Ե Ր Ե Վ Ա Ն Ի   Պ Ե Տ Ա Կ Ա Ն   Հ Ա Մ Ա Լ Ս Ա Ր Ա Ն

ԶՇՈՐՆ ՍՎԵՏԼԱՆԱ ԱԼԵՔՍԱՆԴՐԻ

Բարձր կարգի վերասերվող
դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումներ
անվերջ միջակայքերում

Ա.01.02 – “Դիֆերենցիալ հավասարումներ և մաթեմատիկական ֆիզիկա”
մասնագիտությամբ

ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

ԵՐԵՎԱՆ – 2015

Е Р Е В А Н С К И Й   Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й   У Н И В Е Р С И Т Е Т

ЗШОРН СВЕТЛАНА АЛЕКСАНДРОВНА

Вырождающиеся дифференциально-операторные
уравнения высокого порядка
в бесконечных интервалах

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

по специальности 01.01.02
"Дифференциальные уравнения и математическая физика"

Е Р Е В А Н – 2 0 1 5

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	ֆ-.մ.գ.թ.	Լ.Պ. Տեփոյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆ-մ.գ.դ.	Վ.Վ. Կորնիենկո
	ֆ-մ.գ.թ.	Ա.Հ. Քամալյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2015 թ. դեկտեմբերի 22-ին ժ. 15^{00}-ին, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցեն՝ 0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2015 թ. նոյեմբերի 21-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:	к.ф-м.н.	Л.П. Тепоян
Официальные оппоненты:	д.ф-м.н.	В.В. Корниенко
	к.ф-м.н.	А.Г. Камалян

Ведущая организация: Национальный политехнический университет Армении

Защита диссертации состоится 22 декабря 2015 г. в 15^{00} ч. на заседании специализированного совета ВАК-а 050, действующего при Ереванском государственном университете.
Адрес: 0025, г. Ереван, ул.Ал. Манукяна 1.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан 21-го ноября 2015 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Т. Н. Арутюнян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Первая краевая задача для вырождающегося эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0$$

в области, примыкающей к оси Ox, была исследована М.В. Келдышем в 1951 году в работе [1]. В этой статье было замечено, что корректная постановка этой задачи зависит от показателя α и коэффициента $b(x,y)$.

Дальнейшие исследования первой краевой задачи для вырождающихся эллиптико-параболических уравнений были проведены О.А. Олейником [2], С.Г. Михлиным [3] и многими другими авторами [11-17].

Существенное продвижение в теории вырождающихся эллиптических уравнений было сделано М.И. Вишиком в работах [4-6]. Результаты М.И. Вишика на уравнения четвертого порядка были распространены В.К. Захаровым [7].

Новый подход при исследовании вырождающихся уравнений был предложен А.А. Дезином в работе [8] в 1981 году. Он исследовал дифференциально-операторные уравнения вида

$$\Lambda u = -D_t(t^\alpha D_t u) - D_t(Au) - Pu = f,$$

где A и P операторы, действующие в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H и обладающие общей полной системой собственных функций, образующих базис Рисса в H. Метод исследования, названный А.А. Дезином [9] методом «модельных операторов», по сути является одной из разновидностей метода Фурье. Дальнейшее развитие метода модельных операторов было получено в работе Л.П. Тепояна [10], где рассматриваются дифференциально-операторные уравнения четвертого порядка

$$Lu = D_t^2(t^\alpha D_t^2 u) + AD_t^3 u - QD_t^2 u + Pu = f(t).$$

Настоящая работа посвящена дифференциально-операторному уравнению вида

$$\Lambda u \equiv (-1)^m \left(t^\alpha u^{(m)}\right)^{(m)} + (-1)^{m-1} A\left(t^{\alpha-1} u^{(m)}\right)^{(m-1)} + Pt^\beta u = f(t), \qquad (1)$$

где $m \in N,\ t \in (1,+\infty),\ \alpha \neq 1,3,\dots,2m-1,\ \beta \leq \alpha - 2m,\ \ f \in L_{2,-\beta}((1,+\infty),H)$, т.е.

$$\int_1^{+\infty} t^{-\beta}\|f\|_H^2 dt < +\infty,$$

а операторы A и P являются линейными операторами в сепарабельном гильбертовом пространстве H (вообще говоря неограниченными) и имеют общую полную систему собственных функций $\{\varphi_k\}_{k\epsilon N}$, которая образует базис Рисса в пространстве H.

