Երևանի Պետական Համալսարան

Բեկնազարյան Ալեքսանդր Ֆելիքսի

Ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաներով ծնված մակերևույթների կառուցվածքների մասին

Ա.01.01 - ''Մաթեմատիկական անալիզ'' մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2015

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Бекназарян Александр Феликсович

О структурах поверхностей порожденных обобщенными аналитическими функциями

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности А.01.01 - "Математический анализ"

Ереван 2015

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Կազանի պետական էներգետիկական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ-մաթ գիտությունների դոկտոր Ս. Ա. Գրիգորյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ-մաթ գիտությունների դոկտոր Կ. Լ. Ավետիսյան

ֆիզ-մաթ գիտությունների թեկնածու Ա. Յու. Կուզնեցովա

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի Ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կկայանա 2015թ. հունիսի 22-ին ժ. 15^{00}-ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Ատենախոսությունը առաքված է 2015թ. մայիսի 20-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝ Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Казанском государственном энергетическом университете

Научный руководитель: доктор физ-мат. наук С. А. Григорян

Официальные оппоненты: доктор физ-мат. наук К. Л. Аветисян

кандидат физ-мат. наук А. Ю. Кузнецова

Ведущая организация: Институт Математики НАН Армении

Защита диссертации состоится 22 июня 2015 г. в 15^{00} на заседании специализированного совета ВАК 050 при ЕГУ (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 20-го мая 2015г.

Ученый секретарь специализированного совета, Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В первой половине прошлого века работами [1], [2], [3] датского математика Харальда Бора была основана теория почти периодических функций, которая в дальнейшем была развита работами А. Безиковича, Г. Вейля, В. Степанова и других математиков, и нашла широкие применения в разных областях теории функций, теории дифференциальных уравнений и топологии. Далее в работах [4], [5], [6] А. Уолтера, Р. Кэмерона и Х. Бора было показано, что решения алгебраических уравнений, коэффициенты которых являются почти периодическими функциями на вещественной оси $\mathbb{R}$, а дискриминант отделим от нуля всюду на $\mathbb{R}$, также являются почти периодическими функциями. Идея Б. Римана об определении и изучении поверхностей, впоследствии названными римановыми поверхностями, на которых многолистные решения алгебраических уравнений с аналитическими коэффициентами становятся однолистными, естественным образом заимствуется при исследовании решений алгебраических уравнений с аналитическими почти периодическими коэффициентами и ведет к возникновению так называемых поверхностей Бора-Римана. Таким образом, решения алгебраических уравнений с аналитическими коэффициентами приводят к возникновению римановых поверхностей. Решения же алгебраических уравнений с почти периодическими коэффициентами приводят к возникновению поверхностей Бора-Римана, которые являются естественным аналогом римановых поверхностей.

Со второй половины прошлого века, активно развивающаяся теория дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами с еще большим импульсом возобновила необходимость изучения аналитических почти периодических функций. Весьма удобным и действенным аппаратом для таких изучений послужили так называемые обобщенные аналитические функции, введенные в 1956 году Р. Аренсом и И. Зингером в работе [7]. Предложенный ими метод не только предоставил новое толкование известных теорем Г. Бора, А. Безиковича, Б. Левина, Дж. Фаварда и других из теории почти периодических функций, но также позволил с единой точки зрения взглянуть на теорию почти периодических аналитических функций и теорию аналитических функций в единичном круге. Появление обобщенной плоскости и разворачиваемой на ней теории обобщенных аналитических функций стало возможным благодаря следующей известной дихотомии для произвольной подгруппы Γ аддитивной группы вещественных чисел $\mathbb{R}$: либо Γ изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$, либо Γ плотна в $\mathbb{R}$ в евклидовой топологии. Как известно, комплексная плоскость $\mathbb{C}$, на которой развивается классическая теория аналитических функций комплексного переменного, состоит из чисел вида $z = \xi \cdot r$, где r - некоторое неотрицательное вещественное число, а ξ принадлежит единичной окружности $\mathbb{T}$ комплексной плоскости. Используя тот факт, что в данном представлении единичная окружность $\mathbb{T}$ является группой характеров аддитивной группы целых чисел $\mathbb{Z}$: $\mathbb{T} = \hat{\mathbb{Z}}$, С.А. Григорян, опираясь на понятие обобщенной аналитической по Аренсу-Зингеру функции, обобщая понятие комплексной плоскости, начал изучение функций, зависящих от переменных вида (α, r), где r - некоторое неотрицательное вещественное число, а α принадлежит группе характеров некоторой подгруппы Γ

группы $\mathbb{R}_d$ - аддитивной группы вещественных чисел наделенной дискретной топологией. А именно, для произвольной подгруппы Γ аддитивной группы $\mathbb{R}_d$ рассматривается группа ее характеров $G = \hat{\Gamma}$. Далее строится декартово произведение $G \times [0, \infty)$ и нижний слой $G \times \{0\}$ склеивается в точку. Полученное пространство называется обобщенной плоскостью и обозначается $\mathbb{C}(\Gamma)$. В случае когда имеет место первый случай указанной выше дихотомии, то есть, Γ изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$, сконструированная обобщенная плоскость $\mathbb{C}(\Gamma)$ изоморфна комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и определение обобщенной аналитической функции на ней ведет к теории, идентичной классической теории аналитических функций. Однако, в случае когда подгруппа Γ плотна в $\mathbb{R}$ в евклидовой топологии, возникает целая шкала пространств $G = \hat{\Gamma}$, венчаемая компактом Бора $G = \hat{\mathbb{R}}_d$, и порождающая теорию, существенно отличающуюся от своего классического прототипа. Тем не менее, одной из основных задач теории обобщенных аналитических функций остается поиск новых эффектов при прокручивании классических сценариев. На этом пути естественным образом возникают поверхности Бора-Римана.

Цель работы.

Описать структуру и основные свойства обобщенной плоскости. Определить поверхность Бора-Римана и дать ее основную характеристику. Определить групповые структуры на поверхностях Бора-Римана согласованные с групповой структурой на проколотой обобщенной плоскости. Определить алгебраические поверхности Бора-Римана и исследовать накрытия обобщенной плоскости поверхностями Бора-Римана на предмет алгебраичности и осуществления ими накрытия Галуа. На поверхностях Бора-Римана определить понятия аналитической кривой, эквивалентных точек и считающей функции ν. Геометрическими и алгебраическими методами исследовать поведение считающей функции ν. Определить понятие раздутия топологического пространства и исследовать существования раздутия пространств, имеющих структуру аналогичную структуре поверхностей Бора-Римана.

Методика исследования. В работе применяются методы теории римановых поверхностей, комплексного анализа, топологии и абстрактного гармонического анализа. Основные определения и понятия взяты из работ [8], [9], [10], [11].

Научная новизна. Теория обобщенных аналитических функций, изучение которых началось работой Р. Аренса и И. Зингера, стала в дальнейшем объектом исследования многих математиков. В частности, в работах [12]-[16] были изучены пространства Харди обобщенных аналитических функций. В статьях [17]-[19] были рассмотрены борелевские меры на компактной группе G, двойственной к некоторой дискретной группе, опираясь на которые, С. А. Григорян в статье [9] описал подобные меры уже на всей обобщенной плоскости. Другие естественные вопросы данной теории, такие как изучение обобщенных мероморфных функций, определение дифференцирования обобщенных аналитических функций, описание множеств интерполяции и границы Шилова и другие свойства алгебр обобщенных аналитических функций и их взаимосвязь с почти периодическими функциями были даны в работах [9], [20]-[29]. Также в статьях [30] и [31] были рассмотрены векторозначные обобщенные аналитические функции. Тем не менее, вопрос применения эффективных методов теории римановых поверхностей на теорию обобщенных аналитических функций оставался открытым, и, фактически, понятие поверхности Бора-Римана и изучение накрывающих пространств обобщенной плоскости впервые были даны в работах автора [BG1]-[B5]. Все результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и приведенные конструкции открывают новые возможности в изучении теории обобщенных аналитических функций и аналитической теории чисел.

Апробация работы. Основные результаты были доложены на следующих конференциях и семинарах:

- Международная конференция ''Complex Analysis and Related Topics'', Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург, Россия, 14-18 апреля 2014 г. Название доклада: ''Bohr-Riemann Surfaces''.

- Международная научно-практическая конференция ''Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий'', г. Сочи, Россия, 19-25 мая 2014 г. Название доклада: ''Поверхности Бора-Римана''.

- Тринадцатая всероссийская молодежная школа-конференция ''Лобачевские чтения'', г. Казань, Россия, 24-29 октября 2014 г. Название доклада: ''Об одном свойстве обобщенных гармонических функций''.

- Вторая ''Зимняя геометрическая школа'' и международная геометрическая конференция, посвященная памяти М. В. Лосика, г. Переславль Залесский, Россия, 1-7 февраля 2015 г. Название доклада: ''Поверхности Бора-Римана''.

- Десятая международная молодежная научная конференция ''Тинчуринские чтения'', г. Казань, Россия, 25-27 марта 2015 г. Название доклада: ''Об эквивалентности линейных связностей подпространств обобщенной плоскости''.

Также, основные результаты диссертации были доложены на семинарах кафедры ''Высшая Математика'' Казанского Государственного Энергетического Университета.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, 5 из них в журналах из перечня ВАК. Список публикаций автора приводится в конце автореферата.

Структура и обьем работы. Диссертационная работа изложена на 77 страницах, состоит из введения, четырех глав, заключения, списка цитированной литературы, включающего 43 наименования, и списка публикаций автора по теме диссертации, включающего 8 наименований.

В работе получены следующие основные результаты:

1. Представлено описание структуры обобщенной плоскости и даны характеристики и сравнения различных топологий возникающих на обобщенной плоскости и на ее подмножествах, и топологий, возникающих на накрывающих пространствах обобщенной плоскости. Описано множество нулей обобщенных аналитических функций на обобщенной плоскости.

2. Определено понятие поверхности Бора-Римана и установлены ее основные свойства. Представлен способ определения групповых структур на поверхностях Бора-Римана, обращающих неразветленные конечнолистные накрытия в групповые гомоморфизмы из поверхности Бора-Римана на подмножества обобщенной плоскости. Описано строение полученных групп с точностью топологического изоморфизма.

3. Определено понятие алгебраической поверхности Бора-Римана и показано, что каждое неразветвленное конечнолистное накрытие проколотой обобщенной плоскости является алгебраическим накрытием Галуа.

4. Определены понятия аналитической кривой и эквивалентных точек на поверхностях Бора-Римана, с помощью которых определена считающая функция ν, ставящая в соответствие каждой точке поверхности Бора-Римана число эквивалентных ей точек. Конструктивным методом доказана версия теоремы о накрывающей гомотопии для накрытий обобщенной плоскости поверхностями Бора-Римана, с помощью которой доказано локальное постоянство функции ν на поверхностях Бора-Римана. Также, с помощью униформизации множеств корней полиномов с непрерывными коэффициентами, алгебраическим методом показано локальное постоянство функции ν на алгебраических поверхностях Бора-Римана.

5. Определено понятие раздутия топологического пространства и исследовано существование раздутия пространств, структура которых аналогична структуре поверхностей Бора-Римана. Представлены условия, обеспечивающие существование раздутия таких накрывающих пространств.

Содержание работы

Первая глава состоит из трех параграфов. Основные результаты были опубликованы в работах [B1], [B4], [B5]. В первом параграфе для данной подгруппы Γ аддитивной группы вещественных чисел $\mathbb{R}$ приводится построение обобщенной плоскости $\Delta = \mathbb{C}(\Gamma)$. Пусть G - группа характеров группы Γ наделенной дискретной топологией. Обобщенная плоскость $\mathbb{C}(\Gamma) = G \times [0, \infty)/G \times \{0\}$ определяется как декартово произведение $G \times [0, \infty)$, в котором слой $G \times \{0\}$ рассматривается как единая точка и обозначается через $*$. Пространство $\Delta^0 = G \times (0, +\infty) = \Delta \setminus \{*\}$ называется проколотой обобщенной плоскостью. Обобщенная плоскость Δ также канонически отождествляется с пространством $\mathcal{C} = \{\alpha \cdot r : \alpha \in G, r \in [0, \infty)\}$ - аналогом комплексной плоскости $\mathbb{C}$, состоящим из гомоморфизмов $\alpha \cdot r : \Gamma \to \mathbb{C} : a \mapsto \alpha(a) r^a$. Аналогичным образом, проколотая обобщенная плоскость Δ^0 канонически отождествляется с пространством $\{\alpha \cdot r : \alpha \in G, r \in (0, \infty)\}$. Для удобства, всюду в работе, если не оговорено противное, подразумевается именно данная интерпретация обобщенной плоскости и ее подмножеств. На $G = \hat{\Gamma}$ определяется топология поточечной сходимости k, которая также называется конечно-открытой топологией, поскольку ее базу составляют семейства характеров из G, в которых каждый характер переводит некоторое конечное подмножество F группы Γ в некоторое открытое подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$ комплексной плоскости. Используя данную топологию, с помощью канонической проекции $\pi : G \times [0, \infty) \to \Delta$, на обобщенной плоскости Δ определяется топология τ_Δ, и показывается, что в этой топологии обобщенная плоскость становится локально компактным, хаусдорфовым и линейно связным пространством. Далее рассматривается отображение $\alpha : \mathbb{R} \to G : t \to \alpha_t$, где $\alpha_t(a) = e^{iat}, a \in \Gamma$. С одной стороны $\alpha(\mathbb{R})$ является подмножеством G и, поэтому, на $\alpha(\mathbb{R})$ естественным образом возникает топология $k|_{\alpha(\mathbb{R})}$ индуцированная топологией k на G. С другой же стороны, если расширить образ действия каждого характера $\alpha_t, t \in \mathbb{R}$, с Γ на всю вещественную ось $\mathbb{R}$, то получим, что множество $\alpha(\mathbb{R})$ совпадает с $\hat{\mathbb{R}}$ - группой характеров группы вещественных чисел $\mathbb{R}$ наделенной евклидовой топологией τ. Поэтому на $\alpha(\mathbb{R})$ также определяется топология $\hat{\tau}$, возникающая как компактно-открытая на $\hat{\mathbb{R}} = \alpha(\mathbb{R})$. Поскольку каждое конечное множество компактно, то топология $\hat{\tau}$ сильнее топологии $k|_{\alpha(\mathbb{R})}$. В конце параграфа представляются две различные факторизации отображения α полученные топологиями $k|_{\alpha(\mathbb{R})}$ и $\hat{\mathbb{R}}$, и показывается, что α является гомеоморфизмом из $(\mathbb{R}, \tau)$ в $(\alpha(\mathbb{R}), \hat{\tau})$ и непрерывным гомоморфизмом как отображение из $(\mathbb{R}, \tau)$ в $(\alpha(\mathbb{R}), k|_{\alpha(\mathbb{R})})$.

