ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Հովսեփյան Կարեն Հայկի

C*-հանրահաշիվներ ծնված բիցիկլիկ կիսախմբի ինվերս ենթակիսախմբերով

Ա.01.01 - «Մաթեմատիկական անալիզ» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2015

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Овсепян Карен Гайкович

C*-алгебры порожденные инверсными подполугруппами бициклической полугруппы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности А.01.01 - “Математический анализ ”

Ереван – 2015

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Կազանի Պետական Էներգետիկական Համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ս. Ա. Գրիգորյան
Գիտական խորհրդատու՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ե. Վ. Լիպաչյովա
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Մ. Ի. Կարախանյան
	ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Մ. Բիկչենտաև
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի Ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կկայանա 2015թ. հունիսի 22-ին, ժ. 15^{00}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում(0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2015 թ. մայիսի 20-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար, Տ. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Казанском Государственном Энергетическом Университете

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук С. А. Григорян
Научный консультант:	кандидат физ.-мат. наук Е. В. Липачева
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук М. И. Караханян
	доктор физ.-мат. наук А. М. Бикчентаев
Ведущая организация:	Институт Математики НАН РА

Защита диссертации состоится 22-го июня 2015 г. в 15^{00} часов на заседании действующего в ЕГУ специализированного совета 050 ВАК (0025, г. Ереван 0025, ул. А.Манукяна1.)
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 20-го мая 2015 г.

Ученый секретарь специализированного совета, Т. Арутюнян

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. C^*-алгебры являются важной областью исследования в функциональном анализе. Известно, что C^*-алгебры используются в качестве математического аппарата квантовой механики. Это направление исследований началось с матричной механики Вернера и Гейзенберга, более строгую математическую формулировку которого дал Паскуаль Иордан в 1933г. В дальнейшем Джон фон Нейман предпринял попытку создать общую основу для этих алгебр, которая завершилась серией работ о кольцах операторов(см. [1], [2]). Эти объекты рассматриваются, как специальный класс C^*-алгебр, также известные, как алгебры фон Неймана. В работах вышеназванных авторов C^*-алгебры определялись, как замкнутые по норме самосопряженные подалгебры алгебры ограниченных операторов на некотором гильбертовом пространстве.

В 1943г. И.М Гельфанд и М.А. Наймарк в работе [3] дали абстрактное определение C^*-алгебры, где не использовался геометрический подход, то есть, в определении не фигурировало гильбертово пространство: это комплексная банахова алгебра, оснащенная инволюцией, то есть, сопряженно линейной и анти-мультипликативной операцией, повторное применение которой есть тождественный оператор, и норма удовлетворяет специальному равенству.

C^*-алгебры сейчас являются важным инструментом в теории унитарных представлений локально компактных групп(см. например [4], [5]), а также используются в алгебраических формулировках квантовой механики и квантовой теории поля.

Одной из широко применяемых в квантовой теории поля C^*-алгебр является алгебра *Теплица*, названная в честь немецкого математика Отто Теплица.

В 1961 г. в работе [6] Кобурн доказал свою знаменитую теорему о том, что любая C^* -алгебра, порожденная одним изометрическим оператором, канонически изоморфна алгебре Теплица. Последнее подчеркивает универсальность алгебры Теплица.

Позже в работе [7] было показано, что у алгебры Теплица существует только одно бесконечномерное неприводимое представление с точностью до унитарной эквивалентности. Как известно, бесконечномерные неприводимые представления C^*-алгебр имеют широкое применение в современной квантовой механике и квантовой теории поля. В частности, с их помощью определяются так называемые суперотборные сектора, которые характеризуют заряд в квантовой теории поля.

Возникает вопрос о возможности обобщения алгебры Теплица с целью получения алгебр, имеющих, с точностью до унитарной эквивалентности, более одного неприводимого бесконечномерного представления. Одно из таких обобщений приводится в данной диссертации.

В работе [8] была описана группа автоморфизмов алгебры Теплица. В данной диссертации приводится полное описание автоморфизмов алгебр, являющихся обобщениями алгебры Теплица.

Одним из наиболее актуальных подходов к исследованию расширений C^*-алгебр является теория групповых и полугрупповых скрещенных произведений(см. [9]–[10]). В данной диссертации с помощью структуры скрещенного произведения, описанной в [10], показывается, что вышесказанное обобщение алгебры Теплица является скрещенным произведением.

Цель работы. Построение C^*-алгебр, являющихся обобщениями алгебры Теплица, имеющих конечное число неприводимых бесконечномерных, унитарно неэквивалентных представлений. Исследование структуры этих алгебр, описание класса инвариантных идеалов относительно некоторого естественного преобразования.

Построение коротких точных последовательностей с помощью описанных инвариантных идеалов найденных C^*-алгебр.

Описание группы автоморфизмов исследуемых C^*-алгебр, представление этих алгебр в виде скрещенного произведения.

Методика исследования. В работе применяются методы функционального анализа, теории представлений полугрупп и используя операторный подход обобщается алгебра Теплица.

Научная новизна. Алгебра Теплица, с точки зрения теории полугрупп, есть C^*-алгебра, порожденная изометрическими представлениями бициклической полугруппы. Заменяя бициклическую полугруппу на конкретные инверсные подполугруппы и рассматривая их изометрические представления, можно получить новые C^*-алгебры, являющихся обобщениями алгебры Теплица. В данной диссертации впервые исследуются C^*-алгебры, порожденные инверсными подполугруппами бициклической полугруппы.

Показано, что у полученных C^*-алгебр существует конечное число неприводимых, бесконечномерных, унитарно неэквивалентных представлений. Этот результат является обобщением теоремы о бесконечномерных представлениях бициклической полугруппы, доказанной в работе [7].

Доказано, что полученные C^*-алгебры представляются в виде скрещенного произведения.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и приведенные конструкции открывают новые возможности для изучения BDF теории(см. [11], [12]), а также могут быть использованы в K-теории и в теории компактных квантовых полугрупп(см. [13],[14]).

Апробация работы. Основные результаты были доложены на следующих конференциях и семинарах:

- Операторные алгебры и Квантовые полугруппы, г. Ереван, Армения, 02-07 июня 2013. Название доклада: Структура и связь подалгебр алгебры Теплица $\mathcal{T}_m$ и $\mathcal{T}(m)$.

- Alexandrian AMU Annual Session 2013, г. Ереван, Армения, 29 мая – 1 июня 2013 г. Название доклада: C^*-algebras generated by inverse subsemigroups of the bicyclic semigroup.

- Operator Theory, г. Тимишоара, Румыния, 30.06-05.07.2014 г. Название доклада: C^*-algebras generated by inverse subsemigroups of the bicyclic semigroup.

- Двенадцатая всероссийская молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения-2013", Казань, 24-28 октября, 2013г. «Подалгебры алгебры Теплица и тип алгебры»

- Тринадцатая всероссийская молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения-2014", Казань, 24-28 октября, 2014г. «Инвариантные идеали C^*–алгебры $\mathcal{T}_m$»

- Десятая международная молодежная научная конференция «Тинчуринские чтения», Казань, 27-29 марта 2015 г. "Автоморфизмы алгебры $\mathcal{F}_m$".

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ, в том числе четыре из списка ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 75 страницах, состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитированной литературы, включающего 47 наименований.

Основное содержание работы

Первая глава, состоящая из четырех параграфов, посвящена описанию алгебры Теплица. Основные результаты опубликованы в работах

[KK], [LK], [LK3]. В первом параграфе приведены предварительные сведения о C*-алгебрах. Во втором параграфе рассматриваются инверсные подполугруппы $S(m)$, S_m бициклической полугруппы $\mathbb{Z}_+^*$. Приводится связь между этими полугруппами, сформулированная в виде следующей леммы:

Лемма 1.2.1. *Полугруппа S_m представляется в виде:*

$$S_m = \bigcup_{k=0}^{m-1} \tau^k(S(m)).$$

В третьем параграфе приводится определение алгебры Теплица, как C^*-алгебры, порожденной Теплицевыми операторами с непрерывным символом. В четвертом параграфе доказываются следующие результаты:

Лемма 1.4.1. *Существует естественное представление группы S^1 в группу автоморфизмов алгебры Теплица: $\sigma_0\colon S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$, такое, что: $\sigma_0(z)(T^nT^{*m}) = z^{(n-m)}T^nT^{*m}$.*

Теорема 1.4.1. *Алгебра Теплица является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй по системе $\{\mathcal{L}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$:*

$$\mathcal{T} = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_k}, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{L}_k = \{A \in \mathcal{T}; \sigma_0(z)(A) = z^kA, \forall z \in S^1\}$.

Глава 2 состоит из 5 параграфов. Основные результаты опубликованы в работах [LK], [KK], [KH], [GO],[GH1], [OK1]. В первом параграфе приводится определение C^*-подалгебр $\mathcal{T}_m$ и $\mathcal{T}(m)$ алгебры Теплица $\mathcal{T}$. Алгебра Теплица порождается мономами вида T^nT^{*m}, где $n, m \in \mathbb{Z}_+$. *Индексом* монома называется число $n - m$. Обозначим через $\mathcal{T}_m$ – C^*-подалгебру алгебры Теплица, порожденную мономами, индекс которых кратен m, а через $\mathcal{T}(m)$ – C^*-подалгебру алгебры Теплица, порожденную операторами T^m и T^{*m}.

Теорема 2.1.1. *Существует условное ожидание: $P_m\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_m$.*

Показывается, что алгебра $\mathcal{T}_m$ инвариантна относительно конечной подгруппы $G_m = \{z \in S^1 : z^m = 1\}$ группы S^1, то есть: $\mathcal{T}_m = \{A \in \mathcal{T} : \sigma_0(z)(A) = A, \forall z \in G_m\}$. Строится $\mathbb{Z}$-градуировка алгебры $\mathcal{T}_m$:

Лемма 2.1.1. Имеет место равенство:

$\mathcal{T}_m = \bigoplus\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{km}$, где $\mathcal{L}_{km} = \{A \in \mathcal{T}; \sigma_0(z)(A) = z^{km}A, \forall z \in S^1\}$.

Во втором параграфе описывается связь между C^*-алгебрами $\mathcal{T}_m$ и $\mathcal{T}(m)$. Пусть $\pi\colon \mathbb{Z}_+^* \to \mathcal{T}$ – точное представление: $\pi(a^n a^{*m}) = T^n T^{*m}$. Понятно, что алгебра $\mathcal{T}_m$ порождается полугруппой $\pi(S_m)$, а $\mathcal{T}(m)$ – полугруппой $\pi(S(m))$. Очевидно, что $\mathcal{T}(m) \subset \mathcal{T}_m$.

Определим эндоморфизм $\alpha\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T} : \alpha(A) = TAT^*, A \in \mathcal{T}$.

Теорема 2.2.1 C^*–алгебра $\mathcal{T}_m$, как векторное пространство, представляется в виде прямой суммы:

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) \oplus \alpha(\mathcal{T}(m)) \oplus ... \oplus \alpha^{m-1}(\mathcal{T}(m)).$$

Лемма 2.2.1. *Алгебра $\mathcal{T}_m$ является C^*–алгеброй, порожденной операторами T^m, T^{*m} и проекторами $T^l T^{*l}$, где $0 \leq l \leq m-1$.*

Представим гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Z}_+)$ с базисом $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ в виде прямой суммы

$$l^2(\mathbb{Z}_+) = H_0 \oplus H_1 \oplus ... \oplus H_{m-1}, \tag{2.1}$$

где базис пространства H_i состоит из векторов $\{e_{i+km}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, $0 \leq i \leq m-1$.

Теорема 2.2.3. *Сужения C^*–алгебры $\mathcal{T}_m$ на H_i , $0 \leq i \leq m-1$, образуют семейство m унитарно неэквивалентных, неприводимых, бесконечномерных представлений.*

В параграфе 3 приводится полное описание всех неприводимых, унитарно неэквивалентных, бесконечномерных представлений алгебры $\mathcal{T}_m$. В частности, доказывается следующая лемма:

Лемма 2.3.1. *Пусть* $\pi\colon \mathcal{T}_m \to B(H)$ *– неприводимое представление* $\mathcal{T}_m$ *на гильбертовом пространстве* H*, тогда сужение* $\pi|_{\mathcal{T}(m)}\colon \mathcal{T}(m) \to B(H)$ *также неприводимо.*

Одним из основных результатов работы является следующая теорема, которая в некотором смысле обратна к лемме 2.3.1: как можно расширить неприводимое представление алгебры $\mathcal{T}(m)$ до неприводимого представления алгебры $\mathcal{T}_m$, и сколько всего таких представлений существует?

Теорема 2.3.1. C^*–алгебра $\mathcal{T}_m$ имеет ровно m неприводимых, унитарно неэквивалентных, бесконечномерных представлений.

В четвертом параграфе приводится необходимые определения и конструкция скрещенного произведения, предложенная в [10].

В пятом параграфе главы 2 C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$ представляется в виде скрещенного произведения. Рассматривается C^*–алгебра $\mathcal{A} = C_0(\mathbb{Z}_+)+\mathbb{C}1$, то есть, алгебра функций на $\mathbb{Z}_+$, которые на бесконечности имеют конечный предел.

Основной результат этого параграфа следующая теорема:

Теорема 2.5.1. *Для любого* $m \in \mathbb{N}$ C^**–алгебры* $\mathcal{T}_m$ *и* $\mathcal{L}_0 \times_{\delta_m} \mathbb{Z}_+$ *изоморфны:*

$$\mathcal{T}_m = C^*(\mathcal{L}_0, T^m) \cong \mathcal{L}_0 \times_{\delta_m} \mathbb{Z} = \varphi(\mathcal{A}) \times_{\delta_m} \mathbb{Z},$$

где $\mathcal{L}_0 = [I, TT^*, ..., T^mT^{*m}, ...]$ *коммутативная* C^**–подалгебра проекторов в* $\mathcal{T}_m$*, а* δ_m, δ_{*m} *определяются формулами:* $\delta_m(a) = T^m a T^{*m}, \delta_{*m}(a) = T^{*m} a T^m, a \in \mathcal{L}_0$.

Глава 3 посвящена изучению инвариантных идеалов алгебры $\mathcal{T}_m$ и состоит из четырех параграфов. Основные результаты опубликованы в работах [KL], [OK2].

В первом параграфе описываются важные свойства алгебр $\mathcal{T}_m$, $\mathcal{T}(m)$, и дается общая характеристика идеалов в $\mathcal{T}_m$.

Лемма 3.1.1. *Пусть $\mathcal{K}_m$ – C^*-подалгебра всех компактных операторов алгебры $\mathcal{T}_m$, тогда справедливо тождество:*

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{K}(H_0) \oplus \mathcal{K}(H_1) \oplus ... \oplus \mathcal{K}(H_{m-1}),$$

где $\mathcal{K}(H_i), 0 \leq i \leq m-1$ – алгебра компактных операторов на гильбертовом пространстве H_i.

Показывается, что

$$P_j|_{H_i} = \begin{cases} I|_{H_i}, & i \geq j, \\ T^m T^{*m}|_{H_i}, & i < j. \end{cases} \tag{3.1}$$

Теорема 3.1.1. *Любой элемент $A \in \mathcal{T}_m$ представляется в виде $A = C + D$, где $C \in \mathcal{T}(m)$, $D \in \mathcal{K}_m$, то есть*

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_m.$$

В дальнейшем алгебру $\mathcal{T}(m)$ будем отождествлять с алгеброй

$$m\mathcal{T} = \{A : A = B \oplus B \oplus ... \oplus B,\ B \in \mathcal{T}\} \hookrightarrow \bigoplus^{m} \mathcal{T}, \tag{3.2}$$

где через $\bigoplus\limits^{m} \mathcal{T}$ обозначена прямая сумма m экземпляров алгебры Теплица $\mathcal{T}$, а проекторы $P_i, 0 \leq i \leq m-1$, будем отождествлять с проекторами $TT^* \oplus ... \oplus TT^* \oplus I \oplus ... \oplus I$.

Из теоремы 3.3.1, лемм 2.2.1, 3. 3.1, и (3.2) следует, что алгебра $\mathcal{K}_m$ отождествляется с C^*-алгеброй $\bigoplus\limits^{m} \mathcal{K}$, а $\mathcal{T}_m$ с алгеброй:

$$\mathcal{T}_m \cong \{A : A = (B + K_1) \oplus ... \oplus (B + K_m),\ B \in \mathcal{T},\ K_1, ..., K_m \in \mathcal{K}\}. \tag{3.3}$$

Второй параграф главы 3 посвящен описанию множества идеалов в $\mathcal{T}_m$. Сначала описываются минимальные идеалы алгебры $\mathcal{T}_m$. Обозначим через $I_i, 0 \leq i \leq m-1$ такой идеал, i-ая компонента которого в представлении (3.3) совпадает с $\mathcal{K}$, а остальные 0, то есть:

$$I_i = 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus \mathcal{K} \oplus 0 \oplus ... \oplus 0, 0 \leq i \leq m-1.$$

В дальнейшем будем использовать следующее обозначение: если идеал J алгебры $\mathcal{T}_m$ порождается элементами $A_1, ..., A_m$, будем писать

$$J = [A_1, ..., A_m] := \mathcal{T}_m[A_1, ..., A_m]\mathcal{T}_m.$$

Тогда $I_i = [P_i - P_{i+1}], 0 \leq i \leq m-1$. Очевидно, что всевозможные прямые суммы минимальных идеалов также являются идеалами алгебры $\mathcal{T}_m$. Введем следующее обозначение: обозначим через $J_i = \bigoplus\limits_{k \neq i, k=0}^{m-1} I_k, 0 \leq i \leq m-1$. Таким образом получаем идеалы:

$$J_i = \{A \in \mathcal{K}_m : A_i = 0\}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим теперь всевозможные пересечения идеалов $J_i,\ 0 \leq i < j \leq m-1$. Понятно, что $\bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k},\ 0 \leq i_1 < ... < i_n \leq m-1$, имеет вид

$$\bigcap_{k=1}^{n} J_{i_k} = \bigoplus_{j=0, j \neq i_k}^{m-1} I_{i_k} = \{A \in \mathcal{K}_m : A_{i_k} = 0,\ k = 1, .., n\} \tag{3.5}$$

В диссертации доказывается следующая теорема:

Теорема 3.2.1. *C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$, как векторное пространство, представляется в виде прямой суммы:*

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) \oplus J_i,$$

для любого $i,\ 0 \leq i \leq m-1$

В третьем параграфе главы 3 исследуются короткие точные последовательности. Последовательность алгебр $0 \longrightarrow A \xrightarrow{q} B \xrightarrow{r} C \longrightarrow 0$ называется *расщепимой короткой точной*, если $\ker(q) = \mathrm{im}(r)$, где q

– мономорфизм, r – эпиморфизм, и существует такой *-гомоморфизм: $t : C \to B$, что $r \circ t = id_C$.

В диссертации доказываются следующие утверждения:

Теорема 3.3.1. *Фактор-алгебра $\mathcal{T}_m/\mathcal{K}_m$ изоморфна $C(S^1)$ и существует короткая точная последовательность*

$$0 \to \mathcal{K}_m \to \mathcal{T}_m \to C(S^1) \to 0,$$

где $id : \mathcal{K}_m \to \mathcal{T}_m$ – вложение.

Теорема 3.3.2. Существует короткая точная расщепимая последовательность:

$$0 \to \bigcap_{k=1}^{n} J_{i_k} \to \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_n \to 0,$$

где $0 \le i_1 < i_2 < ... < i_n \le m-1$. И, следовательно, $\mathcal{T}_m$ изоморфна прямой сумме алгебр:

$$\mathcal{T}_m \cong \mathcal{T}_n \oplus \bigcap_{k=1}^{n} J_{i_k}.$$

Следствие 3.3.1. *Короткие точные последовательности*

$$0 \to J_i \to \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}(m) \cong \mathcal{T} \to 0,$$

где $id : J_i \to \mathcal{T}_m$ – вложение, $0 \le i \le m-1$, расщепимы.

Четвертый параграф главы 3 посвящен описанию инвариантных идеалов. Рассмотрим представление $\sigma_m : S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_m)$: $\sigma_m(z)(T^m) = zT^m$.

Идеал I алгебры $\mathcal{T}_m$ назовем *инвариантным* относительно представления $\sigma_m : S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_m)$, если $\sigma_m(z)(I) = I$ для любого $z \in S^1$. Таким образом, все идеалы алгебры $\mathcal{T}_m$ разбиваются на два класса – инвариантных и не инвариантных идеалов.

Следующие результаты исчерпывают описание инвариантных иделов.

Лемма 3.4.1. *Идеалы I_i, $0 \le i \le m-1$, являются инвариантными.*

Лемма 3.4.2. Пусть J – такой замкнутый идеал алгебры $\mathcal{T}_m$, что у фактор-алгебры $\mathcal{T}_m/J$ есть хотя бы одно неприводимое бесконечномерное представление. Тогда

1) $J \subsetneq \mathcal{K}_m$,
2) $J = \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$ для некоторых $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_n \leq m$,
3) J – инвариантный идеал.

Теорема 3.4.2. *Алгебра $\mathcal{T}_m$ имеет в точности 2^m инвариантных идеалов, каждый из которых порождается одной или несколькими разностями проекторов $P_i - P_j$, $0 \leq i < j \leq m-1$.*

Глава 4 посвящена описанию автоморфизмов C*-алгебр $\mathcal{T}_m$, $\mathcal{K}_m$, и $\mathcal{T}(m)$, и состоит из трех разделов. Практически все понятия и результаты, изложенные в главе 4, опубликованы в работе [OK3].

Первый параграф четвертой главы посвящен исследованию автоморфизмов алгебры $\mathcal{K}_m$.

Пусть R_m – группа перестановок m чисел. Для любого $\gamma \in R_m$ обозначим через V_γ автоморфизм, который действует следующим образом: $V_\gamma(K_0 \oplus ... \oplus K_{m-1}) = K_{\gamma(0)} \oplus ... \oplus K_{\gamma(m-1)}$.

Теорема 4.1.1. *Для любого автоморфизма $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{K}_m)$ существуют $\varphi_0, ..., \varphi_{m-1} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{K})$, $\gamma \in R_m$, V_γ, такие, что*

$$\sigma(A) = V_\gamma \circ (\varphi_0 \oplus ... \oplus \varphi_{m-1})$$

для любого $A \in \mathcal{K}_m$.

Второй параграф главы 4 посвящен исследованию автоморфизмов алгебры $\mathcal{T}(m)$. Доказано, что каждый автоморфизм алгебры $\mathcal{T}(m)$ есть прямая сумма m копий автоморфизмов алгебры Теплица.

Третий параграф главы 4 посвящен исследованию автоморфизмов алгебры $\mathcal{T}_m$. Введем понятие эквивалентности автоморфизмов. Два автоморфизма алгебры Теплица $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ назовем *эквивалентными*:

$\psi_1 \sim \psi_2$, если $\psi_1(T) = \psi_2(T) + K$, где K некоторый компактный оператор из $\mathcal{K}$.

Лемма 4.3.1. *Пусть $\sigma\colon \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_m$ автоморфизм алгебры $\mathcal{T}_m$, такой что $\sigma(J_i) = J_i$, где $J_i = \{A : A = \mathcal{K} \oplus ...\mathcal{K} \oplus 0 \oplus \mathcal{K}... \oplus \mathcal{K}\}$ – идеал алгебры $\mathcal{T}_m$. Тогда σ представляется в виде:*

$$\sigma = \sigma_0 \oplus ... \oplus \sigma_{m-1},$$

где $\sigma_i\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}, i = 0, ..., m-1,$ – эквивалентные автоморфизмы алгебры Теплица.

Основной результат этого раздела – следующая теорема, которая доказывается с помощью леммы 4.3.1.

Теорема 4.3.1. *Гомоморфизм τ алгебры $\mathcal{T}_m$ является автоморфизмом алгебры $\mathcal{T}_m$, тогда и только тогда, когда существуют m эквивалентных автоморфизмов $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{m-1} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$, $\gamma \in R_m$ и V_γ, такие, что*

$$\tau = V_\gamma \circ (\sigma_0 \oplus \sigma_1 \oplus ... \oplus \sigma_{m-1}).$$

Литература

[1] von Neumann J., *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren*, Math. Ann. 102(1):370-427, (1930), doi:10.1007/ BF01782352.

[2] von Neumann J., *On a Certain Topology for Rings of Operators*, The Annals of Mathematics 2nd Ser. 37 (1): 111-115, (1936), doi:10.2307/1968692.

[3] Gelfand I. M., Naimark M. A., *On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, Mat. Sbornik 12, 197-213, (1943).

[4] Sepanski M., *Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 235, Springer-Verlag, 2007.

[5] Robert A., *Introduction to the Representation Theory of Compact and Locally Compact Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series 80, Cambridge University Press, 1983.

[6] Coburn L.A. The *C*-algebra generated by an isometry*, Bull. Amer. Math. Soc., N 73, 722-726 (1967).

[7] Арзуманян В.А., **-представления инверсных полугрупп*, Известия Академии Наук Арм. ССР, 13:2, 1978, 107-113.

[8] Muhly P.S, Xia J., *Authomorphisms of the Toepliz algebra*, Proceedings of AMS, (116) (4),1067-1076, (1992).

[9] Лебедев А.В., Одзиевич А., *Расширения C*-алгебр частичными изометриями*, Матем. сб., 195:7 (2004),951-982.

[10] Антоневич А.Б., Бахтин В.И., Лебедев А.В., *Скрещенное произведение C*-алгебры на эндоморфизм, алгебры коэффициентов и трансфер-операторы*, Математический сборник 2011, т. 202, N 9, с. 3-34.

[11] Brown L.G., Douglas R.G., Fillmore P.A., *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras*, Proc. Conf. Operator Theory (Dalhousie Univ., Halifax, N.S., 1973) , Lecture Notes in Mathematics , 345 , Springer, pp. 58-128, (1973).

[12] Brown L.G., Douglas R.G., Fillmore P.A., *Extensions of C*-algebras and C*-homology*, Ann. of Math. (2) ,105 : 2 (1977) pp. 265-324.

[13] Аухадиев М.А., Григорян С.А., Липачева Е.В. *Компактная квантовая полугруппа, порожденная изометрией*, Изв. вузов. Матем., N 10, 89-93 (2011).

[14] Aukhadiev M.A., Grigorian S.A., Lipacheva E.V. *Infinite-dimensional compact quantum semigroup*, Lobachevskii Journal of Mathematics, (32) (4), 304-316 (2010).

Публикации автора по теме диссертации

[KK] Овсепян К. Г. О С*-алгебрах порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы / К.Г. Овсепян// Известия НАН Армении, математика, - 2014. - Т. 49. - N 5. - С. 67-75.

[LK] Овсепян К.Г. Структура подалгебр алгебры Теплица, неподвижных относительно конечной группы автоморфизмов/ Е.В. Липачева, К.Г. Овсепян // Известия Вузов Математика - 2015. - N 6. - С. 14-23.

[KL] Hovsepyan K.H. The structure of invariant ideals of some subalgebras of Toeplitz algebra, /E.V. Lipacheva, K.H. Hovsepyan // Journal of Contemporary Mathematical Analysis - 2015. -Vol. 50. - N 2. - P. 70-79.

[KH] Hovsepyan K.H. The C*-algebra $\mathcal{T}_m$ as a crossed product / K.H.Hovsepyan // Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences - 2014. –N 3. - P. 24-30.

[GO] Овсепян К.Г. Структура и связь подалгебр алгебры Теплица $\mathcal{T}_m$ и $\mathcal{T}$ (m),/ Т.А. Григорян, К.Г. Овсепян// Вестник КГЭУ -2013. -Т. 19. -N 4. -С. 31-36.

[GH1] Hovsepyan K.H., C*-algebras generated by inverse subsemigroups of the bicyclic semigroup/ T.A. Grigorian, K.H. Hovsepyan // Yerevan: Alexandrian AMU Annual Session, 2013. -C. 34-35.

[OK1] Овсепян К.Г., Подалгебры алгебры Теплица и тип алгебры/ К.Г. Овсепян // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. - Казань: Изд-во Казан. мат.о-ва, 2013. - Т. 47. - С. 136-138.

[LK3] Hovsepyan K.H. C*-algebras generated by inverse subsemigroups of bicyclic semigroup / E.V. Lipacheva, K.H. Hovsepyan// 25th International conference on operator theory, - Timisoara(Romania), 2014 - P. 13.

[OK2] Овсепян К.Г. Инвариантные идеалы С*-алгебры $\mathcal{T}_m$ / К.Г. Овсепян // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. - Казань: Изд-во Казан. мат.о-ва, 2014. - Т. 50. - С. 137-139.

[ОК3] Овсепян К.Г. Автоморфизмы С*-алгебры $\mathcal{F}_m$ /К.Г. Овсепян// Материалы докладов десятой международной молодежной научной конференции "Тинчуринские чтения". - Казань: КГЭУ, 2015. Т. 3. - С. 66-67.

Ամփոփագիր

Ատենախոսությունում դիտարկվել են C*-հանրահաշիվներ ծնված բիցիկլիկ կիսախմբի ինվերս ենթակիսախմբերով: Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

- Կառուցվել է $\mathcal{T}_m$, $m \in \mathbb{N}$ C*–հանրահաշիվների ընտանիք, որի էլեմենտներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է Տյոպլիցյան հանրահաշվի ընդհանրացում և ծնվում է բիցիկլիկ կիսախմբի ինվերս ենթակիսախմբի իզոմետրիկ ներկայացումներով:
- Ցույց է տրվել $\mathcal{T}_m$, $m \in \mathbb{N}$ հանրահաշիվների ինվարիանտությունը S^1 միավոր շրջանի G_m վերջավոր ենթախմբի նկատմամբ: Ապացուցվել է, որ գոյություն ունի պայմանական սպասում $\mathcal{T}$-ից $\mathcal{T}_m$:
- Կառուցվել է $\mathcal{T}_m$ հանրահաշվի $\mathbb{Z}$ -աստիճանանշումը, որտեղ 0-ին համապատասխանող ենթատարածությունը հանդիսանում է կոմմուտատիվ բանախյան հանրահաշիվ:
- Ապացուցվել է, որ $\mathcal{T}_m$ հանրահաշիվն ունի ճշգրիտ m անվերջ չափանի չբերվող ներկայացումներ ունիտար էկվիվալենտության ճշտությամբ:
- Ապացուցվել է, որ $\mathcal{T}_m$ հանրահաշիվը ներկայացվում է խաչաձև ատադրյալի տեսքով. $\mathcal{T}_m = \varphi(A) \rtimes_{\delta_m} \mathbb{Z}$, որտեղ $A = C_0(\mathbb{Z}_+) + \mathbb{C}1$ այն ֆունկցիաների հանրահաշիվն է որոշված $\mathbb{Z}_+$ –ի վրա, որոնք անվերջությունում հաստատուն են, իսկ φ– ն հանրահաշվական իզոմորֆիզմ է A -ից L_0, որտեղ L_0 պրոյեկտորներով ծնված հանրահաշիվ է: Երբ $m = 1$ ստացվում է Տյոպլիցյան հանրահաշվի ներկայացում խաչաձև արտադրյալի տեսքով. $\mathcal{T} = \varphi(A) \rtimes_{\delta_1} \mathbb{Z}$:
- Ապացուցվել է, որ $\mathcal{T}_m$ հանրահաշիվը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝ $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) + K_m$, որտեղ K_m -ը $\mathcal{T}_m$-ի կոմպակտ օպերատորների ենթահանրահաշիվն է: Ցույց է տրվել, որ $\mathcal{T}_m$

հանրահաշվի բոլոր իդեալները բաժանվում են երկու դասի՝ ինվարիանտ և ոչ ինվարիանտ տրված S^1 խմբի որևէ բնական ներկայացման նկատմամբ: Տրվել է $\mathcal{T}_m$ հանրահաշվի բոլոր ինվարիանտ իդեալների ամբողջական նկարագիրը: Ապացուցվել է, որ $\mathcal{T}_m$ հանրահաշիվն ունի ճշգրիտ 2^m ինվարիանտ իդեալներ, որոնցից յուրաքանչյուրը ծնվում է մեկ կամ մի քանի պրոյեկտորների տարբերությամբ: Ինվարիանտ իդեալների միջոցով ստացվել են $\mathcal{T}_m$ հանրահաշվի ներկայացումներ իր ենթահանրահաշիվների ուղիղ գումարի տեսքով, բացի այդ, ցույց է տրվել կարճ, ճշգրիտ, տրոհվող հաջորդականությունների գոյությունը:

- Տրվել է K_m հանրահաշվի ավտոմորֆիզմների ամբողջական նկարագիրը: $\mathcal{T}_m$ հանրահաշվի հոմոմորֆիզմների համար գտնվել են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում վերջիններս դառնում են ավտոմորֆիզմներ:

Summary

In this thesis are considered C*-algebras generated by inverse subsemigroups of the bicyclic semigroup. Main results of the thesis are the following:

- We construct a family of C*-algebras $\mathcal{T}_m$, $m \in \mathbb{N}$, each element of which is the generalization of the Toeplitz algebra and is generated by isometric representations of the inverse subsemigroup of the bicyclic semigroup.
- It is shown, that C*-algebras $\mathcal{T}_m$, $m \in \mathbb{N}$ are invariant with respect to finite subsemigroup G_m of the unit circle S^1. The existence of conditional expectation from $\mathcal{T}$ to $\mathcal{T}_m$ is proved. We construct the $\mathbb{Z}$-grade of C*-algebra $\mathcal{T}_m$, which 0-component is a commutative Banach algebra.

- It is proved that C*-algebra $\mathcal{T}_m$ has exactly m unitarily non-equivalent, irreducible, infinite dimensional representations.
- The C*-algebra $\mathcal{T}_m$ represented as a crossed product: $\mathcal{T}_m = \varphi(A) \rtimes_{\delta_m} \mathbb{Z}$, where $A = C_0(\mathbb{Z}_+) + \mathbb{C}1$ is the algebra of all functions on $\mathbb{Z}_+$, which are constant at infinity, φ is an isomorphism between A and L_0, where L_0 is algebra generated by projectors. In the case $m = 1$ we get representation of the Toeplitz algebra as a crossed product: $\mathcal{T} = \varphi(A) \rtimes_{\delta_1} \mathbb{Z}$.
- It is proved that algebra $\mathcal{T}_m$ can be represented as: $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) + K_m$, where K_m is the subalgebra of compact operators in $\mathcal{T}_m$. We prove, that all ideals of the C*-algebra $\mathcal{T}_m$ is divided into invariant and non-invariant classes with respect to some natural action of the unit circle S^1. A complete characterization of the invariant ideals of algebra $\mathcal{T}_m$ is given. It is proved, that algebra $\mathcal{T}_m$ has exactly 2^m invariant ideals, any of which is generated by one or some differences of the projectors. Using invariant ideals we get new representations of the algebra $\mathcal{T}_m$ as a direct sum of its subalgebras. Also, we show existence of short exact splitting sequences.
- We give complete description of the authomorphisms of the algebra K_m. We find necessary and sufficient conditions for the homomorphisms of the algebra $\mathcal{T}_m$, under which they become authomorphisms.