ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ղանդիլյան Արթուր Խաչատուրի

ԵՐԿՈՒԱԿԱՆ ԿՈԴԵՐ ԱԴԻՏԻՎ ԿԱՊԻ ԳԾԵՐՈՒՄ

Ա. 01.09 - «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

Երևան – 2009

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Гандилян Артур Хачатурович

ДВОИЧНЫЕ КОДЫ В АДДИТИВНЫХ КАНАЛАХ СВЯЗИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.09 – «Математическая кибернетика и математическая логика»

Ереван – 2009

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Ռուս-Հայկական (Սլավոնական) համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր	Վ. Կ. Լեոնտև
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	տեխ. գիտ. դոկտոր	Գ.Հ. Խաչատրյան
	ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու	Է.Վ. Եղիազարյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ	

Պաշտպանությունը կայանալու է 2009 թ. հունիսի 15-ին ժամը 15^{30}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2009թ. մայիսի 15-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝
ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Վ. Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Российско-Армянском (Славянском) университете

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук	В. К. Леонтьев
Официальные оппоненты:	доктор тех. наук	Г.Г. Хачатрян
	кандидат физ.-мат. наук	Э.В. Егиазарян
Ведущая организация:	Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА	

Защита диссертации состоится 15-го июня 2009 г. в 15^{30} часов на заседании специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика и математическая логика” при ЕГУ по адресу: 0025 г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 15-го мая 2009 г.

Ученый секретарь специализированного совета,

кандидат физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅԱՆ ԱՐԴԻԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ: Սխալներ ուղղող կոդերի տեսությունը մաթեմատիկայի մի ճյուղ է, որը առաջացել և բուռն զարգացում է ապրել համեմատաբար ոչ վաղ անցյալում՝ XX-րդ դարի երկրորդ կեսին: Տեսության սկիզբը դրվել է 40-ական թվականների վերջին, Հեմմինգի, Գոլեյի և Շենոնի աշխատանքներով: Տեսության հիմքերը գալիս են ինժեներական խնդիրներից, բայց նրա զարգացումը բերում է ավելի ու ավելի բարդ մաթեմատիկական մեթոդների կիրառմամբ առավել բարդ մաթեմատիկական խնդիրների լուծման: Սխալներ ուղղող կոդերի տեսության հիմնական խնդիրներից են՝ կոդերի կառուցման մեթոդների ստեղծումը, կոդերի հատկությունների ուսումնասիրությունը, կոդերի դասակարգումը ըստ տրված պարամետրերի (կոդի երկարություն, կոդի հզորություն, և այլն), կոդավորման և ապակոդավորման արդյունավետ ալգորիթմների կառուցումը: Կոդերի տեսությունը ունի լայն կիրառություն տարբեր տիպի և տարբեր աղմուկով կապի գծերում (հեռախոս, ռադիո, հեռուստատեսություն, համակարգչային և արբանյակային կապեր, և այլն) ինֆորմացիայի տեղափոխման հուսալի, արագագործ միջոցներ ստեղծելու գործում: Կոդավորման տեսության ակտիվ զարգացումը նպաստեց նաև իր հետ սերտ կապված այնպիսի տեսությունների ակտիվ զարգացմանը ինչպիսիք են կրիպտոգրաֆիան և ինֆորմացիայի սեղմումը: Նոր կոդերի ստեղծման և դրանց հատկությունների հետազոտման (ինչպես հայտնի կոդերի, այնպես էլ նոր ստեղծված կոդերի) արդիականությունը սխալներ ուղղող կոդերի տեսության մեջ թելադրվում է նախ և առաջ նրանով, որ անհրաժեշտ է կոդավորման և ապակոդավորման համար կառուցել ավելի արդյունավետ ալգորիթմներ:

Չնայած, որ սխալներ ուղղող կոդերի ամենալայն կիրառությունը կապի գծերում է, այնուամենայնիվ այժմ կան նաև կիրառություններ, որոնք այդքան էլ ուղղակի կապ չունեն կապի գծերի հետ: Սխալներ ուղղող կոդերը օգտագործվում են նաև տվյալների կրիչներում և հիշողության սարքերում: Օրինակ՝ CD և DVD սկավառակներում, Redundant Array of Inexpensive Disks (RAID) սկավառակներում ինչպես նաև դինամիկ և ստատիկ հիշողության սարքերում:

Սխալներ ուղղող կոդերի տեսության մեջ առավել հետաքրքրություն են առաջացնում այսպես կոչված կատարյալ կոդերը: Դասական դեպքում, երբ կապի գծերում տեղի են ունենում առավելագույնը t սխալ, աղիտիվ կապի գծի սխալների վեկտորների բազմությունը իրենից ներկայացնում է 0 կենտրոնով t շառավղով գունդ: Այս դեպքի համար կատարյալ կոդերի գոյության խնդրին մեծ ուշադրություն է դարձվել և $t \geq 2$ դեպքում այն լուծված է, ընդ որում բացասական իմաստով: Այլ բառերով ասած, ապացուցված է, որ $t \geq 2$ դեպքում կատարյալ կոդերի բազմությունը սահմանափակ է[1]:

[1] Зиновьев В.А., Леонтьев В.К., *Несуществование совершенных кодов над полями Галуа*, Препринт. М.: ИППИ АН, СССР, 1972.

