Երևանի Պետական Համալսարան

Նուրբեկյան Արմեն Ռոբերտի

Եռանկյունաչափական միջարկող բազմանդամների զուգամիտության որոշ հարցեր

Ա.01.01 – “Մաթեմատիկական անալիզ” մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2015

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Нурбекян Армен Робертович

Некоторые вопросы сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности А.01.01 – “Математический анализ”

Ереван 2015

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Ա. Սահակյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Ա. Հակոբյան
	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր Ս. Ա. Եպիսկոպոսյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Թբիլիսիի պետական համալսարան,

Պաշտպանությունը կկայանա 2015թ. մայիսի 26–ին ժ. 15^{00}–ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ–ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2015թ. ապրիլի 25–ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար, Տ. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель:	доктор физ–мат. наук Член-корреспондент НАН РА А. А. Саакян
Официальные оппоненты:	доктор физ–мат. наук А. А. Акопян
	доктор физ–мат. наук С. А. Епископосян
Ведущая организация:	Тбилисский государственный университет

Защита диссертации состоится 26 мая 2015г. в 15^{00} на заседании специализированного совета ВАК-а 050 при ЕГУ (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан 25–го апреля 2015г.

Ученый секретарь специализированного совета, Т. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Проблемы приближения функций тригонометрическими полиномами, такими как частные суммы рядов Фурье, интерполяционные полиномы, средние Фейера, Валле-Пуссена, Чезаро и др. имеют более, чем вековую историю, но не теряли свою актуальность и сегодня. Этими вопросами занимались такие знаменитые математики, как А. Зигмунд, А. Колмогоров, Н. Лузин, Д. Меньшов, С. М. Никольский, П.Л. Улянов, А. Талалян, Ж.-П. Кахан и др.

Одно из направлений этих исследований – признаки сходимости рядов Фурье, среди которых важное место занимают признак Дирихле-Жордана и признак Салема. Они обобщались и усиливались многими математиками, среди которых К. Гофман, Ю. Марцинкевич, Н. Винер, Л. Юнг, А. Бернштейн, Д. Ватерман, которые вместо функций ограниченной вариации рассматривали различные классы функций ограниченной обобщенной вариации. Разные обобщения были получены и в многомерном случае Г. Харди, Б. Голубовым, М. Дьяченко, У. Гогинава, А. Саакяном, А. Бахваловым и др. Аналогичные вопросы для тригонометрических интерполяционных полиномов в одномерном случае рассматривались в работах А. Зигмунда, Д. Ватермана и Х. Ксинга, А. Кельзона. В диссертации продолжаются эти исследования для интерполяционных полиномов многих переменных.

Другое направление – изменение функции (на множестве малой меры или с помощью гомеоморфной замены переменной) с целью улучшения сходимости частичных сумм ряда Фурье. В диссертации для тригонометрических интерполяционных полиномов устанавливаются аналоги результатов Г. Бора, Кахана и Кацнельсона, А. Саакяна.

Цель работы.

1) Доказвтельство сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов для функций с ограниченной гармонической вариацией в двумерном случае.

2) Доказательство теоремы Г. Бора для тригонометрических интерполяционных полиномов в двумерном случае.

3 Установление признака Салема для тригонометрических интерполяционных полиномов в двумерном случае.

4) Доказвтельство сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов для функций непрырывных по гармонической вариации в случае, когда размерность пространства $m > 2$.

5) Построение примера непрывной функций с ограниченной гармонической вариацией, тригонометрические интерполяционные полиномы которой рассходятся в точке, в случае, когда размерность пространгнства больше двух.

Методы исследования. В работе применены методы теории функций и функционального анализа.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные результаты работы имеют теоретический характер и могут быть использованы при дальнейшем изучении вопросов сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов.

Апробация полученных результатов. Основные результаты работы докладывались на семинарах по теории функций кафедры математического анализа и теории функций факультета Математики и механики ЕГУ.

Основные результаты диссертации опубликованы в 3 статьях, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 73 страницах, состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитированной литературы, включающего 35 наименований.

Содержание работы

Диссертация посвящена вопросам сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов. Для тригонометрических интерполяционных полиномов доказаны аналоги некоторых результатов, хорошо известных для классических рядов Фурье по тригонометрической системе. Рассмотрен вопрос о возможности улучшения свойств сходимости интерполяционных тригонометрических полиномов непрерывной функции с помощью гомеоморфной замены переменной.

Хорошо известно, что как ряды Фурье, так и интерполяционные тригонометрические полиномы непрерывных функции могут не только не сходиться равномерно, но и расходиться в некоторых точках. В связи с этим было доказано множество признаков для сходимости рядов Фурье, среди которых важное место занимает следующий признак Дирихле-Жордана.

Теорема ([29] стр. 98)**.** *Предположим, что функция f имеет ограниченное изменение на $[-\pi,\pi]$. Тогда*

(I) в каждой точке x_0 ряд Фурье $S[f]$ сходится к значению

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right],$$

в частности, $S[f]$ сходится к $f(x_0)$ в каждой точке непрерывности f;

(II) если, кроме того, f непрерывна в каждой точке отрезка I, то $S[f]$ сходится равномерно на I.

Эта теорема обобщалась многими математиками, среди которых К. Гофман [12], Ю. Марцинкевич [17], Н. Винер [27], Г. Харди [13], Л. Юнг [28], А. Вернштейн [1], (см. также [2], [5] – [8], [18]), которые вместо функций ограниченной вариации рассматривали различные классы функций ограниченной обобщенной вариации.

В вопросах сходимости рядов Фурье принципиальную роль играют классы функций ограниченнол Λ-вариации, введенные в Д. Ватерманом [25].

Обозначим через $\mathbb{L}$ множество последовательностей положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Положим также

$$f(\Delta) = f(\beta) - f(\alpha), \quad \text{если} \quad \Delta = (\alpha, \beta).$$

Для отрезка $I \subset \mathbb{R}$ через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов I_n, таких что $\overline{I}_n \subset I$.

Определение (Д. Ватерман [25]). *Пусть $\{\lambda_n\} \in \mathbb{L}$, и функция $f(x)$, $x \in I$ определена на отрезке I вещественной оси. Λ-вариацией функции f на отрезке I называется следующая величина:*

$$V_\Lambda(f, I) := \sup_{\{I_n\}\in\Omega(I)} \sum \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n}.$$

Класс функций с ограниченной Λ-вариацией на I обозначим через $\Lambda BV(I)$:

$$\Lambda BV = \Lambda BV(I) = \{f : V_\Lambda(f, I) < \infty\}.$$

В частном случае, когда $\lambda_n \equiv n$, класс ΛBV называется классом фукнций ограниченной гармонической вариации и пишется $V_H(f, I)$ и HBV вместо $V_\Lambda(f, I)$ и ΛBV соответственно.

В работе [25] Д. Ватерман обобщил признак Дирихле-Жордана на класс функций, имеющих ограниченную гармоническую вариацию на отрезке $\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$.

Теорема (Д. Ватерман, [25]). *Для произвольной функции $f \in HBV(\mathbb{T})$ имеют место следующие утверждения:*

(I) ряд Фурье функции f сходится к значению $\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$ в каждой точке $x_0 \in \mathbb{T}$; в частности, $S[f]$ сходится к f в каждой точке непрерывности f;

(II) если f непрерывна на отрезке $I \subset \mathbb{T}$, то $S[f]$ сходится к f равномерно на I.

Следует отметить, что $HBV(\mathbb{T})$ – наиболее широкий класс среди классов функций ограниченной обобщенной вариациии, для которых справедливо утверждение признака Дирихле-Жордана.

Для тригонометрических интерполяционных полиномов некоторые аналоги признака Дирихле-Жордана и его обобщений были доказаны в работах А. Зигмунда [30], А. Кельзона [15], [16] и Д. Ватермана и Х. Ксинга [26]. Для формулировки этих результатов приведем определение тригонометрической интерполяции.

Пусть N–произвольное натуральное число, $t_0 \in \mathbb{T}$, и

$$h_N = \frac{2\pi}{2N+1}, \quad t_i = t_0 + ih_N, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots . \tag{1}$$

Для 2π-периодической функции f через $I_N(f,x)$ обозначим единственный тригонометрический полином вида:

$$I_N(f,x) = \frac{a_0^N}{2} + \sum_{\nu=1}^{N}(a_\nu^N \cos\nu x + b_\nu^N \sin\nu x) = \sum_{\nu=-N}^{N} c_\nu^N e^{i\nu x},$$

который совпадает с f в точках t_i:

$$I_N(f,t_i) = f(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, 2N.$$

Имеет место следующий аналог признака Дирихле-Жордана.

Теорема (А. Зигмунд [30], гл. X)**.** *Если функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} I_N^n(f,x) = f(x) \qquad (N > n)$$

в каждой точке $x \in \mathbb{T}$, где функция f непрерывна. Сходимость равномерна на каждом отрезке непрырывности функции f.

Для тригонометрических интерполяционных полиномов аналог теоремы Д. Ватермана была доказана А. А. Кельзоном [15], [16], а также Д. Ватерманом и Х. Ксингом [26].

Разные обобщения признака Дирихле-Жордана были рассмотрены и в многомерном случае (см., например, [6] – [9], [11], [13]). В двумерном случае сходимость по Прингсхейму рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации была доказана А. А. Саакяном в работе [20], где приведены определение и основные свойства гармонической вариации в двумерном случае.

Определение (А. Саакян, [20])**.** *Пусть функция $f(x,y)$, $x \in I$, $y \in \Delta$ определена на прямоугольнике $I \times \Delta$, и $I = (a,b)$, $\Delta = (\alpha, \beta)$. Положим*

$$V_{x,y}(f; I \times \Delta) = \sup \sum_{n,k} \frac{|f(I_n, \Delta_k)|}{nk},$$

где $\sup$ *берется по всем системам* $\{I_n\}_{n=1}^{n_0}$ *и* $\{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ *попарно непересекающихся интервалов из* I *и* Δ *соответственно, и*

$$f(I,\Delta) := f(a,\alpha) - f(a,\beta) - f(b,\alpha) + f(b,\beta).$$

Двумерная гармоническая вариация функции f *на прямоугольнике* $I\times\Delta$ *определяется следующим образом:*

$$V_H(f, I\times\Delta) := V_{x,y}(f; I\times\Delta) + \sup_{y_0\in\Delta} V_x(f(x,y_0), I) + \sup_{x_0\in I} V_y(f(x_0,y),\Delta),$$

где V_x *и* V_y *– одномерные гармонические вариации относительно переменных* x *и* y *соответственно. Класс функций ограниченной гармонической вариации на прямоугольнике* $I\times\Delta$ *обозначают через* $HBV = HBV(I\times\Delta)$.

Для суммируемой функции $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$ через $S_{N,M}(f,x,y)$ обозначим прямоугольные частичные суммы ряда Фурье функции f.

Теорема (А. Саакян, [20]). *Если* $f\in HBV(\mathbb{T}^2)$, *то*

1) в каждой точке, где существуют пределы $f(x\pm 0, y\pm 0)$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N,M\to\infty} S_{N,M}(f,x,y) = \frac{1}{4}\sum f(x\pm 0, y\pm 0); \tag{2}$$

2) если, f *непрерывна в точках открытого множества* $E\subset\mathbb{T}^2$, *то сходимость в (2) имеет место равномерно на каждом компакте* $K\subset E$.

В первой главе диссертации доказывается аналог теоремы А. Саакяна для двумерных тригонометрических интерполяционных полиномов. Приведем необходимые определения. Пусть узлы t_i определены как в (1), и пусть

$$s_j = s_j^M = s_0 + \frac{2\pi j}{2M+1}, \quad j = 0,1,\dots,2M, \tag{3}$$

где M – натуральное число, и $s_0\in\mathbb{T}$. Для заданной 2π-периодической по каждой переменной функции $f(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ существует единственный тригонометрический полином

$$I_{N,M}(f,x,y) = \sum_{\nu=-N}^{N}\sum_{\mu=-M}^{M} c_{\nu,\mu}^{N,M} e^{i\nu x} e^{i\mu y},$$

который совпадает с f в точках (t_i, s_j):

$$I_{N,M}(f,t_i,s_j) = f(t_i,s_j), \quad i = 0,1,\dots,2N, \quad j = 0,1,\dots,2M.$$

Следующая теорема является основным результатом первой главы.

Теорема 1 (А. Р. Нурбекян, А. А. Саакян [1]). *Пусть функция $f \in HBV(\mathbb{T}^2)$. Тогда в каждой точке $(x, y) \in \mathbb{T}^2$, где существуют пределы по квадрантам $f(x \pm 0, y \pm 0)$, имеет место следующее равнство*

$$\lim_{n,m\to\infty} I_{N,m}^{n,m}(f, x, y) = \frac{1}{4} \sum f(x \pm 0, y \pm 0) \quad (N > n,\ M > m),$$

при условии, что отношения N/n и M/m равномерно ограничены. Если f непрырывна на открытом множестве $E \in T^2$, то сходимость равномерна на любом компакте $K \subset E$.

Важную роль в доказательстве теоремы 1 играет следующая лемма, которая, в частности, доказывает, что для тригонометрических интерполяционных полиномов функций ограниченной гармонической вариации имеет место принцип локализации.

Лемма (А. Р. Нурбекян, А. А. Саакян [1]). *Для произвольной функции $f \in HBV(\mathbb{T}^2)$ и $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение:*

$$I_{N,M}^{n,m}(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \cdot \frac{\sin ms}{s} d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t) d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s) + o(1),$$

где $o(1)$ стремится к 0 равномерно на квадрате $\mathbb{T}^2$, когда n, $m \to \infty$ так, что отношения N/n и M/m равуомерно ограничены.

Во второй главе диссертации рассматриваются вопросы справедливости аналога теоремы Бора для двойных тригонометрических интерполяционных полиномов и аналога признака Салема для двумерных тригонометрических интерполяционных полиномов.

Пусть $C(\mathbb{T})$ $(C(\mathbb{T}^2))$ – пространство непрерывных 2π-периодических (по каждой переменной) функций на $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^2)$. Для одномерных тригонометрических рядов хорошо известна следующая теорема Г. Бора.

Теорема (Г. Бор [4]). *Для произвольной функции $f \in C(\mathbb{T})$ существует гомеоморфизм $\tau(t)$ отрезка $\mathbb{T}$, т.е. непрерывная функция с условием*

$$-\pi = \tau(-\pi) < \tau(t_1) < \tau(t_2) < \tau(\pi) = \pi, \quad -\pi < t_1 < t_2 < \pi,$$

такая, что ряд Фурье суперпозиции $f \circ \tau(t)$ равномерно сходится на $\mathbb{T}$.

Разные усиления теоремы Бора были получены в [14] и [19] . В частности, Ж.-П. Каханом и И. Кацнельсоном в [14] было доказано, что гомеоморфизм τ можно построить единым для заданного компакта в $C(\mathbb{T})$.

Теорема (Ж.-П. Кахан, И. Кацнельсон [14]). *Пусть*

$$\omega \in C(0, \infty), \quad 0 = \omega(0) < \omega(\delta_1) < \omega(\delta_2) < \infty, \quad 0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty. \tag{4}$$

Существует гомеоморфизм τ отрезка $\mathbb{T}$ такой, что для произвольной функции $f \in C(\mathbb{T})$ с модулем непрерывности $\omega(\delta, f) < \omega(\delta)$ ряд Фурье суперпозиции $f \circ \tau(t)$ равномерно сходится на $\mathbb{T}$.

Теорема Кахана и Кацнельсона была обобщена А. Саакяном в [21] на многомерный случай. Из этого результата, в частности, следует справедливость теоремы Бора для кратных рядов Фурье. Для $F \in C(\mathbb{T}^2)$ обозначим

$$\omega(\delta, F) = \sup_{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \leq \delta^2} |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)|, \quad 0 < \delta < \infty.$$

Теорема (А. А. Саакян [21]). *Для произвольной функции $\omega(\delta)$ с условиями (4) существует гомеоморфизм τ отрезка $\mathbb{T}$ такой, что ряд Фурье произвольной функции F вида*

$$F(x, y) = f(\tau(x), \tau(y)), \quad f \in C(\mathbb{T}^2), \quad \omega(\delta, f) \leq \omega(\delta) \tag{5}$$

равномерно сходится по Прингсхейму к функции F на квадрате $\mathbb{T}^2$. Более того, для произвольного ϵ существует номер N такой, что при $n, m > N$ имеет место неравенство

$$\|S_{n,m}(F) - F\|_C \leq \epsilon$$

для всех функции F вида (5).

Одним из основных результатов главы 2 является аналог этой теоремы для двойных тригонометрических интерполяционных полиномов.

Теорема 2 (А. Р. Нурбекян [2]). *Для произвольной функции $\omega(\delta)$ вида (4) существует гомеоморфизм τ отрезка $\mathbb{T}$, такой, что для произвольной функции F вида (5) интерполяционные полиномы $I_{N,M}^{n,m}(F)$ сходятся к функции F равномерно на $\mathbb{T}^2$, когда $n, m \to \infty,\ n \leq N,\ m \leq M$. Более того, для произвольного $\epsilon > 0$ существует число K, такое что*

$$\|I_{N,M}^{n,m}(F) - F\|_C \leq \epsilon, \quad n, m > K$$

для любой функции F вида (5).

Для равномерной сходимости рядов Фурье хорошо известен признак Салема, для формулировки которой нам понадобятся обозначения:

$$\Delta_k^\delta(x, n) := \left(x + \delta \cdot \frac{2k-1}{n}\pi, x + \delta \cdot \frac{2k}{n}\pi\right), \qquad x \in \mathbb{T}, \quad k, n = 1, 2, \ldots, \quad \delta = \pm 1,$$

$$W_n^\delta(f, x) := \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{f\left(\Delta_k^\delta(x, n)\right)}{k}, \qquad x \in \mathbb{T}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \delta = \pm 1.$$

Теорема (Р. Салем [23]). *Пусть f – непрерывная 2π-периодическая функция. Если выражения*

$$W_n^\delta(f, x), \quad \delta = \pm 1$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$ равномерно на $\mathbb{T}$, то ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $\mathbb{T}$.

В двумерном случае аналог признака Салема был доказан Б. И. Голубовым в [11]. Во второй главе диссертации устанавливается признак Салема для тригонометрических интерполяционных полиномов в двумерном случае.

Для функции $F(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ и чисел $\delta_1,\ \delta_2=\pm1,\ n,m=1,2,\dots$ положим

$$W^{\delta_1,\delta_2}_{n,m}(F,x,y):=\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{F\left(\Delta_k^{\delta_1}(x,n),\Delta_j^{\delta_2}(y,m)\right)}{kj},$$

$$W_{n,m}(F):=\sup\left\{\left|W^{\delta_1,\delta_2}_{n,m}(F,x,y)\right|+\left|W^{\delta_1}_{n}(F(\cdot,y),x)\right|+\left|W^{\delta_2}_{m}(F(x,\cdot),y)\right|\right\},$$

где sup берется по $(x,y)\in\mathbb{T}^2,\ \delta_1,\delta_2=\pm1$. Справедлива следующая

Теорема 3 (А. Р. Нурбекян, [2]). *Пусть $F\in C(\mathbb{T}^2)$ и*

$$\lim_{n,m\to\infty}W_{n,m}(F)=0,$$

тогда интерполяционные полиномы $I^{N,M}_{n,m}(F)$ равномерно сходятся к F на $\mathbb{T}^2$, когда $n,m\to\infty,\ n\le N,\ m\le M$.

В главе 3 рассматриваются вопросы сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов в случае, когда размерность пространства $m>2$. А. Н. Бахвалов [2] показал, что в этом случае непрерывность функции и ограниченность ее гармонической вариаций недостаточны для сходимости рядов Фурье по Прингсхейму. Оказалось, что для сходимости рядов Фурь по Прингсхейму при $m>2$ важную роль играет непрерывность по Λ-вариации, введенная в одномерном случае Д. Ватерманом [24].

Приведем необходимые обозначения и определения. Пусть $I_k=(a_k,b_k)$ и f – функция на $\mathbb{R}^m$. При $m=1$ обозначим $f(I_1)=f(b_1)-f(a_1)$. Если для $m-1$ выражение $f(I_1,\dots,I_{m-1})$ уже определено, то положим

$$f(I_1,\dots,I_m)=f(I_1,\dots,I_{m-1},b_m)-f(I_1,\dots,I_{m-1},a_m).$$

Величину $f(I_1,\dots,I_m)$ будем называть смешанным приращением функции f на $I=I_1\times\ldots\times I_m$.

Если множество $\{1,\dots,m\}$ разбито на два непересекающихся множества α и β, то через $f(I_\alpha,x_\beta)$ будем обозначать смешанное приращение f как функции аргументов $x_i,\ i\in\alpha$, при фиксированных $x_j,\ j\in\beta$.

Определение (А.И. Саблин [22]). *Пусть $\Lambda_j=\{\lambda_k^j\}_{k=1}^\infty\in\mathbb{L}$, $j=1,\dots,m$. Тогда $(\Lambda_1,\dots\Lambda_m)$-вариацией функции $f(x_1,\dots,x_m)$ относительно переменных $x_1,\dots,x_m$ по параллелепипеду $\Delta_1\times\ldots\times\Delta_m$ называется велечина*

$$V_{\Lambda_1,\dots\Lambda_m}=\sup_{\{I^j_{k_j}\}\in\Omega(\Delta_j)}\sum_{k_1,\dots,k_m}\frac{|f(I^1_{k_1},\dots,I^m_{k_m})|}{\lambda^1_{k_1}\cdots\lambda^m_{k_m}}.$$

Пусть $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$ состоит из чисел $j_1 < \ldots < j_p$ и $\beta = \{1, \ldots, m\} \setminus \alpha$. Тогда через

$$V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; (\Delta_\alpha, x_\beta)) = V_{\Lambda_{j_1}, \ldots, \Lambda_{j_p}}^{x_\alpha}(f; (\Delta_\alpha, x_\beta))$$

обозначим $(\Lambda_{j_1}, \ldots, \Lambda_{j_p})$-вариацию f как функции переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$ по p-мерному параллелипеду $\Delta_\alpha = \Delta_{j_1} \times \cdots \times \Delta_{j_p}$ при фиксированных значениях $x_j,\ j \in \beta$.

$(\Lambda_{j_1}, \ldots, \Lambda_{j_p})$-вариацией функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ относительно переменных x_α по m-мерному параллелипипеду $\Delta_\alpha = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m$ называется велечина

$$V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; \Delta) = V_{\Lambda_{j_1}, \ldots, \Lambda_{j_p}}^{x_\alpha}(f; \Delta) = \sup_{x_\beta \in \Delta_\beta} V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; (\Delta_\alpha, x_\beta)).$$

Определение (А.И. Саблин [22]). *Полной $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$-вариацией функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ по параллелипипеду $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m$ называется величина*

$$V_{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m}(f, \Delta) = \sum_{\alpha \neq \emptyset} V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; \Delta).$$

Если полная вариация функции конечна, то говорят, что она являеься функцией ограниченной $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$-вариации, а класс таких функций обоз- начают через
$(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)BV(\Delta)$.

Если последовательности Λ_i совпадают и равны Λ, то для краткости будем писать $V_\Lambda^{x_\alpha}$, V_Λ и $\Lambda BV(\Delta)$. В частном случае, когда $\Lambda = \{n\}$, функции из $\Lambda BV(\Delta)$ называют функциями ограниченной гармонической вариации и пишут $HBV(\Delta)$, V_H и т.д.

Определение. *Скажем, что точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ является регулярной точкой функции f, если существуют и конечны 2^m предела*

$$f(x_1 \pm 0, \ldots, x_m \pm 0) = \lim_{t_1, \ldots, t_m \to +0} f(x_1 \pm t_1, \ldots, x_m \pm t_m),$$

для всевозможных комбинаций знаков.

Определение (А. Н. Бахвалов [2]). *Скажем, что функция f из класса $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)BV(\Delta)$ непрырывна по $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$-вариации и напишем $f \in C(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)V(\Delta)$, если для любого непустого $\alpha = \{j_1, \ldots, j_p\} \subset \{1, \ldots, m\}$ и любого $j_k \in \alpha$*

$$\lim_{n \to \infty} V_{\Lambda_{j_1}, \ldots, \Lambda_{j_{k-1}}, \Lambda_{j_k}^{(n)}, \Lambda_{j_{k+1}}, \ldots, \Lambda_{j_p}}^{x^\alpha}(f; \Delta) = 0$$

где $\Lambda_j^{(n)} = \{\lambda_{n+k}^j\}_{k=1}^\infty$.

Как мы отметили выше, в многомерном случае непрерывность функции и ограниченность ее гармонической вариации не гарантируют сходимость ряда Фурье. Следующая теорема дает важное условие при котором устанавливается сходимость рядов Фурье в многомерном случае.

Теорема (А. Н. Бахвалов [2]). *Пусть $f \in CHV(\mathbb{T}^m)$ – непрерывная 2π-периодическая по каждому аргументу функция. Тогда ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсхейму на $\mathbb{T}^m$.*

Более того, следующая теорема показывает, что класс CHV нельзя заменить на класс HBV.

Теорема (А. Н. Бахвалов [2]). *Пусть $m \geq 3$, и последовательности $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \cdots \lambda_k^m} < \infty.$$

Тогда в классе $(H, \Lambda^2, \ldots, \Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$ существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходятся по кубам в $\boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0)$.

Основными результатами последней главы диссертации являются аналоги последних двух теорем для тригонометрических интерполяционных полиномов.

Теорема 4 (А. Р. Нурбекян [3]). *Пусть f – 2π-периодическая по каждому переменному функция и $f \in CHV(\mathbb{T}^m)$. Тогда для любой регулярной точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{T}^m$,*

$$\lim_{n_1, \ldots, n_m \to \infty} I_{N_1, \ldots, N_m}^{n_1, \ldots, n_m}(f, \mathbf{x}) = \frac{1}{2^m} \sum f(x_1 \pm 0, \ldots, x_m \pm 0), \tag{6}$$

при условии, что отношения N_i/n_i равномерно ограничены ($n_i \leq N_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$).

Если, кроме того, функция f непрерывна в окрестности компакта $K \subset \mathbb{T}$, то (6) имеет место равномерно по $\mathbf{x} \in K$.

Теорема 5 (А. Р. Нурбекян [3]). *Пусть $m \geq 3$ и последовательности $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \cdots \lambda_k^m} < \infty.$$

Тогда в классе $(H, \Lambda^2, \ldots, \Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$ существует непрерывная функция, тригонометрические интерполяционные полиномы которой расходятся по кубам в $\boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0)$.

Литература

[1] A. Baernstein. *On the Fourier series of functions of bounded Φ-variation.* Studia Math., 42, N3, 1972, 243-248.

[2] A.Н. Бахвалов. *Непрерывность по Λ-вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье.* Математический Сборник, т. 193 (2002), N 12, стр. 3-20.

[3] Bakhvalov, A. N. Continuity in Λ-variation and the summation of multiple Fourier series by Cesàro methods. (Russian) Mat. Zametki 90(2011), No. 4, 483–500; translation in Math. Notes 90(2011), No. 3-4, 469–484.

[4] H. Bohr. *Uber einen Satz von J. Pal.* Ac. Sz., v. 7 (1935), 129-135.

[5] Chanturia, Z. A. The modulus of variation of a function and its application in the theory of Fourier series, *Soviet. Math. Dokl.* 15 (1974), 67-71.

[6] Dyachenko M. I, Two-dimensional Waterman classes and u -convergence of Fourier series (Russian).*Mat. Sb.* 190(1999), No. 7, 23–40; English transl.in *Sb. Math.* 190(1999), No. 7-8, 955–972.

[7] Dyachenko M. I., Waterman D. , Convergence of double Fourier series and W-classes, Trans. Amer. Math. Soc. 357(2005), 397-407.

[8] Goginava U., On the uniform convergence of multiple trigonometric Fourier series. *East J. Approx.* 5(1999), No. 3, 253-266.

[9] Goginava U., Sahakian A, On the convergence of Fourier series of functions of bounded partial generalized variation, East J. Approx. 16(2010), No. 2, 153–165.

[10] Goginava U., Sahakian A, On the convergence of multiple Fourier series of functions of bounded partial generalized variation, Anal. Math. 39(2013), No. 1, 45–56.

[11] B. I. Golubov. *Double Fourier series, and functions of bounded variation* , Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1972, no. 12, 55–68.

[12] C. Goffman. *Everywhere convergence of Fouries series.* Indiana Univ. Math. J. 20, N2, 1970, 107-112.

[13] G. H. Hardy, On double Fourier series and especially which represent the double zeta function with real and incommensurable parameters. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 37(1906), 53-79.

[14] J.-P. Kahane, Y. Katznelson. *Series de Fourier des fonctions bornees*, Studies in Pure Mathematics (1983), 395-410

[15] A.A. Кельзон, *О тригонометрическом интерполировании функций Λ-ограниченной вариации.* ДАН СССР, т. 286, N. 5, стр. 1062-1064.

[16] A.A. Кельзон, *О функциях* (m, Φ)*-ограниченной вариации.* ДАН СССР, 1991, т. 321, N. 4, стр. 670-672.

[17] J. Marcinkiewicz. *On a klass of funktions and their Fouries series.* Compt. Rend. Soc. Sci. Varsowie, 26, 1934, 71-77

[18] K. И. Осколков. *Обобщенная вариация, индикатриса Банаха и равномерная сходимо ть рядов Фурье.* Мат. Заметки, 12, N 3, 1972, 313-324.

[19] A. A. Саакян. *О свойствах коэффициентов Фурье суперпозиции функций.* Докл. АН СССР, Т. 248, № 2, 1979, 302-306.

[20] A. A. Саакян. *О сходимостй двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации*, Изв. АН АрмССР. Матем. 1987. Т. 22. №6, С. 517-529.

[21] A. A. Sahakian. *On Bohr's theorem for multiple Fourier series*, Mat. Zametki, 64:6 (1998), 913-924.

[22] A. И. Саблин. *Λ-вариация и ряды Фурье.* Изв. вузов. Сер. матем. т. 28 (1993), N 3, стр. 3-20.

[23] R. Salem *Essais sur les series trigonometriques.* Actualite Sci. et industr., 862, 1940, Paris.

[24] D. Waterman. *On the summability of Fouries series of functions of Λ-bounded variation.* Studia Math. v. 55 (1976), p. 87-95.

[25] Waterman D., *On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation.* Studia Math., 44, 1(1972), 107-117.

[26] D. Waterman, H. Xing. *The convergence of partial sums of interpolating polynomials*, J. Math. Anal. Appl. 333 (2007) 543-555.

[27] N. Wiener. *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients.* Massachusetts J. Math., 3. 1924, 72-94

[28] L. C. Young. *General inequalities for Stiltjes integrals and the convergence of Fouries series.* Mat. Ann.,115, 1938, 581-612.

[29] A. Зигмунд. *Тригонометрические ряды, ч.1.* Москва, Мир, 1965.

[30] A. Зигмунд. *Тригонометрические ряды, ч.2.* Москва, Мир, 1965.

Работы автора по теме диссертации

[1] А. Р. Нурбекян, А. А. Саакян. *Сходимость двумерных тригонометрических интерполяционных полиномов функций ограниченной гармонической вариации.* Изв. НАН Армении. Математика, т. 49 (2014), № 4, стр. 35-46.

[2] A. R. Nurbekyan. *Bohr's theorem for double trigonometric interpolation polynomials.* Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci. 2014, No. 2(234), 13-23 (2014).

[3] А. Р. Нурбекян. *Сходимость многомерных интерполяционных полиномов функций ограниченной гармонической вариации.* Изв. НАН Армении. Математика, т. 50 (2015), № 2, стр. 23-36.

Summary

Convergence properties of partial sums of trigonometric interpolation polynomials are considered in the thesis. Main results of the thesis are the following:

- Partial sums of trigonometric interpolation polynomials of a function of two variables with bounded harmonic variation converge at any regular point $(x,y) \in \mathbb{T}^2$, where by quadrants limits $f(x\pm 0, y\pm 0)$ exist

$$\lim_{n,m\to\infty} I_{N,M}^{n,m}(f,x,y) = \frac{1}{4}\sum f(x\pm 0, y\pm 0) \quad (N>n,\ M>m),$$

  if ratios N/n and M/m are uniformly bounded. If f is continuous on an open set $E \in T^2$, then the convergence is uniform on any compact set $K \subset E$.

- Localization principle for trigonometric interpolation polynomials of functions with bounded harmonic variation. For any function $f \in HBV(\mathbb{T}^2)$ and $\varepsilon > 0$ the following is true:

$$I_{N,M}^{n,m}(f,x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t,y+s)\frac{\sin nt}{t}\cdot\frac{\sin ms}{s}d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t)d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s) + o(1),$$

  where $o(1)$ uniformly converges to 0 on the quadrant of $\mathbb{T}^2$, when n, $m \to \infty$ if the ratios N/n and M/m are uniformly bounded.

- For any increasing function $\omega \in C(0,\infty)$ with $\omega(0) = 0$ there exists a homeomorphism τ of the closed interval $\mathbb{T}$, such that for any function F of a form of

$$F(x,y) = f(\tau(x),\tau(y)), \quad f \in C(T^2), \quad \omega(\delta, f) \le \omega(\delta),$$

  interpolation polynomials $I_{n,m}^{N,M}(F)$ uniformly converge to F on $\mathbb{T}^2$, when $n,m\to\infty,\ n\le N,\ m\le M$.

- Analogue of Salem's principle about uniform convergence of two dimensional trigonometric interpolation polynomials.

- Partial sums of trigonometric interpolation polynomials of a function of three or more variables, which is continuous in harmonic variation converge at any regular point $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{T}^m$:

$$\lim_{n_1,\ldots,n_m\to\infty} I_{n_1,\ldots,n_m}^{N_1,\ldots,N_m}(f,\mathbf{x}) = \frac{1}{2^m}\sum f(x_1\pm 0,\ldots,x_m\pm 0), \qquad (1)$$

if ratios N_i/n_i are uniformly bounded. Moreover, if the function f is continuous on the neighborhood of a compact set K, then (1) takes place uniformly on $\mathbf{x} \in K$.

- In the previous point the condition of continuity in harmonic variation can not be replaced by condition of bounded harmonic variation i.e. in the class of $HBV(\mathbb{T}^m)$ there exists a continuous function trigonometric interpolation polynomials of which diverge by cubes at the point $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Ամփոփագիր

Ատենախոսությունում դիտարկվել են եռանկյունաչափական միջարկող բազմանդամների զուգամիտության որոշ հարցեր: Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

- Ապացուցվել է, որ երկու փոփոխականի սահմանափակ հարմոնիկ վարիացիայի ֆունկցիայի եռանկյունաչափական միջարկող բազմանդամների մասնակի գումարները զուգամիտում են յուրաքանչյուր ռեգուլյար (x, y) կետում (որտեղ գոյություն ունեն ըստ քառորդների $f(x \pm 0, y \pm 0)$ սահմանները).

$$\lim_{n,m\to\infty} I_{N,M}^{n,m}(f, x, y) = \frac{1}{4} \sum f(x \pm 0, y \pm 0) \quad (N > n,\ M > m),$$

եթե N/n և M/m հարաբերությունները հավասարաչափ սահմանափակ են: Եթե f-ն անընդհատ է $E \in T^2$ բաց բազմության վրա, ապա զուգամիտությունը հավասարաչափ է կամայական $K \subset E$ կոմպակտի վրա:

- Ապացուցվել է լոկալիզացիայի սկզբունքը սահմանափակ հարմոնիկ վարիացիայի ֆունկցիաների եռանկյունաչափական միջարկող բազմանդամների համար: Կամայական $f \in HBV(\mathbb{T}^2)$ և $\varepsilon > 0$ համար ճիշտ է հետևյալը.

$$I_{N,M}^{n,m}(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t, y+s) \frac{\sin nt}{t} \cdot \frac{\sin ms}{s} d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t) d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s) + o(1),$$

որտեղ $o(1)$ հավասարաչափ ձգտում է 0-ի $\mathbb{T}^2$ բազմության վրա, երբ n, $m \to \infty$, եթե N/n և M/m հարաբերությունները հավասարաչափ սահմանափակ են:

- Ապացուցվել է, որ կամայական $\omega \in C(0,\infty)$, $\quad \omega(0) = 0$ աճող ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\mathbb{T}$ հատվածի τ հոմեոմորֆիզմ այնպիսին, որ

  $$F(x,y) = f(\tau(x),\tau(y)), \quad f \in C(T^2), \quad \omega(\delta,f) \leq \omega(\delta),$$

  տեսքի կամայական F ֆունկցիայի համար $I_{n,m}^{N,M}(F)$ միջարկող բազմանդամները հավասարաչափ զուգամիտում են F-ին $\mathbb{T}^2$ բազմության վրա, երբ $n,m \to \infty,\ n \leq N,\ m \leq M$:

- Ապացուցվել է Սալեմի հայտանիշի անալոգը երկչափ եռանկյունաչափական միջարկող բազմանդամների հավասարաչափ զուգամիտության վերաբերյալ:

- Երեք և ավելի չափողականության դեպքում ապացուցվել է, որ ըստ հարմոնիկ վարիացիայի անընդհատ ֆունկցիայի եռանկյունաչափական միջարկող բազմանդամների մասնակի գումարները զուգամիտում են յուրաքանչյուր ռեգուլյար $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{T}^m$ կետում.

  $$\lim_{n_1,\ldots,n_m \to \infty} I_{n_1,\ldots,n_m}^{N_1,\ldots,N_m}(f,\mathbf{x}) = \frac{1}{2^m}\sum f(x_1 \pm 0,\ldots,x_m \pm 0), \qquad (1)$$

  եթե N_i/n_i հարաբերությունները հավասարաչափ սահմանափակ են: Ավելին, եթե f ֆունկցիան անընդհատ է K կոմպակտի շրջակայքում, ապա (1) տեղի ունի հավասարաչափ $\mathbf{x} \in K$-ի վրա:

- Ապացուցվել է, որ նախորդ կետի արդյունքը վերջնական է. ըստ հարմոնիկ վարիացիայի անընդհատության պայմանը չի կարելի փոխարինել սահմանափակ հարմոնիկ վարիացիա ունենալու պայմանով: Այսինքն՝ $HBV(\mathbb{T}^m)$ դասում գոյություն ունի անընդհատ ֆունկցիա, որի եռանկյունաչափական միջարկող բազմանդամները ըստ խորանարդների տարամիտում են $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)$ կետում: