ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Արթուր Խաչիկի Կոբելյան

ՀԱԱՐԻ ԴԱՍԱԿԱՆ ԵՎ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐ

Ա.01.01 - ”Մաթեմատիկական անալիզ”մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի
հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2014

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Артур Хачикович Кобелян

НЕЛИНЕЙНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ПО ОБЩЕЙ И КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук по специальности
А.01.01 – "Математический анализ"

Ереван 2014

Ատենախոսության թեման հաստատված է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Մ. Գ. Գրիգորյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Հ. Ա. Հակոբյան
- ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու
Լ. Ն. Գալոյան

Առաջատար կազմակերպություն - Նոր տեխնոլոգիաների ինստիտուտ, Թբիլիսի, Վրաստան

Պաշտպանությունը կկայանա 2014թ. մայիսի 27-ին ժամը 15.00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանին կից 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով. 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան փ. 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2014թ. Ապրիլի 23-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտ. քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском Государственном Университете.

Научный руководитель - доктор физ.-мат. наук, профессор
М. Г. Григорян

Официальные оппоненты - доктор физ.-мат. наук, профессор
А. А. Акопян
- кандидат физ.-мат. наук
Л. Н. Галоян

Ведущая организация - Институт современных технологии, Тбилиси, Грузия

Защита диссертации состоится 27-го мая 2014 года в 15.00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском Государственном Университете по адресу: 0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 23 апреля 2014г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Проблемы, связанные с безусловной и абсолютной сходимостью рядов Фурье по классическим системам, всегда были в центре внимания известных математиков. Безусловной и абсолютной сходимости рядов посвящено много работ известных математиков (Г.Харди, Дж. Литлвуд, В. Орлич, Ю. Марцинкевич, Р. Салем, С. Бочкарев, П. Ульянов, Е. Никишин и другие). В последнее время активно ведутся исследования по вопросам сходимости жадного алгоритма функций из разных функциональных пространств по классическим системам. В этом направлении интересные результаты получены Р.Девором, В. Темляковым, С. Конягиным, П.Войтащчиком, Т. Кернером и другими авторами. Диссертационная работа посвящена исследованию сходимости жадного алгоритма после исправления функции и абсолютной сходимости рядов Фурье по системам Хаара и Франклина.

Цель работы.

1) Исследование сходимости жадного алгоритма в L_1 после исправления функций на универсальном множестве малой меры.

2) Исправление функций на множестве малой меры с целью улучшения свойств коэффициентов Фурье–Хаара.

3) Построение универсальных рядов по некоторым подсистемам общей системы Хаара.

4) Исправление функций на множестве малой меры с целью получения абсолютно сходящегося ряда Фурье (п.в., равномерно).

4) Установление существования функции с неустранимой абсолютной особенностью.

Методы исследования. Применяются методы теории функций и функционального анализа.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Для системы Хаара (соответственно, для системы Франклина) построена непрерывная функция, обладающая неустранимой абсолютной расходимостью. Доказана возможность исправления любой интегрируемой функции на универсальном множестве таким образом, что ряд Фурье–Франклина исправленной функции п.в. абсолютно сходится.

Практическая и теоретическая ценность. Тема предлагаемой работы представляет теоретический интерес. Результаты и методы работы могут найти применение при изучении аналогичных вопросов для других базисов.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на международной конференции "Harmonic analysis and approximations, IV" (Цахкадзор, Армения 2008), "Harmonic analysis and approximations, V" (Цахкадзор, Армения 2011), "Second International Conference Mathematics in Armenia Advances and Perspectives (Армения 2013) на семинаре кафедры высшей математики физического факультета ЕГУ (руководитель М. Г. Григорян), на семинаре кафедры математического анализа математического факультета ЕГУ (руководители Г. Г. Геворкян и А. А. Саакян).

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 статьях, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 79 страницах, состоит из введения, 2 глав и списка цитированной литературы, включающего 75 наименований.

Содержание работы

Напомним определение общей системы Хаара, нормированной в L^1 (см. напр.[1],[2]).

Положим $t_0 = 0, t_1 = 1, A_1^{(1)} = \Delta_1 = (0,1)$, $h_1(x) = \chi_{(0,1)}$, где $\chi(E)$ – характеристическая функция множества E.

Далее, выбрав любую точку $t_2 \in (0,1) \setminus \{t_0, t_1\}$, положим $A_1^{(2)} = (0, t_2), A_2^{(2)} = (t_2, 1)$, $\Delta_2 = (0,1)$ $\Delta_2^+ = (0, t_2)$, $\Delta_2^- = (t_2, 1)$. Функция

$h_2(x)$ определяется следующим образом

$$h_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu(\Delta_2^+)} \ , & \text{при } x = 0, \\ \frac{1}{2\mu(\Delta_2^+)} \ , & \text{при } x \in \Delta_2^+, \\ \frac{\mu(\Delta_2^-)-\mu(\Delta_2^+)}{2\mu(\Delta_2^+)\mu(\Delta_2^-))}, & \text{при } x = t_2, \\ \frac{-1}{2\mu(\Delta_2^-)} \ , & \text{при } x \in \Delta_2^-, \\ \frac{-1}{2\mu(\Delta_2^-)} \ , & \text{при } x = 1, \end{cases}$$

где $\mu(A)$ – лебегова мера множества A.

Пусть точки $t_0, t_1, ..., t_n$ уже выбраны. Обозначим через $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, ..., A_n^{(n)}$ интервалы, полученные от разделения отрезка [0,1] точками $\{t_k\}_{k=1}^n$. Возьмем любую точку t_{n+1} из $(0,1) \setminus \{t_0, t_1, ...t_n\}$, тогда t_{n+1} будет принадлежать некоторому $A_k^{(n)} = (a, b)$. Положим $\Delta_{n+1} = (a, b)$, $\Delta_{n+1}^+ = (a, t_{n+1})$, $\Delta_{n+1}^- = (t_{n+1}, b)$ и

$$h_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\mu(\Delta_{n+1}^+)} \ , & \text{при } x = a, \\ \frac{1}{2\mu(\Delta_{n+1}^+)} \ , & \text{при } x \in \Delta_{n+1}^+, \\ \frac{\mu(\Delta_{n+1}^-)-\mu(\Delta_{n+1}^+)}{2\mu(\Delta_{n+1}^+)\mu(\Delta_{n+1}^-)} \ , & \text{при } x = t_{n+1}, \\ \frac{-1}{2\mu(\Delta_{n+1}^-)} \ , & \text{при } x \in \Delta_{n+1}^-, \\ \frac{-1}{4\mu(\Delta_{n+1}^-)} \ , & \text{при } x = b, \\ 0 \ , & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Значения функции в точках $\{0, 1\}$ определяются как односторонний предел в этих точках (соответственно правый и левый). Система точек $\mathcal{T} = \{t_k\}_{k=0}^\infty$ предполагается произвольной, всюду плотной на [0,1], иными словами, имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{1\le k\le n} \mu(A_k^{(n)}) = 0.$$

Система функций $\mathcal{H}_\mathcal{T}^1 = \{h_n\}_{n=1}^\infty$ называется общей системой Хаара.

Из определения ясно, что общая система Хаара нормирована в $L^1(0,1)$. В дальнейшем будет рассмотрена также общая система Хаара нормированная в $L^p(0,1)$ $(p \geq 1)$, т.е. система функции $H^p_{\mathcal{T}} = \{h^p_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{h_n}{||h_n||_{L^p}}\}_{n=1}^{\infty}$.

Если в определении общей системы Хаара в качестве точек деления взять систему $\mathcal{T} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, ...\}$, то полученная система функций будет совпадать с классической системой Хаара. В дальнейшем классическая система Хаара, нормированная в $L^p(0,1)$, будет обозначаться через $\mathbf{X}^p = \{\chi^p_n\}_{n=0}^{\infty}$. Отметим, что общая система Хаара является базисом во всех $L_p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$ и безусловным базисом в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

Коэффициенты Фурье-Хаара $c_n(f, \mathcal{H}^p_{\mathcal{T}})$ суммируемой функции f определяются следующим образом:

$$c_k(f, \mathcal{H}^p_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{||h_k||_{L^p}} \int_0^1 f(t) h_k(t) dt, \quad k = 0, 1, ..., \ p \geq 1.$$

Множество номеров ненулевых коэффициентов Фурье–Хаара функции f называют спектром этой функции и обозначают следующим образом:

$$spec(f) = \{n, c_n(f) \neq 0\}$$

Пусть $L^{\infty}_{[0,1]}$ – класс ограниченных измеримых функций, определенных на $[0,1]$, и пусть

$$||f(x)||_{L^{\infty}} = \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x)|\}.$$

Положим

$$||f||_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где E – некоторое измеримое подмножество интервала $(0,1)$ (в случае когда $E = (0,1)$, будем просто писать $||f||_{L^p}$).

Обозначим через $H^p_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}) = \{h^p_n\}_{n \in \mathcal{S}} = \{h^p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ подсистемы общей системы Хаара, удовлетворяющие условию

$$\mu \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \Delta_{n_k} \right) = 1 \ . \tag{1.2}$$

В первой главе рассматриваются поведение коэффициентов Фурье–Хаара и сходимость(в метрике $L^1[0,1]$ и по равномерной метрике) жадного алгоритма (гриди алгоритма) интегрируемых функций по общей системе Хаара, после исправления этих функции на множествах малой меры. Отметим, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Лузину (см.[3]). Им в 1912 г. был получен знаменитый результат, согласно которому любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в непрерывную функцию. В 1939г. Д.Е.Меньшов доказал следующую фундаментальную теорему (см.[4])

Теорема (Усиленное С–свойство). Пусть $f(x)$ – измеримая функция, конечная почти всюду на $[0,2\pi]$. Для любого $\epsilon > 0$ можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E, $\mu(E) > 2\pi - \epsilon$, и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0,2\pi]$.

1991г. М. Григоряном был получен следующий результат (см.[5]):

Теорема (Усиленное L^1–свойство). Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество E с мерой $\mu(E) > 1-\varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[0,2\pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0,2\pi]$, совпадающую с $f(x)$ на E и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1[0,2\pi]$ норме.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис в банаховом пространстве X . Для каждого элемента $f \in X$ будем иметь разложение

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f,\psi)\psi_k \ .$$

Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ есть некоторое бесконечное подмножество натуральных чисел. Положим $\psi_S = \{\psi_k\}_{k\in\mathcal{S}}$. Пусть $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая перестановка чисел множества $\mathcal{S}$, для которой

$$||c_{\sigma(k)}(f,\psi)\psi_{\sigma(k)}||_{\mathcal{X}} \geq ||c_{\sigma(k+1)}(f,\psi)\psi_{\sigma(k+1)}||_{\mathcal{X}}, \ k = 1,2,... \qquad (1.3)$$

Множество всех таких перестановок обозначим через $\mathbf{D}(f, \psi_{\mathcal{S}})$. Когда в (1.3) имеют место строгие неравенства, то $\mathbf{D}(f, \psi_{\mathcal{S}})$ содержит только один элемент. Для каждого элемента $f \in X$ и для любой перестановки $\sigma = \{\sigma(k)\} \in \mathbf{D}(f, \psi_{\mathcal{S}})$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f, \psi_{\mathcal{S}}, \sigma)\}_{m=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$G_m(f) = G_m(f, \psi_{\mathcal{S}}) = G_m(f, \psi_{\mathcal{S}}, \sigma) = \sum_{k=1}^{m} c_{\sigma(k)}(f) \psi_{\sigma(k)} \ .$$

При $\mathcal{S} = \mathbb{N}$ метод приближения элемента $f \in X$ последовательностью $G_m(f, \psi)$ называется жадным алгоритмом по системе ψ (подробно о жадном алгоритме см. книгу [6]). Говорят, что жадный алгоритм (гриди алгоритм) элемента f по системе ψ сходится в X, если для некоторого $\sigma \in \mathbf{D}(f, \psi)$ имеет место соотношение

$$\lim_{m \to \infty} ||G_m(f, \psi, \sigma) - f||_X = 0 \ .$$

Вопросам сходимости жадного алгоритма по классическим системам посвящено много работ (см. [7]-[14]).