Քանի որ դասական դեպքում կատարյալ կոդերի քանակը սահմանափակ է, այդ պատճառով ներկայումս կատարվում են հետազոտություններ տրված բովանդակալից իմաստ ունեցող սխալների վեկտորների բազմության համար կատարյալ կոդեր կառուցելու ուղղությամբ[1][2]:

Բերված փաստերը ակնհայտորեն վկայում են սխալներ ուղղող կոդերի տեսության նորանոր հետազոտման, նոր կոդերի ինչպես նաև արդյունավետ ապակոդավորման ալգորիթմների ստեղծման կարևորության ու արդիականության մասին:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ՆՊԱՏԱԿԸ: Հետազոտել սխալների տրոհմամբ կապի գծերում սխալների վեկտորների բազմության հզորության արժեքները տարբեր պարամետրերի դեպքերում: Հետազոտել արդեն հայտնի կոդերը և կառուցել նոր կոդեր մեկից ավել սխալներ հայտնաբերելու և ուղղելու նպատակով: Կառուցել արդյունավետ ալգորիթմներ ստեղծված կոդերի ապակոդավորման համար:

ԳԻՏԱԿԱՆ ՆՈՐՈՒՅԹԸ: Աշխատանքի գիտական նորույթը որոշվում է առաջին անգամ իրականացված տեսական աշխատանքների հետևյալ համախմբությամբ՝

- Հետազոտված են գծային անհավասարումների համակարգերի բուլյան լուծումների քանակի խնդիրներ, որոնք առաջանում են Հեմմինգի ընդհանրացված մետրիկայով գնդի կամ գնդային մակերևույթի հզորությունները հաշվելիս: Հաշվված է համապատասխան ձևով ստացված անհավասարումների համակարգերի բուլյան լուծումների քանակը որոշ դեպքերում:
- Ապացուցված է, որ նշված տիպի գծային անհավասարումների համակարգի բուլյան լուծումների քանակի գտնելու խնդիրը հանգեցվում է գծային հավասարումների համակարգի բուլյան լուծումների քանակի գտնելու խնդրին: Ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում նշված տիպի հավասարումների համակարգը կունենա բուլյան լուծում:
- Կառուցված են ոչ գծային կոդեր, որոնք հայտնաբերում և ուղղում են կամայական մեկ սխալ, և կամայական երկու սխալ, որոնք գտնվում են ֆիքսված k տեղերում: Բերված են նշված կոդերի վերծանման ալգորիթմները, որոնց միջոցով կարելի է միարժեքորեն վերծանել և վերականգնել անսխալ ինֆորմացիան եթե նրանում առաջացել է կամայական մեկ սխալ կամ կամայական երկու սխալ ֆիքսված k տեղերում:
- Կառուցված է $n=2^k-\binom{k}{2}-1$ երկարությամբ և $n-k$ չափողականությամբ կատարյալ գծային կոդ, որը հայտնաբերում և ուղղում է կամայական մեկ սխալ և կամայական երկու սխալ, որոնք առաջանում են ֆիքսված k

---
[1] Solov'eva F.I., *On Perfect Codes and Related Topics, Lecture Notes*, Pohang University of Science Technology (POSTECH), p. 80, 2004

[2] Krotov D. S., Avgustinovich S. V., *On the number of 1-Perfect Binary Codes: A lower Bound*, IEEE Trans. Inform. Theory, V. 54, N 4, pp. 1760-1765.