Второй параграф посвящен изучению линейных связностей группы $\alpha(\mathbb{R})$ в топологиях $k|_{\alpha(\mathbb{R})}$ и $\hat{\tau}$. Во первых, $\alpha(\mathbb{R})$ действительно линейно связно в обеих топологиях как образ линейно связного пространства $\mathbb{R}$ при непрерывных отображениях $\alpha : (\mathbb{R}, \tau) \to (\alpha(\mathbb{R}), \hat{\tau})$ и $\alpha : (\mathbb{R}, \tau) \to (\alpha(\mathbb{R}), k|_{\alpha(\mathbb{R})})$. Причем ясно, что линейная связность $\alpha(\mathbb{R})$ относительно топологии $\hat{\tau}$ влечет линейную связность в более слабой топологии $k|_{\alpha(\mathbb{R})}$. Следующий результат доказывает, что данные линейные связности на самом деле эквивалентны.

Лемма 1.2.1. *Любой путь $\sigma : I = [0, 1] \to \alpha(\mathbb{R})$, непрерывный относительно топологии $k|_{\alpha(\mathbb{R})}$, непрерывен и относительно топологии $\hat{\tau} = \alpha(\tau)$.*

Далее отображение $\alpha : \mathbb{R} \to G$ расширяется до отображения $\varphi : \mathbb{C} \to \Delta^0 : z = t + iy \mapsto \varphi_z = \alpha_t \cdot e^{-y}$, где $\Delta^0 = G \times (0, \infty)$ - проколотая обобщенная плоскость, которая становится группой относительно покоординатного умножения с единичным элементом $\alpha_0 \cdot 1 = \alpha_0$. На пространстве $\varphi(\mathbb{C})$ вновь возникают две топологии: топология $\tau_{\Delta^0}|_{\varphi(\mathbb{C})}$, индуцируемая на $\varphi(\mathbb{C})$ топологией $\tau_{\Delta^0} = k \times \tau_{(0,+\infty)}$ из Δ^0, и более сильная топология $\tau_\varphi = \varphi(\tau_c)$, являющаяся гомеоморфным образом евклидовой топологии τ_c на $\mathbb{C}$. В силу плотности $\alpha(\mathbb{R})$ в G, образ $\varphi(\mathbb{C})$ плотен как в Δ^0 так и в Δ. Множество $\mathbb{C}_0 := \varphi(\mathbb{C})$ называется *плоскостью в* Δ^0 проходящей через единичный элемент $\alpha_0 \cdot 1$. Для данной точки $s \in \Delta^0$ множество $\mathbb{C}_s := s \cdot \varphi(\mathbb{C})$ называется плоскостью в Δ^0 проходящей через s. Как следствие, на каждой плоскости $\mathbb{C}_s, s \in \Delta^0$, имеются топология $\tau_s := \tau_{\Delta^0}|_{\mathbb{C}_s}$ и более сильная топология $\tau_{s\varphi} := s\tau_\varphi = \{sU : U \in \tau_\varphi\}$. Наконец, для данного элемента $s \in \Delta^0$ рассматривается неразветвленное конечнолистное накрытие $\pi : X \to \Delta^*$, где X - некоторое топологическое пространство, $\Delta^* = \Delta^0 \setminus K$, а K - подмножество Δ^0, такое, что пересечение $K \cap \mathbb{C}_s$ дискретно. Тогда на прообразе $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$, где $\mathbb{C}_s^* = \mathbb{C}_s \cap \Delta^* = \mathbb{C}_s \setminus K$, опять имеются две топологии - топология $\tau_{s,X}$, индуцируемая топологией τ_X пространства X и локально гомеоморфная топологии $\tau_s^* = \tau_s|_{\mathbb{C}_s^*}$, и более сильная топология $\tau_{s,\mathbb{C}}$, базу которой составляют линейно связные компоненты множеств из $\tau_{s,X}$. Параграф заканчивается доказательством совпадения линейно связных компонент прообраза $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$ в обеих топологиях:

Теорема 1.2.1. *Компоненты линейной связности подпространства*

$\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$ *в топологиях* $\tau_{s,X}$ *и* $\tau_{s,\mathbb{C}}$ *совпадают.*

