ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ռազմիկ Գեղամի Մելիքբեկյան

Ֆուրիեի կրկնակի շարքերի զուգամիտության մասին

Ա.01.01 - "Մաթեմատիկական անալիզ" մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2016

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Размик Гегамович Меликбекян

О СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук по специальности
А.01.01 – "Математический анализ"

Ереван 2016

Ատենախոսության թեման հաստատված է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Մ. Գ. Գրիգորյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Ս.Ա. Եպիսկոպոսյան
- ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ
Կ.Ա. Նավասարդյան

Առաջատար կազմակերպություն - Ն.Գ. Չեռնիշևսկիի անվ. Սարատովի ազգային հետազոտական պետ. համալսարան, ՌԴ

Պաշտպանությունը կկայանա 2016թ. հունիսի 14-ին ժամը 15.00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանին կից 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով. 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան փ. 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2016թ. մայիսի 13-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտ. քարտուղար Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском Государственном Университете.

Научный руководитель - доктор физ.-мат. наук, профессор
М. Г. Григорян

Официальные оппоненты - доктор физ.-мат. наук, профессор
С.А. Епископосян
- кандидат физ.-мат. наук, доцент
К.А. Навасардян

Ведущая организация - Саратовский национальный исследовательский гос. университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия

Защита диссертации состоится 14-го июня 2016 года в 15.00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском Государственном Университете по адресу: 0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 13-го мая 2016г.

Ученый секретарь специализированного совета Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию сходимости двойных рядов Фурье (по тригонометрической системе и по системе Уолша) при суммировании по сферам и по прямоугольникам. Проблемы связанные со сходимостью двойных рядов Фурье по классическим системам всегда были в центре внимания многих математиков (А. Зигмунд, С. Фефферман, Л. Жижиашвили, Б. Голубов, С. Конягин, М. Дьяченко, Р. Гецадзе, С. Лукомский, Д. Харрис, Е. Никишин, А. Саакян, У. Гогинава, Г. Карагулян, М. Григорян и другие). В диссертационной работе рассмотрены также вопросы улучшения свойств функций, в частности, поведения коэффициентов Фурье, после исправления функций на множестве малой меры. В этом направлении интересные результаты получены Д. Меньшовым, А. Талаляном, О. Церетели, У. Прайсом, Г. Геворкяном, М. Григоряном и другими авторами.

Цель работы.

1) Исследование вопросов сходимости (равномерной и по норме $L^p[0,1)^2$, $p \in [1,2]$) двойных рядов Фурье - Уолша при суммировании по прямоугольникам и по сферам.

2) Исследование поведения коэффициентов Фурье по двойной тригонометрической системе и по двойной системе Уолша, после исправления функции на множестве малой меры.

3) Решение задач, в которых ненулевые коэффициенты Фурье и Фурье - Уолша исправленной функции по модулю расположены в убывающем порядке по всем направлениям или исправленная функция имеет наперед заданные модули коэффициентов Фурье - Уолша.

Методы исследования. Применяются методы теории функций и функционального анализа.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Доказано возможность исправления функций на универсальном множестве $E \subset [0,1)^2$ так, что ряд Фурье исправленной функции по двойной системе Уолша как по сферам, так и по прямоугольникам сходится к

ней в $L^p(E)$, $p \in [1,2]$ и в $L^1[0,1)^2$, а коэффициенты Фурье - Уолша исправленной функции по модулю расположены в убывающем порядке по всем направлениям и имеют заранее заданные модули.

Практическая и теоретическая ценность. Работа представляет теоретический интерес. Результаты и методы работы могут найти применение при изучении аналогичных вопросов для других базисов.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на IX международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения", Ростов-на-Дону (2016), семинаре кафедры высшей математики физического факультета ЕГУ (руководитель М. Г. Григорян), на семинаре кафедры математического анализа и теории функций факультета математики и механики ЕГУ (руководитель Г.А. Карагулян).

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 81 страницах, состоит из введения, 3 глав и списка цитированной литературы, включающего 60 наименований.

Содержание работы

Диссертация посвящена изучению сходимости двойных рядов Фурье по тригонометрической системе и по системе Уолша в разных функциональных пространствах с точки зрения классических теорем Н. Н. Лузина [1] и Д. Е. Меньшова [2] об исправлении функций, а также решению ряда задач (как в одномерном, так и в двумерном случаях) в которых исправленные функции имеют заданные модули коэффициентов Фурье - Уолша (определение системы Уолша - Пэли см. [3]-[4]).

Напомним некоторые обозначения и определения.

Пусть $G \subseteq [0,1)^2$ (соотв. $E \subseteq [0,1)$) множество измеримое по Лебегу

и пусть $L^p(G)$, $p \in [1,\infty)$ (соотв. $L^p(E), p \in [1,\infty)$) – класс всех тех измеримых функций $f(x,y)$ (соотв. $g(x)$) определенных на множестве G (соотв. E), для которых

$$\int\int_G |f(x,y)|^p dxdy < \infty \ \ (\text{соотв.} \int_E |g(x)|^p dx < \infty).$$

Определение 1. Будем говорить, что все ненулевые члены в последовательности $\{d_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям, если из

$$k_2 \geq k_1,\ s_2 \geq s_1,\ k_2 + s_2 > k_1 + s_1,\ d_{k_2,s_2} \neq 0,\ d_{k_1,s_1} \neq 0,$$

следует, что $d_{k_2,s_2} < d_{k_1,s_1}$. Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, $x \in [0,1)$, - ортонормированная система функций. Коэффициенты Фурье функции $f \in L^1[0,1)^2$ по двойной ортонормированной системе $\{\psi_k(x)\psi_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ обозначим через

$$c_{k,s}(f) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(t,\tau)\psi_k(t)\psi_s(\tau)dtd\tau.$$

Положим

$$spec(f) = \{(k,s),\quad c_{k,s}(f) \neq 0,\quad k,s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Прямоугольные и сферические частичные суммы двойного ряда Фурье по двойной системе $\{\psi_k(x)\psi_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ определяются соответственно следующим образом:

$$S_{N,M}(x,y,f) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{s=0}^{M} c_{k,s}(f)\psi_k(x)\psi_s(y),$$

$$S_R(x,y,f) = \sum_{k^2+s^2 \leq R^2} c_{k,s}(f)\psi_k(x)\psi_s(y).$$

Определение 2. Говорят, что двойной ряд Фурье по системе $\{\psi_k(x)\psi_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ сходится (равномерно, по $L^p(G)$ норме, почти всюду) к функции f по прямоугольникам или по Прингсхейму, если

$$\lim_{N,M\to\infty} S_{N,M}(x,y,f) = f(x,y)$$

(соответственно равномерно, по $L^p(G)$ норме и почти всюду). Аналогичным образом определяется сходимость двойных рядов Фурье (равномерной, по $L^p(G)$ норме и почти всюду) в случае сферических и квадратных сумм.

Первая глава диссертации посвящена изучению равномерной (по $L^1[0,2\pi]$ норме) сходимости двойных рядов Фурье по системе Уолша (соответственно по тригонометрической системе) после исправления функции.

Отметим, что ряд классических результатов (например, теоремы Л. Карлесона: ряд Фурье любой функции $f \in L^2[0,2\pi]$ сходится почти всюду на $[0,2\pi]$, теорема М. Рисса: ряд Фурье любой функции $f \in L^p[0,2\pi],\ p > 1$ сходится по норме $L^p[0,2\pi]$, теорема А. М. Колмогорова: ряд Фурье каждой функции $f \in L[0,2\pi]$ сходится в метрике $L^p[0,2\pi],\ 0 < p < 1$) невозможно перенести с одномерного случая на двумерный. В этом случае даже разные (сферические, прямоугольные, квадратные) частичные суммы резко отличаются друг от друга по своим свойствам в таких вопросах, как сходимость в $L^p[0,2\pi],\ p \geq 1$ и сходимость почти всюду (см. [5]-[11]). Приведем некоторые результаты свидетельствующие о скаженном.

Фефферманом получены следующие результаты.

1. Для любого $p \neq 2$ существует функция f_p из класса $L^p[0,2\pi]^2$, сферические частичные суммы ряда Фурье по тригонометрической системе которой не сходятся по норме $L^p[0,2\pi]^2$ (см. [5]).

2. Существует непрерывная функция $f(x,y)$, прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье которой расходятся в каждой точке $[0,2\pi]^2$.

В работе [6] Д. Г. Харрис доказал, что для любого $p \in [1,2)$ существует функция из $L^p[0,1)^2$ сферические частичные суммы двойного ряда Фурье - Уолша которой расходятся почти всюду и по $L^p[0,1)^2$ норме.

В работе [7] С. В. Конягин доказал, что ограниченность констант Лебега L_{n_k} не является необходимым и достаточным условием для сходимости почти всюду частичных сумм $S_{n_k,n_k}(x,y,f)$ любой интегрируемой функций $f(x,y)$.

В работе [8] С. Ф. Лукомский получил критерий для сходимости по-

чти всюду квадратных частичных сумм Фурье - Уолша интегрируемых функции.

В работе [9] Р. Д. Гецадзе доказал, что существует непрерывная функция $f(x,y)$, прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье - Уолша которой расходятся почти всюду.

В работе [10] М. Г. Григорян доказал существование функции $f \in L^1[0,2\pi]^2$, двойной ряд Фурье которой по тригонометрической системе по сферам расходится в метриках $L^p[0,2\pi]^2$ для любого $p \in (0,1)$.

Естественно возникает следующий

Вопрос. Существует ли измеримое множество E сколь угодно малой меры такое, что после изменения значений любой функции из класса $L^p[0,1)^2,\ p \geq 1$ на E,

1) *двойной ряд Фурье измененной функции по системе Уолша и по тригонометрической системе по сферам (по прямоугольникам, по квадратам) сходился бы к ней (почти всюду, по норме $L^p[0,1)$, равномерно)?*

2) *все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по двойной системе Уолша и по двойной тригонометрической системе по модулю были бы расположены в убывающем порядке по всем направлениям ?*

3) *исправленная функция имела бы заданные модули коэффициентов Фурье - Уолша?*

Заметим, что ответ вопроса зависит как от системы и от смысла сходимости (в частности от $p \geq 1$) так и от того, зависит ли исключительное множество E, на котором происходит изменение, от исправленной функции $f(x)$ или оно универсально - обслуживает целый функциональный класс.

В диссертационной работе этот вопрос рассмотрен в двух постановках:

а) когда значения функции $f(x)$ изменяются на зависящем от функции множестве сколь угодно малой меры,

б) когда исключительное множество E, на котором происходит изменение, не зависит от исправленной функции $f(x)$, т.е. оно универсально - обслуживает целый функциональный класс.

В соответствии с этими постановками и в связи пункта 3) выше сформулированного вопроса, в диссертации доказываются следующие теоремы[1].

Теорема 1. *Пусть заданы последовательности* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$ *с* $a_k \searrow 0$, $b_s \searrow 0$ *и* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_s\}_{s=0}^{\infty} \notin l_2$.

Тогда для любых чисел $\epsilon > 0$, $p \in [1,2]$ *и для каждой функции* $f \in L^p[0,1)^2$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^p[0,1)^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, *такую что*

$$|c_{k,s}(\tilde{f})| = \left| \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(t,\tau)\psi_k(t)\psi_s(\tau)dtd\tau \right| = a_k b_s, \ \forall (k,s) \in spec(\tilde{f}) \ .$$

Теорема 2. *Пусть заданы последовательности* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$ *с* $a_k \searrow 0$, $b_s \searrow 0$ *и* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_s\}_{s=0}^{\infty} \notin l_2$.

Тогда для любого $0 < \epsilon < 1$ *существует измеримое множество* $G \subset [0,1]^2$ *с мерой* $|G| > 1 - \epsilon$, *такое, что для любого* $p \in [1,2]$ *и для каждой функции* $f \in L^p[0,1)^2$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^p(G) \cap L^1[0,1)^2$, *совпадающую с* f *на* G, *такую что*

$$|c_{k,s}(\tilde{f})| = \left| \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(t,\tau)\psi_k(t)\psi_s(\tau)dtd\tau \right| = a_k b_s, \ \forall (k,s) \in spec(\tilde{f}).$$

Замечание 1. Отметим, что в теоремах 1 и 2 все ненулевые члены в последовательности $\{|c_{k,s}(\tilde{f})|\}_{k,s=0}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям. Отметим также, что нам неизвестен ответ вопроса о том, верны ли теоремы 1 и 2 в случае $p \in (2,\infty]$.

В связи с этим, в первой главе диссертации, в случае $p = \infty$, доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого* $\epsilon > 0$ *и для каждой функции* $f \in L^0[0,1)^2$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^{\infty}[0,1)^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, *такую, что ее ряд Фурье по двойной системе Уолша по сферам сходится к ней равномерно на* $[0,1)$, *и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье по двойной системе Уолша вновь полученной функции по модулю расположены в убывающем порядке по всем направлениям.*

[1] далее под $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ надо понимать систему Уолша.

В первой главе диссертационной работы для переставленной тригонометрической системы доказывается следующий результат.

Теорема 4. *Члены тригонометрической системы* $\{e^{i2\pi kx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ *можно переставить таким образом, чтобы вновь полученная система* $\{e^{i2\pi\sigma(k)x}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ *обладала следующим свойством: для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]^2$ *с мерой* $|E| > 1-\epsilon$, *такое, что для каждой функции* $f \in L^1[0,1]^2$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$, *совпадающую с* f *на* E, *такую, что все ненулевые члены в последовательности* $\{|c_{\sigma(k),\sigma(s)}(\tilde{f})|\}$, *где*

$$c_{\sigma(k),\sigma(s)}(\tilde{f}) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \tilde{f}(t,\tau) e^{-i2\pi\sigma(k)t} e^{-i2\pi\sigma(s)\tau} dt d\tau,$$

расположены в убывающем порядке по всем направлениям.

Следует отметить, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Н. Лузину [1]. Им в 1912 г. был получен следующий знаменитый результат (C-свойство Лузина):

Для любой измеримой, почти всюду конечной на $[0,1]$ *функции* f *и для любого* $\epsilon > 0$ *существуют измеримое множество* E *с мерой* $|E| > 1-\epsilon$ *и непрерывная на* $[0,1]$ *функция* g, *совпадающая с* f *на* E.

Далее, в этом направлении интересные результаты получены в работах (см. [2], [12]-[16]). В 1939г. Д. Е. Меньшов [2] доказал, что тригонометрическая система обладает (усиленным C-свойством):

Пусть f *измеримая функция, конечная почти всюду на* $[0,2\pi]$. *Каково бы ни было* $\epsilon > 0$, *можно определить непрерывную функцию* g, *совпадающую с* f *на некотором множестве* E, $|E| > 2\pi - \epsilon$ *и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на* $[0,2\pi]$.

В 1988г. М. Г. Григорян доказал, что тригонометрическая система обладает усиленным L^1-свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем.

Для любого $\epsilon > 0$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $|E| > 1-\epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f \in L^1[0,1]$ *можно*

найти функцию $g \in L^1[0,1]$, совпадающую с f на E, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1[0,1]$ норме (см. [12]).

Необходимо также отметить, что ряд работ [17]-[21] посвящен теоремам исправления с целью получения монотонности модулей ненулевых коэффициентов Фурье и сходимости ряда Фурье (по системам Хаара, Уолша, Фабера - Шаудера) от исправленной функции. Приведем те результаты, которые непосредственно относятся к результатам диссертационной работе.

a) Для системы Хаара $\chi = \{\chi_n(x)\}$ в работе [17] установлено, что для любой последовательности $a_k \searrow 0$ с $a_k = o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \notin l_2$ и для каждого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\epsilon$ такое, что для произвольной $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, такую что $\tilde{f}(x) = f(x)$ на E и коэффициенты Фурье - Хаара от функции $\tilde{f}$ удовлетворяют условиям

$$\int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\chi_n(x)dx \ = a_n, \quad \forall n \in spec(\tilde{f}).$$

Для системы Уолша $\{\psi_n\}$ доказаны следующие результаты.

b) Для любых $0 < \epsilon < 1$, $p \geq 1$ и для каждой функции $f \in L^p(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(0,1)$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, такую что все ненулевые члены в последовательности $\{|c_n(\tilde{f})|\}$ расположены в убывающем порядке (здесь $c_k(\tilde{f})-$ коэффициенты Фурье - Уолша исправленной функции $\tilde{f}$).

c) Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1)$, совпадающую с f на E, такую, что ее ряд Фурье - Уолша сходится к ней почти всюду на $[0,1)$ и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье - Уолша вновь полученной функции расположены в убывающем порядке.

d) Для любой последовательности $a_k \searrow 0$ с $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \notin l_2$ и для каждого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\epsilon$ такое, что для произвольной $f \in L^1[0,1)$ можно найти функцию

$\tilde{f} \in L^1[0,1)$, совпадающую с f на E такую, что ее ряд Фурье - Уолша сходится к ней в метрике $L^1[0,1)$ и

$$|c_n(\tilde{f})| = \left| \int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\psi_n(x)dx \right| = a_n, \ \ \forall n \in spec(\tilde{f}) \text{ (см. [18])}.$$

Для системы Фабера - Шаудера $\{\Phi_n(x)\}$ получен следующий результат.

е) Пусть $b_k \searrow 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} = \infty$. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ и для любой измеримой, почти всюду конечной на [0,1] функции f можно определить непрерывную функцию

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tilde{f})\Phi_k(x)$$

с $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, такую что $|A_n(\tilde{f})| = b_n, \ \forall n \in spec(\tilde{f})$.

Во второй главе, диссертации доказываются следующие теоремы:

Теорема 5. *Для любой последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ с $a_k \searrow 0$ и $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \notin l_2$, для любых чисел $p \in (1,2]$, $\epsilon > 0$ и для каждой функции $f \in L^p[0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p[0,1)$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$ такую, что*

$$|c_n(\tilde{f})| = \left| \int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\psi_n(x)dx \right| = a_n, \ \forall n \in spec(\tilde{f})$$

и

$$\|\widetilde{f}\|_p \leq \frac{4}{\varepsilon^{1-1/p}}\|f\|_p.$$

Теорема 6. *Для любой последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ с $a_k \searrow 0$ и $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \notin l_2$, и для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для любого $p \in [1,2]$ и для каждой функции $f \in L^p(E)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(E) \cap L^1[0,1)$, совпадающую с f на E и такую, что*

1) ее ряд Фурье по системе Уолша сходится к ней в $L^p(E)$ и в $L^1[0,1)$, и

$$|c_k(\tilde{f})| = a_k, \ \forall k \in spec(\tilde{f}),$$

2) можно найти числа $\delta_k = 0, \pm 1$ такие, что ряд по системе $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ Уолша вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_k \psi_k(x),$$

будет универсальным рядом относительно перестановок в $L^p(E)$, т.е. для каждой функций $f \in L^p(E)$, $p \in [1,2]$ члены ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_k \psi_k(x)$, можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{\sigma(k)} a_{\sigma(k)} \psi_{\sigma(k)}(x)$$

сходился бы к f по $L^p(E)$ норме.

В связи с пунктом 2 теоремы 6 следует отметить, что вопросам существования универсальных рядов по разным классическим ортогональным системам (относительно перестановок, подрядов, знаков и т.д.), посвящено много работ (см. [22]-[26]). Наиболее общие результаты были получены Д. М. Меньшовым, А. А. Талаляном, П. Л. Ульяновым и их учениками. Непосредственное отношение к теореме 6 имеет следующий результат полученный в работе [22] Г. Г. Геворкяна и К. А. Навасардяна:

Для любой последовательности $a_k \searrow 0$ с $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \notin l_2$ существуют числа $\gamma_n = \pm 1$ такие, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n \psi_n(x)$ является универсальным относительно подрядов в классе почти всюду конечных измеримых функций на $[0,1]$ в смысле сходимости почти всюду, т.е. для любой п.в. конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[0,1]$, можно выделить подряд из ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n \psi_n(x)$ такой, что он сходится к $f(x)$ почти всюду на $[0,1]$.

Замечание 2. В теореме 6 последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ не возможно взять из класса l_2. Действительно, в этом случае для функции $f \in L^p(E) \setminus L^2(E)$, $p \in [1,2)$, в силу $\tilde{f}(x) = f(x)$, $x \in E$, исправленная функция $\tilde{f}$ не принадлежала бы к классу $L^2[0,1)$. С другой стороны, по теореме Рисса - Фишера, ввиду $|c_k(\tilde{f})| = a_k$, $\forall k \in spec(\tilde{f})$, должно быть $\tilde{f} \in L^2[0,1)$.

Замечание 3. В пункте 2 теоремы 6 вместо множества E невозможно взять $[0,1)$. Действительно, если для некоторого $p_0 \geq 1$ и для си-

стемы $\{\psi_n(x)\}$ Уолша существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k a_k\psi_k(x)$ универсальный в $L^{p_0}[0,1)$ относительно перестановок, то для функции $(|a_1|+1)\psi_1(x)$ существует перестановка $k\to\sigma(k)$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{m}\delta_{\sigma(k)}a_{\sigma(k)}\psi_{\sigma(k)}(x)-(|a_1|+1)\psi_1(x)\right\|_{p_0}=0.$$

Отсюда получиться, что $\delta_1 a_1 = 1+|a_1|$, а это невозможно так, как $\delta_1 = 0, \pm 1$.

Отметим также, что нам неизвестен ответ вопроса о том, верны ли теоремы 5 и 6 в случае $p\in(2,\infty]$.

В параграфе 2.4 диссертации доказывается следующая

Теорема 7. *Существует возрастающая последовательность натуральных чисел M_ν, $\nu=0,1,...$ такая, что для любого $\epsilon>0$ существует измеримое множество $E\subset[0,1]$ с мерой $|E|>1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f\in L^1[0,1]$ можно найти функцию $\tilde{f}\in L^1[0,1]$, совпадающую с f на E, такую, что модули ненулевых коэффициентов Фурье вновь полученной исправленной функции $\tilde{f}$ по системам Уолша по модулю расположены в убывающем порядке и для любого $\alpha\neq -1,-2,...$ Чезаровские средние $\sigma^{\alpha}_{M_\nu}(x,\tilde{f})$, $\nu=0,1,...$ сходятся к функции $\tilde{f}$ почти всюду.*

Отметим, что в работе [27] (см. также [28], [29]) Л. Н. Галоян построил пример интегрируемой функции Чезаровские средние порядка α ряда Фурье - Уолша которой на множестве положительной меры неограниченно расходятся по любым подпоследовательностям $\{m_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ для всех $\alpha\in(-1,0)$.

Замечание 4. В теореме 7 невозможно в качестве подпоследовательности M_ν (которая одна и та же для всех суммируемых функций) взять ν.

В третьей главе диссертации доказываются, что теоремы 5 и 6, для системы Уолша, можно частично перенести с одномерного случая на двумерный случай. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 8. *Пусть заданы последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$ с $a_k\searrow 0$, $b_s\searrow 0$ и $\{a_k\}_{k=0}^{\infty},\{b_s\}_{s=0}^{\infty}\notin l_2$.*

Тогда для любых чисел $\epsilon > 0$, $p \in [1,2]$ и для каждой функции $f \in L^p[0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p[0,1)^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, такую что ее ряд Фурье по двойной системе Уолша как по сферам, так и по прямоугольникам сходится к ней в $L^p[0,1)^2$ и

$$|c_{k,s}(\tilde{f})| = \left| \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \tilde{f}(t,\tau)\psi_k(t)\psi_s(\tau)dtd\tau \right| = a_k b_s, \ \forall (k,s) \in spec(\tilde{f}).$$

Теорема 9. *Пусть заданы последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$ с $a_k \searrow 0$, $b_s \searrow 0$ и $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_s\}_{s=0}^{\infty} \notin l_2$.*

Тогда для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]^2$ с мерой $|E| > 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1)^2$, совпадающую с f на E, такую, что ее ряд Фурье по двойной системе Уолша как по сферам, так и по прямоугольникам сходится к ней в $L^1[0,1)^2$, и

$$|c_{k,s}(\tilde{f})| = a_k b_s, \ \forall (k,s) \in spec(\tilde{f}).$$

Теорема 10. *Пусть заданы последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$ с $a_k \searrow 0$, $b_s \searrow 0$ и $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_s\}_{s=0}^{\infty} \notin l_2$.*

Тогда для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $G \subset [0,1]^2$ с мерой $|G| > 1-\epsilon$ такое, что для любого $p \in [1,2]$ и для каждой функции $f \in L^p[0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(G) \cap L^1[0,1)^2$, совпадающую с f на G и такую, что ее ряд Фурье по двойной системе Уолша по сферам сходится к ней в $L^p(G)$ и в $L^1[0,1)^2$ и

$$|c_{k,s}(\tilde{f})| = a_k b_s, \ \forall (k,s) \in spec(\tilde{f}).$$

Замечание 5. Отметим, что в многих теоремах, полученных в диссертации, исправленные функции имеют заданные модули коэффициентов Фурье - Уолша:

$$|c_k(\tilde{f})| = a_k, \ \forall k \in spec(\tilde{f}).$$

В этих результатах, только *ненулевые* коэффициенты по модулю расположены в убывающем порядке.

Возникает вопрос: можно ли исправленную функцию выбрать так, чтобы *все* члены в последовательности коэффициентов Фурье - Уолша

исправленной функции были бы по модулю расположены в убывающем порядке.

В связи с этим, когда коэффициенты заранее не заданы, в работе [20] получен следующий результат:

Для каждого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для произвольной $f \in L^1[0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1)$, совпадающую f на E такую, что ее ряд Фурье - Уолша сходится к ней в метрике $L^1[0,1)$ и все члены в последовательности коэффициентов Фурье - Уолша вновь полученной функции $\tilde{f}$ по модулю расположены в убывающем порядке:

$$|c_k(\tilde{f})| > |c_{k+1}(\tilde{f})|, \quad k = 0, 1, 2....$$

Интересно выяснить можно ли распространить этот результат на двумерный случай.

В заключение выражаю благодарность профессору М.Г. Григоряну, под руководством которого выполнена данная работа.

Литература

[1] Н. Н. Лузин, “К основной теореме интегрального исчисления”, Матем. Сб., 28:2(1912), 266-294.

[2] Д. Е. Меньшов, “О равномерной сходимости рядов Фурье”, Матем. Сб., 53:2(1942), 67-96.

[3] Walsh J. L., “A closed set of normal orthogonal functions”, Amer. J. Math., 1923, v.45, p.5-24.

[4] Paley R. E. A. C., “A remarkable series of orthogonal functions”, Proc. London. Math. Soc., 1932, v.34, p.241-279.

[5] Fefferman C., “On the divergence of multiple Fourier series”, Bull Amer. Math. Soc. 1971, V.77, N 2, P. 191-195.

[6] D. C Harris, “Almost everywhere divergence of multiple Walsh - Fourier series”, American math. soc., volume 101, N. 4, 1987.

[7] С. В. Конягин, “О подпоследовательностей частнйх сумм Фурье - Уолша”, Матем. Заметки, 1993, т.54, н. 4, с. 69-75.

[8] С. Ф. Лукомский, “Критерий сходимости почти всюду квадратных частичных сумм Фурье - Уолша интегрируемых функций”, Матем. сборник, 1995, т.186, н. 7, стр.133-146.

[9] Гецадзе Р. Д., “Непрерывная функция с расходящимся почти всюду кратным рядом Фурье по системе Уолша - Пелли”, Матем. сб., 1985, 128(170):2(10), 269-286.

[10] М. Г. Григорян, “О сходимости в метрике сферических частичных сумм двойных рядов Фурье”, Матем. заметки, 1983, т.33, N 4, ,стр.517-528.

[11] С. Ш. Галстян, Г. А. Карагулян, “О расходимости почти всюду прямоугольных частичных сумм кратных рядов Фурье ограниченных функций”, Матем. заметки, 1998, том 64, выпуск 1, стр. 24-36.

[12] M. G. Grigorian, “On the convergence of Fourier series in the metric of L^1”, Analysis Math., 17(1991), 211-237.

[13] Д. Е. Меньшов, “О рядах Фурье от суммируемых функций”, Тр. Моск. матем. общества, 1(1952), 5-38.

[14] Д. Е. Меньшов, “О рядах Фурье непрерывных функций”, Уч. Записки,“Математика”, 148:4(1951), 108-132.

[15] К. И. Осколков, “Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры”, ДАН СССР-228:2(1976), 304-306.

[16] Г. Г. Геворкян, “О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина”, Доклади НАН Армения, сер. матемиатка, ст. 15-18, 1986.

[17] М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, “Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций”, Analysis Mathematica, 32(2006), 49-80.

[18] К. А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, Изв. НАН Армении, 42:5, 2007, 51-64.

[19] М. Г. Григорян, В. Г. Кротов, “Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложени Фурье по системе Фабера - Шаудера”, 2013г, т. 93 , N 3, стр. 17-25.

[20] М. Г. Григорян, К. А. Навасардян, “О поведении коэффициентов Фурье по системе Уолша”, Изв. НАН Армении, 2016, 51, стр 3-20.

[21] M. G. Grigorian, R. E. Zink, “Greedy approx. with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system”, Proc. of the Amer. Mat. Soc., 134:12(2006), 3495-3505.

[22] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, Изв. АН России, т.63. 1, 1999, 41-60

[23] A. A. Talalian, “On the convergence almost everywhere of the subsequences of partial sums of general orthogonal series”[in Russian], Izv. AN ArmSSR, Matematika, 1975, vol. 10, no. 3, pp. 17 – 3.

[24] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, “Ортогональные ряды”, Москва 1999,

[25] M. G. Grigorian, “On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces”, Studia. Math., 1999, 134(3), 207-216

[26] M. G. Grigorian, “Universal or quasiuniversal in $L^p_{[0,1]}$ orthogonal series”, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, vol. 35, no. 4, pp.44-64, 2000.

[27] Л. Н. Галоян, “О сходимости в метриках L^p средних Чезаро отрицательного порядка рядов Фурье - Уолша”, Изв. НАН Армении, Математика, т. 47, н. 3, стр. 35-54, 2012.

[28] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On the uniform convergence of negative order Cesaro means of Fourier series”, J. Math. Anal. Appl. (2016), http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.09.001

[29] D. E. Menshov, “Application of Cesaro summability methotds of negative order to trigonometric Fourier series of summable and square summable functions ”, Math. USSR-Sb., 22:4 (1974), 497-515

Работы автора по теме диссертации

[I] Л. Н. Галоян, Р. Г. Меликбекян, О поведении коэффициентов Фурье-Уолша исправленной функции, Сибирский матем. журнал, 2016г., т.57, но.3, стр. 641-649.

[II] L. N. Galoyan, R. G. Melikbekyan, On the almost everywhere convergence of negative order Cesaro means of Fourier-Walsh series, Proc. of the YSU, 2016, no. 1, 64-66.

[III] Razmik Melikbekyan, Representation of functions by Walsh series with monotone coeffcients, Journal of Mathematics Research, 2013, v. 5, no.1, 107-114

[IV] R. G. Melikbekyan On quziuniversal Walsh series in $L^p[0,1]$, $1 \leq p < 2$, Proc. of the YSU, 2016, no. 1, 22-29.

[V] Р. Г. Меликбекян, Сходимость двойных рядов Фурье. Тезисы докладов, IX Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения», с 27 мая в 3 июня, Ростов-на-Дону, 2016, стр. 78.

SUMMARY

The main results obtained in this thesis are:

1. There exists a series in double Walsh system of the form

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} d_{k,s}\psi_k(x)\psi_s(y), \text{ with } \sum_{k,s=0}^{\infty} |d_{k,s}|^{2+\delta} < \infty, \ \forall\delta > 0,$$

that possess the following properties:

1) all non-zero coefficients in the sequence $\{|d_{k,s}|\}$ are monotonically decreasing by all directions,

2) for each $\varepsilon > 0$ and for each function $f \in L^0[0,1)^2$ there exists a function $\tilde{f} \in L^\infty[0,1)^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$ such that double Fourier - Walsh series of modified function $\tilde{f}$ by spheres and by Pringsheim converges uniformly on $[0,1)^2$ and

$$c_{k,s}(\tilde{f}) = d_{k,s}, \forall(k,s) \in spec(\tilde{f}).$$

2. There exists a double trigonometric series of the form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} d_{k,s}e^{i2\pi\sigma(k)x}e^{i2\pi\sigma(s)y}, \text{ with } \sum_{k,s=1}^{\infty} |d_{k,s}|^{2+\delta} < \infty, \ \forall\delta > 0,$$

where $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ - some rearrangement of numbers $\mathbb{N} \cup \{0\}$, that possess the following properties:

1) all non-zero coefficients in the sequence $\{|d_{k,s}|\}$ are monotonically decreasing by all directions,

2) for each $\varepsilon > 0$, there exists a measurable set $E \subset [0,1]^2$ with measure $|E| > 1 - \epsilon$, such that for any function $f \in L^1[0,1]^2$ there exists a function $\tilde{f} \in L^1[0,1]^2$, which coincides with f on E, Fourier series of $\tilde{f}$ function with respect to rearranged double trigonometric system $\{e^{i2\pi\sigma(k)x}e^{i2\pi\sigma(s)y}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ converges by squares to it in the norm of $L^1[0,1)^2$ and

$$c_{\sigma(k),\sigma(s)}(\tilde{f}) = d_{k,s}, \ \forall(k,s) \in spec(\tilde{f}).$$

3. Let the sequence $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ with $a_k \searrow 0$ and $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \notin l_2$ is given. Then for each numbers $p \in (1,2]$, $\epsilon > 0$ and for any function $f \in L^p[0,1)$

there exists a function $\tilde{f} \in L^p[0,1)$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$ such that

$$|c_n(\tilde{f})| = a_n,\ \forall n \in spec(\tilde{f}),\ \text{and}\ \|\widetilde{f}\|_p \leq \frac{4}{\varepsilon^{1-1/p}}\|f\|_p.$$

4. Let the sequence $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ with $a_k \searrow 0$ and $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \notin l_2$ is given. Then for each $0 < \epsilon < 1$ there exists a measurable set $E \subset [0,1]$ with measure $|E| > 1-\epsilon$ such that for each $p \in [1,2]$ and for any function $f \in L^p(E)$ there exists a function $\tilde{f} \in L^p(E) \cap L^1[0,1)$, which coincides with f on E, and

1) Fourier series of it with respect to Walsh system converges to it in the norm of $L^p(E)$ and of $L^1[0,1)$, and

$$|c_k(\tilde{f})| = a_k,\ \forall k \in spec(\tilde{f}),$$

2) there exist numbers $\delta_k = 0, \pm 1$ such that series with respect to Walsh system $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ of the form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_k \psi_k(x),$$

is universal series with respect to permutations in $L^p(E)$.

5. Let sequences $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$ with $a_k \searrow 0$, $b_s \searrow 0$ and $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_s\}_{s=0}^{\infty} \notin l_2$ are given. Then for each numbers $\epsilon > 0$, $p \in [1,2]$ and for any function $f \in L^p[0,1)^2$ there exists a function $\tilde{f} \in L^p[0,1)^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, such that double Fourier - Walsh series of modified function by spheres and by rectangles converges to it in the norm of $L^p[0,1)^2$ and

$$|c_{k,s}(\tilde{f})| = a_k b_s,\ \forall (k,s) \in spec(\tilde{f}).$$

6. Let sequences $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$ with $a_k \searrow 0$, $b_s \searrow 0$ and $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_s\}_{s=0}^{\infty} \notin l_2$ are given. Then for each $0 < \epsilon < 1$ there exists a measurable set $G \subset [0,1]^2$ with measure $|G| > 1-\epsilon$ such that for each $p \in [1,2]$ and for any function $f \in L^p[0,1)^2$ there exists a function $\tilde{f} \in L^p(G) \cap L^1[0,1)^2$, which coincides with f on G and Fourier - Walsh series of modified function by spheres converges to it in the norm of $L^p(G)$ and of $L^1[0,1)^2$ and

$$|c_{k,s}(\tilde{f})| = a_k b_s,\ \forall (k,s) \in spec(\tilde{f}).$$

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

1. Ռոլշի կրկնակի համակարգով գոյություն ունի հետևյալ տեսքի շարք

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} d_{k,s}\psi_k(x)\psi_s(y),\ \sum_{k,s=0}^{\infty}|d_{k,s}|^{2+\delta}<\infty,\ \ \forall\delta>0,$$

որն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1) $\{|d_{k,s}|\}$ հաջորդականության բոլոր ոչ զրոյական գործակիցները դասավորված են նվազման կարգով՝ ըստ բոլոր ուղղությունների,

2) ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի և ցանկացած ֆունկցիայի $f\in L^0[0,1)^2$ համար գոյություն ունի ֆունկցիա $\tilde{f}\in L^\infty[0,1)^2$, $mes\{f\neq\tilde{f}\}<\epsilon$ այնպիսին, որ փոխած $\tilde{f}$ ֆունկցիայի Ֆուրիե - Ռոլշի կրկնակի շարքը ըստ սֆերաների և ըստ ուղղանկյունների հավասարաչափ զուգամիտում է $[0,1)^2$ - ի վրա և

$$c_{k,s}(\tilde{f})=d_{k,s},\forall(k,s)\in spec(\tilde{f}):$$

2. Եռանկյունաչափական կրկնակի համակարգով գոյություն ունի հետևյալ տեսքի շարք

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} d_{k,s}e^{i2\pi\sigma(k)x}e^{i2\pi\sigma(s)y},\ \sum_{k,s=1}^{\infty}|d_{k,s}|^{2+\delta}<\infty,\ \ \forall\delta>0,$$

որտեղ $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$-ն $\mathbb{N}\cup\{0\}$ - թվերի վերադասավորում է, որն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1) $\{|d_{k,s}|\}$ հաջորդականության բոլոր ոչ զրոյական գործակիցները դասավորված են նվազման կարգով՝ ըստ բոլոր ուղղությունների,

2) ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի չափելի բազմություն $E\subset[0,1]^2$, $|E|>1-\epsilon$ այնպիսին, որ ցանկացած ֆունկցիայի $f\in L^1[0,1]^2$ համար գոյություն ունի ֆունկցիա $\tilde{f}\in L^1[0,1]^2$, որը համընկնում է f-ի հետ E -ի վրա, $\tilde{f}$ -ի Ֆուրիեի շարքը ըստ վերադասավորված կրկնակի եռանկյունաչափական համակարգի $\{e^{i2\pi\sigma(k)x}e^{i2\pi\sigma(s)y}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ ըստ քառակուսիների զուգամիտում է իրեն $L^1[0,1)^2$ նորմով և

$$c_{\sigma(k),\sigma(s)}(\tilde{f})=d_{k,s},\ \ \forall(k,s)\in spec(\tilde{f}):$$

3. Դիցուք $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ հաջորդականությունը, որի համար $a_k\searrow 0$ և $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}\notin l_2$, տրված է: Այդ դեպքում ցանկացած $p\in(1,2]$, $\epsilon>0$ թվերի և ցանկացած

ֆունկցիայի համար $f \in L^p[0,1)$ գոյություն ունի ֆունկցիա $\tilde{f} \in L^p[0,1)$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$ այնպիսին, որ

$$|c_n(\tilde{f})| = a_n,\ \forall n \in spec(\tilde{f}),\ \text{և}\ \|\tilde{f}\|_p \leq \frac{4}{\varepsilon^{1-1/p}}\|f\|_p :$$

4. Դիցուք $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ հաջորդկանությունը, որի համար $a_k \searrow 0$ և $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \notin l_2$, տրված է: Այդ դեպքում ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի չափելի բազմություն $E \subset [0,1]$, $|E| > 1-\epsilon$ այնպիսին, որ ցանկացած $p \in [1,2]$ թվի և ցանկացած ֆունկցիայի $f \in L^p(E)$ համար գոյություն ունի ֆունկցիա $\tilde{f} \in L^p(E) \cap L^1[0,1)$, որը համընկնում է f-ի հետ E-ի վրա, և

1) $\tilde{f}$ -ի Ֆուրիեի շարքը ըստ Ռոլշի համակարգի զուգամիտում է իրեն $L^p(E)$ նորմով և $L^1[0,1)$ նորմով ու

$$|c_k(\tilde{f})| = a_k,\ \ \forall k \in spec(\tilde{f}),$$

2) գոյություն ուենեն $\delta_k = 0, \pm 1$ թվեր այնպիսին, որ ըստ Ռոլշի $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ համակարգի

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_k \psi_k(x)$$

շարքը ունիվերսալ է $L^p(E)$ - ում փեղափոխությունների նկատմամբ:

5. Դիցուք $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$ հաջորդականությունները, որոնց համար $a_k \searrow 0$, $b_s \searrow 0$ և $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_s\}_{s=0}^{\infty} \notin l_2$, տրված են: Այդ դեպքում ցանկացած $\epsilon > 0$, $p \in [1,2]$ թվերի և ցանկացած ֆունկցիայի $f \in L^p[0,1)^2$ համար գոյություն ունի ֆունկցիա $\tilde{f} \in L^p[0,1)^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$ այնպիսին, որ փոխած $\tilde{f}$ ֆունկցիայի Ֆուրիե - Ռոլշի կրկնակի շարքը ըստ սֆերաների և ըստ ուղղանկյունների զուգամիտում է իրեն $L^p[0,1)^2$ նորմով և

$$|c_{k,s}(\tilde{f})| = a_k b_s,\ \ \forall (k,s) \in spec(\tilde{f}) :$$

6. Դիցուք $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$ հաջորդականությունները, որոնց համար $a_k \searrow 0$, $b_s \searrow 0$ և $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_s\}_{s=0}^{\infty} \notin l_2$, տրված են: Այդ դեպքում ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի չափելի բազմություն $G \subset [0,1]^2$, $|G| > 1-\epsilon$ այնպիսին, որ ցանկացած $p \in [1,2]$ և ցանկացած ֆունկցիայի $f \in L^p[0,1)^2$ համար գոյություն ունի ֆունկցիա $\tilde{f} \in L^p(G) \cap L^1[0,1)^2$, որը համընկնում է f-ի հետ G-ի վրա և փոխած $\tilde{f}$ ֆունկցիայի Ֆուրիե - Ռոլշի կրկնակի շարքը ըստ սֆերաների զուգամիտում է իրեն $L^p(G)$ նորմով և $L^1[0,1)^2$ նորմով ու

$$|c_{k,s}(\tilde{f})| = a_k b_s,\ \ \forall (k,s) \in spec(\tilde{f}) :$$