տեղերում: Այս կոդի համար բերված է վերծանման ալգորիթմ, որի միջոցով կարելի է միարժեքորեն վերծանել և վերականգնել անսխալ ինֆորմացիան:

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՆՇԱՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ: Ատենախոսության մեջ ստացված տեսական արդյունքները ունեն ոչ միայն ակադեմիական հետաքրքրություն, այլև կարող են օգտագործվել կապի գծերում սխալներ հայտնաբերելու և ուղղելու նպատակով: Նոր կառուցված կոդերը ունեն արդյունավետ վերծանման ալգորիթմներ, հետևաբար կիրառական իմաստով հարմար է նրանց օգտագործումը:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԱՊՐՈԲԱՑԻԱՆ: Ատենախոսական աշխատանքի հիմնական արդյունքները զեկուցվել են հետևյալ գիտաժողովներում՝ “Годичная научная конференция РАУ” Երևան, 2007, “Годичная научная конференция РАУ” Երևան, 2008, պարբերաբար քննարկվել են Ռուս-Հայկական (Սլավոնական) համալսարանի համակարգային ծրագրավորման և մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի ամբիոնների սեմինարներին:

ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: Ատենախոսական աշխատանքի թեմայով հրատարակված է 4 գիտական հոդված, որոնց ցանկը ներկայացված է սեղմագրի վերջում:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԸ ԵՎ ԾԱՎԱԼԸ: Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, ամփոփումից և գրականության ցանկից 39 հղումներով: Աշխատանքի ընդհանուր ծավալը կազմում է 97 էջ:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ներածության մեջ հաստատված է ատենախոսությունում ներկայացված հետազոտության արդիականությունը, բերված է գրականության ակնարկը և արված է հրապարակումների ակնարկ, որտեղ նկարագրվում են բերված հետազոտությունների գործնական կիրառության հնարավորությունները: Ներկայացված է ատենախոսության կարճ բովանդակությունը, ինչպես նաև պաշտպանությանը ներկայացված հիմնական դրույթները:

Գլուխ 1–ը նվիրված է սխալների տրոհմամբ կապի գծերում սխալների վեկտորների բազմության հզորության արժեքի հաշվման և այդ բազմության հզորության գնահատականների խնդիրներին:

1.1–ում բերված է Հեմմինգի ընդհանրացված մետրիկայով գնդի և գնդային մակերևույթի հզորության հաշվման և սխալների տրոհմամբ կապի գծերում սխալների վեկտորների բազմության հզորության հաշվման խնդիրների կապը:

1.2–ում բերված են Հեմմինգի ընդհանրացված նորմի և հեռավորության սահմանումները և որոշ դեպքերում նրանց կիրառական նշանակությունը:

B^n -ով նշանակենք n -չափանի միավոր խորանարդը:

Դիտարկենք $A=\{1,2,...n\}$ և $I=\{I_1,I_2,...,I_k\}$ բազմությունները, որտեղ $I_j \subseteq A$

$k \geq 1$, $1 \leq j \leq k$ և $\bigcup_{l=1}^{k} I_l = A$:

$\tilde{\alpha}$ հավաքածուի նորմ ըստ I բազմության սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\|\alpha\|_I = \max(\sum_{i\in I_1}\alpha_i, \sum_{i\in I_2}\alpha_i, ..., \sum_{i\in I_k}\alpha_i):$$

Նախ, եթե $\exists$ այնպիսի $I_j = A$, որտեղ $1 \le j \le k$, ապա վերը սահմանված նորմը համընկնում է սովորական նորմի հետ: Հետևաբար, վերը սահմանված նորմը սովորական նորմի ընդհանրացումն է:

Սահմանենք հեռավորություն ըստ I բազմության՝

$$d_I(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) = \|\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta}\|_I:$$

Պարզ է, որ եթե $\exists$ այնպիսի $I_j = A$, որտեղ $1 \le j \le k$, ապա այս կերպ սահմանված հեռավորությունը համընկնում է սովորական Հեմմինգի հեռավորության հետ: Ապացուցված է[1], որ այսպես սահմանված հեռավորությունը բավարարում է հեռավորության բոլոր հատկություններին: Որոշ դեպքերում[2], որպես $I_1, I_2, ..., I_k$ բազմություն վերցնում են հետևյալ բազմությունները՝ $I_1 = \{1,2,...,k\}, I_2 = \{2,3,...,k+1\}, ..., I_{n-k+1} = \{n-k+1, n-k+2, ..., n\}$: Պարզ է, որ այս կերպով սահմանված բազմությունների համար $\bigcup_{l=1}^{n-k+1} I_l = A$: Այս դեպքում խնդիր է առաջանում գտնել տրված կենտրոնով և m շառավղով գնդի և գնդային մակերևույթի հզորությունը: Ապացուցված է[1], որ գնդի կամ գնդային մակերևույթի հզորությունը անկախ է գնդի կենտրոնից, ապա կարող ենք ենթադրել, որ գնդի կենտրոնը (0,0...,0) կետն է և այդ դեպքում գնդի և գնդային մակերևույթների հզորության հաշվման խնդիրները հանգեցվում են ստորև նշված $f(n,k,m)$ և $\varphi(n,k,m)$ հաշվելու խնդիրներին:

1.3–ում ուսումնասիրված են գնդի և գնդային մակերևույթի հզորության հաշվման խնդիրները ըստ Հեմմինգի ընդհանրացված հեռավորության: Սխալների տրոհմամբ կապի գծերում սխալների վեկտորների բազմության հզորության հաշվման խնդիրը ինչպես նաև ըստ Հեմմինգի ընդհանրացված հեռավորության գնդի հզորության հաշվման խնդիրները բերվում են

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_k \le m \\ x_2 + x_3 + .. + x_{k+1} \le m \\ .... \\ x_{n-k+1} + x_{n-k+2} + ... + x_n \le m \end{cases} \tag{1.1}$$

տեսքի գծային անհավասարումների համակարգին բավարարող բուլյան լուծումների քանակի գտնելու խնդրին: Վերը նշված համակարգին զուգահեռ դիտարկվում է նաև հետևյալ տեսքի բուլյան փոփոխականներով գծային անհանվասարումների համակարգը.

[1] Margaryan Zh., Movsisyan G., Leontiev V. *Perfect codes for the generalized Hamming metric*, CSIT, p. 165-168, Yerevan 2005.
[2] Леонтьев В.К., Мовсисян Г.Л., *Об аддитивном канале связи*, Докл. НАН Армении. 2004. Т. 104, N 1, с. 23-28.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq m \\ x_2 + x_3 + .. + x_{k+1} \geq m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-k+1} + x_{n-k+2} + \ldots + x_n \geq m \end{cases} \tag{1.2}$$

(1.1) և (1.2) գծային անհավասարումների համար դիտարկված են հետևյալ չորս խնդիրները.

Խնդիր Ա: Գտնել (1.1) համակարգին բավարարող բոլոր $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{B}^n$ հավաքածուները այնպես, որ անհավասարություններից գոնե մեկում տեղի ունենա հավասարություն: Այս խնդրի լուծումների քանակը նշանակենք $f(n,k,m)$ -ով:

Խնդիր Բ: Գտնել (1.1) համակարգին բավարարող բոլոր $\tilde{\alpha} \in \mathrm{B}^n$ հավաքածուները: Այս խնդրի լուծումների քանակը նշանակենք $\varphi(n,k,m)$ -ով:

Խնդիր Գ: Գտնել (1.2) համակարգին բավարարող բոլոր $\tilde{\alpha} \in \mathrm{B}^n$ հավաքածուները այնպես, որ անհավասարություններից գոնե մեկում տեղի ունենա հավասարություն: Այս խնդրի լուծումների քանակը նշանակենք $\psi(n,k,m)$ -ով:

Խնդիր Դ: Գտնել (1.2) համակարգին բավարարող բոլոր $\tilde{\alpha} \in \mathrm{B}^n$ հավաքածուները: Այս խնդրի լուծումների քանակը նշանակենք $\theta(n,k,m)$ -ով:

Պնդում 1.1: $f(n,k,m) = \varphi(n,k,m) - \varphi(n,k,m-1)$:

Պնդում 1.2: $\psi(n,k,m) = \theta(n,k,m) - \theta(n,k,m+1)$:

Պնդում 1.3: $f(n,k,m) = \psi(n,k,k-m)$:

Պնդում 1.4: $\varphi(n,k,m) = \theta(n,k,k-m)$:

Թեորեմ 1.1: $f(n,k,m)$, $\varphi(n,k,m)$, $\psi(n,k,m)$, $\theta(n,k,m)$ ֆունկցիաների արժեքներից որևէ մեկը հաշվելով կարելի է հաշվել մնացածը:

1.4–ում հաշվված են ըստ Հեմմինգի ընդհանրացված հեռավորության գնդի և գնդային մակերևույթի հզորության արժեքները որոշ դեպքերում:

Թեորեմ 1.2: $\theta(n,k,1) = \sum_{p=0}^{n} D(p+1, n-p, k-1)$, որտեղ

$$D(k,n,h) = \binom{n+k-1}{k-1} + \sum_{t=1}^{k} (-1)^t \binom{k}{t} \sum_{r=0}^{n-t(h+1)} \binom{r+k-t-1}{r} :$$

1.5-ում ուսումնասիրված է (1.1) գծային անհավասարումների համակարգերի բուլյան լուծումների բազմությունը: Ապացուցված է, որ նրանք կազմում են տրոհում n չափանի միավոր խորանարդի համար: Ստացված է վերին գնահատական (1.2) տիպի գծային անհավասարումների բուլյան լուծումների քանակի համար:

Թեորեմ 1.3: (1.2) անհավասարումների համակարգի լուծումների քանակը ըստ Խնդիր Դ-ի չի գերազանցում $\sum_{p=0}^{n} D(p+1, n-p, k-m)$, այսինքն՝

$$\theta(n,k,m) \le \sum_{p=0}^{n} D(p+1, n-p, k-m):$$

Թեորեմ 1.4:

$$\text{Եթե } k > n/2 \text{ ապա } f(n,k,m) = \sum_{i=0}^{2k-n} \binom{2k-n}{i} f(2(n-k), n-k, m-i)$$

$$\varphi(n,k,m) = \sum_{i=0}^{2k-n} \binom{2k-n}{i} \varphi(2(n-k), n-k, m-i)$$

$$\psi(n,k,m) = \sum_{i=0}^{2k-n} \binom{2k-n}{i} \psi(2(n-k), n-k, m-i)$$

$$\theta(n,k,m) = \sum_{i=0}^{2k-n} \binom{2k-n}{i} \theta(2(n-k), n-k, m-i)$$

Գլուխ 2–ը նվիրված է բուլյան փոփոխականներով որոշակի տիպի գծային անհավասարումների և հավասարումների համակարգերի ուսումնասիրմանը:

2.1–ում հաշվված են (1.2) տիպի գծային անհավասարումների համակարգի բուլյան լուծումների քանակը որոշ դեպքերում, երբ ինտերվալի երկարությունը հավասար է վեկտորի երկարության կեսին: $\varphi(n,d)$ -ով նշանակենք հետևյալ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ge d \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1} \ge d \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n} \ge d \end{cases} \qquad (2.1)$$

անհավասարումների համակարգի բուլյան լուծումների քանակը:

Պնդում 2.1: $\varphi(n,1) = 2^{2n} - (n+2)2^{n-1}$

Պնդում 2.3: $\varphi(n,2) = 2^{2n} - (n^2+4)2^{n-1} + 1$

Պնդում 2.6: $\varphi(n,3) = 2^{2n} - (n^3 - 3n^2 + 10n + 8)2^{n-2} + \dfrac{n(n+5)}{2} + 1$

2.2–ում տրված է գծային անհավասարումների և հավասարումների համակարգերի կապը: Ապացուցված է, որ գծային անհավասարումների համակարգերի բուլյան լուծումների քանակը գտնելու խնդիրը կարելի է հանգեցնել հավասարումների համակարգերի բուլյան լուծումների քանակը գտնելու խնդրին:

Դիտարկենք հետևյալ հավասարումների համակարգերը՝

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = d_1 \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1} = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n} = d_{n+1} \end{cases} \quad (2.24) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_k = d_1 \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_{k+1} = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-k+1} + x_{n-k+2} + \ldots + x_n = d_{n-k+1} \end{cases} \quad (2.27)$$

$f(n,k,d_1,d_2,\ldots,d_{n-k+1})$-ով նշանակենք (2.27) հավասարումների համակարգի բուլյան լուծումների քանակը:

$$\theta(n,k,m) = \sum_{d_1=m}^{k} \sum_{d_2=m}^{k} \ldots \sum_{d_1=m}^{k} f(n,k,d_1,d_2,\ldots,d_{n-k+1}):$$

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը:

Ինչպիսի d_i-ների համար $i \in \{1,2,\ldots,n-k+1\}$ (2.27) հավասարումների համակարգը կունենա բուլյան լուծում և եթե լուծումը գոյություն ունի, գտնել նրանց քանակը: (*)

Թեորեմ 2.1: $k > \frac{n}{2}$ դեպքում (*) խնդիրը (2.27) համակարգի համար հանգեցվում է նույն խնդրին (2.24) տիպի հավասարումների համակարգի համար:

2.3–ը նվիրված է որոշ տիպի գծային հավասարումների համակարգերի ուսումնասիրմանը: Ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում նշված տիպի հավասարումների համակարգը կունենա բուլյան լուծում:

Դիցուք $N = \{1,2,\ldots,n\}$: Սահմանենք $S_1, S_2, H_1, H_2, T_1, T_2$ բազմությունները հետևյալ կերպ՝

$$H_1 = \{i \,/\, d_i - d_{i+1} = 1, i \in \{1,2,\ldots,k\}\}$$
$$H_2 = \{i \,/\, d_i - d_{i+1} = 1, i \in \{k+1, k+2,\ldots,n-k+1\}\}$$
$$S_1 = \{i \,/\, d_i - d_{i+1} = -1, i \in \{1,2,\ldots,k\}\}$$
$$S_2 = \{i \,/\, d_i - d_{i+1} = -1, i \in \{k+1, k+2,\ldots,n-k+1\}\}$$
$$T_1 = \{i \,/\, d_i - d_{i+1} = 0, i \in \{1,2,\ldots,k\}\}$$
$$T_2 = \{i \,/\, d_i - d_{i+1} = 0, i \in \{k+1, k+2,\ldots,n-k+1\}\}$$

Թեորեմ 2.2 **(Անհրաժեշտ և բավարար պայման):** Որպեսզի (2.27) հավասարումների համակարգը ունենա բուլյան լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝

1. $|d_i - d_{i+1}| \le 1, i = 1,2,\ldots,n$
2. $|H_1| \le d_1$
3. $|S_1| \le k - d_1$
4. $\forall i \in H_1$ համար $i + k \notin H_2$

5. $\forall i \in S_1$ համար $i + k \notin S_2$

<u>Գլուխ 3</u>–ը նվիրված է Հեմմինգի ստուգող մատրիցի ինչպես նաև նրա որոշակի ձևափոխությամբ ստացված մատրիցի հիման վրա կառուցված գծային և բուլյան հավասարումների համակարգերի բուլյան լուծումների բազմության ուսումնասիրմանը:

3.1–ը նվիրված է Հեմմինգի ստուգող մատրիցով գծային հավասարումների համակարգի բուլյան լուծումների բազմության ուսումնասիրությանը:
Դիտարկենք Հեմմինգի ստուգող $\left(k, 2^k - 1\right)$ չափանի H_k մատրիցը:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ գծային հավասարումների համակարգը՝

$$H_k \cdot X^T = A \tag{3.1}$$

որտեղ $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $\forall x_i \in \{0,1\}$ և $n = 2^k - 1$, իսկ $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_k \end{pmatrix}$, $a_i \in N$:

$M\left(a_1, a_2, ..., a_k\right)$-ով նշանակենք (3.1) համակարգի բոլոր բուլյան լուծումների բազմությունը $M\left(a_1, a_2, ..., a_k\right) = \{\tilde{\beta} = \left(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{2^k - 1}\right) \in B^n \,/\, H_k \cdot \tilde{\beta}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_k \end{pmatrix}\}$:

Սահմանում 3.1: Որպես $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_k \end{pmatrix}$, $0 \le a_i \le 2^{k-1}$, հավաքածուի ժխտում սահմանենք հետևյալ հավաքածուն՝ $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ ... \\ \overline{a_k} \end{pmatrix}$, որտեղ $\overline{a_i} = 2^{k-1} - a_i$, $i = \overline{1,k}$:

Պնդում 3.1: $\left|M\left(a_1, a_2, ..., a_k\right)\right| = \left|M\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k\right)\right|$, այլ բառերով ասած՝ $M\left(a_1, a_2, ..., a_k\right)$ և $M\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k\right)$ բազմությունների միջև գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն:

Պնդում 3.2: $M\left(a_1, a_2, ..., a_k\right) = M\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k\right)$ հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն ժամանակ, երբ $A = \overline{A}$, այսինքն՝ $a_i = 2^{k-2}$, $i = \overline{1,k}$:

Պնդում 3.3: $(a_1, a_2, ..., a_k)$-ի կամայական $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k})$ տեղափոխության համար տեղի ունի հետևյալը՝ $|M(a_1, a_2, ..., a_k)| = |M(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k})|$:

3.2–ում հետազոտված է (3.1) գծային հավասարումների համակարգի լուծումների մետրիկական հատկությունները Հեմմինգի հեռավորության տեսանկյունից:

3.3–ում հետազոտված է Հեմմինգի ստուգող մատրիցի որոշակի ձևափոխությամբ ստացված մատրիցի հիման վրա կառուցված գծային հավասարումների համակարգը և նրա բուլյան լուծումների բազմությունը:

Հեմմինգի ստուգող մատրիցում առաջ բերենք այն սյուները, որոնք պարունակում են ճիշտ մեկ հատ 0 և նրանք դասավորենք ըստ աճման կարգի, այնուհետև գրենք մնացած սյուները, նորից ըստ աճման կարգի, ստացված մատրիցը նշանակենք H'_k-ով:

Դիտարկենք հետևյալ գծային հավասարումների համակարգը.

$$H'_k \cdot x^T = A \tag{3.2}$$

$M'(a_1, a_2, ..., a_k)$-ով նշանակենք (3.2) գծային հավասարումների համակարգի բուլյան լուծումների բազմությունը՝

$M'(a_1, a_2, ..., a_k) = \{\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) / \tilde{\beta} \in B^n, H'_k \cdot \tilde{\beta}^T = A\}$:

C_1-ով նշանակենք (3.2)-ի լուծումների բազմությունը՝ A-ի վրա դնելով պայման, որ նրա կամայական էլեմենտ բաժանվում է 4-ի:

$$C_1 = \bigcup_{a_i \bmod 4 = 0, i = \overline{1,k}} M'(a_1, a_2, ..., a_k)$$

Թեորեմ 3.1: C_1 կոդը հայտնաբերում և ուղղում է ցանկացած մեկ սխալ և ցանկացած երկու սխալ, որոնք առաջանում են առաջին k դիրքում:

C_2-ով նշանակենք (3.2)-ի լուծումների բազմությունը A-ի վրա դնելով պայման որ նրա կամայական էլեմենտ $4m+2$ տեսքի թիվ է:

$$C_2 = \bigcup_{a_i \bmod 4 = 2, i = \overline{1,k}} M'(a_1, a_2, ..., a_k)$$

Թեորեմ 3.2: C_2 կոդը հայտնաբերում և ուղղում է ցանկացած մեկ սխալ և ցանկացած երկու սխալ, որոնք առաջանում են առաջին k դիրքում:

3.4.1 և 3.4.2 բաժիններում բերված են վերծանող ալգորիթմներ համապատասխանաբար C_1 և C_2 ոչ գծային կոդերի համար, որոնց միջոցով վերծանող սարքը կարող է միարժեքորեն վերականգնել անսխալ ինֆորմացիան:

3.5-ում հետազոտված է Հեմմինգի ստուգող մատրիցի որոշակի ձևափոխությամբ ստացված մատրիցի հիման վրա կառուցված բուլյան հավասարումների համակարգը և նրա լուծումների բազմությունը:

Դիցուք $V=\{v_1,v_2,...,v_s\}$ և $E=\{e_0,e_1,...,e_m\}$, որտեղ $v_i,e_i\in B^n$:

Սահմանում 3.3*:* Կասենք V կոդը հայտնաբերում և ուղղում է սխալների վեկտորների տրված E բազմությունը, եթե $\forall x,y\in V$ և $\forall e_i,e_j\in E$ համար, այնպես որ $i\neq j$ տեղի ունի հետևյալը՝ $x\oplus e_i\neq y\oplus e_j$:

Սահմանումից միանգամից հետևում է, որ $|V|\times|E|\leq 2^n$: Այսինքն՝ $s\leq\dfrac{2^n}{m+1}$:

Հետաքրքրություն են ներկայացնում այն դեպքերը, երբ $s=\dfrac{2^n}{m+1}$:

Սահմանում 3.4*:* Կասենք V կոդը հանդիսանում է կատարյալ կոդ, որը հայտնաբերում և ուղղում է սխալների տրված E բազմությունը, եթե այն նախ հանդիսանում է հայտնաբերող և ուղղող կոդ E -ի համար և $|V|\times|E|=2^n$:

Դիցուք
$$E=\left\{\begin{array}{l} e_1=\{0,0,0...,0\}\\ e_2=\{1,0,0...,0\}\\ e_3=\{0,1,0,...,0\}\\ ...\\ e_{n+1}=\{0,0,...,0,1\}\\ e_{n+2}=\{\overbrace{1,1,0...,0}^{k},0...0\}\\ ....\\ e_{n+1+C_k^2}=\{\overbrace{0,0,...1,1}^{k},0...0\} \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

Հեմմինգի ստուգող մատրիցից հեռացնենք այն սյուները, որոնք պարունակում են ճիշտ երկու հատ 1 և առաջին k տեղերում գրենք այն սյուները (ըստ աճման կարգի), որոնք պարունակում են ճիշտ մեկ հատ, այնուհետև մնացած սյուները, նորից աճման կարգի, ստացված մատրիցը նշանակենք H_k'' -ով:

Դիտարկենք հետևյալ բուլյան հավասարումների համակարգը:

$$H_k'' \cdot x^T = 0 \tag{3.3}$$

V -ով նշանակենք (3.3) հավասարումների համակարգի լուծումների բազմությունը:

Թեորեմ 3.3: V բազմությունը հանդիսանում է կատարյալ գծային կոդ սխալների վեկտորների E (3.12) բազմության համար:

3.6-ում բերված է վերծանող ալգորիթմ վերը նշված կատարյալ կոդի համար, որի միջոցով վերծանող սարքը կարող է միարժեքորեն վերականգնել անսխալ ինֆորմացիան:

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսական աշխատանքում ուսումնասիրված է սխալների տրոհմամբ կապի գծերում սխալների վեկտորների բազմությունը և նրա հզորությունը: Հետազոտված են նաև Հեմմինգի ստուգող մատրիցի որոշակի ձևափոխությունների արդյունքում ստացված մատրիցի հիման վրա կառուցված գծային և բուլյան հավասարումների համակարգերը և նրանց լուծումների բազմությունները: Այդ հավասարումների համակարգերի լուծումների բազմությունների միջոցով կառուցված են ոչ գծային կոդեր և գծային կատարյալ կոդ, որոնք հայտնաբերում և ուղղում են կամայական մեկ սխալ և կամայական երկու սխալ ֆիքսված տեղերում:

Ատենախոսական աշխատանքում ստացված հիմնական գիտական արդյունքները:

1. Հետազոտված են գծային անհավասարումների համակարգերի լուծումների քանակի խնդիրներ, որոնք առաջանում են Հեմմինգի ընդհանրացված մետրիկայով գնդի կամ գնդային մակերևույթի հզորությունները և սխալների տրոհմամբ կապի գծերում սխալների վեկտորների բազմության հզորությունն հաշվելիս: Հաշվված է նշված ձևով ստացված գծային անհավասարումների համակարգերի բուլյան լուծումների քանակը որոշ դեպքերում:
2. Ապացուցված է, որ գծային անհավասարումների համակարգերի բուլյան լուծումների քանակը գտնելու խնդիրը հանգեցվում է գծային հավասարումների համակարգերի բուլյան լուծումների քանակը գտնելու խնդրին: Ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում հավասարումների համակարգը կունենա բուլյան լուծում:
3. Կառուցված են ոչ գծային կոդեր, որոնք հայտնաբերում և ուղղում են կամայական մեկ սխալ և կամայական երկու սխալ ֆիքսված k տեղերում:

Կառուցված է $n = 2^k - \binom{k}{2} - 1$ երկարությամբ և $n-k$ չափողականությամբ կատարյալ գծային կոդ, որը հայտնաբերում և ուղղում է կամայական մեկ սխալ և կամայական երկու սխալ ֆիքսված k տեղերում: Կառուցված բոլոր կոդերի համար բերված են վերծանման ալգորիթմներ, որոնց միջոցով կարելի է միարժեքորեն վերծանել և վերականգնել անսխալ ինֆորմացիան:

ՀՐԱՏԱՐԱԿՎԱԾ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ՑՈՒՑԱԿ

1. Մարգարյան Ժ. Գ., Ղանդիլյան Ա. Խ., *Բուլյան անհավասարումների լուծումների քանակի մասին*: Годичная научная конференция, Российско-Армянский (Славянский) Университет, Сборник научных статей, էջ 166-171, 2007:
2. Ghandilyan A. Kh., *About the reducibility of the calculation of the number of the solutions of Boolean inequalities*, Вестник РАУ, “Физико-Математические и естественные науки”, N1, с. 90-95, 2008.
3. Ghandilyan A. Kh., Margaryan Zh. G., *One error and in the given interval two error correcting code for the additive communication channel*, Transactions of IIAP of NAS RA: Mathematical Problems of Computer Science, p. 14-22, 2009.
4. Margaryan Zh. G., Ghandilyan A. Kh., *About the number of the solutions of the system of Boolean inequalities*, Вестник РАУ, “Физико-Математические и естественные науки”, N1, с. 80-89, 2008.

РЕЗЮМЕ

Артур Хачатурович Гандилян
“Двоичные коды в аддитивных каналах связи”

В диссертационной работе исследовано множество векторов ошибок в канале с разделением ошибок и его мощность. Исследованы также системы линейных и булевых уравнений, получающихся в результате определенных преобразований проверяющей матрицы Хемминга, и множества их булевых решений. С помощью множеств булевых решений указанных систем уравнений построены нелинейные коды и совершенный линейный код, которые обнаруживают и исправляют произвольную одну ошибку и произвольные две ошибки, которые возникают в зафиксированных местах.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Исследованы проблемы вычисления числа булевых решений систем линейных неравенств, которые возникают при вычислении мощности шара и мощности

сферической поверхности согласно обобщенной метрике Хемминга и при вычислении мощности векторов ошибок в каналах с разделением ошибок. Для некоторых случаев вычислено количества булевых решений указанных систем линейных неравенств.

2. Доказано, что проблема вычисления числа булевых решений систем линейных неравенств может быть сведено к проблеме вычисления числа булевых решений систем линейных равенств. Получено необходимое и достаточное условие для существования булевого решения системы линейных равенств.

3. Построены нелинейные коды, которые обнаруживают и исправляют произвольную одну ошибку и произвольные две ошибки в зафиксированных k местах. Построен также совершенный линейный код с длиной $n = 2^k - \binom{k}{2} - 1$ и с размерностью $n - k$, который обнаруживает и исправляет произвольную одну ошибку и произвольные две ошибки в зафиксированных k местах. Приведены алгоритмы декодирования указанных кодов, с помощью которых можно однозначно декодировать и восстановить отправленную информацию.

Artur Kh. Ghandilyan

«Binary codes in the additive communication channel»