В третьем параграфе приводятся определение и основные свойства обобщенных аналитических функций и тонких подмножеств обобщенной плоскости, которые играют важную роль в дальнейших исследованиях. Основным руководством служит замечательная обзорная статья С.А. Григоряна [9]. Каждый характер χ^a группы G, соответствующий по теореме двойственности Понтрягина элементу $a \in \Gamma_+$, следующим образом продолжается до непрерывной функции φ^a на Δ:

$$\varphi^a(s) = \chi^a(\alpha) r^a, \quad s = \alpha \cdot r,$$

где $\chi^a(\alpha) = \alpha(a), \alpha \in G$. Предполагается, что $0^a = 0, a \in \Gamma_+$. Функции $\varphi^a, a \in \Gamma_+$, называются *обобщенными мономами*, а линейные комбинации функций из семейства $\{\varphi^a\}_{a \in \Gamma_+}$ называются *обобщенными полиномами*. Непрерывная на некотором открытом подмножестве $D \subset \Delta$ функция f называется *обобщенной аналитической функцией*, если у любого элемента $s \in D$ существует окрестность $U \subset D$, $s \in U$, такая, что сужение функции f на U равномерно аппроксимируется линейными комбинациями функций $\varphi^a, a \in \Gamma_+$. Множество всех обобщенных аналитических функций на D обозначается через $\mathcal{O}(D)$. Далее исследуется строение множеств нулей обобщенных аналитических функций. Наконец, определяется понятие тонкого множества на обобщенной плоскости. Для открытого подмножества D в Δ множество $K \subset D$ называется *тонким*, если оно является подмножеством множества нулей некоторой нетривиальной обобщенной аналитической функции из $\mathcal{O}(D)$. Показывается, что пересечение тонкого множества с каждой плоскостью $\mathbb{C}_s$, $s \in \Delta^0$, является дискретным множеством в $\mathbb{C}_s$. В последующих главах указанные тонкие множества берут на себя роль критических точек накрытий обобщенной плоскости определяющих поверхности Бора-Римана.

Глава 2 состоит из трех параграфов. Основные результаты были опубликованы в работах [BG1], [BG2], [B3]. В первом параграфе приводятся классические определения накрывающих отображений и неразветвленных конечнолистных накрытий топологических пространств, с помощью которых даются определения поверхностей Бора-Римана над обобщенной плоскостью и над ее открытыми подмножествами.

Определение 2.1.2 *Пусть D - открытое множество в Δ. Топологическое пространство X называется поверхностью Бора-Римана над D, если существуют тонкое множество $K \subset D$ и накрытие $\pi : X \to D$, такие, что сужение π на множество $X^* = X \setminus \pi^{-1}(K)$ есть неразветвленное конечнолистное накрытие множества $D^* = D \setminus K$.*

Также вводится понятие цилиндрической окрестности данной непрерывной кривой $\gamma : I \to \Delta^0$, представляющей из себя множества вида $U = U_0 \cdot \gamma(I)$, где U_0- некоторая открытая окрестность единичного элемента $\alpha_0 \in \Delta^0$. По теореме о поднятии кривой, если $\pi : X^0 \to \Delta^0$ - неразветвленное n-листное накрытие проколотой обобщенной плоскости Δ^0 некоторым топологическим пространством X^0, и $\gamma(I) \subset \Delta^0$ - некоторая кривая без точек самопересечения, с $\gamma(0) \neq \gamma(1)$, то существуют n непересекающихся кривых $\hat{\gamma}_i(I) \subset X^0, i = 1, ..., n$, таких, что $\gamma(I) = \pi \circ \hat{\gamma}_i(I), i = 1, ..., n$. В этом случае говорят, что кривые $\hat{\gamma}_i(I), i = 1, ..., n$, накрывают кривую $\gamma(I)$ или являются поднятием кривой $\gamma(I)$. Тогда для $i = 1, ..., n$, цилиндрической окрестностью поднятой кривой $\hat{\gamma}_i(I) \subset X^0$ называется связная компонента прообраза $\pi^{-1}(U)$ содержащая $\hat{\gamma}_i(I)$.

Лемма 2.1.1. *Пусть $\pi : X^0 \to \Delta^0$ - неразветвленное n-листное накрытие проколотой обобщенной плоскости Δ^0 некоторым топологическим пространством X^0 и $\gamma(I) \subset \Delta^0$ - кривая без точек самопересечения, $\gamma(0) \neq \gamma(1)$. Тогда у кривой $\gamma(I)$ существует такая цилиндрическая окрестность U, что множество $W = \pi^{-1}(U)$ представимо в виде дизъюнктного объединения*

$$W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$$

цилиндрических окрестностей W_i кривых $\hat{\gamma}_i(I)$, причем π каждую окрестность W_i, $i = \overline{1, n}$, гомеоморфно отображает на множество U.

Во втором параграфе продолжается исследование свойств неразветвленных накрытий пространства Δ^0. В статье [32] С. Григоряна, Р. Гумерова и А. Казанцева, было показано, что если $\pi : X \to G$ - n-листное накрытие компактной соленоидальной группы G связным топологическим пространством X, то на X можно так задать структуру группы, что π станет групповым гомоморфизмом компактных абелевых групп. Опираясь на этот результат, и пользуясь тем, что на Δ^0 имеется групповая структура, в следующей теореме приводится обобщение представленного выше результата. А именно, представляется способ определения структуры группы на пространствах, накрывающих проколотую обобщенную плоскость Δ^0, и описывается строение этих групп с точностью топологического изоморфизма.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\pi : X^0 \to \Delta^0$ - неразветвленное n-листное накрытие проколотой обобщенной плоскости Δ^0 связным топологическим пространством X^0. Тогда на X^0 можно так задать структуру группы, что π станет групповым гомоморфизмом из X^0 на Δ^0, а группа X^0 - топологически изоморфной декартовому произведению $G_1 \times (0, +\infty)$, где G_1 - компактная подгруппа X^0.*

В третьем параграфе второй главы вводится понятие алгебраической поверхности Бора-Римана над данным подмножеством $D \subset \Delta$. Поверхность Бора-Римана X называется *алгебраической* над $D \subset \Delta$, если существуют такие полиномы $P_i(s, z) = z^{n_i} + f_{1,i}(s) z^{n_i - 1} + ... + f_{n_i,i}(s)$ с $f_{k,i} \in \mathcal{O}(D)$, $1 \leq k \leq n_i$, $i = \overline{1, m}$, что X гомеоморфно пространству $Z_0 = \{(s, z_1, ..., z_m) \in D \times \mathbb{C}^m : P_i(s, z_i) = 0, 1 \leq i \leq m\}$. В этом случае накрытие $\pi : X \to D$, определяющее поверхность Бора-Римана X, также называется алгебраическим накрытием. Основным инструментом для доказательства алгебраичности произвольного неразветвленного n-листного накрытия группы Δ^0 является следующий результат.

Лемма 2.3.1. *Пусть групповой гомоморфизм $\varphi : G_1 \to G$ осуществляет неразветвленное n-листное накрытие компактной соленоидальной группы G связной топологической группой G_1. Тогда группа G_1 коммутативна, и существуют такие $a_1, ..., a_m \in \Gamma_+$ и $n_1, ..., n_m \in \mathbb{N}$, что G_1 изоморфна пространству $G_0 = \{(\alpha, \xi_1, ..., \xi_m) \in G \times \mathbb{T}^m : \xi_i^{n_i} - \chi^{a_i}(\alpha) = 0, i = 1, ..., m\}$.*

Как известно, *накрывающим преобразованием* данного накрытия $\pi : Y \to X$ между топологическими пространствами X и Y называется послойный гомеоморфизм $f : Y \to Y$, то есть, гомеоморфизм f, такой, что $\pi \circ f = \pi$, а неразветвленное накрытие $\pi : Y \to X$ называется *накрытием Галуа*, если для любых

$y_1, y_2 \in Y$ с $\pi(y_1) = \pi(y_2)$ существует накрывающее преобразование $f : Y \to Y$ с $f(y_1) = y_2$. Основываясь на предыдущих результатах главы, доказывается следующая теорема.