Приведем те результаты, которые непосредственно относятся к диссертационной работе. В работе [12] доказана следующая теорема:

Теорема (П. Войтащчик). Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{l=1}^{\infty}$ – нормированный базис в банаховом пространстве X. Для того, чтобы жадный алгоритм для всех элементов из X сходился в X, необходимо и достаточно, чтобы существовало $C > 0$ такое, что для каждого элемента $f \in X$ и для любых $\sigma \in \mathbf{D}$ и $m \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство

$$||G_m(f, \psi, \sigma)||_X \leq C ||f||_X \ .$$

В работе Дилворта, Кутцаровой и Войтащика (см. [13]) установлено существование интегрируемой функции, жадный алгоритм которой по классической системе Хаара расходится в $L^1(0,1)$. Этот результат был усилен Григоряном и Гогяном в следующем направлении (см. [14]).

Теорема. Для любого множества $E \subset [0,1]$ с мерой $0 < m(E) \leq 1$ существуют функция $f \in L^1(0,1)$ и перестановка $\varrho \in \mathbf{D}(f, \chi)$ такие, что последовательность операторов $G_m(f, \chi, \varrho)$ по классической системе

Хаара от этой функции удовлетворяет соотношению

$$\limsup_{m\to\infty} ||G_m(f,\chi,\varrho)||_{L^1(E)} = +\infty.$$

Возникает естественный вопрос: существует ли измеримое множества e сколь угодно малой меры такое, что при некотором положительном C, после изменения значений любой функции $f \in L^1(0,1)$ на e, операторы $G_m(\widetilde{f},\chi,\varrho)$ от вновь полученной функции $\widetilde{f} \in L^1(0,1)$ удовлетворяли бы условиям

$$||G_m(\widetilde{f},\chi,\sigma)||_{L^1} \le C||f||_{L^1}, \quad m \ge 1, \varrho \in \mathbf{D}(\widetilde{f},\chi).$$

В параграфе 1.3 мы покажем, что этот вопрос имеет положительный ответ. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть $H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}) = \{h^1_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – любая подсистема общей системы Хаара с (1.2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset [0,1]$ с мерой $\mu(E_\varepsilon) > 1-\varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\widetilde{f} \in L^1(0,1)$ совпадающую с f на E_ε, такую что

1. $||G_m(\widetilde{f}, H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}))||_{L^1} \le 4||\widetilde{f}||_{L^1} \le 12||f||_{L^1}$,
2. $\mathbf{D}(\widetilde{f}, H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}))$ содержит только один элемент $\{\sigma(k)\}$,

   который является перестановкой всех чисел $\mathcal{S}$,
3. $\lim_{m\to\infty} ||G_m(\widetilde{f}, H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S})) - \widetilde{f}||_{L^1} = 0.$

Отметим, что в этой теореме из пункта 1 не следует пункт 3 и обратно (как в теореме Войтащчика).

Отметим также, что этот результат для некоторых подсистем классической системы Хаара был доказан Григоряном и Гогяном в работе [14].

В первой главе доказывается также, что по любой подсистеме обобщенной системы Хаара с (1.2), можно построить ряд, который будет универсальным в $L^1(E_\varepsilon)$ (где E_ε – измеримое множество с $\mu(E_\varepsilon) > 1-\varepsilon$) относительно подрядов. Точнее, верна следующая

Теорема 1.2. Для любой подсистемы $H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}) = \{h^1_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ общей системы Хаара с (1.2) и для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество $E_\varepsilon \subset [0,1]$ с мерой $\mu(E_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ и ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k, \text{ с } \quad b_k \searrow 0 \text{ при } k \to \infty,$$

такие, что для каждой $f \in L^1(E_\varepsilon)$ существуют числа $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, ($\delta_k \in \{0,1\}$), для которых ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k b_k \varphi_k$$

сходится к f по норме $L^1(E_\varepsilon)$.

В работе К. Навасардяна и А. Степанян [15] доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ п.в. выполняются соотношения

$$a_n \chi_n(x) \to 0, \text{ и } \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x) = \infty,$$

где $\{\chi_n\}$ – классическая система Хаара, нормированная в $L^1(0,1)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1], \mu(E) > 1 - \varepsilon$, такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существуют $g \in L^1(0,1)$ и числа $\delta_n = 0$ или 1 такие, что $g(x) = f(x), x \in E$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n a_n \chi_n(x)$ сходится к функции g в метрике $L^1(0,1)$.

В работе [16] Григоряном и Гогяном получен следующий результат.

