ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Լինդա Ալբերտի Խաչատրյան

ՄԱՐՏԻՆԳԱԼ–ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Ա.01.05 ”Հավանականությունների տեսություն և մաթեմատիկական
վիճակագրություն”մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ԵՐԵՎԱՆ — 2014

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Хачатрян Линда Альбертовна

МАРТИНГАЛ–РАЗНОСТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук по специальности
А.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»

Ереван — 2014

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝: ֆիզմաթ.գիտ.դոկտոր Բ.Ս. Նահապետյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝: ֆիզմաթ.գիտ.դոկտոր Վ.Կ. Օհանյան

ֆիզմաթ.գիտ.դոկտոր Ս.Կ. Պողոսյան

Առաջատար կազմակերպություն՝: Լե Մանի համալսարանի մաթեմատիկայի լաբորատորիա, Ֆրանսիա

Պաշտպանությունը կկայանա 2014 թ մայիսի 27-ին ժ. 15:00 Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ -ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2014թ ապրելի 26-ին:
Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Институте математики НАН РА.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук Нахапетян Борис Сергеевич

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук Оганян Виктор Кароевич

доктор физ.-мат. наук Погосян Сурен Капушович

Ведущая организация: Математическая лаборатория университетв Ле Ман, Франция

Защита диссертации состоится “27” мая 2014 года в 15:00 часов на заседании специализированного совета ВАК-а 050 при Ереванском государственном университете (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан “26”апреля 2014 года.
Ученый секретарь
специализированного совета Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Задача установления классических предельных теорем (центральная, локальная, функциональная предельные теоремы, закон повторного логарифма и т.д.) для сумм зависимых случайных величин является одной из самых актуальных в современной теории вероятностей. Изучение случайных процессов с зависимыми компонентами (процессы с перемешиванием, мартингалы и т.д.) началось еще в середине прошлого века и со временем стало во многом состоявшейся теорией (см., например, монографии Ибрагимова и Линника [16], Холла и Хейде [4], Нахапетяна [11]), чего нельзя сказать о случайных полях. Задача распространения теории предельных теорем на многомерные объекты (случайные поля) диктуется как внутренними потребностями самой теории случайных полей, так и проблемами математической статистической физики. Отметим, например, вопросы эквивалентности гиббсовских ансамблей, поведение суммарного спина в критической точке и т.д.

Среди методов, используемых при доказательстве предельных теорем, одним из основных является мартингальный метод. Однако данный метод, прекрасно зарекомендовавший себя в одномерных задачах, в применении к случайным полям пока еще не столь продуктивен. Трудности применения мартингального метода в многомерных задачах обусловлены, прежде всего, тем, что определение мартингала существенным образом использует свойство полной упорядоченности действительной прямой, тогда как пространственные структуры этим свойством не обладают.

Первоначально при построении многомерных мартингалов рассматривались семейства случайных величин, параметризованные элементами возрастающей последовательности некоторого направленного множества (см., например, работы Крикеберга [6], Хелмса [5] и Чоу [2]). Далее, Кароли и Уолш ([1]) для случая размерности 2 предложили рассматривать стохастические семейства случайных величин, параметризованные возрастающей последовательностью прямоугольников в первой четверти вещественной плоскости. Этот же подход применялся и в больших размерностях (см., например, работы Тджостейма [15], Иванова и Мерцбаха [8], Иллига и Траун-Вана [7]). В отмеченных работах основной целью являлось установление различных теорем сходимости для многомерных мартингалов, тогда как вопрос справедливости классических предельных теорем, верных для сумм независимых случайных величин, для таких мартингалов практически не рассматривался.

Ситуация изменилась с публикацией работ Нахапетяна и Петросяна [12, 13]. В этих работах был введен класс случайных полей, суммы компонент которых образуют многомерный мартингал относительно любой последовательности возрастающих подмножеств целочисленной решетки. Эти поля были названы мартингал–разностными случайными полями. Для таких полей были установлены многомерные варианты некоторых классических предельных теорем. Более того, в дальнейшем было показано, что мартингал–разностные случайные поля интересны и с точки зрения задач математической статистической физики (см., например, работы Нахапетяна [9, 10] и Погосяна и Роелли [14]).

В настоящей диссертации на основе развития мартингального метода изучаются асимптотические свойства случайных полей. Результаты применяются к некоторым задачам математической статистической физики.

Цель работы.

1. Построение новых классов мартингал–разностных случайных полей.
2. Установление предельных теорем для мартингал–разностных случайных полей.
3. Построение ассоциированных мартингал–разностных случайных полей.
4. Расширение класса гиббсовских случайных полей, для которых справедливы основные предельные теоремы, верные для сумм независимых случайных величин.
5. Иллюстрация возможностей мартингального метода при изучении поведения суммарного спина в критической точке модели Изинга.

