ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՍԱՐԴԱՐՅԱՆ ՏԻԳՐԱՆ ՀՐԱՉՅԱՅԻ

# ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԿԻՆԵՏԻԿԱՅԻ ՈՐՈՇ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԳԼՈԲԱԼ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

Ա.01.02 - «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, Մաթեմատիկական ֆիզիկա»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

**Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր**

ԵՐԵՎԱՆ 2016

---

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

САРДАРЯН ТИГРАН ГРАЧЯЕВИЧ

# ВОПРОСЫ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.02 - "Дифференциальные уравнения и Математическая физика"

Ереван 2016

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտի գիտական խորհրդի հ.239 նիստում (10.06.2013 թ):

Գիտական ղեկավար՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր
Խ. Ա. Խաչատրյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Վ. Վ. Ժարինով

- ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ,
Գ. Ս. Հակոբյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ - Խ. Աբովյանի անվան Հայկական Պետական Մանկավարժական Համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2016թ ապրիլի 5 -ին ժամը 15:00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե՝ ք.Երևան, 3750025, փ. Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Ե Պ Հ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2016թ. մարտի 4-ին:

050 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր՝ Տ. Ն. Հարությունյան

---

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета Института математики НАН Армении (№ 239, 10.06.2013).

Научный руководитель - доктор физ.-мат. наук
Х.А. Хачатрян

Официальные оппоненты - доктор физ.-мат. наук, профессор
В. В. Жаринов

- кандидат физ.-мат. наук, доцент
Г. С. Акопян

Ведущая организация -Армянский Государственный педагогический университет имени Х. Абовяна

Защита диссертации состоится 5-ого апреля 2016г. в 15:00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском государственном университете.

Адрес: г. Ереван, 3750025, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрГУ.

Автореферат разослан 4-ого марта 2016г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Т. Н. Арутюнян

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Как известно, в естествознании существуют многочисленные явления, которые описываются нелинейными интегральными или интегро-дифференциальными уравнениями. Так, например, в основе физической кинетики лежит нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана, которое первоначально в основном было применено к задачам кинетической теории газов, а в дальнейшем стало предметом исследования различных задач математической физики: теории переноса излучения, теории переноса нейтронов и гамма - квантов, кинетической теории газов, $p$-адической математической физики и т.д. (см. [4],[7],[11],[25]).

Существуют определенные трудности при исследовании этих задач. Во - первых, интегральные операторы, которые порождают соответствующие уравнения, нелинейны и некомпактны в естественных банаховых пространствах. Во - вторых, эти операторы обладают свойством "критичности", т.е. тождественно нулевая функция удовлетворяет рассматриваемым уравнениям, и возникает необходимость в построении положительных (физических) решений в определенных функциональных пространствах. Другим немаловажным затруднением является неограниченность области интегрирования в соответствующих уравнениях.

Вышеуказанные факты делают невозможным применение различных классических принципов для построения положительных неподвижных точек (принципы Шаудера, Браудера, Брауера, теорема Красносельского и т.д) для таких уравнений. Поэтому в связи с важными применениями этих уравнений в различных областях физики часто рассматриваются соответствующие линейные (иногда линеаризованные) уравнения (см. [6],[11]).

Под линеаризованным подразумевается уравнение, которое получается в результате линеаризации соответствующего первоначального уравнения. Часто оказывается, что линейные (или линеаризованные) уравнения могут обладать качественно другими решениями по сравнению с решениями исходных нелинейных уравнений. Последнее означает, что линейные уравнения иногда не могут адекватно описывать задачу с физической точки зрения, что в свою очередь еще раз подтверждает необходимость решения первоначальной нелинейной задачи.

Отметим, что в большинстве случаев вышеуказанные задачи описываются нелинейными уравнениями с некомпактными операторами Гаммерштейна или Гаммерштейна - Вольтерра (см. [2],[4],[14]).

Систематическому исследованию интегральных уравнений с нелинейными операторами Гаммерштейна посвящены многочисленные работы, как авторов зарубежных стран, так и стран СНГ (см. [9],[10],[12],[19],[20],[23],[24]). Особенно следует отметить работы М.А. Красносельского и учеников его научной школы: П.П. Забрейко, В.Я. Стеценко, Н.А. Бобылев и т.д. (см [3],[9],[10],[12]). В этих работах получены довольно тонкие необходимые и достаточные условия, обеспечивающие компактность (или полную непрерывность) интегральных операторов Гаммерштейна, Гаммерштейна - Немыцкого. С помощью этих условий, при различных ограничениях на нелинейность (условие Гелдера - Липшица по второму аргументу, монотонность, условие Каратеодори, условие выпуклости или вогнутости по второму аргументу), доказаны теоремы существования (и единственности) в определенных функциональных пространствах.

Разработке приближенных решений указанных классов уравнений, посвящены также немало интересных работ, в которых в основном соответствующее интегральное уравнение (приближенно) сводится к нелинейной системе алгебраических уравнений, и для полученных систем применяется метод Галеркина - Петрова.

Следует отметить, что аналогичные вопросы обсуждались на западе в работах Ф. Браудера, Дж. Банаса, Ц. Панчала, Г. Брейзиса, Р. Прекупа, (см. [19],[20],[23],[24]).

Однако во всех этих работах при исследовании соответствующих нелинейных уравнений существенную роль играла компактность (или полная непрерывность) рассматриваемых отображений в естественных банаховых пространствах. В некоторых случаях и ограниченность соответствующих областей интегрирования также играла немаловажную роль.

В последнее время существует множество задач современной математики, физики, механики и биологии, которые сводятся к нелинейным интегральным уравнениям типа свертки с некомпактным оператором Гаммерштейна. Такие уравнения возникают в кинетической теории газов, в теории переноса излучения в спектральных линиях, в теории нелинейных сервомеханизмов (следящих систем),в эконометрике, в теории электрических сетей (сигнальной трансмиссии через общую электрическую сеть) и т.д..

Изучение нелинейных уравнений с некомпактными операторами началось в основном с работ армянских математиков: Н.Б. Енгибаряна и его учеников Л.Г. Арабаджяна, А.Х. Хачатряна, Х.А. Хачатряна (см. [2],[4],[6]-[8], [13],[14]).

В дальнейшем систематические исследования нелинейных уравнений с некомпактными операторами Гаммерштейна и Урысона были проведены в работах Х.А. Хачатряна (см. [13]-[18],[21]).