Теорема 2.3.1. *Каждое неразветвленное n-листное накрытие $\pi : X^0 \to \Delta^0$ является алгебраическим накрытием Галуа.*

Глава 3 состоит из трех параграфов и посвящена изучению считающей функции ν. Основные результаты данной главы были опубликованы в работах [BG3], [B2]. В первом параграфе определяются понятия аналитической кривой на пространстве Δ^0 и на поверхности Бора-Римана над Δ^0, а также понятие эквивалентных точек на поверхностях Бора-Римана. Кривая $\gamma(I) \subset \Delta^0$ называется *аналитической кривой*, если она полностью содержится в некоторой плоскости $\mathbb{C}_s$, $s \in \Delta^0$. Далее рассматриваются поверхность Бора-Римана X над Δ и соответствующее неразветвленное конечнолистное накрытие $\pi : X \to \Delta$, с тонким множеством критических точек $K \ni *$. По теореме о поднятии кривой, имеем, что для каждой аналитической кривой $\gamma(I)$ в $\Delta^* = \Delta \setminus K$ и каждой точки $w \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ существует единственная кривая $\hat{\gamma}(I) \subset X^* = \pi^{-1}(\Delta^*)$ с началом в точке w, накрывающая кривую $\gamma(I)$, то есть, $\hat{\gamma}(0) = w$ и $\gamma(I) = \pi \circ \hat{\gamma}(I)$. В этом случае кривая $\hat{\gamma}(I) \subset X^*$ на поверхности Бора-Римана X называется аналитической. Для данного элемента $s \in \Delta^*$ две точки $w_1, w_2 \in \pi^{-1}(s)$ называются эквивалентными, если существует аналитическая кривая $\hat{\gamma}(I) \subset X^*$, такая, что $w_1 = \hat{\gamma}(0)$ и $w_2 = \hat{\gamma}(1)$. Легко проверить, что определенное отношение действительно является отношением эквивалентности в классическом смысле, и, таким образом, для каждого элемента $s \in \Delta^*$ множество $\pi^{-1}(s) = \{w_1, ..., w_n\}$ разбивается на конечное число классов эквивалентности. Далее на X^* определяется функция $\nu : X^* \to \mathbb{Z}_+$, которая каждой точке $w_0 \in X^*$ ставит в соответствие число эквивалентных ей точек:

$$\nu(w_0) = \text{card}\{w \in \pi^{-1}(\pi(w_0)) : w \sim w_0\}.$$

Также определяется действующая на Δ^* функция μ, которая каждому элементу $s \in \Delta^*$ ставит в соответствие число классов эквивалентности на множестве $\pi^{-1}(s)$. Второй параграф третьей главы посвящен доказательству локального постоянства считающей функции ν на X^*. В начале второго параграфа доказывается следующий результат, устанавливающий локальное постоянство функции ν на компонентах связности множества $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$.

Лемма 3.2.1. *Пусть $s \in \Delta^*$. Тогда функция $\mu : \Delta^* \to \mathbb{Z}_+$ постоянна на $\mathbb{C}_s^*$, а функция $\nu : X^* \to \mathbb{Z}_+$ постоянна на компонентах связности прообраза $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$.*

Далее доказывается лемма, устанавливающая, что при малом ''возмущении'' кривой $\gamma(I) \subset \Delta^*$, поднятия $\gamma(I)$ и возмущенной кривой, имеющие начало на одном и том же листе, также заканчиваются на одинаковых листах.

Лемма 3.2.2. *Пусть даны точка $s \in \Delta^*$ и замкнутая кривая $\gamma(I) \subset \Delta^*$ с началом и концом в точке s: $\gamma(0) = \gamma(1) = s$. Пусть $\pi^{-1}(s) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $\hat{\gamma} : I \to X^*$ - кривая в X^* с началом $\hat{\gamma}(0) = x_1$ и концом $\hat{\gamma}(1) = x_2$, $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(s), x_1 \neq x_2$, накрывающая кривую $\gamma(I)$: $\gamma(I) = \pi \circ \hat{\gamma}(I)$. Пусть, далее, фиксировано разложение*

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i, \tag{1}$$

прообраза $\pi^{-1}(U)$ открытой ровно накрытой окрестности U точки s в дизъюнктное объединение открытых множеств V_i, гомеоморфных U при отображениях $\pi|_{V_i} : V_i \to U$, с обратными $\varphi_i = (\pi|_{V_i})^{-1} : U \to V_i$, причем $\varphi_i(s) = x_i, i = \overline{1,n}$, то есть, нумерация в (1) выбрана так, чтобы $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$. Тогда существует открытая окрестность W_0 единичного элемента α_0 группы Δ^0, такая, что $sW_0 \subset U$ и для любого $\sigma \in W_0$ поднятие $\hat{\gamma}_\sigma : I \to X^*$ кривой $\gamma_\sigma(t) = \sigma\gamma(t), t \in I$, с началом в точке $\varphi_1(\sigma s) \in V_1$ имеет конец в точке $\varphi_2(\sigma s) \in V_2$.

Из данного результата следует, что у каждого элемента $w \in X^*$ найдется такая окрестность V, что для любого $x \in V$ имеет место неравенство $\nu(x) \geq \nu(w)$. Наконец, опираясь на эти результаты, доказывается основной результат параграфа.

Теорема 3.2.1. *Функция $\nu : X^* \to \mathbb{Z}_+$ локально постоянна на X^*.*

В третьем параграфе третьей главы вводится понятие раздутия накрывающего пространства и показывается, каким образом постоянство считающей функции ν влечет существование раздутия определенных топологических пространств. Пусть M, X, Y - топологические пространства, $\tau : Y \to M$ - неразветвленное конечнолистное накрытие, а $\pi : X \to M$ - накрытие с множеством "критических"точек $K \subset M$, неразветвленное и конечнолистное над $M \setminus K$. Тогда пространство Y называется *раздутием* пространства X, если существует такое отображение $\varphi : Y \to X$, что сужение φ на $Y^* = \tau^{-1}(M^*)$, где $M^* = M \setminus K$, есть гомеоморфизм между пространствами Y^* и $X^* = \pi^{-1}(M^*)$, и диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[dl, "\tau"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Далее приводится теорема, устанавливающая, что пространство Δ^0 имеет структуру, локально гомеоморфную множествам вида $G_a \times W$, где $G_a = \{\alpha \in G, \alpha(a) = 1\}$ - компактное множество в G, а W - компактное множество в $\mathbb{C}$. Представляется построение указанного множества $W \subset \mathbb{C}$ для окрестности точки $s = \alpha_0 \cdot r \in \Delta^0$, которое показывает, что множество W гомеоморфно замкнутому единичному кругу $\mathbb{D}$ комплексной плоскости. Поскольку G_a - компактно, то далее в параграфе исследуется существование раздутий пространств накрывающих множества вида $M = \mathcal{G} \times \mathbb{D}$, где $\mathcal{G}$ - некоторое компактное множество.