Методы исследования. В работе используются методы теории вероятностей, математической статистической физики и комбинаторики.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Большая часть результатов носит теоретический характер. В диссертации также приводятся результаты применения разрабатываемого мартингального метода к определенным вопросам математической статистической физики (предельные теоремы для гиббсовских случайных полей, поведение суммарного спина в критической точке).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на 6 международных конференциях:

1. Probabilistic and Analytical Methods in Mathematical Physics, Tsaghkadzor, 2009 (совместно с Нахапетяном Б.С.);
2. Armenian Mathematical Union Annual Session 2012, Yerevan (совместно с Нахапетяном Б.С.);

3. Stochastic and Analytic Methods in Mathematical Physics, Yerevan, 2012;
4. Armenian Mathematical Union Annual Session 2013, Yerevan;
5. The 22nd Annual International Conference on the Discrete Simulation of Fluid Dynamics, Yerevan, 2013;
6. Second International Conference Mathematics in Armenia, Tsaghkadzor, 2013.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 — в сборниках тезисов докладов международных конференций. Список опубликованных работ приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, прелиминариев, 4 глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 103 страницы машинописного текста. Библиография содержит 52 наименования.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы, дается обзор результатов, связанных с темой диссертации, а также приводится краткое описание ее содержания.

В **прелиминариях** приводятся основные понятия и обозначения, используемые в работе.

Первая глава диссертации посвящена различным способам построения мартингал–разностных случайных полей.

Случайное поле $(\xi_t) = \left(\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d\right)$ называется *мартингал–разностным случайным полем* (см. [12, 13]), если для всех $t \in \mathbb{Z}^d$

$$M\,|\xi_t| < \infty \qquad \text{и} \qquad M\left(\xi_t/\xi_s, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}\right) = 0 \text{ (п.н.)}.$$

Здесь $M\left(\xi_t/\xi_s, s \in Z^d \setminus \{t\}\right)$ — условное математическое ожидание ξ_t относительно σ-алгебры, порожденной случайными величинами ξ_s, $s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}$, а $\mathbb{Z}^d$ — d-мерная целочисленная решетка, $d \geq 1$.

В п. 1.1 приведены способы построения мартингал–разностных случайных полей, предложенные в работе [13].

В п. 1.2 вводится класс $\mathscr{P}$ случайных полей, на основе которых строится один из базовых примеров мартингал–разностных случайных полей, рассматриваемых в диссертации. Это класс случайных полей с кусочно–постоянными по каждой из переменных конечномерными распределениями, т.е. таких полей, для которых существует разбиение

$\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ фазового пространства X, обладающее следующим свойством. Для всех $x, x' \in X_k$, $k = \overline{1,n}$ имеет место равенство

$$P\left(\xi_t = x, \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right) = P\left(\xi_t = x', \xi_s = \bar{x}_s, s \in V\right),$$

где $\bar{x} \in X^V$, $t \notin V$, $V \in W$, $W = \left\{V \subset \mathbb{Z}^d, |V| < \infty\right\}$ — множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$.

Приводятся условия, при которых марковские и гиббсовские случайные поля принадлежат введенному классу $\mathscr{P}$.

В п. 1.3 приводятся условия мартингальности случайных полей.

Теорема 1. *Пусть (ξ_t) — случайное поле, конечномерные распределения которого кусочно–постоянны по каждой из переменных при разбиении $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ фазового пространства X. Если разбиение Π таково, что*

$$\sum_{x \in X_k} x = 0 \qquad \text{для всех } k = \overline{1,n},$$

то (ξ_t) является мартингал–разностным случайным полем.

Условие мартингальности для марковского случайного поля приводится в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть (ξ_t) — марковское случайное поле с фазовым пространством X, для которого существует разбиение $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$, такое, что при $x, x' \in X_k$*

$$P\left(\xi_t = x\right) = P\left(\xi_t = x'\right)$$

и

$$P\left(\xi_t = x / \xi_s = \bar{x}_s, s \in \partial t\right) = P\left(\xi_t = x' / \xi_s = \bar{x}_s, s \in \partial t\right)$$

для всех $k = \overline{1,n}$ и $\bar{x} \in X^{\partial t}$, где ∂t — окрестность точки t, $t \in \mathbb{Z}^d$. Если разбиение Π таково, что

$$\sum_{x \in X_k} x = 0 \qquad \text{для всех } k = \overline{1,n},$$

то марковское случайное поле (ξ_t) является мартингал–разностным.

Предлагаемый в диссертации подход к построению мартингал–разностных случайных полей позволяет получить следующее обобщение известных условий на потенциал, при которых гиббсовское случайное поле является мартингал–разностным (см. [12]).

Теорема 3. *Пусть гиббсовское случайное поле (ξ_t) с фазовым пространством X задается потенциалом Φ, который принимает постоянные зна-*

чения на элементах некоторого разбиения $\Pi = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ *множества* X, *т.е. для всех* $V \in W$, $t \notin V$

$$\Phi_{V\cup\{t\}}\left(x_t x_V\right) = \Phi_{V,k}\left(x_V\right), \qquad x_t \in X_k, k = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Если разбиение Π *таково, что*

$$\sum_{x\in X_k} x = 0, \qquad k = \overline{1,n}, \tag{2}$$

то гиббсовское случайное поле (ξ_t) *является мартингал–разностным.*

Во **второй главе** диссертации рассматриваются вопросы, относящиеся к предельным теоремам для мартингал–разностных случайных полей. Основные результаты этой главы опубликованы в работах [Х3,Х4].

В п. 2.2 приводится точная асимптотика для моментов сумм компонент мартингал–разностного случайного поля, взятых по возрастающим подмножествам.

Для заданного случайного поля (ξ_t) положим $S_{V_n} = \sum\limits_{t\in V_n} \xi_t$, где V_n — d-мерный куб со стороной n, $n = 1, 2, ...$

Теорема 4. *Пусть* (ξ_t) *— однородное мартингал-разностное случайное поле с фазовым пространством* X. *Тогда для всех* $k = 1, 2, ...$

$$M\left(S_{V_n}\right)^{2k-1} = C_{2k-1} \cdot \left|V_n\right|^{k-1},$$

где постоянная C_{2k-1} *не зависит от* n.

Если, к тому же, случайное поле (ξ_t) *удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом* $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, *таким, что*

$$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \le |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty,$$

то для всех $k = 1, 2, ...$

$$M\left(S_{V_n}\right)^{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k}\left|V_n\right|^k + C_{2k}\left|V_n\right|^{k-1},$$

где $\sigma^2 = M\xi_0^2$, *а постоянная* C_{2k} *не зависит от* n.

Полученный в Теореме 4 результат позволяет доказать для мартингал–разностных случайных полей следующий усиленный вариант центральной предельной теоремы (ЦПТ).

Теорема 5. *Пусть* (ξ_t) *— однородное мартингал-разностное случайное поле с фазовым пространством* X, *удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом* $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, *таким, что*

$\boldsymbol{\varphi}_I(j) \leq |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j)$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty$, и пусть $M\xi_0^2 > 0$. Тогда для случайного поля (ξ_t) справедлива ЦПТ, причем для всех $k = 1, 2, ...$

$$M\left(\frac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}}\right)^k \to M\zeta^k \qquad \text{при } n \to \infty,$$

где D — символ дисперсии, а ζ — стандартно нормально распределенная случайная величина.

В п. 2.3 приводятся условия, при которых имеет место степенная скорость сходимости в ЦПТ для мартингал–разностных случайных полей. При тех же условиях доказывается закон повторного логарифма.

Теорема 6. *Пусть (ξ_t) — однородное мартингал-разностное случайное поле с фазовым пространством X, удовлетворяющее условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I \in W$, таким, что $\boldsymbol{\varphi}_I(j) \leq |I| \cdot \boldsymbol{\varphi}(j)$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}(j) < \infty$, и пусть $M\xi_0^2 > 0$. Тогда*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}} < x\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du \right| \leq C \cdot n^{-d/8},$$

где положительная постоянная C не зависит от n.

Теорема 7. *В условиях Теоремы 6 для случайного поля (ξ_t) справедлив закон повторного логарифма, т.е.*

$$P\left(\limsup_{n \to \infty} \frac{S_{V_n}}{\sqrt{2DS_{V_n} \ln\ln |V_n|}} = 1\right) = 1.$$

В **третьей главе** диссертации рассматривается задача построения ассоциированных мартингал–разностных случайных полей. Приводится способ, позволяющий посредством рандомизации каждому заданному случайному полю сопоставить некоторое (ассоциированное) случайное поле, которое при определенных условиях на фазовое пространство будет мартингал–разностным. Ассоциированные мартингал–разностные случайные поля могут быть использованы для изучения свойств заданного случайного поля, в том числе, при доказательстве предельных теорем. Результаты этой главы получены совместно с Нахапетяном Б.С. в работе [X1].

В п. 3.1 описывается процедура рандомизации. Пусть заданы конечные множества $X, Y \subset \mathbb{R}$ и некоторое сюръективное отображение $\varphi : Y \to X$. Обозначим через $\varphi^{-1}(x)$ прообраз $x \in X$ при отображении φ.

Пусть P — некоторое распределение вероятностей на X. Процедура рандомизации позволяет построить такое распределение вероятностей $\hat{P}$ на Y, что для всех $x \in X$

$$P_V(x) = \sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} \hat{P}_V(y), \qquad x \in X. \tag{3}$$

Обозначим через $R^{\varphi} = \{R^{\varphi,x}, x \in X\}$ — совокупность распределений вероятностей на Y, таких, что для каждого $x \in X$

$$R^{\varphi,x}(y) > 0, \quad y \in \varphi^{-1}(x) \qquad \text{и} \qquad R^{\varphi,x}(y) = 0, \quad y \notin \varphi^{-1}(x).$$

Такую совокупность R^{φ} распределений вероятностей будем называть рандомизацией на Y. Нетрудно проверить, что функция

$$\hat{P}(y) = \sum_{x \in X} R^{\varphi,x}(y)\, P(x), \qquad y \in Y,$$

является распределением вероятностей на Y и удовлетворяет условию (3).

В п. 3.2 доказывается теорема, иллюстрирующая применение принципа рандомизации к случайным полям.

Теорема 8. *Пусть задано случайное поле (ξ_t) с фазовым пространством X, множество Y, отображение $\varphi : Y \to X$ и совокупность рандомизаций $R^{\varphi} = \left\{R_t^{\varphi}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$. Тогда существует (ассоциированное) случайное поле (η_t) с фазовым пространством Y, такое, что $\xi_t = \varphi(\eta_t)$ для всех $t \in \mathbb{Z}^d$. Конечномерные распределения вероятностей ассоциированного случайного поля (η_t) имеют вид*

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \prod_{t \in V} R_t^{\varphi,x_t}(y_t) \cdot P(\xi_t = x_t, t \in V), \qquad y_t \in \varphi^{-1}(x_t),$$

$x_t \in X$, $t \in V$, $V \in W$.

Понятно, что случайное поле (η_t), ассоциированное со случайным полем (ξ_t), не обязательно единственно.

В п. 3.3 приводится ряд теорем, в которых доказывается, что ассоциированные случайные поля наследуют многие свойства заданного случайного поля, такие, как однородность, эргодичность, слабую зависимость, гиббсовость.

В п. 3.4 приводятся условия мартингальности ассоциированных случайных полей.

Теорема 9. *Пусть (ξ_t) — случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) — случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с* *полем* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности рандомизаций* R^φ. *Если для всех* $x \in X$ *и* $t \in \mathbb{Z}^d$

$$\sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^{\varphi,x}(y) = 0, \tag{4}$$

тогда случайное поле (η_t) *является мартингал–разностным случайным полем.*

В случае, когда при построении ассоциированного случайного поля используется совокупность $R^\varphi = \{R_t^\varphi, t \in \mathbb{Z}^d\}$ равномерных рандомизаций, задаваемых формулой

$$R_t^{\varphi,x}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\varphi^{-1}(x)|}, & y \in \varphi^{-1}(x), \\ 0, & y \notin \varphi^{-1}(x), \end{cases}$$

Теорема 9 принимает более простой вид.

Теорема 10. *Пусть* (ξ_t) *— случайное поле с фазовым пространством* X, (η_t) *— случайное поле с фазовым пространством* Y, *ассоциированное с полем* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности* R^φ *равномерных рандомизаций. Если отображение* φ *и множество* Y *таковы, что*

$$\sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} y = 0 \qquad \text{для всех } x \in X,$$

тогда случайное поле (η_t) *является мартингал-разностным случайным полем.*

Применение принципа рандомизации при построении гиббсовских мартингал–разностных случайных полей иллюстрируется следующей теоремой.

Теорема 11. *Пусть* (ξ_t) *— гиббсовское случайное поле с фазовым пространством* X, (η_t) *— случайное поле с фазовым пространством* Y, *ассоциированное с полем* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности рандомизаций* R^φ. *Если для всех* $x \in X$ *и* $t \in \mathbb{Z}^d$

$$\sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^{\varphi,x}(y) = 0,$$

тогда (η_t) *является гиббсовским мартингал–разностным случайным полем.*

Предельные теоремы для мартингал–разностных случайных полей распространяются и на ассоциированные мартингал–разностные случайные поля. Соответствующие результаты приводятся в п. 3.5 диссертации.

В **четвертой главе** диссертации рассматриваются вопросы, связанные с применением мартингального метода в математической статистической физике.

В п. 4.1 приводятся результаты, позволяющие существенно расширить класс гиббсовских случайных полей, для которых справедливы предельные теоремы, верные для сумм независимых случайных величин.

Известно (см. [3]), что совокупность гиббсовских случайных полей, соответствующих заданному потенциалу Φ, образует симплекс, т.е. непустое выпуклое замкнутое множество. Крайние точки этого множества являются эргодическими гиббсовскими случайными полями. В частности, если гиббсовское случайное поле единственно, то оно эргодично. Таким образом, оказывается справедливым следующей факт.

Теорема 12. *Пусть Φ — трансляционно–инвариантный потенциал и X — соответствующее пространство спинов, причем существует разбиение Π множества X, удовлетворяющее условию (2), а потенциал Φ удовлетворяет условию (1). Тогда для каждой крайней точки симплекса гиббсовских случайных полей, отвечающих потенциалу Φ, справедливы центральная и функциональная предельные теоремы. Если, к тому же, потенциал Φ ограничен, то для каждой крайней точки симплекса гиббсовских случайных полей, отвечающих потенциалу Φ, справедлива локальная предельная теорема.*

Известно (см. [3, 11]), что в области единственности гиббсовские случайные поля удовлетворяют условию равномерного сильного перемешивания. При определенных условиях на потенциал удается установить и скорость убывания соответствующего коэффициента перемешивания. Справедливость следующего утверждения следует из Теоремы 9.4.1 в [11].

Утверждение 1. *Пусть гиббсовское случайное поле (ξ_t) задается потенциалом Φ, который удовлетворяет следующим условиям*

$$\frac{1}{2}e^{4\|\Phi\|}\left(e^{4\|\Phi\|}-1\right)<1, \tag{5}$$

$$\sum_{0\in V\in W}|V|\,(diamV)^{\gamma}\sup_{x\in X^V}|\Phi_V\,(x)|<\infty, \qquad \gamma>0, \tag{6}$$

где

$$\|\Phi\|=\sum_{0\in V\in W}|V|\sup_{x\in X^V}|\Phi_V\,(x)|, \qquad diamV=\sup_{t,s\in V}|t-s|\,.$$

Тогда (ξ_t) удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\boldsymbol{\varphi}_I$, $I\in W$, таким, что

$$\boldsymbol{\varphi}_I\,(j)\le|I|\,C_\Phi\left(\frac{\ln j}{j}\right)^{\gamma}, \qquad \gamma>0,$$

где $0 < C_\Phi < \infty$ — некоторая постоянная.

Таким образом, для гиббсовских случайных полей оказываются справедливыми следующие теоремы.

Теорема 13. *Пусть (ξ_t) — однородное гиббсовское случайное поле с фазовым пространством X, отвечающее потенциалу Φ, такое, что $M\xi_0^2 > 0$. Пусть существует разбиение Π множества X, удовлетворяющее условию (2), а потенциал Φ удовлетворяет условию (1). Если, к тому же, потенциал Φ удовлетворяет условиям (5) и (6) при $\gamma > d-1$, тогда для гиббсовского случайного поля (ξ_t) справедлива ЦПТ, причем для всех $k = 1, 2, \ldots$*

$$M\left(\frac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}}\right)^k \to M\zeta^k \qquad \text{при } n \to \infty,$$

где ζ — стандартно нормально распределенная случайная величина.

Теорема 14. *Пусть (ξ_t) — однородное гиббсовское случайное поле с фазовым пространством X, отвечающее потенциалу Φ, такое, что $M\xi_0^2 > 0$. Пусть существует разбиение Π множества X, удовлетворяющее условию (2), а потенциал Φ удовлетворяет условию (1). Если, к тому же, потенциал Φ удовлетворяет условиям (5) и (6) при $\gamma > d-1$, тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P\left(\frac{S_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}} < x\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du\right| \le C\cdot n^{-d/8},$$

где положительная постоянная C не зависит от n.

Теорема 15. *В условиях Теоремы 14 для гиббсовского случайного поля (ξ_t) справедлив закон повторного логарифма.*

Принцип рандомизации при построении мартингал–разностных случайных полей также может быть использован для расширения класса гиббсовских случайных полей, для которых справедливы предельные теоремы. Соответствующие результаты приводятся в п.4.1 диссертации.

В п. 4.2 рассматриваются модель Изинга и определенным образом связанная с ней мартингальная модель.

Модель Изинга задается следующим потенциалом парного взаимодействия

$$\Phi_V(x) = \begin{cases} -\beta h\cdot x_t, & V = \{t\} \\ -\beta\cdot x_t x_s, & V = \{t,s\} \text{ и } \|t-s\| = 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

где $x_t, x_s \in X = \{-1, 1\}$, $\|t-s\| = \sum\limits_{i=1}^{d}\left|t^{(i)} - s^{(i)}\right|$, $t, s \in \mathbb{Z}^d$, параметр $h \in \mathbb{R}$ соответствует внешнему полю, а параметр $\beta > 0$ пропорционален обратной температуре.

Известно, что существует определенное критическое значение β_{cr} обратной температуры, такое, что при $h = 0$ и $\beta > \beta_{cr}$ имеет место феномен разделения фаз (неединственность). При других значениях параметров ($h \neq 0$, $\beta > 0$ и $h = 0$, $0 < \beta < \beta_{cr}$) гиббсовское случайное поле, соответствующее модели Изинга, единственно, и для его суммарного спина справедлива ЦПТ. В критической точке $(\beta_{cr}, 0)$ соответствующее случайное поле также единственно. Однако, при $h = 0$ и $\beta \uparrow \beta_{cr}$ корреляция между спинами резко возрастает, что приводит к мысли о том, что ЦПТ в критической точке $(0, \beta_{cr})$ не должна выполняться.