Теорема. Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\mu(E) > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ существуют функция $\widetilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающая с f на E, и перестановка $\sigma(m)$ членов разложения $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\widetilde{f}) \chi_n$ функции $\widetilde{f}$ по классической системе Хаара, нормированной в $L^2[0,1]$ такие, что

1. $\{c_n(\widetilde{f})\} \in l^q$, при $q > 2$,
2. $c_{\sigma(m)}(\widetilde{f}) > c_{\sigma(m+1)}(\widetilde{f})$ для всех $m = 1, 2, ...$,
3. $||\sum_{k=1}^{m} c_{\sigma(m)}(\widetilde{f})\chi_{\sigma(k)}||_{L^1} \leq 4||\widetilde{f}||_{L^1} \leq 12||f||_{L^1}$
4. $\lim_{m\to\infty} ||\sum_{k=1}^{m} c_{\sigma(k)}(\widetilde{f})\chi_{\sigma(k)} - \widetilde{f}||_{L^1} = 0.$

В параграфе 1.4 изучается также поведение коэффициентов Фурье–Хаара по подсистемам классической системы Хаара вида (1.2) для функций класса $L^p(0,1)$ $p > 2$. Верна

Теорема 1.3. Пусть даны любая подсистема $\mathbf{X}^2_{\mathcal{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ классической системы Хаара с (1.2) и число $\varepsilon > 0$. Тогда для любой измеримой, почти везде конечной функции f существует функция $\widetilde{f} \in L^p(0,1)$ с $\mu(\{x : f(x) \neq \widetilde{f}(x)\}) < \varepsilon, spec(\widetilde{f}) \subset \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что

$$\{||c_k(\widetilde{f})\varphi_k||_p : k \in spec(\widetilde{f})\} \searrow 0,$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\widetilde{f})\varphi_k(x)| < \infty \text{ равномерно в } [0,1],$$

где $\{c_k(\widetilde{f})\}$ – коэффициенты Фурье–Хаара функции $\widetilde{f}$.

В параграфе 1.4 доказываются следующая теорема:

Теорема 1.4. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любой измеримой, почти везде конечной функции f, определенной на [0,1], существует функция $\widetilde{f} \in L^{\infty}_{[0,1]}$ с $\mu(\{x \in [0,1]; \widetilde{f}(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$ такая, что последовательность $\{||c_n(\widetilde{f})\chi_n||_{L^\infty}$, $n \in spec(\widetilde{f})\}$ монотонно убывает и гриди алгоритм функции $\widetilde{f}(x)$ по классической системе Хаара, нормированной в $L^2[0,1]$, равномерно сходится на [0,1].

В связи с Теоремой 1.4, подчеркнем, что гриди алгоритм функции $f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}}\chi_{2^{k+1}-1}(x)$ по системе Хаара не сходится равномерно на [0,1], и

$$\lim_{n\to\infty, n\in spec(f)} ||c_n(f_0)h_n||_{\infty} = 1.$$

Подчеркнем также, что в Теореме 1.4 ненулевые коэффициенты Фурье–Хаара функции $\widetilde{f}(x)$ монотонно убывают (более того, $\{c_n(g), n \in spec(g)\} \searrow 0$ и $\sqrt{n}\, c_n(g) \to 0$, когда $n \to \infty$).

Во второй главе рассматриваются вопросы безусловной и абсолютной сходимости рядов по системам Хаара и Франклина.

Напомним определение классической системы Франклина. Пусть $\pi_1 = \{0, 1\}$ и при $n = 2^k + i, k = 0, 1, .., i = 1, 2, ..., 2^k$

$$\pi_n = \{t_s\}_{s=0}^{n}, \quad \text{где } t_s = t_s(n) = \begin{cases} \frac{s}{2^{k+1}}, & \text{если } s = 0, 1, ..., 2i; \\ \frac{s-i}{2^k}, & \text{если } s = 2i+1, ..., n. \end{cases}$$

Через S_{π_n} обозначим пространство функций непрерывных на [0,1] и кусочно–линейных с узлами из π_n. Отметим что π_n получается добавлением в π_{n-1} точки $z_n = t_{2i-1}(n) = \frac{2i-1}{2^{k+1}}$.

Система функций Франклина $F = \{f_n(x)\}$ определяется на [0,1] следующим образом:

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1), \quad \text{для } x \in [0, 1]$$

и при $n \geq 2$ функция $f_n(x) \in S_{\pi_n}$, $||f_n||_{L^2} = 1$, $f_n(t_{2i-1}(n)) > 0$, f_n ортогонально ко всем функциям пространство $S_{\pi_{n-1}}$.

Система Франклина $\{f_n(x)\}$ является базисом пространства $C[0, 1]$. Ее изучению было посвящено много работ (см. [17]-[19]).

Определение. Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, $b_n(x) \in L^p(E), 0 \leq p \leq \infty$, называется безусловно сходящимся к $f(x) \in L^p(E)$(почти всюду на E, по норме $L^p(E)$, равномерно) если для любой перестановки $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)}(x)$ сходится к $f(x)$ (почти всюду , по норме $L^p(0, 1)$, равномерно на E).

Определение. Базис $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ банахова пространства B называется безусловным, если для любой перестановки $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$натуральных чисел система $\{f_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ также является базисом в B.

Определение. Система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется безусловной системой представления функций класса $L^p(E), 0 \leq p \leq \infty, (C(E))$, если для каждой функции $f(x) \in L^p(E), 0 \leq p \leq \infty, (f(x) \in C(E)$) можно найти ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$, который безусловно сходится к $f(x)$ (почти всюду, по норме $L^p(0,1)$, равномерно).

В работе [20] С. Карлин показал что в пространстве C[0,1] не существует безусловного базиса. В частности системы Хаара и Франклина не являются безусловными базисами в пространстве C[0,1]. Следовательно существует функция $f_0(x) \in C[0,1]$ (соотв. $g_0(x) \in C[0,1]$) и перестановка $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных целых чисел такая, что переставленный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_{\sigma(k)}(f_0) f_{\sigma(k)}(x)$ Фурье–Франклина функции $f_0(x)$ (соответственно, переставленный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_{\sigma(k)}(g_0)\chi_{\sigma(k)}(x)$ Фурье–Хаара функции $g_0(x)$) не сходится по норме $C[0,1]$.