Через $bM = \mathcal{G} \times \mathbb{T}$ обозначается ''боковая сторона'' пространства M, где $\mathbb{T}$ - единичная окружность комплексной плоскости. На пространстве M также определяются понятия тонкого множества и аналитической кривой. Множество $K \subset M$ называется *тонким*, если $bM \cap K = \varnothing$ и при каждом фиксированном $x \in \mathcal{G}$ множество $K_x = \{z \in \mathbb{D} : (x, z) \in K\}$ конечно. Снова рассматриваются накрытия $\pi : L \to M$ пространства M некоторым топологическим пространством L, такие, что сужение $\pi^* : L^* \to M^*$ на $L^* = \pi^{-1}(M^*)$, где $M^* = M \setminus K$, есть n-листное неразветвленное накрытие для некоторого тонкого множества K. Вводятся обозначения $\mathbb{D}_x = \{x\} \times \mathbb{D}$ и $\mathbb{D}_x^* = \mathbb{D}_x \setminus K$, и кривая $\gamma(I)$ в M называется аналитической, если она целиком содержится в некотором множестве $\mathbb{D}_x^*$,

$x \in \mathcal{G}$. Кривая же на L^* называется аналитической, если она представляет собой поднятие некоторой аналитической кривой из M^*. Как и прежде, две точки $w_1, w_2 \in L^*$ называются эквивалентными, если $\pi(w_1) = \pi(w_2)$ и существует аналитическая кривая $\hat{\gamma}(I) \subset L^*$ такая, что $w_1 = \hat{\gamma}(0)$ и $w_2 = \hat{\gamma}(1)$. На пространстве L^* рассматривается считающая функция $\nu(w) = \mathrm{card}\{w' \in \pi^{-1}(\pi(w)) : w' \sim w\}$. Пусть $\pi_1 : bL \to bM$ - сужение накрытия $\pi : L \to M$ на $bL = \pi^{-1}(bM)$. Так как $bM \subset M^*$, то π_1 осуществляет неразветвленное n-листное накрытие. Наконец, определяется множество $E = \pi^{-1}(\mathcal{G} \times \{1\})$ и n-листное неразветвленное накрытие $\pi_2 : E \times \mathbb{T} \to bM$, полагая $\pi_2((y, \xi)) = (x, \xi)$ для $(y, \xi) \in E \times \mathbb{T}$ с $\pi(y) = (x, 1)$. Тогда тождественное равенство функции ν единице приводит к следующим результатам:

Лемма 3.3.1. *Пусть $\nu(w) = 1$ для любого $w \in bL$. Тогда существует такой послойный гомеоморфизм $\sigma : bL \to E \times \mathbb{T}$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} bL \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E \times \mathbb{T} \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & bM & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\nu(w) = 1$ для любого $w \in L^*$. Тогда существует раздутие $E \times \mathbb{D}$ множества L такое, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[dr, "\pi"'] & & E \times \mathbb{D} \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

коммутативна, где $\pi_1 : E \times \mathbb{D} \to M : (y, z) \mapsto (x, z)$ с $(x, 1) = \pi(y)$, есть неразветвленное n-листное накрытие, а $\varphi : E \times \mathbb{D} \to L$ - раздувающее отображение.

Глава 4 посвящена изучению алгебраических поверхностей Бора-Римана порожденных полиномами с обобщенными аналитическими коэффициентами. Основные результаты данной главы были опубликованы в работе [BG3]. Основной целью является доказательство локального постоянства считающей функции ν на алгебраических поверхностях Бора-Римана с применением чисто алгебраических методов. Для этого, в первом параграфе главы доказываются следующие результаты, характеризующие множества корней полиномов с непрерывными коэффициентами:

Лемма 4.1.1. *Пусть K - компактное множество и $p(t, z) = z^n + g_1(t) z^{n-1} + \ldots + g_{n-1}(t) z + g_n(t), (t, z) \in \mathbb{C} \times K$, - полином с непрерывными коэффициентами: $g_i \in C(K), i = \overline{1, n}$. Пусть, далее, функция $f \in C(K)$ удовлетворяет условию $p(t, f(t)) = 0, t \in K$, и пусть $C = \max_{1 \le i \le n}\{||g_i||\}$. Тогда $||f|| := \sup_{t \in K} |f(t)| < 1 + C$.*

Лемма 4.1.2. *Пусть $K = [0, 1]$, $p(t, z) = z^n + g_1(t) z^{n-1} + \ldots + g_n(t)$ - полином с непрерывными коэффициентами: $g_i \in C(K), i = \overline{1, n}$, и с дискриминантом всюду отличным от нуля: $d_p(t) \neq 0, t \in K$. Тогда существуют ровно n функций*

$h_i \in C(K), i=\overline{1,n}$, попарно не совпадающих ни в одной точке K и представляющих множество решений уравнения $p(t,z)=0$ над K, то есть:

$$p(t, h_i(t)) = 0, t \in K, i = \overline{1,n}.$$

Для функции $h \in C(K)$ и числа $\delta > 0$ обозначим $B_\delta(h) = \{f \in C(K) : ||f-h|| < \delta\}$. Основным инструментом в этой части работы является следующая лемма.