Метод модельных операторов при исследовании уравнения (1) приводит нас к необходимости изучения обыкновенного дифференциального оператора

$$Lu \equiv (-1)^m\left(t^{\alpha}u^{(m)}\right)^{(m)} + (-1)^{m-1}a\left(t^{\alpha-1}u^{(m)}\right)^{(m-1)} + pt^{\beta}u. \tag{2}$$

Определим $\dot{W}_\alpha^m(1,+\infty)$ как пополнение пространства

$\dot{C}^m[1,+\infty) = \{u \in C^m(1,+\infty), u^{(k)}(1) = u^{(k)}(+\infty) = 0, k = 0,1,\dots m-1\}$

по норме

$$\|u\|^2_{\dot{W}_\alpha^m(1,+\infty)} = \int_1^{+\infty} t^{\alpha}\left|u^{(m)}(t)\right|^2 dt..$$

Под областью определения этого оператора мы понимаем множество всех тех $u \in \dot{W}_\alpha^m(1,+\infty)$, для которых существует такая функция $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$, что равенство

$$\left(t^{\alpha}u^{(m)}, v^{(m)}\right) + a\left(t^{\alpha-1}u^{(m)}, v^{(m-1)}\right) + p\left(t^{\beta}u, v\right) = (f, v),$$

выполняется для любого $v \in \dot{W}_\alpha^m(1,+\infty)$.

Цель работы

1. Методом модельных операторов свести изучение уравнения (1) к исследованию бесконечной системы дифференциальных уравнений вида

$$L_k u_k \equiv (-1)^m\left(t^{\alpha}u_k^{(m)}\right)^{(m)} + (-1)^{m-1}a_k\left(t^{\alpha-1}u_k^{(m)}\right)^{(m-1)} + p_k t^{\beta}u_k = f_k(t),$$

где $m \in N,\ t \in (1,+\infty),\ \alpha \neq 1,3,\dots,2m-1,\ \beta \leq \alpha - 2m,$ a_k и p_k являются действительными постоянными, $f_k \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$, т.е.

$$\int_1^{+\infty} t^{-\beta}|f_k(t)|^2 dt < +\infty,$$

в случае, когда операторы A и P являются модельными операторами и обладают общей системой собственных функций, образующие базис Рисса в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

2. Описание области определения дифференциального оператора (2) в терминах поведения функций на бесконечности, в случае, когда $\beta = -2m,\ \alpha = 0$.

3. Исследование на разрешимость обыкновенных дифференциальных уравнений (2) при $f \in L_{2,-\beta}(1, +\infty)$.

4. Исследование спектра операторов $t^{-\beta}L$ и $t^{-\beta}S$, где S сопряженный к L оператор.

5. Исследование на однозначную разрешимость дифференциально-операторного уравнения (1).

6. Исследование вопроса о количестве действительных корней, в зависимости от α, характеристического полинома дифференциального уравнения типа Эйлера

$$(-1)^m \left(t^{\alpha} u^{(m)}\right)^{(m)} - d(m, \alpha) t^{\alpha - 2m} u = 0,$$

где $m \in N,\ t \geq 0,\ 0 \leq \alpha \leq 2m,\ \alpha \neq 1,3, \dots, 2m-1$, и
$d(m, \alpha) = 4^{-m} \prod_{i=1}^{m} (2i - 1 - \alpha)^2$.

Методы исследования

Используются классические методы обыкновенных дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Научная новизна

Введены новые дифференциально-операторные уравнения высокого порядка, поддающиеся исследованию методом модельных операторов.

Практическая и теоретическая ценность

Работа носит теоретический характер и посвящена исследованию вырождающихся дифференциально-операторных уравнений высокого порядка в бесконечных областях. Результаты работы могут быть использованы как в математических задачах, так и в прикладных.

Аппробация полученных результатов

Результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и функционального анализа факультета математики и механики ЕГУ, на конференции посвященной 80-летию академика С. Мергеляна (Ереван, Армения, 2008), на XXXVI международной научной конференции

«Гагаринские чтения» (Москва, Россия, 2010), на годовых сессиях Армянского математического союза (Ереван, Армения, 2014, 2015).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 3 статьях, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация изложена на 75 страницах, состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, включающего 62 наименования.

Содержание работы

В параграфе 1.1 определено весовое пространство $\dot{W}_{\alpha}^{m}(1,+\infty)$ (см. [11]). Для функций u из пространства $\dot{W}_{\alpha}^{m}(1,+\infty)$ имеют место следующие оценки

$$\left|u^{(k)}(t)\right|^{2} \leq c_{k} t^{2m-2k-1-\alpha} \|u\|_{\dot{W}_{\alpha}^{m}(1,+\infty)}^{2}, k=0,1,\dots m-1.$$

Из этих неравенств следует, что для $\alpha > 2m-1$ условия $u^{(k)}(+\infty)=0$, $k=0,1,\dots m-1$, после пополнения сохраняются. Для значений $2m-2k-2<\alpha<2m-2k-1, k=0,1,\dots,m-2$ может быть нарушено условие $u(+\infty)=0$, а при $\alpha<1$ все значения $u^{(k)}(+\infty)$, $k=0,1,\dots m-1$, вообще говоря, могут обращаться в бесконечность.

Вместе с тем, при $\beta \leq \alpha-2m$ имеет место непрерывное вложение

$$\dot{W}_{\alpha}^{m}(1,+\infty) \subset L_{2,\beta}(1,+\infty),$$

которое при $\beta<\alpha-2m$ компактно (см. [11]).

В параграфе 1.2 рассматривается вырождающееся самосопряженное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv (-1)^{m}\left(t^{\alpha} u^{(m)}\right)^{(m)} + p t^{\beta} u = f, \tag{3}$$

где $m \in N$, $t \in (1,+\infty)$, $\alpha \neq 1,3,\dots,2m-1$, $\beta \leq \alpha-2m$, $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$.

Приведены некоторые теоремы о существовании и единственности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения (3), а также дано описание спектра оператора L.

Доказана следующая теорема об описании области определения $D(L)$ оператора L при $\beta=-2m$ и $\alpha=0$.

Теорема 1.2.7. *При* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ *область определения* $D(L)$ *оператора* L *состоит из функций* $u \in \dot{W}_{\alpha}^{m}(1, +\infty)$**,** *для которых значение* $u^{(m-1)}(+\infty)$ *конечно, а при* $2m - 2k - 2 < \alpha < 2m - 2k - 1, k = 0,1, \dots, m - 2$ *конечны также значения* $u^{(k)}(+\infty)$.

В параграфе 1.3 рассматривается уравнение типа Эйлера

$$(-1)^m \left(t^{\alpha} u^{(m)}\right)^{(m)} - d(m, \alpha) t^{\alpha - 2m} u = 0, \qquad (4)$$

где $m \in N$, $t \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 2m$, $\alpha \neq 1,3, \dots, 2m - 1$, и

$$d(m, \alpha) = 4^{-m} \prod_{i=1}^{m} (2i - 1 - \alpha)^2.$$

Характеристический полином для уравнения (4) имеет вид

$$p(\lambda) = (-1)^m \prod_{i=0}^{m-1} (\lambda - i)(\lambda - m + \alpha - i) - d(m, \alpha). \qquad (5)$$

Для этого полинома доказаны нижеприведенные две теоремы:

Теорема 1.3.1. *При* $\alpha \in [0,1)$ *многочлен* $p(\lambda)$ *имеет* $2m$ *действительных корней, из которых число* $\frac{2m-1-\alpha}{2}$ *является двукратным корнем, а остальные корни симметричны относительно* $\frac{2m-1-\alpha}{2}$.

Теорема 1.3.2. *Многочлен* $p(\lambda)$ *при* $\alpha \in (4j - 1, 4j + 1)$ *имеет по крайней мере* $2m - 4j - 2$ *действительных корней, а при* $\alpha \in (4j - 3, 4j - 1)$ *имеет по крайней мере* $2m - 4j + 2$ *действительных корней.*

В параграфе 1.4 рассматривается следующее вырождающееся несамосопряженное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv (-1)^m \left(t^{\alpha} u^{(m)}\right)^{(m)} + (-1)^{m-1} a \left(t^{\alpha - 1} u^{(m)}\right)^{(m-1)} + p t^{\beta} u, \qquad (6)$$

где $m \in N$, $t \in (1, +\infty)$, $\alpha \neq 1,3, \dots, 2m - 1$, $\beta \leq \alpha - 2m$, $a \neq 0$, a и p являются действительными постоянными и $f \in L_{2,-\beta}(1, +\infty)$.

Доказывается теорема о существовании и единственности обобщенного решения задачи Дирихле уравнения (6).

Теорема 1.4.2. *При выполнении условий*

$$a(1 - \alpha) > 0, \ \gamma = d(m, \alpha) + \frac{a}{2}(1 - \alpha) d(m - 1, \alpha - 2) + p > 0 \qquad (7)$$

обобщенное решение задачи Дирихле уравнения (6) существует и единственно для любого $f \in L_{2,-\beta}(1, +\infty)$.

Обозначим через $\tilde{L} \equiv t^{-\beta}L, \quad D(\tilde{L}) \equiv D(L)$. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 1.4.3. *При выполнении условий* (7) *обратный оператор* $\tilde{L}^{-1}: L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,\beta}(1,+\infty)$ *непрерывен при* $\beta \le \alpha - 2m$, *а при* $\beta < \alpha - 2m$ *является компактным оператором.*

Теперь рассмотрим следующее дифференциальное уравнение, левая часть которой является формально сопряженным дифференциальным выражением к левой части уравнения (6)

$$Sv \equiv (-1)^m\left(t^{\alpha}v^{(m)}\right)^{(m)} - a(-1)^{m-1}\left(t^{\alpha-1}v^{(m-1)}\right)^{(m)} + pt^{\beta}v = g(t), \tag{8}$$

где $m \in N,\ t \in (1,+\infty),\ \alpha \ne 1,3,\dots,2m-1,\ \beta \le \alpha - 2m,\ a \ne 0,\ \ a$ и p являются действительными постоянными и $g \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$.

Определение 1.4.4. *Функция* $v \in L_{2,\beta}(1,+\infty)$ *называется обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения* (8), *если для любого* $u \in D(L)$ *имеет место равенство*

$$(Lu, v) = (u, g).$$

Определим оператор $\tilde{S} \equiv t^{-\beta}S,\ D(\tilde{S}) \equiv D(S)$.

Теорема 1.4.5. *При выполнении условий (7) обобщенное решение уравнения (14) существует и единственно для любого* $g \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$.

Следствие 1.4.6. *Операторы* $\tilde{L}$ *и* $\tilde{S}$ *при* $\beta < \alpha\text{-}2m$ *имеют дискретные спектры.*

Предложение 1.4.8. *При выполнении условий (7) спектры операторов* $\tilde{L}, \tilde{S}: L_{2,\beta}(1,+\infty) \to L_{2,\beta}(1,+\infty)$ *лежат в правой полуплоскости.*

В параграфе 1.5 рассматривается вырождающееся несамосопряженное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-(t^{\alpha}u')' + au' - pt^{-2}u = f$$

и приводится связь между пространствами $\dot{W}_{\alpha}(1,+\infty)$ и $\dot{W}_{\alpha}(0,1)$. Теорема о существовании обобщенного решения задачи Дирихле в случае $p = 0$ доказывается на основе леммы Рисса.

Во второй главе рассматриваются вырождающиеся несамосопряженные дифференциально-операторные уравнения высокого порядка.

Параграф 2.1 носит вспомогательный характер. Приводятся определения модельных операторов и их подклассов, а также важные для нас свойства модельных операторов (см. [9]).

В параграфе 2.2 рассматривается вырождающееся дифференциально-операторное уравнение (1). Предполагается, что операторы A и P имеют общую полную систему собственных функций $\{\varphi_k\}_{k\epsilon N}$, т.е. существуют числа a_k и p_k, $k \in N$, так что

$$A\varphi_{k=}a_k\varphi_k,\ \ P\varphi_{k=}p_k\varphi_k,\ \ k \in N,$$

при этом система $\{\varphi_k\}_{k\epsilon N}$ образует базис Рисса в пространстве H.

Рассматриваются дифференциальные операторы

$$L_k u \equiv (-1)^m\left(t^{\alpha}u^{(m)}\right)^{(m)} + (-1)^{m-1}a_k\left(t^{\alpha-1}u^{(m)}\right)^{(m-1)} + p_k t^{\beta}u.$$

Решение уравнения (1) ищется в виде сходящегося в $L_{2,-\beta}((1,+\infty),H)$ ряда

$$u(t) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k,\ \ u_k \in D(L_k).$$

Функция f также представляется в виде ряда $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k$.

Из условия $f \in L_{2,-\beta}((1,+\infty),H)$ следует, что $f_k \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$ при всех $k \in N$.

Тем самым, операторное уравнение (1) расщепляется в бесконечную цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_k u_k \equiv (-1)^m\left(t^{\alpha}u_k^{(m)}\right)^{(m)} + (-1)^{m-1}a_k\left(t^{\alpha-1}u_k^{(m)}\right)^{(m-1)} + p_k t^{\beta}u_k = f_k(t), k \in N. \qquad (9)$$

Будем говорить, что $u \in L_{2,-\beta}((1,+\infty),H)$ принадлежит области определения $D(\Lambda)$ тогда и только тогда, когда она представляется в виде сходящегося в пространстве $L_{2,-\beta}((1,+\infty),H)$ ряда

$$u(t) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k,\ \ u_k \in D(L_k),$$

и кроме того в $L_{2,-\beta}((1,+\infty),H)$ сходится ряд

$$\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}(L_k u_k)(t)\varphi_k,$$

и если $f = \sum_{k=1}^{\infty}(L_k u_k)(t)\varphi_k$, то будем писать, что $\Lambda u = f$.

Определение 2.2.1. *Функция $u \in L_{2,-\beta}((1,+\infty),H)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле операторного уравнения (1), если ее можно представить в виде*

$$u(t) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k,$$

где функции $u_k(t), k \in N$ *являются обобщенными решениями задачи Дирихле обыкновенных уравнений (9).*

Теорема 2.2.3. *Предположим, что выполнены условия*
$a_k(1-\alpha) > 0, \gamma_k = d(m,\alpha) + \frac{a_k}{2}(1-\alpha)d(m-1,\alpha-2) + p_k > \varepsilon > 0, k \in N.$
Тогда обобщенное решение задачи Дирихле операторного уравнения (1) существует и единственно при любой правой части f *из пространства* $L_{2,-\beta}((1,+\infty),H)$. *Более того, обратный оператор* Λ^{-1} *ограничен.*

В случае, когда оператор P является самосопряженным, имеет место следующая теорема:

Теорема 2.2.5. *Спектр* $\sigma(\widetilde{\Lambda})$ *оператора* $\widetilde{\Lambda}$ *совпадает с замыканием прямой суммы спектров* $\sigma(\widetilde{\mathrm{B}})$*, т.е.*

$$\sigma(\widetilde{\Lambda}) = \overline{\sigma(\widetilde{\mathrm{B}}) + \sigma(\mathrm{P})} \equiv \{\lambda_1 + \lambda_2 : \lambda_1 \in \sigma(\widetilde{\mathrm{B}}),\ \lambda_2 \in \sigma(\mathrm{P})\},$$

где $Bu = (-1)^{(m)}(t^\alpha u^{(m)})^{(m)}$, $\tilde{B} \equiv t^{-\beta}B,\ \tilde{\Lambda} \equiv t^{-\beta}\Lambda.$

В параграфе 2.3 приводятся некоторые примеры, в которых сравнивается обобщенная задача Дирихле с классической.

Список литературы

1. М.В. Келдыш*, О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области*. Доклады АН СССР, 1951, том 77, N 2, стр. 181-183
2. О.А. Олейник, *Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области*. ДАН СССР, том LXXXVII, N 6, 1952, стр. 885-888
3. С.Г. Михлин, *Вырождающиеся эллиптические уравнения*. Вестник Ленингр. ун-та , 1954, вып. 3, N 8, стр. 19-48
4. М. И. Вишик, *О первой краевой задаче для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области.* ДАН СССР, том XCIII, N 1, 1953, стр. 9-12
5. М. И. Вишик, *О краевых задачах для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области*. ДАН СССР, том XCIII, N 2, 1953, стр. 225-228