В работе [10] приведен пример мартингальной модели, определенным образом связанной с моделью Изинга, для которой ЦПТ верна даже в критической точке. Там же была получена формула связи конечномерных распределений суммарных спинов модели Изинга и мартингальной модели. В связи с этим, автор высказал идею о том, что изучение полученной формулы связи конечномерных распределений вероятностей позволит установить асимптотическое поведение суммарного спина модели Изинга в ее критической точке.

Приводимые в п. 4.3 результаты иллюстрируют возможность применения мартингального метода при изучении поведения суммарного спина модели Изинга. Часть результатов этого параграфа опубликована в совместной с Нахапетяном Б.С. работе [Х2].

Для упрощения вычислений, рассматривается гиббсовское случайное поле (ξ_t), соответствующее модели Изинга, с фазовым пространством $X = \{0, 1\}$ (переход к фазовому пространству $\{-1, 1\}$ не составляет труда). Пусть случайное поле (η_t) с фазовым пространством $Y = \{-1, 0, 1\}$ ассоциировано с (ξ_t) посредством отображения $\varphi(y) = y^2$, $y \in Y$ и однородной совокупности равномерных рандомизаций $R^\varphi = \left\{1/\left|\varphi^{-1}(x)\right|, x \in X\right\}$. Тогда случайное поле (η_t) является однородным гиббсовским мартингал–разностным случайным полем, причем для всех $V \in W$

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = 2^{-\sum\limits_{t \in V} x_t} P(\xi_t = x_t, t \in V),$$

$y_t \in \varphi^{-1}(x_t)$, $x \in X^V$.

Обозначим $S_V^\xi = \sum\limits_{t \in V} \xi_t$ и $S_V^\eta = \sum\limits_{t \in V} \eta_t$ для всех $V \in W$. В следующей теореме приводится связь распределений вероятностей суммарных спинов S_V^ξ и S_V^η.

Теорема 16. *Распределение вероятностей S_V^ξ через распределение вероятностей S_V^η выражается следующим образом*

$$P\left(S_V^\xi = 0\right) = P(S_V^\eta = 0) + 2 \sum_{m=1}^{[|V|/2]} (-1)^m P(S_V^\eta = 2m),$$

$$P\left(S_V^{\xi}=k\right)=2^k\sum_{m=0}^{[(|V|-k)/2]}(-1)^m\frac{k+2m}{k+m}C_{k+m}^{m}P\left(S_V^{\eta}=k+2m\right)$$

для всех $k=1,2,...,|V|$.

Далее приводится выражение для характеристической функции суммы S_V^{ξ} через распределение вероятностей S_V^{η}. Интерес представляют возникающие при этом коэффициенты, которые являются многочленами Чебышева первого рода.

Теорема 17. *Характеристическая функция* $f_{S_V^{\xi}}(t)$ *суммарного спина* S_V^{ξ} *имеет следующий вид*

$$f_{S_V^{\xi}}(t)=\sum_{k=-|V|}^{|V|}\cos\left(k\arccos e^{it}\right)P\left(S_V^{\eta}=k\right).$$

Также удалось установить связь моментов сумм S_V^{ξ} и S_V^{η}, что открывает возможность применения метода моментов для изучения поведения суммарного спина модели Изинга.

Теорема 18. *Для всех* $k=1,2,...$

$$M\left(S_V^{\xi}\right)^k=\sum\frac{k!}{m_1!m_2!...m_k!\,(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}...(k!)^{m_k}}\cdot\frac{1}{(2m-1)!!}\sum_{i=1}^{m}a_{m,i}M\left(S_V^{\eta}\right)^{2i},$$

где суммирование ведется по всем целым $m_1,m_2,...,m_k\geq 0$*, таким, что* $1\cdot m_1+2\cdot m_2+...+k\cdot m_k=k$, $m=\sum\limits_{i=1}^{k}m_i$*, а коэффициенты* $a_{m,i}$ *определяются из следующего соотношения*

$$\prod_{s=0}^{m-1}\left(x^2-s^2\right)=\sum_{i=1}^{m}a_{m,i}x^{2i}.$$

Поскольку для мартингальной модели центральная и локальная предельные теоремы остаются справедливыми и в критической точке, то полученные в Теоремах 16, 17 и 18 соотношения могут быть использованы при нахождении предельного закона для суммарного спина модели Изинга в ее критической точке.