Лемма 4.1.3. *В условиях предыдущей леммы для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ такое, что для всякого набора функций $\varepsilon_i \in C(K), \varepsilon_i : K \to \mathbb{C}$ с $||\varepsilon_i|| < \varepsilon, i = \overline{1,n}$ найдутся n функций $\tilde{h}_i \in B_\delta(h_i), i=\overline{1,n}$ для которых при каждом $t \in K$ точки $\tilde{h}_i(t), i = \overline{1,n}$, представляют собой n различных нулей ''возмущенного'' полинома*

$$p_\varepsilon(t,z) := z^n + \sum_{i=1}^{n} (g_i(t) + \varepsilon_i(t)) z^{n-k}. \tag{2}$$

Во втором параграфе рассматривается полином $P_s(z) = P(s,z) = z^n + f_1(s)z^{n-1} + ... + f_n(s), (s,z) \in \Delta^0 \times \mathbb{C}$, с обобщенными аналитическими на Δ^0 коэффициентами $f_i(s)$, $i = \overline{1,n}$, и с дискриминантом $d_p(s)$, который, очевидно, также является обобщенной аналитической функцией. Тогда множество нулей $N_p = N(d_p)$ функции d_p либо образует тонкое подмножество в Δ^0, либо совпадает с Δ^0. Предполагается, что имеет место первый нетривиальный случай и определяются пространство

$$\Delta^0_p = \{(s,z) \in \Delta^0 \times \mathbb{C} : P(s,z) = 0\},$$

и накрытие

$$\pi : \Delta^0_p \to \Delta^0 : (s,z) \mapsto s.$$

Поскольку сужение $\pi|_{\Delta^*_p} : \Delta^*_p = \pi^{-1}(\Delta^*) \to \Delta^*$ является неразветвленным n-листным накрытием над $\Delta^* = \Delta^0 \setminus N_p$, то пространство Δ^0_p является алгебраической поверхностью Бора-Римана. Как показано во второй главе работы, локальное постоянство считающей функции ν на Δ^*_p непосредственно следует из следующего результата, доказательство которого в этой части работы ведется исключительно алгебраическими методами.

Теорема 4.2.1. *У каждого элемента $w \in \Delta^*_p$ найдется такая окрестность V, что для любого $x \in V$ имеет место неравенство $\nu(x) \geq \nu(w)$.*

Таким образом, на алгебраической поверхности Бора-Римана Δ^0_p устанавливается следующий результат:

Следствие 4.2.1. *Функция $\nu : \Delta^*_p \to \mathbb{Z}_+$ локально постоянна на Δ^*_p.*

Литература

[1] Bohr H. *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I.* Acta Math., 45, 1924, 29-127.

[2] Bohr H. *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, II.* Acta Math., 46, 1925, 101-214.

[3] Bohr H. *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, III.* Acta Math., 47, 1926, 237-281.

[4] Walther A. *Algebraische Funktionen von fastperiodischen Funktionen*. Monatshefte fur Mathematik und Physik, Bd. 40, 1933, 444-457.

[5] Cameron R.H. *Implicit functions of almost periodic functions*. Bull. Am. Math. Soc., 40, 1934, 895-904.

[6] Bohr H., Flanders D.A. *Algebraic equation with almost-periodic coefficients*. Mat.-fysike Medd., 15, 1937, 1-49.

[7] Arens R., Singer I.M. *Generalized analytic functions*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 81, N. 2, 1956, 379-393.

[8] Форстер О., *Римановы поверхности*, пер. с нем., М.: Мир, 1980.

[9] Григорян С.А. *Обобщенные аналитические функции*. Успехи Мат. Наук, том 49, вып. 2, 1994, 3-43.

[10] Энгелькинг Р., *Общая топология*, пер. с англ., М.: Мир, 1986.

[11] Моррис С., *Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп*, пер. с англ., М.: Мир, 1980.

[12] Hoffman K., *Boundary behaviour of generalized analytic functions*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 87, 1958, 447-466.

[13] Helson H., Lowdenslager D. *Prediction theory and Fourier series in several variables*. Acta Math., vol. 99, 1958, 165-202.

[14] Ahern P.R., Sarason D. *The H^p spaces of a class of function algebras*. Acta Math., vol. 117, 1967, 123–163.

[15] Meeker L.D. *Some generalized Hardy spaces*. Canad. J. Math., vol. 19, 1967, 621-628.

[16] Григорян С.А. *Теорема Фату для обобщенных аналитических функций*, Изв. НАН Армении, Математика, Т. 31, N. 6, 1996, 31-52.

[17] Forelli F. *Analytic measures*. Pacific J. Math., vol. 13, N. 2, 1963, 571-578.

[18] Forelli F. *Analytic and quasi-invariant measures*. Acta Math., vol. 118, 1967, 33-59.

[19] De Leeuw K., Gliksberg I. *Quasi-invariance and analyticity of measures on compact groups*. Acta Math., vol. 109, 1963, 179-205.

[20] Григорян С.А. *Об алгебрах, порожденных аналитическими по Аренсу-Зингеру функциями*. ДАН Арм. ССР, том 68, N. 3, 1979, 146-149.

[21] Григорян С.А. *Об особенностях обобщенных аналитических функций*. ДАН Арм. ССР, том 71, N. 2, 1980, 65-68.

[22] Григорян С.А. *Максимальные алгебры обобщенных аналитических функций*. Изв. АН Арм. ССР, том 16, N. 5, 1981, 358-365.

[23] Григорян С.А. *Распределение значений обобщенных аналитических функций*. ДАН СССР, том 296, N. 6, 1987, 1293-1296.

[24] Григорян С.А. *Об одном свойстве почти периодических аналитических функций*. Мат. заметки, том 45, N. 4, 1989, 13-17.

[25] Григорян С.А. *Обобщенные по Аренсу-Зингеру аналитические функции*. Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем., том 24, N. 3, 1989, 226-247.

[26] Григорян С.А. *Обобщенные мероморфные функции*, Изв. РАН., Сер. матем., том 57, вып. 1, 1993, 147-166.

[27] Григорян С.А. *Дивизор обобщенной аналитической функции*, Матем. заметки, том 61, вып. 5, 1997, 655-661.

[28] Миротин А.Р., Романова М.А. *Интерполяционные множества алгебры обобщенных аналитических функций*, Изв. вузов. Матем., N 3, 2007, 51-59.

[29] Миротин А.Р. *О границе Шилова и спектре Гельфанда алгебр обобщенных аналитических функций*, Изв. вузов. Матем., N 3, 2011, 41-49.

[30] Leibowitz G.M. *Vector valued vanishing algebras*, J. Math. Anal. Appl., vol. 13, 1966, 383-388.

[31] Mallios A. *On the algebra of generalized analytic functions*, J. Math. Anal. Appl., vol. 38, 1972, 501-508.

[32] Grigorian S.A., Gumerov R.N., Kazantsev A.V., *Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups*, Lobachevskii Journal of Mathematics, vol. 6, 2000, 39-46.

Публикации автора по теме диссертации

[BG1] **Бекназарян А.Ф., Григорян С.А. *О поверхностях Бора-Римана*. Известия НАН Армении: Математика, том 49, N 5, 2014, 76-88.**

[B1] **Beknazaryan A.F. *Topologies on the generalized plane*. Proc. of YSU, Phys. and Math. Sciences, N 3, 2014, 8-12.**

[BG2] **Beknazaryan A.F., Grigoryan S.A. *Survey on the surfaces generated by generalized analytic functions*. Armenian J. of Mathematics, V. 6, N 2, 2014, 67-122.**

[BG3] **Beknazaryan A.F., Grigoryan S.A. *On the Bohr-Riemann surfaces, II*. J. of Contemporary Mathematical Analysis, V. 50, N 1, 2015, 32-43.**

[B2] **Beknazaryan A.F. *On blowup of certain covering spaces*. Proc. of YSU, Phys. and Math. Sciences, N 1, 2015, 8-11.**

[B3] Beknazaryan A.F. *Bohr–Riemann surfaces*. Материалы докладов международной конференции ''Complex Analysis and Related Topics'', Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, 2014, 9-10.