6. М. И. Вишик, *Краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений, вырождающихся на границе области*. Успехи Матем. наук, том IX, вып. 1(59), 1953, стр. 138-143
7. В.К. Захаров*, Первая краевая задача для уравнения эллиптического типа четвертого порядка, вырождающегося на границе области.* Докл. АН СССР, 1957, том 114, N 4, стр. 694-697
8. А.А. Дезин, *Вырождающиеся операторные уравнения*. Мат. сборник, 1981 том 115(157), N 3(7), стр. 323-336
9. А.А. Дезин, *Общие вопросы теорий граничных задач*. М.: Наука, 1980
10. Л.П. Тепоян, *Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения четвертого порядка.* Дифференциальные уравнения, 1987, том 23, N 8, стр. 1366–1376
11. L. Tepoyan, *Degenerate differential-operator equations on infinite intervals*. Journal of Mathematical Sciences, vol. 189, No. 1, 2013
12. А.В. Бицадзе, *Уравнения смешанного типа*. М.: АН СССР, 1959
13. Г. Фикера, *К единой теории краевых задач для эллиптико-пароболических уравнений второго порядка*. –Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1963, том 7, N 6, стр. 99-121
14. Л.Д. Кудрявцев*, О вариационном методе отыскания обобщенных решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах со степенным весом*. Дифф. уравнения, 1983, том 19, N 10, стр. 1723-1740
15. В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко, *Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи.* Матем. Анализ, том 23. М., 1985, стр. 3-124
16. М.И. Вишик, *Эллиптические уравнения, вырождающиеся на границе области, Математический сборник*. 1954, том 35(77), N 3, стр. 513-568
17. В.В. Корниенко*, О спектре вырождающихся операторных уравнений*. Математические заметки, 2000, том 68, выпуск 5, стр. 677-691

Публикации автора по теме диссертации

- S.A. Osipova, L.P. Tepoyan, *On Euler type equation.* Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences (2009), N 1, pp. 16-19
- S.A. Zschorn, *Nonselfadjoint Degenerate differential operator equations of higher order on infinite interval*. Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences (2014), No 2, pp. 39-45
- L. Tepoyan, S. Zschorn, *Degenerate nonselfadjoint high-order ordinary differential equations on an infinite interval*, Известия НАН Армении, том 50, N 3, 2015, стр. 64-70
- С. Осипова, Л. Тепоян, *Вырождающиеся обыкновенные дифференциальные уравнения в бесконечных интервалах*. XXXVI международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва 2010, Научные труды, стр. 118-119

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Ատենախոսության հիմնական արդյունքներն են.

1. $Lu \equiv (-1)^m\left(t^{\alpha}u^{(m)}\right)^{(m)} + pt^{-2m}u = f,$

   $m \in N, t \in (1,+\infty), \alpha \neq 1,3,\dots,2m-1, \beta \leq \alpha - 2m, f \in L_{2,2m}(1,+\infty)$ սովորական ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ հավասարման համար ապացուցվում է, որ,

   - երբ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, L օպերատորի $D(L)$ որոշման տիրույթը բաղկացած է այնպիսի $u \in \dot{W}_{\alpha}^{m}(1,+\infty)$ ֆունկցիաներից, որոնց համար $u^{(m-1)}(+\infty)$ վերջավոր է,
   - երբ $2m-2k-2 < \alpha < 2m-2k-1, k = 0,1,\dots,m-2$ վերջավոր է նաև $u^{(k)}(+\infty)$-ը։

2. Էյլերի տիպի

$$(-1)^m\left(t^{\alpha}u^{(m)}\right)^{(m)} - d(m,\alpha)t^{\alpha-2m}u = 0$$

   հավասարման (որտեղ $m \in N, t \geq 0,\ \ 0 \leq \alpha \leq 2m,\ \ \alpha \neq 1,3,\dots,2m-1,$ $d(m,\alpha) = 4^{-m}\prod_{i=1}^{m}(2i-1-\alpha)^2$) բնութագրիչ հավասարման համար տեղի ունեն հետևյալ պնդումները.

   - երբ $\alpha \in [0,1)$, բնութագրիչ հավասարումն ունի $2m$ իրական արմատ։ Արմատներից մեկը՝ $\frac{2m-1-\alpha}{2}$-ը, հանդիսանում է կրկնապատիկ արմատ, իսկ մնացած արմատները համաչափ են նրա նկատմամբ,
   - երբ $\alpha \in (4j-1, 4j+1)$, բնութագրիչ հավասարումն ունի առնվազն $2m-4j-2$ իրական արմատ,
   - երբ $\alpha \in (4j-3, 4j-1)$, բնութագրիչ հավասարումն ունի առնվազն $2m-4j+2$ իրական արմատ։

3. Վերասերվող

$$Lu \equiv (-1)^m\left(t^{\alpha}u^{(m)}\right)^{(m)} + (-1)^{m-1}a\left(t^{\alpha-1}u^{(m)}\right)^{(m-1)} + pt^{\beta}u = f(t)$$

դիֆերենցիալ հավասարման համար, որտեղ $f \in L_{2,-\beta}(1,+\infty)$, $m \in N$, $t \in (1,+\infty)$, $\alpha \neq 1,3,\dots,2m-1$, $\beta \leq \alpha - 2m$, $a \neq 0$, իսկ a-ն և p-ն իրական թվեր են, ապացուցված է, որ

$$a(1-\alpha) > 0,\ \gamma = d(m,\alpha) + \frac{a}{2}(1-\alpha)d(m-1,\alpha-2) + p > 0 \quad (*)$$

պայմանների դեպքում Դիրիխլեի խնդրի ընդհանրացված լուծումը գոյություն ունի և միակն է:

4. Ապացուցվում է, որ $t^{-\beta}L$ և $t^{-\beta}S$ օպերատորների սպեկտրները, (որտեղ S-ը L-ի համալուծ օպերատորն է), (*) պայմանների դեպքում ընկած են աջ կիսահարթությունում:

5. Բերված են պայմաններ, որոնց դեպքում

$$\Lambda u \equiv (-1)^m\left(t^{\alpha}u^{(m)}\right)^{(m)} + (-1)^{m-1}A\left(t^{\alpha-1}u^{(m)}\right)^{(m-1)} + Pt^{\beta}u = f(t)$$

դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի ընդհանրացված լուծումը գոյություն ունի և միակն է:

SUMMARY

Main results of the thesis are the following:

1. For ordinary selfadjoint differential equation

$$Lu \equiv (-1)^m \left(t^{\alpha} u^{(m)}\right)^{(m)} + pt^{-2m}u = f,$$

$m \in N, t \in (1, +\infty), \alpha \neq 1,3, \dots, 2m-1, \beta \leq \alpha - 2m, f \in L_{2,2m}(1, +\infty)$ is proved that

- for $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, domain of definition $D(L)$ of the operator L consists of the functions $u \in \dot{W}_{\alpha}^{m}(1, +\infty)$, for which $u^{(m-1)}(+\infty)$ is finite,
- for $2m - 2k - 2 < \alpha < 2m - 2k - 1, k = 0,1, \dots, m-2$ are finite also $u^{(k)}(+\infty)$.

2. For the characteristic polynomial of the Euler type equation

$$(-1)^m \left(t^{\alpha} u^{(m)}\right)^{(m)} - d(m, \alpha) t^{\alpha - 2m} u = 0,$$

where $m \in N, t \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 2m, \alpha \neq 1,3, \dots, 2m-1$ and

$d(m, \alpha) = 4^{-m} \prod_{i=1}^{m} (2i - 1 - \alpha)^2$, are valid the following propositions.

- for $\alpha \in [0,1)$ the characteristic polynomial has $2m$ real roots. One of that roots, namely $\frac{2m-1-\alpha}{2}$, is double root, and the other roots are symmetrical with respect to that root,
- for $\alpha \in (4j - 1, 4j + 1)$ the characteristic polynomial has at least $2m - 4j - 2$ real roots,
- for $\alpha \in (4j - 3, 4j - 1)$ the characteristic polynomial has at least $2m - 4j + 2$ real roots.

3. For degenerate differential equation

$$Lu \equiv (-1)^m \left(t^{\alpha} u^{(m)}\right)^{(m)} + (-1)^{m-1} a \left(t^{\alpha - 1} u^{(m)}\right)^{(m-1)} + pt^{\beta} u = f(t),$$

where $f \in L_{2,-\beta}(1, +\infty)$, $m \in N$, $t \in (1, +\infty)$, $\alpha \neq 1,3, \dots, 2m-1$, $\beta \leq \alpha - 2m$, $a \neq 0$, a and p are real, is proved that under the conditions

$$a(1-\alpha) > 0,\ \gamma = d(m,\alpha) + \frac{a}{2}(1-\alpha)d(m-1,\alpha-2) + p > 0 \quad (*)$$

generalized solution of the Dirichlet problem exists and is unique.

4. We proved, that the spectrums of the operators $t^{-\beta}L$ and $t^{-\beta}S$, where S is the adjoint of L, under the conditions (*) lie in the right half-plane.
5. Are given the conditions, when the solution of the generalized Dirichlet problem for the differential-operator equation

$$\Lambda u \equiv (-1)^m \left(t^{\alpha} u^{(m)}\right)^{(m)} + (-1)^{m-1} A\left(t^{\alpha-1} u^{(m)}\right)^{(m-1)} + P t^{\beta} u = f(t)$$

exists and is unique.