Например, в работах [14],[15] рассмотрены следующие классы нелинейных интегральных уравнений:

$$f(x)=\int\limits_0^\infty K_0(x,t)(G(f(t))-\omega(t,f(t)))dt,\quad x\geq 0 \tag{1}$$

в предположении, что ядро $K_0(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$K_0(x,t)\geq K(x-t),\quad \sup_{x\geq 0}\int\limits_0^\infty K_0(x,t)dt=1,$$

$$K(\tau)\geq 0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\tau)d\tau=1,\quad \nu(K)\equiv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xK(x)dx\leq 0,$$

а функции $G$ и $\omega$ - условиям:

$$0\leq\omega(t,u)\ \ \downarrow\ \text{ по }\ u\ \text{ на множестве }\ [\delta,+\infty),$$

$$\omega(t,u)\leq\omega^o(t+u),\quad \forall(t,u)\in\mathbb{R}^+\times[\delta,+\infty),$$

где $\omega^o$ обладает следующими свойствами

$$\begin{gathered}\omega^o\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap C_0(\mathbb{R}^+),\ \mathbb{R}^+\equiv[0,+\infty),\\ 0\leq\omega^o(u)\ \downarrow\ \text{ по }\ u\ \text{ на }\ [\delta,+\infty),\delta>0,\end{gathered} \tag{2}$$

а $G$ - непрерывная функция на некотором отрезке $[0,\eta]$, причем

$$G(u)\geq u,\quad u\in[0,\eta],\quad G\uparrow\ \text{ на }\ [0,\eta],\ G(\eta)=\eta.$$

В работе [14] в случае, когда $G(u)=u$, доказано существование однопараметрического семейства положительных решений, причем при $\nu(K)<0$ установлено, что эти решения ограничены, а в случае $\nu(K)=0$ - построенные решения имеют линейный рост в бесконечности.

С использованием этих результатов Х.А. Хачатряном не только доказана положительная разрешимость более общего интегрального уравнения (1), но приведены также достаточные условия, обеспечивающие существование положительных и ограниченных решений для интегральных уравнений Урысона (см. [15]):

$$\varphi(x)=\int\limits_0^\infty U(x,t,\varphi(t))dt,\quad x\geq 0. \tag{3}$$

Полученные результаты распространены как на соответствующие системы нелинейных интегральных уравнений, так и на интегро - дифференциальные уравнения с некомпактным оператором Гаммерштейна (см. [18],[21]).

Настоящая диссертация посвящена дальнейшему изучению и решению нелинейных интегральных уравнений с некомпактными операторами Гаммерштейна и Гаммерштейна - Вольтерра при существенно других ограничениях на нелинейность. С применением и развитием некоторых факторизационных методов для соответствующих линейных операторов, а также методов построения инвариантных конусных отрезков для нелинейных операторов, доказаны принципиально новые теоремы существования (в некоторых случаях также единственности) положительных (физических) решений для новых классов нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактными операторами Гаммерштейна и Гаммерштейна - Вольтерра.

**Цель работы.** Основной целью настоящей диссертационной работы является:

- исследование вопросов существования и единственности положительных решений в пространствах Соболева для некоторых классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с оператором Гаммерштейна,
- построение положительных решений в пространстве суммируемых и существенно ограниченных на $\mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$ функций для некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и Гаммерштейна - Вольтерра,
- изучение асимптотических свойств решений на бесконечности для некоторых нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра.

**Методы исследования.** В диссертации использованы методы теории положительных решений для нелинейных операторных уравнений, методы теории построения инвариантных конусных отрезков для соответствующих нелинейных операторов, предельные теоремы теории функции вещественной переменной, факторизационные методы для соответствующих линейных интегральных операторов, метод последовательных приближений, методы теории консервативных интегральных уравнений типа свертки.

**Научная новизна.** Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми, обоснованными строгими математическими доказательствами.

**Практическая значимость.** Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретический и практический интерес. Они могут быть использованы в задачах кинетической теории газов, в теории переноса излучения в спектральных линиях и в теории распределения дохода в однопродуктовой экономике.

**Основные положения, выносимые на защиту.** На основе проведенных исследований автором выносятся на защиту следующие положения:

- Доказано существование неотрицательного (ненулевого) решения в некотором весовом пространстве Соболева для одного класса нелинейных интегро - дифференциальных уравнений с некомпактным оператором Гаммерштейна. Для уравнения со степенной нелинейностью получена также теорема единственности в определенном классе функций.

- Для достаточно широкого класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна с разностными ядрами получены достаточные условия, обеспечивающие существование положительных решений в пространстве суммируемых на $\mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$ функций.

- Для одной нелинейной краевой задачи кинетической теории газов доказаны теоремы существования и единственности в пространстве Соболева $W^1_\infty(\mathbb{R}^+)$.

- Получены достаточные условия для положительной разрешимости в $L_1(\mathbb{R}^+)$ некоторых классов нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна - Вольтерра. В случае со степенной нелинейностью доказана также единственность решения в определенном классе функций.

- Для одного класса интегральных уравнений Гаммерштейна - Вольтерра со знакопеременной нелинейностью построено однопараметрическое семейство положительных и существенно ограниченных на $\mathbb{R}^+$ решений.

- Для решения одного класса нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с переменным верхним пределом получена интегральная асимптотика в бесконечности. Приведены частные примеры рассматриваемых уравнений, имеющих самостоятельный интерес.

**Апробация полученных результатов.** Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отдела методов математической физики Института Математики НАН Армении, на семинаре кафедры дифференциальных уравнений Ереванского Государственного Университета, на семинарах кафедры Высшей математики и теоретической механики Армянского Национального Аграрного Университета, на международной конференции

"V российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам " г. Ереван, 2014г. , на конференции Армянского математического союза, посвященной 100-летию профессора Г. Бадаляна.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах рецензируемых журналов, входящих в перечень ВАК и в одном тезисе международной конференции.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, содержащих 14 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы, включающего 127 наименований. Общий объем диссертации составляет 104 страниц.

# Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов и изложено краткое содержание диссертации.

**Первая глава** диссертации посвящена следующей начальной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с некомпактным оператором Гаммерштейна:

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} + \lambda_0(x, f(x)) = \int\limits_0^\infty K(x-t)\lambda_1(t, f(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), & (4) \\ f(0) = 0, & (5) \end{cases}$$

относительно функции $f(x)$, определенной на $\mathbb{R}^+$ и принимающей вещественные значения. В уравнении (4) функции $\{\lambda_j(x,u)\}_{j=0,1}$, описывающие нелинейность, определены на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , принимают вещественные значения и удовлетворяют условию критичности:

$$\lambda_j(x, 0) \equiv 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^+, \ j = 0, 1. \tag{6}$$

Ядро $K(x)$ допускает следующее представление:

$$K(x) = \int\limits_a^b e^{-|x|s} G(s) ds, \ \ x \in \mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty), \tag{7}$$

где

$$G \in C[a, b), \quad G(s) > 0, \quad s \in [a, b), \quad 0 < a < b \leq +\infty \tag{8}$$

причем

$$\mu \equiv 2 \int\limits_a^b \frac{G(s)}{s} ds < +\infty. \tag{9}$$

Предполагается, что существует число $\alpha > 0$, такое что

$$\lambda^\sharp(x,u) \equiv \alpha u - \lambda_0(x,u) \geq 0, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{10}$$

Задача (4)-(5) имеет непосредственное применение в эконометрике, а именно в теории распределения дохода в однопродуктовой экономике (см. [18],[21]). Искомая функция $f(x)$ играет роль плотности распределения, причем $f(x)dx$ - число экономических организаций, доход которых находится в интервале $(x, x+dx)$. Функция $\lambda_0$ характеризует рост капитала и средние сбережения, в том числе банкротство и исчезнование предприятий.

В уравнении (4) ядро $K(x)$ - так называемая функция перераспределения, обусловленная разными экономическими причинами: капитальные трансферты, возникновение новых предприятий, объединение нескольких предприятий, исчезнование старых предприятий и переход имущества в качестве наследства к другим экономическим организациям, пожертвования и т. д. Числа $\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx$ и $\alpha$ представляют в интегральном смысле "расходы" и "доходы" соответственно. Функция $\lambda^\sharp(x,u)$ описывает банкротство и исчезование предприятий, налоги и т.д..

Уравнение (4) исследовалось в работе [21] в частном случае, когда

$$\lambda^\sharp(x,u) \equiv 0, \quad \lambda_1(x,u) \equiv G_0(u),$$

где $0 \leq G_0(u) \leq u, \quad u \in [0,\eta], \ G_0 \in C[0,\eta], \quad G_0(u) \uparrow$ по $u$ на $[0,\eta]$ для некоторого $\eta > 0$, а $f(0) = y_0, \ 0 < y_0 \leq \eta$. А в работе [18] уравнение (4) исследовалось в случае, когда

$$\lambda^\sharp(x,u) \geq 0, \ \lambda^\sharp(x,\eta) \leq \eta \int\limits_x^\infty K(u)du, \quad 0 \leq \lambda_1(x,u) \leq \beta G_1(u), \ \beta \in (0,1),$$

$$x \geq 0, \quad 0 \leq u \leq \eta,$$

где $0 \leq G_1(u) \uparrow$ по $u$ на $[0,\eta]$ , $G_1(\eta) = \eta$ ($\eta$ - первый положительный корень уравнения $G_1(u) = u$), $G_1(0) = 0$ и $G_1$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0,\eta]$, а $f(0) = y_0$, $0 < y_0 \leq \eta$.

Отметим также, что в вышеприведенных работах уравнение (4) исследовалось только в случае, когда

$$\alpha \geq \mu. \tag{11}$$

С экономической точки зрения это условие означает, что доходы превышают расходы. Очевидно, что случай $\alpha \leq \mu$ соответствует экономической ситуации, которая может привести к “банкротству”.

Настоящая глава посвящена изучению и решению задачи (4)-(5) при весьма иных предположениях относительно функций $\{\lambda_j(x,u)\}_{j=0,1}$ в случае, когда

$$\alpha \leq \mu. \tag{12}$$

В §1.1 приведены обозначения и вспомогательные факты.

Сначала рассматривается функция вида

$$\mathcal{X}(\varepsilon) = \int\limits_a^b \frac{G(s)}{(s+\varepsilon)(s+\alpha)} ds$$

на интервале $\mathcal{I} \equiv (0, min(\alpha, a))$ и вводится следующее множество:

$$Q = \left\{ \varepsilon \in \mathcal{I} \colon \mathcal{X}(\varepsilon) > \frac{\gamma}{2} \right\} \subset \mathcal{I}. \tag{13}$$

Затем доказывается, что существует число $\widetilde{\varepsilon} \in \mathcal{I}$, $\widetilde{\varepsilon} = \sup Q$ такое, что

$$\mathcal{X}(\widetilde{\varepsilon}) \geq \frac{\gamma}{2},$$

где

$$\gamma = \int\limits_a^b \frac{G(s)}{s(s+a)} ds.$$

Число $\widetilde{\varepsilon}$ будет играть важную роль в наших дальнейших предположениях.

Относительно функций $\{\lambda_j(x,u)\}_{j=0,1}$ предполагаем:

**a)** $\lambda^\sharp(x,u) \uparrow$ по $u$ на $[\rho_{\widetilde{\varepsilon}}(x), +\infty)$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$, где

$$\rho_{\tilde{\varepsilon}}(x) = \frac{e^{-\tilde{\varepsilon}x} - e^{-\alpha x}}{\alpha - \tilde{\varepsilon}}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{14}$$

**b)**

$$l \equiv \int\limits_0^\infty \underset{u \geq 0}{essup}\, \lambda^\sharp(x,u) dx < +\infty \tag{15}$$

**c)** $\lambda_j \in Car_u(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, т. е. функции $\{\lambda_j(x,u)\}_{j=0,1}$ удовлетворяют условию Каратеодори по второму аргументу (при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функции $\{\lambda_j(x,u)\}_{j=0,1}$ измеримы по $x$ на множестве $\mathbb{R}^+$ и почти при всех $x \in \mathbb{R}^+$ они непрерывны по $u$ на $\mathbb{R}^+$).

**d)** существует суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция $\beta_{\widetilde{\varepsilon}}(x)$ такая, что

$$\beta_{\widetilde{\varepsilon}}(x) \geq \frac{2}{\gamma}\rho_{\widetilde{\varepsilon}}(x),\ x \in \mathbb{R}^+, \tag{16}$$

$$\lambda_1(x, \rho_{\widetilde{\varepsilon}}(x)) \geq \frac{2}{\gamma}\rho_{\widetilde{\varepsilon}}(x),\ \ \lambda_1(x,u) \leq \frac{u}{æ} + \beta_{\widetilde{\varepsilon}}(x),\ \ u \geq \rho_{\widetilde{\varepsilon}}(x),\ \ x \in \mathbb{R}^+, \tag{17}$$

**e)** при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$ функция $\lambda_1(x,u) \uparrow$ по $u$ на $[\rho_{\widetilde{\varepsilon}}(x), +\infty)$.

В §1.2 доказывается следующая

**Теорема 1.1.** *Пусть ядро $K(x)$ допускает представление (7), а функции $\{\lambda_j(x,u)\}_{j=0,1}$ удовлетворяют условиям (10) и a) – e). Тогда задача (4)-(5), кроме тривиального решения, обладает также тождественно ненулевым неотрицательным решением в следующем весовом пространстве Соболева:*

$$f\ \in W^1_{1,h}(\mathbb{R}^+) \equiv \{\varphi(x):\quad \varphi^{(j)}(x)\cdot h(x)\ \in\ L_1(\mathbb{R}^+),\ j=0,\ 1;$$

$$h(x) \equiv \int_a^b e^{-xs}\frac{G(s)}{s(s+\alpha)}ds\}\ ,$$

*где через $\varphi^{(j)}(x)$ обозначена $j$ – тая производная функции $\varphi(x)$.*

В § 1.3 приведены примеры функций $\{\lambda_j(x,u)\}_{j=0,1}$, для которых выполнены все условия теоремы 1.1.

Для частного случая

$$\lambda_0(x,u) = \alpha u,\ \ \lambda_1(x,u) = \frac{2}{\gamma}u^{\delta}\rho_{\widetilde{\varepsilon}}^{(1-\delta)}(x),\ \ \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \tag{18}$$

справедлива следующая

**Теорема 1.2.** *Пусть в уравнении (4) функции $\lambda_0$ и $\lambda_1$ допускают представления (18), а ядро $K$ обладает свойствами (7)-(9). Тогда, если $\delta \in \left(0, \frac{\gamma\alpha}{2\mu}\right)$, а $m_1(\beta_{\widetilde{\varepsilon}}) < +\infty$, то существует единственное решение задачи (4)-(5) в следующем классе функций:*

$$\mathfrak{M} = \left\{f(x):\frac{df(x)}{dx} + \alpha f(x) \geq e^{-\tilde{\varepsilon}x},\ \ x \in \mathbb{R}^+,\ f(0)=0,\ \ f \in W^1_{\infty}(\mathbb{R}^+)\right\}.$$

В §1.4 приведено краткое описание алгоритма численного решения задачи (4)-(5).

**Во второй главе** исследован класс нелинейных интегральных уравнений на положительной полупрямой с некомпактным оператором Гаммерштейна:

$$\varphi(x) = \int_0^\infty K(x-t)Y(t,\varphi(t))dt, \quad x \in R^+ \equiv [0,+\infty). \tag{19}$$

относительно искомой измеримой функции $\varphi(x)$ и вопросы существования положительных решений для следующей краевой задачи:

$$\pm s\frac{\partial \varphi^\pm(x,s)}{\partial x} + \varphi^\pm(x,s) = G(U(x)) \quad x > 0, \quad s > 0, \tag{20}$$

$$\varphi^+(0,s) = G_1\Big(\int_0^\infty Q(s,p)\varphi^-(0,p)dp\Big), \tag{21}$$

$$\varphi^-(x,s) = o(e^{\frac{x}{s}}), \quad x \to +\infty, \tag{22}$$

относительно искомых функций $\varphi^\pm(x,s)$ в пространстве $W^1_\infty(\mathbb{R}^+)$, где

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-p^2}(\varphi^+(x,p)+\varphi^-(x,p))dp. \tag{23}$$

Уравнения вида (19) возникают в теории переноса излучения в спектральных линиях, в кинетической теории газов, в эконометрике, в космологии, в механике твердого тела и т.д.. Важность построения положительных решений (в различных функциональных пространствах) для таких уравнений обусловлена не только интересом чисто теоретического характера, но и тем фактом, что указанный класс уравнений имеет приложения в вышеуказанных отраслях математической физики.

В краевой задаче (20)-(23) функции $G$ и $G_1$ описывают нелинейную зависимость правой части уравнений (20) и (21). Функция $Q(s,p)$ описывает общий закон отражения и обладает свойством субстохастичности:

$$Q(s,p) \ge 0, \quad (s,p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \int_0^\infty Q(s,p)dp \le 1. \tag{24}$$

Задача (20)-(23) сводится к следующему интегральному уравнению:

$$U(x) = \mu(x,U) + \int_0^\infty \tilde{K}(x-t)G(U(t))dt \tag{25}$$

относительно функции $U(x)$, где

$$\mu(x,U)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{s}}e^{-s^2}G_1\Big(\int\limits_0^\infty Q(s,p)dp\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}G(U(t)\frac{dt}{p}\Big)ds, \tag{26}$$

$$\tilde{K}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{|x|}{s}}e^{-s^2}\frac{ds}{s}. \tag{27}$$

В линейном случае, когда $G(x)\equiv x,\quad G_1(x)\equiv x$, эта задача была изучена в работе [6].

В недавней работе А.Х. Хачатряна и Х.А. Хачатряна (см. [17]) при некоторых условиях на функцию $G$ было показано, что существует качественное различие между решениями в линейном ($G_1(x)=x$) и в нелинейном случаях. В первом случае решение имеет линейный рост вдали от стенки, а в нелинейном случае решение ограничено конечным пределом в бесконечности.

§2.1 посвящен обозначениям и вспомогательным фактам относительно уравнения (19).

Для краткого изложения §2.2 сперва приведем некоторые обозначения из §2.1. Пусть функция $K$ удовлетворяет следующим условиям:

$$K(\tau)\geq 0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\tau)d\tau=1,\quad K\in L_1(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R}), \tag{28}$$

$$\nu(K)\equiv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tau K(\tau)d\tau<0, \tag{29}$$

причем предполагается, что последний интеграл абсолютно сходится.

Пусть, далее, $E$ - одно из следующих банаховых пространств:

$$L_p(\mathbb{R}^+),\quad 1\leq p\leq+\infty,\quad C_M(\mathbb{R}^+),\quad C_0(\mathbb{R}^+),$$

где $C_M(\mathbb{R}^+)$ - пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$, а $C_0(\mathbb{R}^+)$ - пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^+$, стремящихся к нулю на бесконечности.

Через $\mathcal{K}$ обозначен интегральный оператор Винера - Хопфа, порожденный ядром K:

$$(\mathcal{K}f)(x)=\int\limits_0^{+\infty}K(x-t)f(t)dt,\quad f\in E. \tag{30}$$

Тогда, как известно (см. например [1],[5]), оператор $I-\mathcal{K}$ допускает вольтерровую факторизацию:

$$I-\mathcal{K}=(I-V_-)(I-V_+), \tag{31}$$

где $I$- единичный оператор, а $V_\pm$ - верхние и нижние вольтерровые операторы вида:

$$(V_+f)(x)=\int_0^x v_+(x-t)f(t)dt, \quad (V_-f)(x)=\int_x^\infty v_-(t-x)f(t)dt, \quad f\in E. \tag{32}$$

Ядра $v_\pm\in L_1(\mathbb{R}^+)$ неотрицательны, определяются из системы нелинейных уравнений факторизации Н.Б. Енгибаряна (см. [1],[5]):

$$v_\pm(x)=K(\pm x)+\int_0^x v_\pm(x+t)v_\mp(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{33}$$

и обладают следующими свойствами:

$$\gamma_+\equiv\int_0^\infty v_+(x)dx<1, \quad \gamma_-\equiv\int_0^\infty v_-(x)dx=1. \tag{34}$$

Пусть вещественозначная функция $\omega(t,u)$ определена на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ и удовлетворяет следующим условиям:

**a)** существует число $A\geq 0$ такое, что при всяком фиксированном $t\in\mathbb{R}^+$ функция $\omega(t,u)$ монотонно убывает по $u$ на множестве $[A,\infty)$,

**b)** имеет место условие Каратеодори на множестве $\Omega_A\equiv\mathbb{R}^+\times[A,+\infty)$: функция $\omega\in Car_u(\Omega_A)$, т.е при всяком $u\in[A,\infty)$, $\omega(t,u)$ измерима по $t$ на $\mathbb{R}^+$ и почти при всех $t\in\mathbb{R}^+$ непрерывна по $u$ на $[A,+\infty)$.

**c)** существует определенная на $\mathbb{R}^+$ измеримая функция

$$\omega^0\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap C_0(\mathbb{R}^+), \quad m_1(\omega^0)\equiv\int_0^\infty t\omega^0(t)dt<+\infty,$$

такая, что $\omega^0(t)\downarrow$ на $[A,+\infty)$ и

$$0\leq\omega(t,u)\leq\omega^0(t+u), \quad (t,u)\in\Omega_A. \tag{35}$$

Рассмотривается следующее нелинейное уравнение Гаммерштейна:

$$f(x)=\int_0^\infty K(x-t)(f(t)-\omega(t,f(t)))dt, \quad x\in\mathbb{R}^+ \tag{36}$$

относительно искомой функции $f(x)$, в предположении, что ядро $K$ и функция $\omega(t,u)$ удовлетворяют соответственно условиям (28), (29) и a)- c).

Из результатов работы [14] следует, что уравнение (36) обладает однопараметрическим семейством положительных решений $\{f_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Delta}$, обладающих следующими свойствами:

- $f_\gamma \in L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad \gamma\in\Delta,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\gamma(x) = \dfrac{2\gamma}{1-\gamma_+}, \quad \forall\gamma\in\Delta,$
- если $\gamma_1,\gamma_2\in\Delta$ и $\gamma_1>\gamma_2$, то

$$f_{\gamma_1}(x) - f_{\gamma_2}(x) \geq 2(\gamma_1-\gamma_2), \quad x\in R^+,$$

- справедлива следующая двусторонняя оценка для каждого из этих решений:

$$S_\gamma(x) \leq 2S_\gamma(x) - Q(x) \leq f_\gamma(x) \leq 2S_\gamma(x), \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad \gamma\in\Delta, \tag{37}$$

где $Q(x)$ является единственным положительным решением следующего неоднородного уравнения Винера - Хопфа:

$$Q(x) = 2\omega^0(x+A) + \int\limits_0^\infty K(x-t)Q(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{38}$$

обладает свойствами

$$Q(x)\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad \lim_{x\to+\infty} Q(x) = 0, \tag{39}$$

а $S_\gamma(x) = \gamma S(x)$, где $S(x)$ единственное решение следующей начальной задачи для неоднородного уравнения Винера - Хопфа:

$$\begin{cases} S(x) = \int\limits_0^\infty K(x-t)S(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}^+ \\ S(0)=1, \end{cases} \tag{40}$$

обладающее свойствами:

$$S(x)\uparrow \text{по } \ x \ \text{ на } \ R^+, \quad \lim_{x\to+\infty} S(x) = \frac{1}{1-\gamma_+}. \tag{41}$$

Здесь множество параметров $\Delta$ задается согласно следующей формуле:

$$\Delta \equiv [\max(\kappa,\gamma_0), +\infty), \tag{42}$$

где $\kappa \equiv \sup\limits_{x\in R^+} Q(x)$, а $\gamma_0 \geq A$ - некоторое фиксированное число для которого выполняется неравенство $\omega^0(\gamma_0) < \gamma_0$ (такое число существует в силу свойств функций $\omega^0$ ).

В §2.2 доказана следующая

**Теорема 2.1.** *Пусть вещественозначная функция $Y(t,u)$ определена на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ и удовлетворяет следующим условиям: существует число*

$$\eta \geq \frac{2\max(\kappa, \gamma_0)}{1-\gamma_+} \tag{43}$$

*такое, что*

***1)*** *при всяком фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функция $Y(t,u)$ монотонно возрастает по $u$ на $[g(t), \eta - A]$, где*

$$g(x) \equiv \int_0^\infty K(x-\tau)\omega(\tau,\eta)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{44}$$

*а $\omega$ удовлетворяет условиям a) - c),*

***2)*** *$Y \in Car_u(\prod_\eta)$, где $\prod_\eta \equiv \mathbb{R}^+ \times [0, \eta - A]$,*

***3)*** *выполняется двусторонняя оценка:*

$$u + \omega(t,\eta) \leq Y(t,u) \leq u + \omega(t, \eta - u) \tag{45}$$

*для $t \in \mathbb{R}^+, \quad u \in [g(t), \eta - A]$.*

*Тогда уравнение (19) при условиях (28), (29) имеет неотрицательное нетривиальное решение в пространстве суммируемых и существенно ограниченных на $\mathbb{R}^+$ функций. Более того, оно стремится к нулю в бесконечности.*

В §2.3 приведены несколько частных примеров функции $Y(t,u)$, для которых выполнены условия теоремы 2.1.

В §2.4 исследована разрешимость уравнения (25). С этой целью сперва введена следующая функция, являющаяся минорантой для $G(z)$. Пусть $G_0(z)$ - определенная на $\mathbb{R}^+$ измеримая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

**a)** числа $\eta$ и $\xi$ - первые положительные решения уравнений $G_0(z) = z, \quad G_0(z) = 2z$ соответственно, причем $2\xi < \eta$,

**b)** $G_0 \in C[0,\eta], \quad G_0 \uparrow$ на интервале $[\xi, \eta]$.

Доказана следующая

**Теорема 2.2.** *Пусть функции $G(z)$ и $G_1(z)$ удовлетворяют следующим условиям:*

**1)** $G(z) \geq G_0(z), \quad z \in [\xi, \eta], \quad G(\eta) = G_1(\eta) = \eta,$

**2)** *$G, G_1 \uparrow$ на интервале $[\xi, \eta]$ и $G_1(z) \geq 0, \quad z \in [\xi, \eta], \quad G, G_1 \in C[0, \eta]$,*

*а функция $Q(s,p)$ удовлетворяет условию (24). Тогда уравнение (25) имеет положительное, существенно ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение $U(x)$, причем*

$$\lim_{x\to\infty} U(x) = \eta.$$

Далее приведены примеры функций $G$ и $G_1$, удовлетворяющих условиям теоремы 2.2.

В §2.5 доказана единственность решения уравнения (25) в том случае, когда

$$G(z) = z^p, \quad p \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

В §2.6 доказано, что если $K$ и $Q$ - непрерывные функции на множестве $\mathbb{R}$ и $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$, а $G(z) = z^p, \quad p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то решение уравнения (25) из себя представляет также непрерывную функцию на $\mathbb{R}^+$.