[B4] Бекназарян, А.Ф. *Об одном свойстве обобщенных гармонических функций*. Труды мат. Центра им. Н.И. Лобачевского: Изд-во Казанского мат. общества, том 50, 2014, 26-27.

[B5] Бекназарян, А.Ф. *Об эквивалентности линейных связностей подпространств обобщенной плоскости*. Материалы докладов десятой международной молодежной научной конференции ''Тинчуринские чтения'', Казань, КГЭУ, том 3, 2015, 39-40.

Ամփոփագիր

1956 թվականին Ռ. Արենսը և Ի.Մ. Զինգերը ներմուծեցին ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների գաղափարը, որոնք հնարավորություն ընձեռեցին ստանալ նոր առանձնահատկություններ՝ կիրառելով անալիտիկ ֆունկցիների տեության դասական մեթոդները: Ավելին, այդ հեղինակների կողմից առաջարկված մոտեցումը հնարավորություն ընձեռեց նորովի մեկնաբանել հայտնի թեորեմներ անալիտիկ համարյա պարբերական ֆունկցիների տեսությունից, որը հիմնադրել է Հ. Բորը: Այսպիսով՝ ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների տեսությունը դարձավ անալիտիկ համարյա պարբերական ֆունկցիների և միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների համատեղ ուսումնասիրման միասնական գործիք: Ատենախոսությունում հետազոտվել են ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաներով ծնված մակերևույթների կառուցվածքները և ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- Ներկայացված է ընդհանրացված հարթության կառուցվածքի նկարագիրը և տրված են ընդհանրացված հարթության և նրա ենթաբազմությունների, ինչպես նաև ընդհանրացված հարթությունը ծածկող տարածությունների վրա առաջացող տարբեր տոպոլոգիաների բնութագիրը և համեմատությունը: Նկարագրված է ընդհանրացված հարթության վրա ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների զրոների բազմությունը:

- Սահմանված է Բոր-Ռիմանի մակերևույթի գաղափարը և ներկայացված են նրա հիմնական հատկությունները: Տրված է Բոր-Ռիմանի մակերևույթների վրա խմբային կառուցվածքի սահմանման մեթոդ, որով չճյուղավորված վերջավոր թերթանի ծածկող արտապատկերումները վեր են ածվում խմբային հոմոմորֆիզմների՝ Բոր-Ռիմանի մակերևույթից դեպի ընդհանրացված հարթության ենթաբազմություններ: Նկարագրված են ստացված խմբերի կառուցվածքները տոպոլոգիական իզոմորֆիզմի ճշտությամբ:

- Սահմանված է Բոր-Ռիմանի հանրահաշվական մակերևույթի գաղափարը և ապացուցված է, որ ընդհանրացված հարթության յուրաքանչյուր չճյուղավորված վերջավոր թերթանի ծածկող արտապատկերում հանդիսանում է Գալուայի հանրահաշվական ծածկող արտապատկերում:

- Բոր-Ռիմանի մակերևույթների վրա սահմանված են անալիտիկ կորերի և համարժեք կետերի գաղափարները, որոնց միջոցով սահմանված է ν հաշվող ֆունկցիան, որը Բոր-Ռիմանի մակերևույթի յուրաքանչյուր կետ համապատասխանության մեջ է դնում նրան համարժեք կետերի քանակը: Բոր-Ռիմանի մակերևույթների վրա գործող ընդհանրացված հարթության ծածկող արտապատկերումների համար կառուցողական եղանակով ապացուցված է ծածկող հոմոտոպիայի մասին թեորեմի տարբերակը, որի միջոցով ապացուցված է Բոր-Ռիմանի մակերևույթների վրա ν ֆունկցիայի լոկալ հաստատուն լինելը: Նաև՝ անընդհատ գործակիցներով բազմանդամների արմատների բազմությունների համաձևման միջոցով հանրահաշվական մեթոդներով ապացուցված է ν ֆունկցիայի լոկալ հաստատունությունը Բոր-Ռիմանի հանրահաշվական մակերևույթների վրա:

- Սահմանված է տոպոլոգիական տարածության ընդարձակման գաղափարը և հետազոտված է Բոր-Ռիմանի մակերևույթների հետ համանման կառուցվածք ունեցող տարածությունների ընդարձակման գոյությունը: Ներկայացված են նման ընդարձակման գոյությունն ապահովող պայմանները:

Summary

In 1956 R. Arens and I.M. Singer introduced the notion of generalized analytic functions which allowed to obtain new features while applying the classical techniques from the theory of analytic functions. Furthermore, the method suggested by those authors allowed to give a new treatment of the well-known theorems from the theory of analytic almost periodic functions first studied by H. Bohr. Thus, the theory of generalized analytic functions became a unified tool for studying both the theory of almost periodic functions and the theory of analytic functions in the unit disc. The structures of the surfaces generated by generalized analytic functions are studied in the thesis and the following main results are obtained:

- The structure of the generalized plane is presented and the characterizations as well as the comparison of different topologies arising on the generalized plane and on its subspaces are given. The sets of zeros of generalized analytic functions are described.

- The notion of the Bohr-Riemann surface is introduced and its main properties are established. The method of defining a group structure on the Bohr-Riemann surfaces turning the unbranched finite sheeted coverings into the group homomorphisms from the Bohr-Riemann surfaces to the punctured generalized plane as well as the structures of those groups up to a topological isomorphism are presented.

- The notion of an algebraic Bohr-Riemann surface is defined and it is proved that every unbranched finite sheeted covering of the punctured generalized plane is an algebraic Galois covering.

- Using the notions of analytic paths and equivalent points on the Bohr-Riemann surfaces, the counting function ν, which assigns to each point of the Bohr-Riemann surface the number of its equivalent points, is defined. The constructive proof of the version of the covering homotopy theorem is given. Using that theorem it is proved that the function ν is locally constant on the Bohr-Riemann surfaces. Also, via the uniformization of the sets of zeros of the polynomials with continuous coefficients, the algebraic proof of the local constantness of the function ν on the algebraic Bohr-Riemann surfaces is given.

- The notion of a blowup of a topological space is introduced and the existence of the blowup of spaces with structures similar to the structures of the Bohr-Riemann surfaces is investigated. The conditions guaranteeing the existence of blowup are presented.