Список литературы

[1] Cairoli R., Walsh J., Stochastic integrals in the plane. Acta Math. 134, 1975, 111–183

[2] Chow Y. S., Martingales in a σ-finite measure space indexed by directed sets. Trans. Amer. Math. Soc. 97, 1960, 254–286

[3] Dobrushin R.L., Gibbs random fields for latties systems with pair-wise interaction. Funct. Anal. Appl. 2, 1968, 292–301

[4] Hall P., Heyde C.C., Martingale limit theory and its applications. Academic Press, New York–London, 1980

[5] Helms L.L., Mean convergence of martingales. Trans. Amer. Math. Soc. 87, 1958, 439–446

[6] Krikeberg K., Convergence of martingales with directed index set. Trans. Amer. Math. Soc. 83, 1956, 313–337

[7] Illig A., Troung-Van B., Conditional Lindeberg central limit theorem for strong lattice martingales. Preprint, 2003

[8] Ivanoff G., Mertzbach E., Set–Indexed martingales. CRC Press, Boca Raton. FL, 2000

[9] Nahapetian B.S., Billingsley–Ibragimov Theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics. C. R. Acad. Sci. Paris 320, 1995, 1539–1544

[10] Nahapetian B.S., Models with even potential and the behaviour of total spin at the critical point. Commun. Math. Phys. 189, 1997, 513–519

[11] Nahapetian B.S., Limit theorems and some applications in statistical physics. Teubner–Texte zur Mathematik 123 (B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart.Leipzig), 1991

[12] Nahapetyan B.S., Petrosyan A.N., Martingale–difference Gibbs random fields and central limit theorem. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math. 17, 1992, 105–110

[13] Nahapetyan B.S., Petrosyan A.N., Martingale–difference random fields. Limit theorems and some applications. Vienna, Preprint ESI 283, 1995

[14] Pogosyan S., Roelly S., Invariance principle for martingale–difference random fields. Statist. Probab. Lett. 38, 1998, 235–245

[15] Tjøstheim D., Statistical spatial series modeling II. Some further results on unilateral lattice processes. Adv. Appl. Probab. 3, 1983, 562–584

[16] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В., Независимые и стационарно связанные величины. Москва, Наука, 1965

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

X1 "Randomization in the construction of multidimensional martingales". Journal of Contemporary Mathematical Analysis 48, 2013, 35–45 (with Nahapetian B.S.)

X2 "Multidimensional martingales associated with the Ising model". ВЕСТНИК Казанского Государственного Энергетического университета 19, 2013, 87–101 (with Nahapetian B.S.)

X3 "Асимптотика моментов сумм компонент мартингал-разностных случайных полей". Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета, Физико-математические и естественные науки 2, 2013, 3–15

X4 "Точность гауссовской аппроксимации для мартингал-разностных случайных полей". Известия НАН Армении. Математика 49, 2014, 81–88

В сборниках тезисов докладов международных конференций:

X5 "The martingale method in the theory of random fields". Armenian Mathematical Union Annual Session 2012, Yerevan, Abstracts pp. 89–91 (with Nahapetian B.S.)

X6 "Convergence rate in the central limit theorem for martingale-difference random fields". Armenian Mathematical Union Annual Session 2013, Yerevan, Abstracts pp. 67–69

X7 "Martingale method in the theory of random fields and its application in statistical physics". Second International Conference Mathematics in Armenia, Tsaghkadzor, 2013, Abstracts pp. 96–97

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Դասական սահմանային թեորեմների (կենտրոնական, լոկալ և ֆունկցիոնալ սահմանային թեորեմները, կրկնական լոգարիթմի օրենքը) ապացուցման խնդիրը ժամանակակից հավանականությունների տեսությունում ամենաիրապապ խնդիրներից մեկն է: Կախյալ բաղադրիչներով պատահական պրոցեսների (խառնուրդ հատկությունով օժտված պրոցեսներ, մարտինգալներ և այլն) ուսումնասիրությունը սկսվել է անցյալ դարի կեսերից և ժամանակի ընթացքում բերվել է բազմաթիվ տեսակետներից լիարժեք տեսության կառուցմանը, սակայն նույնը չենք կարող ասել պատահական դաշտերի մասին: Սահմանային թեորեմների տեսության բազմաչափ օբյեկտների (պատահական դաշտեր) տարածման խնդիրը թելադրվում է ինչպես պատահական դաշտերի տեսության ներքին կարիքներով, այնպես էլ մաթեմատիկական վիճակագրական ֆիզիկայի խնդիրներով: Նշենք, օրինակ, Գիբսյան անսամբլների համարժեքության խնդիրը, կրիտիկական կետում գումարային սպինի ասիմպտոտիկ վարքը և այլն:

Մարտինգալային մեթոդը սահմանային թեորեմների ապացուցման հիմնական մեթոդներից մեկն է: Միաժամանակ այս մեթոդը, որը մեծապես աշխատունակ է մի չափանի խնդիրների շրջանակներում, բազմաչափ խնդիրների դեպքում դեռևս այդքան էլ արդյունավետ չէ: Սակայն վերջին ժամանակներում հրապարակված մի շարք աշխատանքներում ցույց է տրված, որ օգտագործելով մարտինգալ–տարբերության պատահական դաշտի գաղափարը, մարտինգալների տեսությունը կարելի է էապես զարգացնել բազմաչափ դեպքի համար:

Մարտինգալ–տարբերության պատահական դաշտերը հետաքրքիր են տարբեր տեսակետներից: Պարզվում է, որ հայտնի սահմանային թեորեմները, որոնք ճիշտ են անկախ պատահական մեծությունների գումարների համար, ճիշտ են նաև նշված դաշտերի համար: Դեռ ավելին, մարտինգալ–տարբերության պատահական դաշտերը կարող են կիրառվել մաթեմատիկական վիճակագրական ֆիզիկայի որոշ խնդիրներում:

Ատենախոսությունում մարտինգալային մեթոդի զարգացման հիման վրա ուսումնասիրվում է պատահական դաշտերի ասիմպտոտիկ հատկությունները: Արդյունքները կիրառվում են մաթեմատիկական վիճակագրական ֆիզիկայի որոշ խնդիրներում:

Ատենախոսությունում ստացված հիմնական արդյունքները հետևյալն են:

- Առաջարկված է նոր եղանակ մարտինգալ–տարբերության պատահական դաշտերը կառուցելու համար: Այս մոտեցումը կարելի է կիրառել նաև Մարկովյան և Գիբսյան պատահական դաշտերի դեպքում:

- Ապացուցված են հիմնական սահմանային թեորեմները մարտինգալ–տարբերության պատահական դաշտերի համար: Մարտինգալ–տարբերության պատահական դաշտերի բաղադրիչների գումարների մոմենտների համար ստացված է ճշգրիտ ասիմպտոտիկան: Հիմք ընդունելով այս արդյունքը ապացուցված է կենտրոնական սահմանային թեորեմի ուժեղացված տարբերակը (ներառյալ մոմենտների զուգամետությունը): Ստացվել է նաև զուգամետության արագության ասիմճանային գնահատականը կենտրոնական սահմանային թեորեմում: Նույն պայմաններում ապացուցված է կրկնական լոգարիթմի օրենքը:

- Առաջադրված է տրված պատահական դաշտին զուգորդված մարտինգալ–տարբերության պատահական դաշտի կառուցման մեթոդը:

- Ապացուցված է, որ կիրառելով ստացված արդյունքները մաթեմատիկական վիճակագրական ֆիզիկայի մոդելներին, կարելի է էապես ընդլայնել Գիբսյան դաշտերի դասը, որի համար բավարարված են հիմնական սահմանային թեորեմները:

- Ցույց է տրված, որ մարտինգալային մեթոդը կարելի է կիրառել Այզինգի մոդելի սպիների գումարի ասիմպտոտիկ վարքը ուսումնասիրելու համար:

SUMMARY

The problem of establishing of classical limit theorems (the central, local, functional limit theorems, the law of iterated logarithm) is one of the most urgent problems in modern probability theory. Investigation of stochastic processes with dependent components (mixing processes, martingales, etc.) has started in the middle of the last century and with the lapse of time led to construct the theory, which is of full value in many positions. The same is not true for random fields. The problem of extending the theory of limit theorems to multidimensional case (random fields) is dictated by both the internal needs of the theory of random fields and the problems of mathematical statistical physics, in particular, the problems of equivalence of Gibbs ensembles, the behavior of the total spin at the critical point, etc.

One of the main methods used in the proof of limit theorems is the martingale method. At the same time this method which is very efficient for one-dimensional problems, in the multidimensional case is not yet so productive.

However recently published works shown that using the notion of martingale–difference random field one can significantly develop the martingale method in multidimensional case.

The martingale–difference random fields are interesting from the various points of view. Basic limit theorems which hold for sums of independent random variables are valid for such fields. Moreover martingale–difference random fields could be applied in some problems of the mathematical statistical physics.

In this thesis by developing the martingale method we study asymptotic properties of random fields. The results are applied to some problems of mathematical statistical physics.

The main results obtained in the thesis are the following:

- The new approach for construction of martingale–difference random fields is proposed. This approach could be applied to the Markov and Gibbs random fields.

- Various limit theorems for martingale–difference random fields are obtained. The exact asymptotic for the moments of sums of components for such fields is found. This allowed to prove a strengthened version of central limit theorem (including the convergence of moments). Moreover the exponential rate of convergence in the central limit theorem is obtained. Under the same conditions the law of iterated logarithm is proved.

- The method of construction of associated martingale–difference random field for the given random field is introduced.

- Obtained results were applied in the mathematical statistical physics. This allowed to significantly extend the class of Gibbs random fields, for which the basic limit theorems are valid.

- The possibility of application of the martingale method for studying the asymptotical behavior of the Ising model total spin is illustrated.