Итак, справедлива

**Теорема 2.4** *Пусть $\tilde{K}$ - определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция, допускающая представление (27), а $Q(s,p)$ - непрерывная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ функция, удовлетворяющая условиям (24). Тогда, если функция $G_1$ удовлетворяет всем условиям Теоремы 2.2 и при этом $G(z) = z^p, \;\; p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то решение уравнения (25) - непрерывная функция на $\mathbb{R}^+$.*

**Третья глава** диссертации посвящена вопросам построения положительных решений и исследованию асимптотических свойств решений для некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна - Вольтерра и Вольтерра.

В §3.1 изучено следующее нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна-Вольтерра:

$$f(x) = \int_x^\infty V(x,t) H(t, f(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty) \tag{46}$$

относительно искомой вещественной и измеримой функции $f(x)$, определенной на $\mathbb{R}^+$. Здесь ядро $V(x,t)$ - определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ измеримая функция, допускающая следующее представление:

$$V(x,t) = \Theta(t-x) \int_a^b \alpha(t,s) e^{-\alpha(t,s)(t-x)} d\sigma(s), \tag{47}$$

где $\alpha(t,s)$ - определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times [a,b), \quad (0 \le a < b \le +\infty)$ измеримая функция, причем

$$\inf_{(t,s)\in\mathbb{R}^+\times[a,b)} \alpha(t,s) \equiv \beta > 0, \tag{48}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \alpha(t,s) \equiv \alpha_0(s) < +\infty, \quad \forall s \in [a,b), \tag{49}$$

$$\delta \equiv 1 - \beta \inf_{t\in\mathbb{R}^+} \int\limits_a^b \frac{1}{\alpha(t,s)} d\sigma(s) < 1,$$

Здесь $\sigma(s)$ - монотонно неубывающая на $[a,b)$ функция, такая что

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \int\limits_a^b d\sigma(s) = 1, \tag{50}$$

а $\Theta(\tau)$ - функция Хевисайда.

Уравнение (46) имеет применение в кинетической теории газов, а именно в задаче о течении газа со скольжением вдоль плоской твердой стенки (см. [6]).

В том случае, когда

$$H(t,u) = u - \omega(t,u),$$

где $\omega(t,u)$ - определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ измеримая функция, удовлетворяющая некоторым естественным условиям, уравнение (46) исследовалось в работе [16].

До формулировки теоремы этого параграфа, сначала вводится определенная на $\mathbb{R}^+$ характеристическая функция, :

$$\chi(p) \equiv \beta c \int\limits_a^b \frac{1}{\alpha_0(s) + p} d\sigma(s), \quad p \in [0, +\infty),$$

где

$$c = 2\Bigg(\int\limits_a^b \frac{\beta}{\alpha_0(s)} d\sigma(s)\Bigg)^{-1} \tag{51}$$

и доказывается, что существует единственное число $p_0 \in (0,\infty)$ такое, что

$$\chi(p_0) = 1. \tag{52}$$

Фиксируя это число в §3.1 доказывается следующая

**Теорема 3.1** *Пусть в уравнении* (46) *ядро* $V(x,t)$ *задается согласно формуле* (47). *Пусть, далее, существует суммируемая на* $\mathbb{R}^+$ *функция* $\tilde{\beta}(t)$:

$$\tilde{\beta}(t) \geq ce^{-p_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

*такая, что для функции* $H(t,u)$ *имеют место следующие условия:*

*a)* $H(t,u) \leq u + \tilde{\beta}(t), \quad u \geq e^{-p_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$

$H(t, e^{-p_0 t}) \geq ce^{-p_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$

*где числа* $c$ *и* $p_0$ *определяются согласно* (51) *и* (52) *соответственно,*

*b) функция* $H(t,u)$ *при каждом фиксированном* $t \in \mathbb{R}^+$ *монотонно возрастает по* $u$ *на* $[e^{-p_0 t}, +\infty)$,

*c)* $H(t,u)$ *удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу* $u$ *на множестве* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

*Тогда уравнение* (46) *имеет положительное суммируемое на* $\mathbb{R}^+$ *решение.*

В §3.2 приведены примеры функции $H(t,u)$, для которых выполняются условия теоремы 3.1.

В одном частном случае, когда

$$H(t,u) = (1+\delta)u^{\alpha} e^{-p_0 t(1-\alpha)}, \quad \delta, \alpha \in (0,1), \tag{53}$$

доказана единственность решения уравнения (46) в определенном классе функций.

§3.3 посвящен построению однопараметрического семейства положительных решений для уравнения (46) в случае, когда $H(t,u)$ допускает следующее представление:

$$H(t,u) = u + \omega_1(t,u) - \omega_2(t,u), \quad t \in \mathbb{R}^+, \ u \in \mathbb{R}^+. \tag{54}$$

Доказывается

**Теорема 3.3.** *Пусть функции* $\{\omega_j(t,u)\}_{j=1,2}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) *существует число* $A > 0$, *такое что при каждом фиксированном* $t \in \mathbb{R}^+$

- $\omega_1(t,u) \uparrow$ *по* $u$ *на* $[A, +\infty)$,
- $\omega_2(t,u) \downarrow$ *по* $u$ *на* $[A, +\infty)$,

2) $\omega_j \in Car_u(\mathbb{R}^+ \times [A, +\infty)), \quad \omega_j(t,u) \geq 0, \quad (t,u) \in \mathbb{R}^+ \times [A, \infty),$

3) *существуют* $\sup\limits_{u \geq A} \omega_j(t,u) = \beta_j(t)$, *причем* $\beta_j \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad j = 1,2.$

*Тогда, если ядро* $V(x,t)$ *допускает представление* (47), *а функция* $H(t,u)$ *задается согласно формуле* (54), *то уравнение* (46) *обладает однопараметрическим семейством положительных и ограниченных решений* $\{f_\gamma(x)\}_{\gamma \in \Pi}$.

*Здесь множество параметров задается согласно следующей формуле:*

$$\Pi = [A + \delta, +\infty),$$

*где*

$$\delta = \sup_{x \geq 0} \varphi_2(x), \tag{55}$$

*а* $\varphi_2(x)$ *- положительное ограниченное и суммируемое на* $\mathbb{R}^+$ *решение следующего неоднородного линейного интегрального уравнения Вольтерра:*

$$\varphi_2(x) = \int_x^\infty V(x,t)\beta_2(t)dt + \int_x^\infty V(x,t)\varphi_2(t)dt, \quad x \geq 0. \tag{56}$$

§3.4 посвящен исследованию нелинейного интегрального уравнения Вольтерра вида:

$$l(x) = H\Big(x, q(x) + \int_0^x v(x,t)l(t)dt\Big), \quad x \geq 0, \tag{57}$$

относительно искомой измеримой функции $l(x)$.

