно и равномерно сходится на любом компактном подмножестве в пространстве $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Таким образом, для каждой фиксированной z ядро k_w есть плюригармоническая в области $\{z : |z| < |w|^{-1}\}$ функция, и следовательно $k_w \in h_0(\varPhi) \cap h^1(\eta)$.

Вычислим некоторые интегралы,

$$\int_S \langle w, \xi \rangle^k \xi^p\, d\sigma(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{c(n, |p|)}\, w^p, & \text{если} \qquad |p| = k, \\[2ex] 0, & \text{если} \qquad |p| \neq k. \end{cases} \tag{3.4}$$

Действительно, воспользовавшись формулой разложения мультимонома, ортогональностью и интегралом (1.3), получим

$$\begin{aligned} \int_S \langle w, \xi \rangle^k \xi^p\, d\sigma(\xi) &= \int_S \left(\sum_{|\beta| = k} \frac{|\beta|!}{\beta!}\, w^\beta \bar{\xi}^\beta \right) \xi^p\, d\sigma(\xi) = \sum_{|\beta| = k} \frac{|\beta|!}{\beta!}\, w^\beta \int_S \bar{\xi}^\beta\, \xi^p\, d\sigma(\xi) = \\ &= \frac{|p|!}{p!}\, w^p \int_S \xi^p \bar{\xi}^p\, d\sigma(\xi) = \frac{|p|!}{p!}\, w^p \int_S \left|\xi^p\right|^2 d\sigma(\xi) = \\ &= \frac{|p|!}{p!}\, \frac{(n-1)!\, p!}{(n-1+|p|)!}\, w^p = \frac{(n-1)!\, |p|!}{(n-1+|p|)!}\, w^p = \frac{1}{c(n, |p|)}\, w^p. \end{aligned}$$

Пусть теперь $P_k(\xi) = \sum\limits_{|p| = k} a_p\, \xi^p$ — однородный многочлен степени k. Тогда

$$\int_S \langle w, \xi \rangle^k\, P_\ell(\xi)\, d\sigma(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{c(n, k)}\, P_k(w), & \text{если} \qquad \ell = k, \\[2ex] 0, & \text{если} \qquad \ell \neq k. \end{cases} \tag{3.5}$$

Действительно, воспользовавшись доказанным тождеством (3.4), выведем

$$\int_S \langle w,\xi\rangle^k\, P_k(\xi)\, d\sigma(\xi) = \int_S \langle w,\xi\rangle^k \left(\sum_{|p|=k} a_p\, \xi^p\right) d\sigma(\xi) = \sum_{|p|=k} a_p \int_S \langle w,\xi\rangle^k \xi^p\, d\sigma(\xi) =$$
$$= \sum_{|p|=k} a_p\, w^p\, \frac{1}{c(n,|p|)} = \frac{1}{c(n,k)}\, P_k(w).$$

Вновь, воспользовавшись формулой разложения мультимонома, ортогональностью и интегралом (1.3), вычислим

$$\int_S \langle \xi,w\rangle^k\, \overline{\xi}^p\, d\sigma(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{c(n,|p|)}\, \overline{w}^p, & \text{если} \quad |p|=k, \\ 0, & \text{если} \quad |p|\neq k, \end{cases} \tag{3.6}$$

поскольку

$$\int_S \langle \xi,w\rangle^k\, \overline{\xi}^p\, d\sigma(\xi) = \int_S \left(\sum_{|\beta|=k} \frac{|\beta|!}{\beta!}\, \xi^\beta\, \overline{w}^\beta\right) \overline{\xi}^p\, d\sigma(\xi) = \sum_{|\beta|=k} \frac{|\beta|!}{\beta!}\, \overline{w}^\beta \int_S \xi^\beta\, \overline{\xi}^p\, d\sigma(\xi) =$$
$$= \frac{|p|!}{p!}\, \overline{w}^p \int_S \xi^p \bar{\xi}^p\, d\sigma(\xi) = \frac{|p|!}{p!}\, \overline{w}^p \int_S \left|\xi^p\right|^2 d\sigma(\xi) =$$
$$= \frac{|p|!}{p!}\, \frac{(n-1)!\, p!}{(n-1+|p|)!}\, \overline{w}^p = \frac{(n-1)!\, |p|!}{(n-1+|p|)!}\, \overline{w}^p = \frac{1}{c(n,|p|)}\, \overline{w}^p.$$

Полагая теперь, что $Q_k(\overline{\xi}) = \sum\limits_{|p|=k} b_p\, \overline{\xi}^p$ — однородный многочлен степени k от аргумента $\overline{\xi}$, получаем

$$\int_S \langle \xi,w\rangle^k\, Q_\ell(\overline{\xi})\, d\sigma(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{c(n,k)}\, Q_k(\overline{w}), & \text{если} \quad \ell=k, \\ 0, & \text{если} \quad \ell\neq k. \end{cases} \tag{3.7}$$

Действительно,

$$\int_S \langle \xi,w\rangle^k\, Q_k(\overline{\xi})\, d\sigma(\xi) = \int_S \langle \xi,w\rangle^k \left(\sum_{|p|=k} b_p\, \overline{\xi}^p\right) d\sigma(\xi) = \sum_{|p|=k} b_p \int_S \langle \xi,w\rangle^k\, \overline{\xi}^p\, d\sigma(\xi) =$$
$$= \sum_{|p|=k} b_p\, \overline{w}^p\, \frac{1}{c(n,|p|)} = \frac{1}{c(n,k)}\, Q_k(\overline{w}).$$

Теперь рассмотрим произвольный плюригармонический многочлен, разложенный в сумму однородных многочленов,

$$u(z) = \sum_{k=0}^{l} P_k(z) + \sum_{k=1}^{q} Q_k(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{l} \sum_{|m|=k} a_m z^m + \sum_{k=1}^{q} \sum_{|m|=k} b_m \overline{z}^m, \qquad l\in\mathbb{Z}_+, \quad q\in\mathbb{N}.$$

Из формул (3.5) и (3.7) находим $\quad (z = r\xi)$

$$\langle u, k_w\rangle_h = \int_S \int_0^1 u(r\xi)\, k_w(r\bar{\xi})\, \varPhi(r)\, d\eta(r)\, d\sigma(\xi) =$$

$$= \int_S \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{l} P_k(z) + \sum_{k=1}^{q} Q_k(\overline{z}) \right) \left(\sum_{|p|=0}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}} \langle w, z\rangle^{|p|} + \sum_{|p|=1}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}} \langle z, w\rangle^{|p|} \right) d\mu(r)\, d\sigma(\xi) =$$

$$= \int_S \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{l} P_k(z) \sum_{|p|=0}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}} \langle w, z\rangle^{|p|} \right) d\mu(r)\, d\sigma(\xi) +$$

$$+ \int_S \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{l} P_k(z) \sum_{|p|=1}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}} \langle z, w\rangle^{|p|} \right) d\mu(r)\, d\sigma(\xi) +$$

$$+ \int_S \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{q} Q_k(\overline{z}) \sum_{|p|=0}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}} \langle w, z\rangle^{|p|} \right) d\mu(r)\, d\sigma(\xi) +$$

$$+ \int_S \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{q} Q_k(\overline{z}) \sum_{|p|=1}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}} \langle z, w\rangle^{|p|} \right) d\mu(r)\, d\sigma(\xi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \int_0^1 \left(\sum_{|p|=0}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}}\, r^{k+|p|} \int_S P_k(\xi)\, \langle w, \xi\rangle^{|p|}\, d\sigma(\xi) \right) d\mu(r) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{l} \int_0^1 \left(\sum_{|p|=1}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}}\, r^{k+|p|} \int_S P_k(\xi)\, \langle \xi, w\rangle^{|p|}\, d\sigma(\xi) \right) d\mu(r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{q} \int_0^1 \left(\sum_{|p|=0}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}}\, r^{k+|p|} \int_S Q_k(\bar{\xi})\, \langle w, \xi\rangle^{|p|}\, d\sigma(\xi) \right) d\mu(r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{q} \int_0^1 \left(\sum_{|p|=1}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}}\, r^{k+|p|} \int_S Q_k(\bar{\xi})\, \langle \xi, w\rangle^{|p|}\, d\sigma(\xi) \right) d\mu(r) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \int_0^1 \frac{c(n,k)}{t_k}\, r^{2k}\, \frac{P_k(w)}{c(n,k)}\, d\mu(r) + 0 + 0 + \sum_{k=1}^{q} \int_0^1 \frac{c(n,k)}{t_k}\, r^{2k}\, \frac{Q_k(\bar{w})}{c(n,k)}\, d\mu(r) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \frac{P_k(w)}{t_k} \int_0^1 r^{2k}\, d\mu(r) + \sum_{k=1}^{q} \frac{Q_k(\overline{w})}{t_k} \int_0^1 r^{2k}\, d\mu(r) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} P_k(w) + \sum_{k=1}^{q} Q_k(\overline{w}) = u(w).$$

Далее, применяем Предложения 3.1(iii) и 3.2(iii), также учитываем $\langle k_w, u\rangle = \langle u, k_w\rangle$ и тот факт, что если два ограниченных линейных функционала совпадают на плотном множестве, то они совпадают тождественно. В результате получаем

$$\langle k_w, v\rangle_h = v(w), \qquad \forall\ v \in h^1(\eta).$$

И наконец, при фиксированном w линейный функционал $l(u) = \langle u, k_w \rangle_h$ является w^*-непрерывным на h_∞. Поэтому для любого многочлена имеем $l(u) = u(w)$. Согласно Предложению 3.2(iv), каждая $u \in h_\infty$ есть (по норме) ограниченный, точечный предел последовательности плюригармонических многочленов. И это завершает доказательство предложения. $\square$

Заметим, что хорошо известны плюригармонические воспроизводящие ядра типа (3.2) в том специальном случае, когда они определяются посредством степенных весовых функций и ассоциируются с весовыми классами плюригармонических функций со степенными весами, см. работы Андерссона [17] для шара и А. Карапетяна [33] для более общих областей. Такие плюригармонические ядра приобретают конечный вид и явно записываются в виде

$$k_\alpha(z,w) = \frac{2\,\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+1)} \left[\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{\alpha+n+1}} + \frac{1}{(1-\langle w,z\rangle)^{\alpha+n+1}} - 1\right], \quad z,w \in B, \quad (3.8)$$

$\alpha > -1$, что совпадает (с точностью до постоянного сомножителя) с известными плюригармоническими воспроизводящими ядрами из [17], [33].

Чтобы показать эту связь, предположим, как и в (3.1), что некая весовая функция φ и весовая мера η заданы соотношением

$$d\mu(r) := \varphi(r)\,d\eta(r), \quad (3.9)$$

причем положим, что φ — нормальная весовая функция. Кроме того, беря нормальную пару $\{\varphi, \psi\}$ для функции φ, $\varphi(r)\psi(r) = (1-r^2)^\alpha,\ 0 \le r < 1,\ \alpha > -1$, определим весовую меру η так, чтобы $d\eta(r) := \psi(r)\,r^{2n-1}dr$. Тогда мера μ получается "степенной"

$$d\mu(r) = \varphi(r)\,d\eta(r) = \varphi(r)\,\psi(r)\,r^{2n-1}dr = (1-r^2)^\alpha\,r^{2n-1}dr, \quad (3.10)$$

а коэффициенты $t_k,\ k = 0,1,2,\ldots$, из (3.2) явно вычисляются,

$$t_k = \int_0^1 r^{2k}\,d\mu(r) = \int_0^1 r^{2k}\,\varphi(r)\,d\eta(r) = \int_0^1 r^{2k}\,\varphi(r)\,\psi(r)\,r^{2n-1}\,dr =$$
$$= \int_0^1 r^{2k+2n-1}\,(1-r^2)^\alpha\,dr = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{k+n-1}\,(1-t)^\alpha\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(k+n)\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+n+\alpha+1)}.$$

Отсюда плюригармоническое воспроизводящее ядро k_w из (3.2) сводится к известному плюригармоническому ядру (3.8),

$$
\begin{aligned}
k_w(z) &= \sum_{|p|=0}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}} \langle w,z\rangle^{|p|} + \sum_{|p|=1}^{\infty} \frac{c(n,|p|)}{t_{|p|}} \langle z,w\rangle^{|p|} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{|p|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+|p|)}{\Gamma(|p|+1)} \frac{1}{t_{|p|}} \langle w,z\rangle^{|p|} + \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{|p|=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+|p|)}{\Gamma(|p|+1)} \frac{1}{t_{|p|}} \langle z,w\rangle^{|p|} = \\
&= \frac{2}{\Gamma(n)} \sum_{|p|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+|p|)}{\Gamma(|p|+1)} \frac{\Gamma(|p|+n+\alpha+1)}{\Gamma(|p|+n)\,\Gamma(\alpha+1)} \langle w,z\rangle^{|p|} + \\
&\quad + \frac{2}{\Gamma(n)} \sum_{|p|=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+|p|)}{\Gamma(|p|+1)} \frac{\Gamma(|p|+n+\alpha+1)}{\Gamma(|p|+n)\,\Gamma(\alpha+1)} \langle z,w\rangle^{|p|} = \\
&= \frac{2}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+1)} \sum_{|p|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(|p|+n+\alpha+1)}{\Gamma(|p|+1)} \langle w,z\rangle^{|p|} + \\
&\quad + \frac{2}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+1)} \sum_{|p|=1}^{\infty} \frac{\Gamma(|p|+n+\alpha+1)}{\Gamma(|p|+1)} \langle z,w\rangle^{|p|} = \\
&= \frac{2\,\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+1)} \sum_{|p|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(|p|+n+\alpha+1)}{\Gamma(|p|+1)\,\Gamma(n+1+\alpha)} \langle w,z\rangle^{|p|} + \\
&\quad + \frac{2\,\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+1)} \sum_{|p|=1}^{\infty} \frac{\Gamma(|p|+n+\alpha+1)}{\Gamma(|p|+1)\,\Gamma(n+1+\alpha)} \langle z,w\rangle^{|p|}.
\end{aligned}
$$

Используя биномиальное разложение, получаем явное выражение

$$
k_w(z) = \frac{2\,\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{(1-\langle w,z\rangle)^{\alpha+n+1}} + \frac{2\,\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{\alpha+n+1}} - 1.
$$

Таким образом, ядро k_w из (3.2) сводится к (3.8),

$$
k_w(z) \equiv k_\alpha(z,w) = \frac{2\,\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+1)} \left[\frac{1}{(1-\langle w,z\rangle)^{\alpha+n+1}} + \frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{\alpha+n+1}} - 1 \right], \quad z,w \in B,
$$

что и хотели показать.

Предложение 3.4. *Подпространства пространств $h_0(\varPhi)$ и $h^1(\eta)$, порожденные системой $\{k_w, w \in B\}$, всюду плотны.*

Доказательство. Рассмотрим случай пространства $h^1(\eta)$, доказательство для $h_0(\varPhi)$ аналогично. Согласно теореме Хана-Банаха, достаточно показать, что если $l \in h^1(\eta)^*$ и $l(k_w) = 0$ для любой $w \in B$, то l аннулирует все $h^1(\eta)$. Пусть $\hat{l}(p)$ обозначает значение l в $(r\xi)^p$. Поскольку последовательности $\{z^p\}_0^\infty$ и $\{\bar{z}^p\}_0^\infty$ ограничены по норме пространства

$h^1(\eta)$, то последовательность $\{\hat{l}(p)\}_{-\infty}^{\infty}$ также ограничена. Так как $k_w(z)$ является плюригармонической для $|z| < |w|^{-1}$, то ряды для k_w равномерно сходятся в B и следовательно по норме $h^1(\eta)$. Таким образом

$$l(k_w) = \sum_{|p|=0}^{\infty} t_{|p|}^{-1}\, c(n,|p|) \sum_{|p|=k} \frac{k!}{p!} \bar{w}^p\, \hat{l}(p) + \sum_{|p|=1}^{\infty} t_{|p|}^{-1}\, c(n,|p|) \sum_{|p|=k} \frac{k!}{p!} \bar{w}^p\, \hat{l}(-p).$$

Согласно оценке $t_{|p|}^{-1}$, данной в доказательстве Предложения 3.3, эти ряды сходятся равномерно по переменной w на компактных подмножествах $K \subset B$. Следовательно $l(k_w)$ является плюригармонической по w функцией в $K \subset B$. И поскольку $l(k_w) = 0$, мы имеем $\hat{l}(p) \equiv 0$. Таким образом l аннулирует все плюригармонические многочлены, и так по Предложению 3.2(iii), l аннулирует $h^1(\eta)$. $\square$

Пусть для весовой меры η символы $L^1(d\eta d\sigma)$ и $L_\infty(d\eta d\sigma) = L^\infty(B)$ обозначают соответственно банаховы пространства комплекснозначных интегрируемых и существенно ограниченных измеримых функций с мерой $d\eta d\sigma$ на B. Обозначим нормы этих пространств через $\|\cdot\|_\eta$ и $\|\cdot\|_\infty$ соответственно. Пусть $C_0(B)$ есть банахово пространство комплекснозначных непрерывных на $\bar{B}$ функций, которые обращаются в нуль на S, с sup-нормой. Хорошо известно, что сопряженное пространство $C_0(B)$ есть $M(B)$, пространство всех конечных борелевских мер на B с нормой полной вариации. Мы отождествляем $L^1(d\eta d\sigma)$ с абсолютно непрерывными мерами относительно $d\eta d\sigma$.

Теорема 3.1. *Допустим Φ является весовой функцией, η является весовой мерой и k_w есть соответственное воспроизводящее ядро. Определим линейные интегральные операторы вида*

$$(Tf)(w) := \int_S \int_0^1 k_w(r\bar{\xi})\, f(r\xi)\, d\eta(r) d\sigma(\xi), \qquad f \in L^\infty(B),$$
$$(S\nu)(w) := \int_B k_w(\bar{z})\, \Phi(z)\, d\nu(z), \qquad \nu \in M(B).$$

Тогда следующие условия эквивалентны друг другу:

(i) $\|k_w\|_\eta \le \dfrac{C}{\Phi(w)}, \qquad w \in B.$

(ii) T *— ограниченный оператор из* $L^\infty(B)$ *в* $h_\infty(\Phi)$.

(iii) *S — ограниченный оператор из $M(B)$ в $h^1(\eta)$.*

(iv) $h^1(\eta)^* \cong h_\infty(\varPhi)$.

(v) $h_0(\varPhi)^* \cong h^1(\eta)$.

Доказательство. Импликация (i)⇒(ii) непосредственно следует из определения оператора T. Действительно,

$$|(Tf)(w)| \le \int_S \int_0^1 |k_w(r\bar{\xi})| \cdot |f(r\xi)|\, d\eta(r) d\sigma(\xi) \le$$
$$\le \|f\|_\infty \int_S \int_0^1 |k_w(r\bar{\xi})|\, d\eta(r) d\sigma(\xi) =$$
$$= \|f\|_\infty \, \|k\|_\eta \le \frac{C}{\varPhi(w)} \, \|f\|_\infty.$$

(iii) следует из (i), согласно теореме Фубини:

$$\|S\nu\|_\eta = \int_0^1 \int_S |S\nu(r\xi)|\, d\eta(r) d\sigma(\xi) \le$$
$$\le \int_0^1 \int_S \int_B |k_w(\bar{z})|\, \varPhi(z)\, d|\nu|(z) d\eta(r) d\sigma(\xi) \le$$
$$\le \int_B \frac{C}{\varPhi(z)} \varPhi(z)\, d|\nu|(z) = C|\nu|,$$

так как

$$\int_B |k_w(\bar{z})|\, d\eta(r) d\sigma(\xi) \le \frac{C}{\varPhi(z)}.$$

Теперь мы покажем, что (iii)⇒(v). Пусть $v \in h^1(\eta)$, и обозначим $l_v(u) = \langle u, v\rangle_h$ для любой $u \in h_0(\varPhi)$. Согласно неравенству Гельдера $|l_v(u)| \le \|u\|_\varPhi \|v\|_\eta$. Следовательно $\|l_v\| \le \|v\|_\eta$ и $l_v \in h_0(\varPhi)^*$. Мы имеем еще и единственность: если $l_v(u) = 0$ для всех $u \in h_0$, то $v = 0$. Это следует из соотношения $v(w) = l_v(k_w)$. Остается доказать, что для каждой $l \in h_0(\varPhi)^*$ существует единственная $v \in h^1(\eta)$ такая, что $l = l_v$ (где $l_v(u) = \langle u, v\rangle_h$) и $\|v\|_\eta \le C\|l\|$. Пусть $h_0(\varPhi)$ является подпространством пространства $C_0(B)$. Отождествляя $u \in h_0(\varPhi)$ с $u\varPhi \in C_0(B)$, из теоремы Хана-Банаха следует, что существует $V \in M(B)$ такая, что

$$\|l\| = \|V\| \qquad \text{и} \qquad l(u) = \int u(\bar{z})\varPhi(z)\, dV(z), \quad u \in h_0(\varPhi).$$

Таким образом

$$l(k_w) = \int k_w(\bar{z})\varPhi(z)\, d\nu(z) = S\nu(w).$$

Пусть $v = S\nu$. Согласно условию (iii) $v \in h^1(\eta)$ и $\|v\| \leq \|S\|\|\nu\| = \|S\|\|l\|$. Кроме того, по Предложению 3.3 $l_v(k_w) = \langle k_w, v\rangle_h = v(w) = (S\nu)(w) = l(k_w)$. Таким образом, l и l_v совпадают на подпространстве пространства $h_0(\Phi)$, порожденном $k_w, w \in B$, и следовательно в силу Предложения 3.4 имеем $l = l_v$.

Доказательство того, что (iv) следует из (ii) можно вывести аналогичным образом, используя двойственность пространств $L^1(d\eta\, d\sigma)$ и $L_\infty(d\eta\, d\sigma)$ вместо двойственности пространств $C_0(B)$ и $M(B)$.

Предполагая (iv), по теореме Хана-Банаха получаем

$$\|k_w\|_\eta \leq C\|l_{k_w}(u)\| = C\sup\{|\langle u, k_w\rangle_h|, u \in h_\infty(\Phi); \|u\|_\Phi \leq 1\} =$$
$$= C\sup\{|u(w)|; u \in h_\infty(\Phi); \|u\|_\Phi \leq 1\} \leq \frac{C}{\Phi(w)}.$$

Точно так же (v) влечет за собой (i). □

3.4 Полуаналитические функции в полидиске

Понятие гармонической функции на плоскости имеет несколько различных обобщений в многомерных комплексных областях.

Определение 3.1. *Функция $u(z)$ называется гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, если она удовлетворяет уравнению Лапласа*

$$0 = \Delta u := \sum_{j=1}^{n} \Delta_j u = 4\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j\, \partial \overline{z}_j}, \qquad z \in \Omega,$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

представляют формальные производные.

Определение 3.2. *Функция $u(z)$ называется n-гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, если она удовлетворяет уравнениям Лапласа по каждой переменной z_j, т.е. если функция гармоническая по каждой переменной z_j,*

$$0 = \Delta_j u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\, \partial \overline{z}_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad z_j = x_j + iy_j, \qquad z \in \Omega,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\Delta_j u\right| = 0, \qquad z \in \Omega.$$

При $n = 2$ $\;n$-гармоническую функцию называют просто 2-гармонической (дважды гармонической). Напомним определение другого многомерного обобщения гармонических функций.

Определение 3.3. *Функция $u(z)$ называется плюригармонической в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, если она удовлетворяет системе (из n^2) уравнений типа Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\, \partial \overline{z}_k} = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n, \qquad z \in \Omega. \tag{3.11}$$

При $n = 2$ плюригармоническую функцию называют бигармонической.

Очевидно, что плюригармоническая функция являтся n-гармонической, поскольку в (3.11) можно взять $k = j$.

Условия (3.11) можно разложить на производные по вещественным переменным,

$$\begin{aligned} 4\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\, \partial \overline{z}_k} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) u = \\ &= \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} + \frac{\partial^2}{\partial y_j\, \partial y_k}\right) + i\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial y_k} - \frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial y_j}\right)\right] u. \end{aligned}$$

Таким образом, условия (3.11) равносильны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j\, \partial y_k} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial y_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial y_j} = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n, \qquad z \in \Omega. \tag{3.12}$$

В частности, бигармонические функции ($n = 2$) определяются четырьмя уравнениями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1\, \partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\, \partial y_1} = 0, \qquad z \in \Omega, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0, \qquad z \in \Omega. \tag{3.14}$$

Для шара B и полидиска U^n (ввиду их односвязности) имеется эквивалентное определение, см., например, [12].

Определение 3.4. *Функция $u(z)$ называется плюригармонической в шаре $B \subset \mathbb{C}^n$, если она является вещественной частью некоторой голоморфной функции в B, т.е.* $\exists\, f \in H(B) \quad st \quad \operatorname{Re} f = u, \quad z \in B.$

Плюригармонические функции связаны с голоморфными функциями от нескольких переменных точно так же, как гармонические функции, определенные на плоской области, связаны с голоморфными функциями от одной переменной. В случае одной переменной эта связь позволяет применять методы потенциалов в комплексном анализе. В многомерном случае ситуация сложнее. Класс плюригармонических функций (в отличие от гармонических) оказывается слишком узким в том в смысле, что задача Дирихле не всегда разрешима в этом классе. Это обстоятельство затрудняет обобщение какого-то одномерного результата для случая более высокой размерности.

С. Бергман [20] предложил следующую идею для случая $n = 2$:
любой 2-гармонической функции поставить в соответствие комплекснозначную функцию $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$ такую, что

1) $f(z_1, z_2)$ голоморфна по z_1 для фиксированной z_2;

2) $v(0, z_2) \equiv 0$.

Полученный класс функций называется "расширенным классом комплексных функций". Эти функции могут быть изучены с помощью методов теории потенциалов, так как задача Дирихле со значениями, заданными на остове T^n всегда имеет решение в классе всех 2-гармонических функций. Однако этот класс не является расширением класса голоморфных функций, так как голоморфные функции не обязательно удовлетворяют условию 2) для мнимой части.

А.И. Петросян [7], [34] ввел модифицированную версию класса Бергмана (класс полуаналитических функций), который имеет следующее преимущество: в том особом случае, когда вещественная часть полуаналитической функции плюригармоничная, сама функция голоморфна. Таким образом, любая голоморфная функция также полуаналитическая. В настоящей работе понятие полуаналитичности определяется для функций произвольного числа переменных.

Для таких функций мы получаем интегральное представление, которое является аналогом хорошо известного интегрального представления Шварца в одномерном случае.

Будем использовать следующие обозначения:

$$U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_k| < 1,\ k = 1, \dots, n\}$$

есть единичный полидиск в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$,

$$T^n = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_k| = 1,\ k = 1, \dots, n\}$$

является его остовом,

$P(z) = \dfrac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}$ — одномерное ядро Пуассона для единичного круга,

$Q(z)$ — гармонически сопряженная к $P(z)$ функция, т.е. сопряженное ядро Пуассона,

$S(z) = P(z) + iQ(z) = \dfrac{1 + z}{1 - z}$ — ядро Шварца для единичного круга $\mathbb{D}$.

Определение 3.5. *Функция $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$, определенная в полидиске U^n, называется полуаналитической, если*

a) Функция $\operatorname{Re} f(z)$ n-гармоническая;

b) Для фиксированных $z_{k+1}, \dots, z_n$ функции $f(0, \dots, 0, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$ являются голоморфными в круге $|z_k| < 1$, $k = 1, \dots, n$.

Обратим внимание на то, что в одномерном случае (т.е. $n = 1$) n-гармоничность есть просто гармоничность, а полуаналитичность совпадает с аналитичностью.

Интегральное представление. Следуюшая теорема является аналогом формулы Шварца для аналитических функций.

Теорема 3.2. *Пусть $f(z)$ — полуаналитическая в единичном полидиске U^n функция, и пусть $\rho_1, \dots, \rho_n$ — произвольные числа из интервала $(0, 1)$. Тогда для любого*

$$z \in \{z = (z_1, \dots, z_n)\colon\ |z_k| < \rho_k,\ k = 1, \dots, n\}$$

имеет место следующая формула

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_n) &= iv(0, \dots, 0) + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} S_n\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}, \dots, \frac{z_n}{\rho_n} e^{-i\theta_n}\right) u\big(\rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_n e^{i\theta_n}\big)\, d\theta_1 \cdots d\theta_n, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$S_n(z_1,\ldots,z_n)=\prod_{j=1}^{n}P(z_j)+i\sum_{j=1}^{n}Q(z_j)\prod_{k=j+1}^{n}P(z_k) \tag{3.16}$$

n-мерный аналог ядра Шварца. Заметим, что для случая $n=1$ функция $S_n(z_1,\ldots,z_n)$ совпадает с обычным ядром Шварца: $S_n=S$.

Доказательство. Для фиксированных $z_k,\ |z_k|<1,\ k=2,\ldots,n$, функция $f(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ является аналитической в диске $|z_1|<1$. По формуле Шварца (см. например, [12]) получаем

$$f(z_1,\ldots,z_n)=iv(0,z_2,\ldots,z_n)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}S_n\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\theta_1}\right)u(\rho_1e^{i\theta_1},z_2,\ldots,z_n)d\theta_1. \tag{3.17}$$

Потом при фиксированных $z_k,\ |z_k|<1,\ k=3,\ldots,n$, функция $f(0,z_2,\ldots,z_n)$ является аналитической в диске $|z_2|<1$. Следовательно

$$\begin{aligned}f(0,z_2,\ldots,z_n)&=iv(0,0,z_3,\ldots,z_n)+\\&+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}S_n\left(\frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\theta_2}\right)u(0,\rho_2e^{i\theta_2},z_3,\ldots,z_n)d\theta_2.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Рассуждая по аналогии, на шаге j получаем

$$\begin{aligned}&f(0,\ldots,0,z_j,\ldots,z_n)=iv(0,\ldots,0,z_{j+1},\ldots,z_n)+\\&+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}S_n\left(\frac{z_j}{\rho_j}e^{-i\theta_j}\right)u(0,\ldots,0,\rho_je^{i\theta_j},z_{j+1},\ldots,z_n)d\theta_j,\quad j=1,\ldots,n.\end{aligned}$$

Так как функция $u(z)$ n-гармоническая, то при фиксированном $\rho_1e^{i\theta_1}$ мы имеем

$$\begin{aligned}&u\left(\rho_1e^{i\theta_1},z_2,\ldots,z_n\right)=\\&=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{T^{n-1}}P\left(\frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\theta_2}\right)\cdots P\left(\frac{z_n}{\rho_n}e^{-i\theta_n}\right)u\left(\rho_1e^{i\theta_1},\ldots,\rho_ne^{i\theta_n}\right)d\theta_2\cdots d\theta_n.\end{aligned}$$

Из полученного результата и (3.17) следует

$$\begin{aligned}&f\left(z_1,\ldots,z_n\right)=iv\left(0,z_2,\ldots,z_n\right)+\\&+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{T^n}Q\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\theta_1}\right)P\left(\frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\theta_2}\right)\cdots P\left(\frac{z_n}{\rho_n}e^{-i\theta_n}\right)u\left(\rho_1e^{i\theta_1},\ldots,\rho_ne^{i\theta_n}\right)\,d\theta_1\cdots d\theta_n+\\&+\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n}P\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\theta_1}\right)\cdots P\left(\frac{z_n}{\rho_n}e^{-i\theta_n}\right)u\left(\rho_1e^{i\theta_1},\ldots,\rho_ne^{i\theta_n}\right)\,d\theta_1\cdots d\theta_n\,.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Приравнивая мнимые части в (3.18), получаем

$$v\left(0, z_2, \ldots, z_n\right) = v\left(0, 0, z_3, \ldots, z_n\right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} Q\left(\frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right) u\left(0, \rho_2 e^{i\theta_2}, z_3, \ldots, z_n\right) d\theta_2. \tag{3.20}$$

Используя интегральное представление функции $f(0, z_2, \ldots, z_n)$ (голоморфной по z_2) и снова отделяя мнимые части, получаем

$$v\left(0, 0, z_3, \ldots, z_n\right) = v\left(0, 0, 0, z_4, \ldots, z_n\right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} Q\left(\frac{z_3}{\rho_3} e^{-i\theta_3}\right) u\left(0, 0, \rho_3 e^{i\theta_3}, z_4, \ldots, z_n\right) d\theta_3.$$

Продолжая подобным образом и подставляя полученные формулы последовательно в (3.20), мы получаем

$$v\left(0, z_2, \ldots, z_n\right) = v\left(0, 0, \ldots, 0\right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^{n} \int\limits_0^{2\pi} Q\left(\frac{z_k}{\rho_k} e^{-i\theta_k}\right) u\left(0, \ldots, 0, \rho_k e^{i\theta_k}, z_{k+1}, \ldots, z_n\right) d\theta_k. \tag{3.21}$$

Учитывая n-гармоничность функции u, получаем

$$u\left(0, \ldots, 0, \rho_k e^{i\theta_k}, z_{k+1}, \ldots, z_n\right) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n-k}} \int\limits_{T^{n-k}} P\left(\frac{z_{k+1}}{\rho_{k+1}} e^{-i\theta_{k+1}}\right) \cdots P\left(\frac{z_n}{\rho_n} e^{-i\theta_n}\right) u\left(0, \ldots, 0, \rho_k e^{i\theta_k}, \ldots, \rho_n e^{i\theta_n}\right) d\theta_{k+1} \cdots d\theta_n.$$

Из теоремы о среднем значении имеем

$$u\left(0, \ldots, 0, \rho_k e^{i\theta_k}, \ldots, \rho_n e^{i\theta_n}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \int\limits_{T^{k-1}} u\left(\rho_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \rho_n e^{i\theta_n}\right) d\theta_1 \cdots d\theta_{k-1}\,.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$u\left(0, \ldots, 0, \rho_k e^{i\theta_k}, z_{k+1}, \ldots, z_n\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{T^{n-1}} P\left(\frac{z_{k+1}}{\rho_{k+1}} e^{-i\theta_{k+1}}\right) \cdots P\left(\frac{z_n}{\rho_n} e^{-i\theta_n}\right) \times \\ \times u\left(\rho_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \rho_n e^{i\theta_n}\right) d\theta_1 \cdots d\theta_{k-1} d\theta_{k+1} \cdots d\theta_n.$$

Подставляя это равенство в (3.21), получим

$$v(0,z_2,\dots,z_n)=v(0,0,\dots,0)+$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q\left(\frac{z_k}{\rho_k}e^{-i\theta_k}\right)\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{T^{n-1}}P\left(\frac{z_{k+1}}{\rho_{k+1}}e^{-i\theta_{k+1}}\right)\cdots$$
$$\cdots P\left(\frac{z_n}{\rho_n}e^{-i\theta_n}\right)u\left(\rho_1e^{i\theta_1},\dots,\rho_ne^{i\theta_n}\right)d\theta_1\cdots d\theta_n,$$

или

$$v(0,z_2,\dots,z_n)=v(0,0,\dots,0)+\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k=2}^{n}\int_{T^n}Q\left(\frac{z_k}{\rho_k}e^{-i\theta_k}\right)\times$$
$$\times P\left(\frac{z_{k+1}}{\rho_{k+1}}e^{-i\theta_{k+1}}\right)\cdots P\left(\frac{z_n}{\rho_n}e^{-i\theta_n}\right)u\left(\rho_1e^{i\theta_1},\dots,\rho_ne^{i\theta_n}\right)d\theta_1\cdots d\theta_n\,.$$

Отсюда и из (3.19) имеем

$$f(z_1,\dots,z_n)=iv(0,0,\dots,0)+$$
$$+\frac{i}{(2\pi)^n}\sum_{k=2}^{n}\int\limits_{T^n}Q\left(\frac{z_k}{\rho_k}e^{-i\theta_k}\right)P\left(\frac{z_{k+1}}{\rho_{k+1}}e^{-i\theta_{k+1}}\right)\cdots P\left(\frac{z_n}{\rho_n}e^{-i\theta_n}\right)u\left(\rho_1e^{i\theta_1},\dots,\rho_ne^{i\theta_n}\right)d\theta_1\cdots d\theta_n+$$
$$+i\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}Q\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\theta_1}\right)P\left(\frac{z_2}{\rho_2}e^{-i\theta_2}\right)\cdots P\left(\frac{z_n}{\rho_n}e^{-i\theta_n}\right)u\left(\rho_1e^{i\theta_1},\dots,\rho_ne^{i\theta_n}\right)d\theta_1\cdots d\theta_n+$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}P\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\theta_1}\right)\cdots P\left(\frac{z_n}{\rho_n}e^{-i\theta_n}\right)u\left(\rho_1e^{i\theta_1},\dots,\rho_ne^{i\theta_n}\right)d\theta_1\cdots d\theta_n\,.$$

Учитывая (3.16), из последнего равенства мы получаем требуемое интегральное представление. Теорема 3.2 доказана. □

Теорема 3.3. *Мнимая часть произвольной полуаналитической функции $f=u+iv$ является n-гармонической функцией.*

Доказательство. Разделяя мнимые части в левой и правой части формулы (3.15), получим

$$v(z_1,\dots,z_n)=v(0,\dots,0)+$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n}\operatorname{Im}S_n\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\theta_1},\dots,\frac{z_n}{\rho_n}e^{-i\theta_n}\right)u\left(\rho_1e^{i\theta_1},\dots,\rho_ne^{i\theta_n}\right)d\theta_1\cdots d\theta_n. \qquad (3.22)$$

Согласно определению (3.16) ядра S_n, имеем

$$\operatorname{Im}S_n\left(\frac{z_1}{\rho_1}e^{-i\theta_1},\dots,\frac{z_n}{\rho_n}e^{-i\theta_n}\right)=\sum_{j=1}^{n}Q\left(\frac{z_j}{\rho_j}e^{-i\theta_j}\right)\prod_{k=j+1}^{n}P\left(\frac{z_k}{\rho_k}e^{-i\theta_k}\right), \qquad (3.23)$$

откуда видно, что левая часть этой формулы составляет n-гармоническую в полидиске $\{z = (z_1, \ldots, z_n)\colon\ |z_k| < \rho_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ функцию. Учитывая, что $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — произвольные числа из интервала $(0, 1)$, мы получаем утверждение теоремы из (3.22) и (3.23).

$\square$

Литература

[1] А.Б. Александров, *Теория функций в шаре*, Современные проблемы математики, ВИНИТИ, том **8**, 115–190 (1985).

[2] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.

[3] А.Э. Джрбашян, А.О. Карапетян, Интегральные неравенства между сопряженными плюригармоническими функциями в многомерных областях, *Изв. Акад. Наук Арм. ССР, Математика*, **23**, No. 3, 216–236 (1988).

[4] М.М. Джрбашян, О каноническом представлении функций, мероморфных в единичном круге, *Доклады Акад. Наук Арм. ССР*, **3**, 3–9 (1945).

[5] М.М. Джрбашян, О проблеме представления аналитических функций, *Сообщ. Инст. Матем. Мех. Акад. Наук Арм. ССР*, **2**, 3–40 (1948).

[6] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, тома I–II, Мир, М. (1965).

[7] А.И. Петросян, Об интегральном представлении функций в бицилиндре, *Известия НАН Армении, Математика*, **9**, No. 1, 3–13 (1974).

[8] А.И. Петросян, Ограниченные проекторы в пространствах функций, голоморфных в единичном шаре, *Известия НАН Армении, Математика*, **46**, No.5, 53–64 (2011).

[9] У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$, М., Мир, 1984.

[10] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, М., Наука, 1985.

[11] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, М., Мир, 1974.

[12] Б.В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Часть II, М. Наука, 1985.

[13] Ф.А. Шамоян, Диагональное отображение и проблема представления в анизотропных пространствах функций, голоморфных в полидиске, *Сибирск. Мат. ж.*, **31**, No. 2, 197–215 (1990).

[14] Ф.А. Шамоян, Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций, *Сибирск. Мат. ж.*, **40**, No. 6, 1422–1440 (1999).

[15] С.В. Шведенко, *Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре*, Итоги Науки и техники, АН СССР, ВИНИТИ, том **23**, 3–124 (1985).

[16] J.M. Anderson, J. Clunie and Ch. Pommerenke, On Bloch functions and normal functions, *J. Reine Angew. Math.*, **270**, 12–37 (1974).

[17] M. Andersson, Formulas for the L^2-minimal solutions of the $\partial\overline{\partial}$-equation in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Math. Scand.*, **56**, 43–69 (1985).

[18] K. Avetisyan, Continuous inclusions and Bergman type operators in n-harmonic mixed norm spaces on the polydisc, *J. Math. Anal. Appl.*, **291**, 727–740 (2004).

[19] S. Bergman, Über unendliche Hermitische Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, *Math. Z.*, **29**, 641–677 (1929).

[20] S. Bergman, *The Kernel Functions and Conformal Mapping*, AMS, 2nd Edition, 1970.

[21] R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Annals of Mathematics*, **103**, No. 3, 611–635 (1976).

[22] A.E. Djrbashian and F.A. Shamoian, *Topics in the Theory of A^p_α Spaces*, Teubner–Texte zur Math., b. 105, Teubner, Leipzig, 1988.

[23] P. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York, London, 1970.

[24] P. Duren and A. Schuster, *Bergman spaces*, AMS, Providence, Rhode Island, 2004.

[25] T.M. Flett, The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **38**, 746–765 (1972).

[26] S. Gadbois, Mixed-norm generalizations of Bergman spaces and duality, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**, No. 4, 1171–1180 (1988).

[27] M. Jevtić, Bounded projections and duality in mixed-norm spaces of analytic functions, *Complex Variables Theory Appl.*, **8**, 293–301 (1987).

[28] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, Some properties of fractional integrals (II), *Math. Z.*, **34**, 403–439 (1932).

[29] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions, *Quart. J. Math. (Oxford)*, **12**, 221–256 (1941).

[30] A.V. Harutyunyan, Bloch spaces of holomorphic functions in the polydisk, *J. Function Spaces Appl.*, **5**, No. 3, 213–230 (2007).

[31] A.V. Harutyunyan and W. Lusky, Weighted holomorphic Besov spaces on the polydisk, *J. Function Spaces Appl.*, **9**, No. 1, 1–16 (2011).

[32] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2000.

[33] A.H. Karapetyan, Bounded projections in weighted function spaces in a generalized unit disc, *Annales Polon. Math.*, **62**, No. 3, 193–218 (1995).

[34] A.I. Petrosyan, About functions in the unit bidisc semianalytical in sense of Bergman, *Mathematics in Higher School*, **3**, No. 2, 37–43 (2007). [in Armenian]

[35] A.I. Petrosyan, A.F. Beknazaryan, On bounded operators in L^p spaces, *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, No. 2, 11–16 (2011).

[36] A.I. Petrosyan, E.S. Mkrtchyan, Duality in some spaces of functions harmonic in the unit ball, *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, No. 3, 29–36 (2013).

[37] G. Ren and J. Shi, Bergman type operators on mixed norm spaces with applications, *Chinese Ann. Math., Ser. B*, **18**, No. 3, 265–276 (1997).

[38] J.H. Shi and G.B. Ren, Boundedness of the Cesàro operator on mixed norm spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**, 3553–3560 (1998).

[39] A.L. Shields and D.L. Williams, Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **162**, 287–302 (1971).

[40] A.L. Shields and D.L. Williams, Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions, *J. Reine Angew. Math.*, **299-300**, 256–279 (1978).

[41] A.L. Shields and D.L. Williams, Bounded projections and the growth of harmonic conjugates in the unit disc, *Michigan Math. J.*, **29**, 3–25 (1982).

[42] M. Stoll, On the rate of growth of the means M_p of holomorphic and pluriharmonic functions on the ball, *J. Math. Anal. Appl.*, **93**, 109–127 (1983).

[43] K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Graduate Texts in Mathematics **226**, Springer-Verlag, New York, 2005.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи

[44] A.I. Petrosyan, N.T. Gapoyan, On functions semi-analytical in the polydisc, *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, No. 2, 3–7 (2009).

[45] A.I. Petrosyan, N.T. Gapoyan, Bounded projectors on L^p spaces in the unit ball, *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, No. 1, 17–23 (2013).

[46] N.T. Gapoyan, Duality in spaces of functions pluriharmonic in the unit ball in $\mathbb{C}^n$, *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, No. 2, 15–21 (2016).

[47] К. Аветисян, Н. Гапоян, Операторы типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой в шаре из $\mathbb{C}^n$, *Известия НАН Армении, Математика*, **51**, No. 5, 3–12 (2016).

———————————————————————————————————————

Тезисы конференций

[48] A.I. Petrosyan, N.T. Gapoyan, On functions semi-analytical in the sense of Bergman in the unit polydisk, Третье российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам, Цахкадзор, Армения, 4-8 Окт., 2010, Тезисы конференции, с. 123–126, 2010.

[49] N.T. Gapoyan, On bounded projections on L^p spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, Armenian Mathematical Union Annual Session Dedicated to 1400 anniversary of Anania Shirakatsy, Abstracts, p. 32, Yerevan, 2012.

[50] K.L. Avetisyan, N.T. Gapoyan, On normal weighted Bergman type operators on mixed norm spaces, Armenian Mathematical Union Annual Session 2016, Dedicated to the 110th anniversary of A. Shahinyan, Abstracts, p. 18, Yerevan, 2016.

Заключение

В диссертационной работе исследованы весовые операторы типа Бергмана в различных пространствах аналитических и плюригармонических функций, заданных в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Доказана ограниченность таких операторов в соответствующих пространствах, что дало возможность найти сопряженные пространства рассматриваемых весовых пространств. В работе получены следующие основные результаты:

- Доказано, что интегральный оператор типа Бергмана $Q_{\varphi,\psi}$ является ограниченным оператором в $L^p(B)$ при условии, что $\{\varphi,\psi\}$ — нормальная пара функций с индексами a и b $(0 < a < b)$ и с индексом пары α $(\alpha > b-1)$, а показатель $1 \leqslant p < \infty$ удовлетворяет условию $p(b-\alpha) < 1$. Более того, оператор $Q_{\varphi,\psi}$ является ограниченным проектором из пространства $L^p(B)$ на его подпространство.

- Найдены значения параметра β, при которых общие операторы типа Бергмана $Q_{\varphi,\psi}$, $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$ ограничены на пространствах $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой в шаре B. А именно, если $1 \leq p,q \leq \infty$, $\{\varphi,\psi\}$ — нормальная пара функций с индексами a и b $(0 < a < b)$ и с индексом пары α $(\alpha > b-1)$, а также $b-\alpha < \beta < 1+a$, то операторы $Q_{\varphi,\psi}$ и $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$ ограниченно действуют из пространства $L(p,q,\beta)$ в себя, т.е. $Q_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \longrightarrow L(p,q,\beta), \qquad \widetilde{Q}_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \longrightarrow L(p,q,\beta).$

- Построено плюригармоническое воспроизводящее ядро k_w и доказана ограниченность соответствующих интегральных операторов с ядром k_w. Это привело к соотношениям двойственности для плюригармонических пространств
$$h^1(\eta)^* \cong h_\infty(\varPhi), \qquad h_0(\varPhi)^* \cong h^1(\eta),$$
причем для этих соотношений найдены необходимые и достаточные условия.

- Введено понятие полуаналитической функции в единичном полидиске U^n. Для таких функций $f(z)$ в полидиске U^n доказан аналог известной формулы Шварца с участием n-мерного аналога ядра Шварца в полидиске.

Summary

In this Thesis, some Bergman type weighted operators are studied in various spaces of analytic or pluriharmonic functions given in the unit ball in $\mathbb{C}^n$. We prove boundedness of such operators in corresponding spaces, which makes possible to find the dual spaces for the weighted spaces considered.

The following principal results have been obtained in the Thesis:

- It is proved that Bergman type integral operator $Q_{\varphi,\psi}$ is bounded in $L^p(B)$ provided that $\{\varphi, \psi\}$ is a normal pair of functions with indices a and b $(0 < a < b)$, and with the index of the pair α $(\alpha > b - 1)$, and also the exponent $1 \leqslant p < \infty$ satisfies $p(b - \alpha) < 1$. Moreover, the operator $Q_{\varphi,\psi}$ is a bounded projection of the space $L^p(B)$ onto its subspace.

- Some parameters β are found under which Bergman type general operators $Q_{\varphi,\psi}$, $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$ are bounded on mixed norm spaces $L(p, q, \beta)$ over the ball B. Namely, if $1 \leq p, q \leq \infty$, $\{\varphi, \psi\}$ is a normal pair of functions with indices a and b $(0 < a < b)$, and with the index of the pair α $(\alpha > b - 1)$, and also $b - \alpha < \beta < 1 + a$, then the operators $Q_{\varphi,\psi}$ and $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$ are bounded from $L(p, q, \beta)$ into itself, that is, $Q_{\varphi,\psi} : L(p, q, \beta) \longrightarrow L(p, q, \beta)$, $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi} : L(p, q, \beta) \longrightarrow L(p, q, \beta)$.

- Pluriharmonic reproducing kernel k_w is constructed and boundedness of corresponding integral operators with kernel k_w is proved. This implies the duality relations for pluriharmonic spaces

$$h^1(\eta)^* \cong h_\infty(\Phi), \qquad h_0(\Phi)^* \cong h^1(\eta),$$

  such that necessary and sufficient conditions for these relations are found.

- Notion of semianalytic functions is introduced in the unit polydisc U^n. For such functions $f(z)$, it is proved an analogue of well-known Schwarz formula with the use of n-dimensional analogue of Schwarz kernel.