Во второй главе доказано, что существует функция $f_0(x) \in C[0,1]$ обладающая неустранимой абсолютной расходимостью, т.е. для любого множества E с точкой сгущения x_0 существует непрерывная функция $f \in C[0,1]$ такая, что для любой ограниченной функции $g(x)$, совпадающей с функцией f на множестве $E \cap (\alpha, \beta)$(где (α, β) – любой интервал, содержащий точку x_0), ряд Фурье–Хаара абсолютно расходится в точке x_0. Отметим, что в работе [21] для системы Фабера–Шаудера доказано, что существуют функция $f_0(x) \in C[0,1]$ и перестановка $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных целых чисел такие, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_{\sigma(k)}(f_0)\varphi_{\sigma(k)}(x)$ расходится по мере на $[0,1]$, здесь $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(f_0)\varphi_k(x)$ – разложение функции $f_0(x)$ по системе Фабера–Шаудера).

Определение . Будем говорить, что базис $\{b_n(x)\}_{=1}^{\infty}$ пространства $C[0,1]$ обладает свойством (D^{∞}), если для любого измеримого множества $E \subset [0,1]$ с точкой сгущения x_0, существует непрерывная функция $f_0(x)$ такая, что для любой ограниченной функции g(x), совпадающей с функцией $f_0(x)$ на множестве $E \cap (\alpha, \beta)$(где (α, β) – любой интервал, содержащий точку x_0), разложение функции g(x) по базису $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно расходится в точке x_0.

Во втором параграфе главы 2 доказывается

Теорема 2.1. Системы Хаара и Франклина обладают свойством (D^{∞}).

В параграфе 2.2 доказывается также, что свойством (D^{∞}) обладают также любые подсистемы $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{\chi_{s_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ классической системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ следующего вида

$$\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{\chi_{s_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{\chi_n(x), n = 2^{k_j} + i, i = 1, ...2^{k_j}\}, \qquad (2.1)$$

где $\{k_j\}_{j=1}^{\infty} \nearrow^{\infty}$ – наперед заданная возрастающая подпоследовательность натуральных чисел.

Теорема 2.2. Пусть $\{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – подсистема классической системы Хаара вида (2.1). Тогда для любого множества E с точкой сгущения x_0 существует непрерывная функция $f \in C[0,1]$ такая, что для любой ограниченной функции $g(x)$, совпадающей с функцией f на множестве $E \cap (\alpha, \beta)$ (где (α, β) – любой интервал, содержащий точку x_0), ряд Фурье–Хаара по этой подсистеме абсолютно расходится в точке x_0.

Отметим, что свойство (D^{∞}) не является общим для всех базисов пространства $C[0,1]$, в частности система Фабера–Шаудера свойством (D^{∞}) не обладает. Более того, в работе [22] для системы Фабера–Шаудера доказано, что имеет место

Теорема. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\mu(E) > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ можно найти функцию $g \in L^1[0,1)$, совпадающую с f на E, такою, что ее разложение $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(g)\varphi_k(x)$ по системе Фабера–Шаудера абсолютно сходится равномерно на $[0,1]$ и

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} |A_n(g)|\varphi_n \right\|_{L^{\infty}} \leq \|g\|_{L^{\infty}} < 2\|f\|_{L^{\infty}}.$$

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает, что для систем Хаара и Франклина аналогичная теорема неверна.

Интересно было бы выяснить обладают ли свойством (D^{∞}) все ортогональные базисы пространства $C[0,1]$, в частности ортогональные полиномиальные базисы (см. [23])?

Для систем Хаара и Франклина в работах [24] и [25] доказаны следующие теоремы.

Теорема (Ф.Г.Арутюнян). Для любой измеримой, почти всюду конечной на [0,1] функции $f(x)$ и для любого $0 < \varepsilon < 1$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^2[0,1)$, $\mu(\{x \in [0,1], \ f(x) \neq \tilde{f}(x)\}) < \varepsilon$, что ее ряд Фурье по системе Хаара абсолютно сходится к ней равномерно на [0,1].

Теорема (Г.Г. Геворкян). Для любой измеримой, почти всюду конечной на [0,1] функции $f(x)$ и для любого $0 < \varepsilon < 1$ можно найти функцию $\tilde{f} \in C[0,1]$, $\mu(\{x, f(x) \neq \tilde{f}(x)\}) < \varepsilon$, что ее ряд Фурье по системе Франклина абсолютно сходится к ней равномерно на [0,1].

Замечание. Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает, что "исключительное"множество e, на котором происходит изменение функции $f(x)$ в этих теоремах, существенно зависит от исправляемой функции $f(x)$. В этих теоремах множество e невозможно выбрать независящим от функции $f(x)$. Отметим также, что если потребовать, чтобы после изменения функция $f(x) \in L^1[0,1]$ вне фиксированного множества получилась бы функция $g(x)$, у которой ряд Фурье–Хаара абсолютно сходится почти всюду на $[0,1]$, то такая задача для системы Хаара положительно решена в работе [26]. А именно, верна

Теорема (М.Г. Григорян). Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\mu(E) > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1)$, совпадающую с f на E, такую, что ее ряд Фурье–Хаара абсолютно сходится к ней почти всюду на [0,1) , и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Хаара расположены в убывающем порядке.

В параграфе 2.3 для системы Франклина $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ доказывается следующая

Теорема 2.3. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\mu(E) > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1)$, совпадающую с f на E, такую, что ее ряд Фурье–Франклина абсолютно сходится к ней почти всюду на $[0,1]$ и последовательность коэффициентов Фурье $c_n(\tilde{f})$ вновь полученной функции по системе Франклина удовлетворяет условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\tilde{f})|^r < \infty, \forall r > 2.$$

В параграфе 2.2 изучается вопрос об абсолютной сходимости ряда Фурье по общей системе Хаара исправленной функции. Получен следующий результат.