В случае, когда функция $H(x,z)$ удовлетворяет условию Гелдера-Липщица по аргументу $z$ с определенным показателем, условию монотонности по $z$ и некоторым техническим условиям, а функции $q(x)$ и $v(x,t) = v(x-t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \leq q \in L_p(\mathbb{R}^+), \quad p > 1, \quad v(x) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \int_0^\infty v(\tau)d\tau \leq 1,$$

в работе [22] исследованы вопросы разрешимости уравнения (57) в пространстве $L_p(\mathbb{R}^+), \quad p > 1$.

В §3.4 исследована разрешимость уравнения (57) в пространстве $L_1^{loc}(\mathbb{R}^+), \quad \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$ при совершенно иных условиях на функции $H$ и $q$. Предполагается, что

$$A) \;\; 0 \leq q \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad m_1(q) \equiv \int_0^\infty xq(x)dx < +\infty, \quad q(x) \not\equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$B$) ядро $v(x,t)$ имеет следующую структуру:

$$v(x,t) = \int_a^b \alpha(t,s)e^{-\alpha(t,s)(x-t)}d\sigma(s) \cdot \Theta(x-t), \tag{58}$$

где $\alpha(t,s)$ - определенная на $\mathbb{R}^+\times[a,b)$, измеримая функция $(0\le a\le b\le+\infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$B_1$) существует число $\varepsilon_0>0$ такое, что

$$\alpha(t,s)\ge\varepsilon_0>0,\quad t\in\mathbb{R}^+,\quad s\in[a,b), \tag{59}$$

$B_2$) существует число $\beta\in(0,\varepsilon_0)$ такое, что

$$\delta\equiv\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int\limits_a^b\Big(1-\frac{\beta}{\alpha(t,s)}\Big)d\sigma(s)<1, \tag{60}$$

где $\sigma(s)$ - монотонно неубывающая на $[a,b)$ функция, причем

$$\int\limits_a^b d\sigma(s)=1, \tag{61}$$

а $\Theta$ - известная функция Хевисайда,

$C$) $H(x,z)$ - измеримая функция, определенная на $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, удовлетворяющая следующим условиям:

$C_1$) при каждом фиксированном $x\in\mathbb{R}^+$ функция $H$ монотонно возрастает по $z$, когда $z\ge q(x)$,

$C_2$) $H(x,z)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу $z$ на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, т.е. при каждом фиксированном $z\in\mathbb{R}^+$, функция $H(x,z)$ измерима по $x$ и почти при всех $x\in\mathbb{R}^+$ $H(x,z)$, непрерывна по $z$ на $\mathbb{R}^+$.

$C_3$) при каждом фиксированном $x\in\mathbb{R}^+$

$$0\le H(x,z)\le z,\quad z\ge q(x). \tag{62}$$

Справедлива следующая

**Теорема 3.4** *При условиях* $A),B),B_1),B_2),C_1)-C_3)$ *уравнение* (57) *имеет неотрицательное решение в пространстве* $L_1^{loc}(\mathbb{R}^+)$ *с интегральной асимптотикой* $\int\limits_0^x l(t)dt=O(x)$, *при* $x\to+\infty$.

В конце параграфа приведены примеры функции $H(x,z)$, для которых выполнены условия $C_1)-C_3)$.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[6].

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю д.ф.м. наук Х.А. Хачатряну за постановку задач и многочисленные полезные советы при выполнении работы.

# Литература


[1] Л.Г. Арабаджян, Н.Б. Енгибарян. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники, Математический анализ, 1984 г., том 22, стр. 175-242.

[2] Л.Г. Арабаджян. Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна. Известия НАН Армении, Математика, 1997 г., том 32, № 1, стр. 21-28.

[3] Н.А. Бобылев. Метод механических квадратур в задаче о периодических решениях. УМН, том 27, № 4, 1972 г., стр. 203-204.

[4] Н.Б. Енгибарян. Об одной задаче нелинейного переноса излучения. Астрофизика, 1966 г., том 2, № 4, стр. 31-36.

[5] Н.Б. Енгибарян. Факторизация матриц-функций и нелинейные интегральные уравнения. Известия АН. Арм. ССР, сер. Математика, 1980 г., том 15, № 3, стр. 233-244.

[6] Н.Б.Енгибарян, А.Х. Хачатрян. О точной линеаризации задачи скольжения разреженого газа в БГК модели. ТМФ, 2000 г., том 119, № 2, стр. 339-342.

[7] Н.Б. Енгибарян, А.Х. Хачатрян. Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа. Журнал мат. моделирование, 2004 г., том 16, № 1, стр. 67-74.

[8] Н.Б. Енгибарян. О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае. Известия РАН, сер. Математика., 2006 г., том 70, № 5, стр. 79-96

[9] П. П. Забрейко. О непрерывности нелинейного оператора. Сибирский мат. журнал, 1964 г., том 5, № 4, стр. 958-960.

[10] М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. О разрешимости нелинейных операторных уравнений. Функц. анализ и его прилож. 1971 г., том 5, № 3, стр. 42-44.

[11] М.В. Масленников. Проблема Милна с анизотропным рассеянием. Труды мат. инст. им. В.А. Стеклова, 1968 г., том 97, - 133 стр.

[12] В. Я. Стеценко, А. Р. Есаян. Теоремы о положительных решениях уравнений второго рода с нелинейными операторами, Матем. сб. 1965г., том 68(110), № 4 , стр. 473-486

[13] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. О построении неотрицательного решения одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на полуоси. Украинский Математический журнал, 2011 г., том 63, № 4, стр. 110-118.

[14] Х.А. Хачатрян. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений с некомпактными оператором. Известия, НАН Армении, Математика, 2011 г., том 46, № 2, стр. 71-86.

[15] Х.А. Хачатрян. Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью. Известия РАН. сер. Матем., 2012 г., том 76, № 1, стр. 173-200.

[16] Х.А. Хачатрян, С.А. Григорян, О нетривиальной разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна-Вольтерра, Владикавк. Матем. журн., 2012 г., том 14, № 2, стр. 57-66.

[17] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян. Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях. ТМФ, 2012 г., том 172,№ 3, стр.497-504.

[18] Х.А. Хачатрян. О разрешимости одной начально-краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с некомпактным оператором типа Гаммерштейна , Труды Института Матем. и Механ. УРО РАН. 2013 г., том. 19, № 3, стр. 308-315.

[19] J. Banas. Integhrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations. J.Austral. Math. Soc. (A) 1989, vol 46, pp. 61-68.

[20] H. Brezis, F.E. Browder. Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type. Bull. Amer. Math. Soc. 1975, vol 81, № 1, pp. 73-78.

[21] A.Kh.Khachatryan, Kh.A.Khachatryan. On solvability of a nonlinear problem in theory of income distribution. Eurasian Math. J., 2011, vol. 2, № 2, pp. 75-88.

[22] M. Lauran. Existence results for some nonlinear integral equations, Miskole Math Notes, vol. 13, № 1, 2012, pp. 67-74.

[23] C.D. Panchal. Existence theorems for equation of Hammerstein type. Quarterly Journal of Mathematics, 1984, vol 35, № 3, pp. 311-319.

[24] R. Precup. Methods in Nonlinear Integral Equations. Springer-Verlag, New York, 2007, -232p.

[25] V.S. Vladimirov. The equation of p-adic closed string for the scalar tachyon field. Science in China, ser.A, Mathematics, 2008, vol 51, № 4, pp. 754-764.

## Список опубликованных работ автора по теме диссертации


[1] Kh.A. Khachatryan, T.H. Sardaryan. Solution of one Volterra type nonlinear integral equation on positive semi-axis, Proceedings of the Yerevan State University, 2013, № 3, pp. 12-17.

[2] Kh.A. Khachatryan, T.H. Sardaryan. On solvability of a class of nonlinear integral equations with Hammerstein type noncompact operator in the space $L_1(R^+)$, Proceedings of the Yerevan State University, 2014, № 3, 16-23.

[3] A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan, T. H. Sardaryan. On One Nonlinear Boundary-Value Problem in Kinetic Theory of Gases, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2014, vol. 10, № 3, pp. 320-327. **http://www.scopus.com/source/sourceInfo.url?sourceId=21100255536**

[4] A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan, T.H. Sardaryan. On Solvability of One Class of Nonlinear Integral-Differential Equation with Hammerstein Non-compact Operators arising in a Theory of Income Distribution. Journal of Siberian Federal University. Math. Phys., 2015, vol. 8, № 4, pp.416-425. http://**www.scopus.com/source/sourceInfo.url?sourceId=21100305004**

[5] Т.Г. Сардарян. Суммируемое решение одного нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна-Вольтерра на полуоси, Вестник РАУ, 2015, № 1, стр. 5-16.

[6] Х.А. Хачатрян, Т.Г. Сардарян, О некоторых системах нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси, "V российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам Ереван, 2014г., стр. 54-55.

## ԱՄՓՈՓՈՒՄ

## Տ.Հ. Սարդարյան

## ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԿԻՆԵՏԻԿԱՅԻ ՈՐՈՇ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԳԼՈԲԱԼ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

Ատենախոսական աշխատանքը նվիրված է Համերշտեյնի տիպի ոչ կոմպակտ օպերատորներով ծնվող դրական կիսաառանցքի վրա որոշված ոչ գծային ինտեգրալ և ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների որոշ դասերի ուսումնասիրությանը: Այդպիսի հավասարումները կիրառվում են գազերի կինետիկ տեսությունում, էկոնոմիկայում հայտնի եկամտի բաշխման տեսությունում:

Կիրառելով ֆակտորիզացիոն, ինչպես նաև համապատասխան ոչ գծային օպերատորների համար ինվարիանտ կոնային հատվածներ կառուցելու տեսության մեթոդները, ատենախոսությունում տարբեր ֆունկցիոնալ տարածություններում դիտարկվող հավասարումների համար ապացուցվել են լուծման գոյության և միակության կոնստրուկտիվ թեորեմներ:

Ատենախոսությունում ստացվել են և պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական արդյունքները:

- Համերշտեյնի տիպի ոչ կոմպակտ օպերատորներով ծնված ոչ գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների մի դասի համար ապացուցվել է Սոբոլևի կշռային տարածությունում ոչ բացասական (ոչ զրոյական) լուծման գոյությունը: Աստիճանային ոչ գծայնությամբ հավասարման համար ապացուցվել է լուծման միակությունը:

- Արգումենտների տարբերությունից կախված կորիզով Համերշտեյնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների որոշակի դասի համար ստացվել են $\mathbb{R}^+$ -ում դրական և ինտեգրելի լուծումների գոյության բավարար պայմաններ:

- Գազերի կինետիկ տեսության մի ոչ գծային եզրային խնդրի համար Սոբոլևի $W^1_\infty(\mathbb{R}^+)$ տարածությունում ապացուցվել է գոյության և միակության թեորեմ:

- Համերշտեյն - Վոլտերայի ոչ գծային հավասարումների որոշ դասերի համար ստացվել են $L_1(\mathbb{R}^+)$ -ում դրական լուծելիության համար բավարար պայմաններ: Ասփիճանային ոչ գծայնության դեպքում որոշակի ֆունկցիաների դասում ապացուցվել է նաև լուծման միակությունը:

- Նշանափոխ ոչ գծայնությամբ Համերշփեյն - Վոլփերայի ինփեգրալ հավասարումների մի դասի համար կառուցվել է $\mathbb{R}^+$ - ում դրական և էապես սահմանափակ լուծումների մեկ պարամեփրանոց ընփանիք:

- Փոփոխական վերին սահմանով Վոլփերայի ոչ գծային հավասարումների մի դասի համար հեփազոփվել է լուծումների ինփեգրալ ասիմպփոփիկան անվերջությունում: Բերվել են ինքնուրույն հեփաքրքրություն ներկայացնող դիփարկված հավասարումների մասնավոր օրինակներ:

# R E S U M E

## Tigran Sardaryan

## The issues of global solvability for some nonlinear problems of physical kinetics

The thesis work is devoted to the investigation of some classes of nonlinear integral and integro-differential equations on half line generated by Hammerstein type noncompact operators.

Such equations are applied in the kinetic theory of gases and in the theory of income distribution.

Using both factorization method and the method of the theory of invariant cone segments for corresponding nonlinear operators, the existence and uniqueness theorems of solutions for considering equations in different functional spaces are proved.

The basic results obtained in thesis are the following:

- For one class of nonlinear integro-differential equations generated by Hammerstein type noncompact operators, the existence of non-negative solution in Sobolev's weight space is proved. In case of power nonlinearity uniqueness of the solution is proved.

- For the certain class of Hammerstein type nonlinear integro-differential equations with kernel depending on difference of arguments, the sufficient conditions are formulated, according to which, considering equations have positive and integrable solution in $\mathbb{R}^+$ space.

- The existence and uniqueness theorem for one nonlinear boundary-value problem arising in kinetic theory of gases in Sobolev $W^1_\infty(\mathbb{R}^+)$ space is proved.

- For some classes of Hammerstein-Volterra type nonlinear equations the sufficient conditions for positive solvability in $L_1(\mathbb{R}^+)$ are obtained. In case

of power nonlinearity in class of certain functions the uniqueness theorem is also proved.

- For one class of Hammerstein-Volterra type integral equations with alternating nonlinearity in $\mathbb{R}^+$ the one parametric family of positive and essential bounded solutions are constructed.

- For one class of Volterra type nonlinear equations with changeable upper limit the integral asymptotic behaviour at infinity is studied. Private examples of considered equations presenting individual interest are given.