Теорема 2.4. Пусть $H = \{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – общая система Хаара, нормированная в $L^1(0,1)$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует множество $E, \mu(E) > 1 - \varepsilon$, такое, что для любой интегрируемой функции $f \in L^1(0,1)$ существует функция $\widetilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающая с f на множестве E, так, что

1. $||G_m(x, \widetilde{f})||_{L^1} \le 4||\widetilde{f}||_{L^1} \le 12||f||_{L^1}$,
2. $|a_k| > 0,\ a_{k_1} \ne a_{k_2}$ для всех $k, k_1 \ne k_2$,
3. $\lim\limits_{m\to\infty} ||G_m(\widetilde{f}) - \widetilde{f}||_{L^1} = 0$,
4. ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n(\widetilde{f}) h_n(x)|$ п.в. абсолютно сходитсья.

Замечание. Отметим, что из теоремы 2.1 следует, что как в теоремах 2.3, 2.4, так и в теореме М.Григоряна (конечно, при $f(x) \in C[0,1]$) вместо абсолютной сходимости почти всюду нельзя получить абсолютную сходимость всюду.

В заключение выражаю благодарность профессору М.Г. Григоряну, под руководством которого выполнена данная работа.

Литература

[1] A.Kamont, General Haar system and greedy approximation, Studia Math. ,145(2),pp. 165-184, 2001.

[2] A.Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme , Math. Ann. v.69., pp. 331-371, 1910.

[3] Н.Н.Лузин, К основной теореме интегрального исчесления, Мат. сборник, т.28 №2, ст.266-294, 1912.

[4] Д.Е.Меньшов, О равномерной сходимости рядов Фурье, Мат. сборник, т.53 №2, ст.67-96, 1942.

[5] M. G. Grigoryan , On convergence of Fourier series in complete orthonormal systems in the L^1 metric and almost everywhere, Mat. Sb. 181 (1990), 1011-1030 (in Russian); English transl. Math. USSR-Sb. 70, pp. 445-466, 1991.

[6] V.N.Temlyakov, Greedy Approximation ,Cambridge University Press, book, 2011.

[7] L.K. Jones, On a conjecture of Huber concerning the convergence of projection pursuit regression, Ann. Statist.,v. 15,pp. 880-882, 1987.

[8] R.A. DeVore, V. N. Temlyakov, Some remarks on greedy algorithms , Advances in Computational Math., v. 5,pp. 173-187,1996.

[9] S.V. Konyagin, V.N. Temlyakov, A remark on Greedy approximation in Banach spaces, East Journal on Approximations,v. 5:1,pp. 1-15,1999.

[10] T.W. Kőrner, Decreasing rearranged Fourier series, The J.FourierAnalysis and Applications 5, pp. 1-19, 1999.

[11] M.G. Grigoryan and R.E. Zink, Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system,Proc. of the Amer. Mat. Soc.,v. 134:12, pp. 3495-3505, 2006.

[12] P. Wojtaszczyk, Greedy Algorithm for General Biorthogonal Systems, Journal of Approximation Theory, v. 107, pp. 293-314, 2000.

[13] S.J.Dilworth, D.Kutzarova, and P. Wojtaszczyk, On approximate l_1 systems in Banach spaces, Journal of Approximation Theory,v. 114, pp. 214-241, 2002.

[14] М.Г.Григорян, С.Л.Гогян, Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций, Анал. Мат. т. 32,49-80,pp. 2006.

[15] К.А. Навасардян, А.А. Степанян, О рядах по системе Хаара, Изв. НАН Армениа, Матем. т.42:4, ст. 53-66, 2007.

[16] М.Г.Григорян, С.Л.Гогян, О переставленных рядах по системе Хаара, Изв. НАН Армении,серия Мат., т. 42 №2, ст. 44-64, 2000.

[17] Z. Ciesielski, Properties of the orthonormal Franklin System , Studia Math., V. 23. pp. 141-157, 1963.

[18] Z. Ciesie1ski, Properties of the orthonormal Franklin System II, Studia Math., V. 27. pp. 289—323, 1966.

[19] Z. Ciesie1ski, Constructive function theory and spline systems, Studia Math., V. 53. pp. 277—302, 1975.

[20] S. Karlin, Bases in Banach spaces, Duke Math. J.,v. 15,pp. 971-985, 1948.

[21] М.Г. Григорян, А.А. Саргсян, "Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера–Шаудера Матем. сб., 199:5, ст. 3-26, 2008.

[22] M.G. Grigoryan, T.G. Grigoryan, On the absolute convergece Schauder series, Advances in Theoretical and Applied Mathematics,v. 9,n. 1, pp. 11-14, 2014.

[23] М.А. Скопина, Ортогональные полиномиальние базисы Шаудера в $C[-1,1]$ с оптимальным ростом степеней, Мат.Сборник., т. 192. ст. 115-136, 2001.

[24] Ф.Г.Арутюнян, О рядах по системе Хаара, Доклады АН Арм.ССР, т. 42, ст. 134-140 , 1966.

[25] G.Gevorkyan, Representation of measurable functions by absolutely convergent series of translates and dilates of one function, East Journal on Approximations, v. 2,n.4,pp. 439-458, 1996.

[26] M.G. Grigoryan, On the unconditional representation of functions in L^p by Haar system, Internationa conference dedicated to 80th anniversary of Levan Zhizhiashvili,Fourier Analysis and Approximation Theory, Bazaleti,Georgia 23-28 October, pp. 21-22, 2013.

Работы автора по теме диссертации

[I] A.Kh. Kobelyan, On the Fourier-Haar coefficients of functions from L_p, International Conference Harmonic Analysis and Approximations IV, pp. 73-74, 2008.

[II] A.Kh. Kobelyan, Convergence of greedy approximation a.e and in $L^1(0,1)$ with respect to general Haar system, International Conference Harmonic Analysis and Approximations V, pp. 62-63, 2011.

[III] M. Grigoryan, A. Kobelyan,On the convergence of hard sampling operators ,Second International Conference Mathematics in Armenia Advances and Perspectives,pp. 45-46, 2013.

[IV] А.Х. Кобелян, О сходимости в $L^1[0,1]$ жадного алгоритма по общей системе Хаара, Изв. НАН Армениа, Матем., т. 47:6, ст. 53-70, 2012.

[V] A.Kh. Kobelyan, Some property of Fourier-Haar coeffcients, Advances in Theoretical and Applied Mathematic, v7,n. 4, pp. 433-438, 2012.

[VI] A.Kh. Kobelyan, On a property of General Haar system, Proceeding of the YSU, v.3, pp. 23-28, 2013.

SUMMARY

The main results obtained in this thesis are:

1. Let $H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}) = \{h^1_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ is a subsystem of general Haar system with (1.2). Then for every number $\varepsilon > 0$ there exists a set $E_\varepsilon \subset [0,1]$, with measure $\mu(E_\varepsilon) > 1-\varepsilon$, such that for every function $f \in L^1(0,1)$ one can find a function $\widetilde{f} \in L^1(0,1)$ coinciding with f on E_ε, such that

$$1. ||G_m(\widetilde{f}, H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}))||_{L^1} \le 4||\widetilde{f}||_{L^1} \le 12||f||_{L^1},$$

$2.\mathbf{D}(\widetilde{f}, H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}))$ contains only single element $\{\sigma(k)\}$,

which is a permutation of all numbers $\mathcal{S}$,

$$3. \lim_{m\to\infty} ||G_m(\widetilde{f}, H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S})) - \widetilde{f}||_{L^1} = 0.$$

2. For every subsystem $H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}) = \{h^1_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ of general Haar system with (1.2) and for any number $\varepsilon > 0$, there exist a set $E_\varepsilon \subset [0,1]$ with measure $\mu(E_\varepsilon) > 1-\varepsilon$ and series

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\varphi_k, \text{ with } \quad b_k \searrow 0 \text{ as } k \to \infty,$$

such that for any function $f \in L^1(E_\varepsilon)$ there exist numbers $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, ($\delta_k \in \{0,1\}$) such that the series $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k b_k \varphi_k$ converges to f by $L^1(E_\varepsilon)$ norm.

3. Let given any subsystem $\mathbf{X}^2_{\mathcal{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ of classical Haar system with (1.2) and number $\varepsilon > 0$. Then for every measurable, a.e. finite function f there exists a function $\widetilde{f} \in L^p(0,1)$ with $\mu(\{x : f(x) \neq \widetilde{f}(x)\}) < \varepsilon$,$spec(\widetilde{f}) \subset \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, such that $\{||c_k(\widetilde{f})\varphi_k||_p : k \in spec(\widetilde{f})\} \searrow 0$, and

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\widetilde{f})\varphi_k(x)| < \infty \text{ uniformly on } [0,1],$$

where $\{c_k(\widetilde{f})\}$ are the Fourier–Haar coefficients of the function $\widetilde{f}$.

4. For any number $\varepsilon > 0$ and any a.e. finite, measurable function f defined on [0,1], one can find a function $\widetilde{f} \in L^{\infty}_{[0,1]}$ with $\mu(\{x \in$

$[0,1]; \widetilde{f}(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$ so that, the sequence $\{||c_n(\widetilde{f})\chi_n||_{L^\infty}\ , n \in spec(\widetilde{f})\}$ is decreasing and greedy algorithm of the function $\widetilde{f}(x)$ by classical Haar system normalized in $L^2[0,1]$ converges uniformly on [0,1].

5. Let $\{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ is a subsystem of classical Haar system with (2.1). Then for any set E with condensation point x_0, there exists a continuous function $f \in C[0,1]$ such that the Fourier-Haar series (by subsystem $\{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$) of any bounded function $g(x)$, which coinciding with function f on set $E \cap (\alpha, \beta)$ (where (α, β) is any interval containing point x_0), absolutely diverges at x_0 point.

6. For any set E with condensation point x_0, there exist a continuous function $f \in C[0,1]$ such that the Fourier–Franklin series of any bounded function $g(x)$ coinciding with function f on set $E \cap (\alpha, \beta)$(where (α, β) is any interval containing point x_0), absolutely diverges at x_0 point.

7. For every number $0 < \epsilon < 1$ there exists a set $E \subset [0,1]$ with measure $\mu(E) > 1 - \epsilon$ such that for any function $f \in L^1[0,1)$ one can find function $\tilde{f} \in L^1[0,1)$, coinciding with f on E, such that, the Fourier–Franklin series of function $\tilde{f}$ a.e. on [01,] absolutely converges and Fourier-Franklin coefficients belong to every $l^r, r > 2$.

8. Let $H = \{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ is the general Haar system normalized in $L^1(0,1)$. Then for every number $\varepsilon > 0$ there exists a set $E, \mu(E) > 1 - \varepsilon$, such that for every integrable function $f \in L^1(0,1)$ one can find a function $\widetilde{f} \in L^1(0,1)$ coinciding with f on E, such that

1.$||G_m(x, \widetilde{f})||_{L^1} \leq 4||\widetilde{f}||_{L^1} \leq 12||f||_{L^1}$,

2.$|a_k| > 0, \ a_{k_1} \neq a_{k_2}$ for every $k, k_1 \neq k_2$,

3. $\lim\limits_{m\to\infty} ||G_m(\widetilde{f}) - \widetilde{f}||_{L^1} = 0$,

4. the Fourier–Haar series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n(\widetilde{f})h_n(x)|$ a.e. absolutely converges on [0,1].

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

1. Դիցուք $H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}) = \{h^1_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$-ը (1.2) հաջորդականությամբ Հաարի ընդհանրացված համակարգի ենթահամակարգ է: Կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $E_\varepsilon \subset [0,1]$, $\mu(E_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, բազմություն այնպիսին, որ ցանկացած $f \in L^1(0,1)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի f-ի հետ E_ε բազմության վրա համընկնող, հետևյալ պայմաններին բավարարող $\widetilde{f} \in L^1(0,1)$ ֆունկցիա

1. $||G_m(\widetilde{f}, H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}))||_{L^1} \le 4||\widetilde{f}||_{L^1} \le 12||f||_{L^1}$,
2. $\mathbf{D}(\widetilde{f}, H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}))$ պարունակում է միայն մեկ $\{\sigma(k)\}$ էլեմենտ, որը հանդիսանում է $\mathcal{S}$-ի բոլոր թվերի տեղափոխություն,
3. $\lim\limits_{m\to\infty} ||G_m(\widetilde{f}, H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S})) - \widetilde{f}||_{L^1} = 0$:

2. Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի և (1.2) հաջորդականությամբ Հաարի ընդհանրացված համակարգի $H^1_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}) = \{h^1_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահամակարգի համար կառուցվել է $E_\varepsilon \subset [0,1]$, $\mu(E_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, բազմություն և

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\varphi_k, \quad b_k \searrow 0, \text{ երբ } k \to \infty,$$

շարք այնպես, որ կամայական $f \in L^1(E_\varepsilon)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $L^1(E_\varepsilon)$-նորմով f-ին զուգամիտող $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k b_k \varphi_k$ շարք, որտեղ ($\delta_k =$ 0 կամ 1):

3. Դիցուք (1.2) հաջորդականությամբ Հաարի դասական համակարգի $\mathbf{X}^2_{\mathcal{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահամակարգը և $\varepsilon > 0$ թիվը տրված են: Այդ դեպքում կամայական h.ա. վերջավոր, չափելի f ֆունկցիայի համար գոյություն ունի այնպիսի $\widetilde{f} \in L^p(0,1)$ ֆունկցիա ($\mu(\{x : f(x) \ne \widetilde{f}(x)\}) < \varepsilon$, $spec(\widetilde{f}) \subset \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$) , որ $\{||c_k(\widetilde{f})\varphi_k||_p : k \in spec(\widetilde{f})\} \searrow 0$ և

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\widetilde{f})\varphi_k(x)| < \infty \text{ հավասարաչափ } [0,1] \text{ հատվածում:}$$

4. Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի և կամայական [0,1]-ում որոշված, h.ա. վերջավոր, չափելի f ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\widetilde{f} \in L^{\infty}_{[0,1]}$, $\mu(\{x \in [0,1]; \widetilde{f}(x) \ne f(x)\}) < \varepsilon$ ֆունկցիա, որի Ֆուրիե-Հաար գործակիցները $\{||c_n(\widetilde{f})\chi_n||_{L^\infty}, n \in spec(\widetilde{f})\}$ մոնոտոն նվազում են և որի ագահ ալգորիթմը, ըստ $L^2[0,1]$-ում նորմավորված Հաարի դասական համակարգի, հավասարաչափ զուգամիտում է [0,1] հատվածում:

5. Դիցուք $\{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$-ն (2.1) հատկությամբ Հաարի դասական համակարգի ենթահամակարգ է: Կամայական E բազմության և նրա x_0 խտացման կետի համար, գոյություն ունի $f \in C[0,1]$ ֆունկցիա այնպես, որ f-ի հետ E բազմության վրա համընկնող կամայական սահմանափակ $g(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիե-Հաար շարքը, ըստ Հաարի ենթահամակարգի, բացարձակ կտարամիտի x_0 կետում:

6. Կամայական E բազմության և նրա x_0 խտացման կետի համար, գոյություն ունի $f \in C[0,1]$ ֆունկցիա այնպես, որ f-ի հետ E բազմության վրա համընկնող կամայական սահմանափակ $g(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիե-Ֆրանկլին շարքը բացարձակ կտարամիտի x_0 կետում:

7. Յանկացած $0 < \epsilon < 1$ թվի համար գոյություն ունի $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 1-\epsilon$, բազմություն այնպես, որ կամայական $f \in L^1[0,1)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի E բազմության վրա f- ի հետ համընկնող $\widetilde{f} \in L^1[0,1)$ ֆունկցիա, որի Ֆուրիե-Ֆրանկլին շարքը [0,1]-ում h.ա. բացարձակ զուգամետ է և նրա Ֆուրիե-Ֆրանկլին գործակիցները պատկանում են բոլոր l^r- ին $(r > 2)$:

8. Դիցուք $H = \{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$-ը $L^1(0,1)$ -ում նորմավորված Հաարի ընդհանրացված համակարգն է: Ապա կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $E, \mu(E) > 1-\varepsilon$, բազմություն այնպես, որ ցանկացած ինտեգրելի $f \in L^1(0,1)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի E բազմության վրա f-ի հետ համընկնող $\widetilde{f} \in L^1(0,1)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1. $||G_m(x,\widetilde{f})||_{L^1} \leq 4||\widetilde{f}||_{L^1} \leq 12||f||_{L^1}$,
2. $|a_k| > 0,\ a_{k_1} \neq a_{k_2}$, կամայական $k, k_1 \neq k_2$,
3. $\lim\limits_{m\to\infty} ||G_m(\widetilde{f}) - \widetilde{f}||_{L^1} = 0$,
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n(\widetilde{f})h_n(x)|$ Ֆուրիե-Հաար շարքը [0,1]-ում h.ա. բացարձակ

   զուգամետ է: