ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

Մուրադյան Կարեն Ռուբենի

Ֆուրիեի կրկնակի շարքերի եռանկյուն և սեկտորային գումարների տարամիտության մասին

Ա.01.01 – “Մաթեմատիկական անալիզ” մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2014

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

Мурадян Карен Рубенович

О расходимости треугольных и секторных сумм двойных рядов Фурье

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – “Математический анализ”

Ереван 2014

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ մաթեմատիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.–մաթ. գիտ. դոկտոր Գ. Ա. Կարագուլյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.–մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ու. Գոգինավա
ֆիզ.–մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Ա. Սահակյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2014թ. նոյեմբերի 18-ին ժ. 15^{00}–ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2014թ. հոկտեմբերի 16-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ.–մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Տ. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в институте математики НАН РА

Научный руководитель: доктор физ–мат. наук Г. А. Карагулян

Официальные оппоненты: доктор физ.–мат. наук, профессор У. Гогинава
доктор физ.–мат. наук, профессор А. А. Саакян

Ведущая организация: Армянский государственный архитектурный университет

Защита диссертации состоится 18-ого ноября 2014г. в 15^{00} на заседании специализированного совета ВАК-а 050 при ЕГУ (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан 16-ого октября 2014г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ–мат. наук, профессор Т. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Вопросы сходимосьти почти всюду рядов Фурье по разным классическим ортонормированным системам занимают важное место в теории ортогональных рядов. Эти исследования начались еще в начале 20-ого века. Фундаментальные результаты в этом направлении были получены Д.Е.Меньшовым, А.Н.Колмогоровым, И.Марцинкевичем, А.Зигмундом, С.Банахом, В.Орличем и другими. В дальнейшем теория ортогональных рядов продолжала развиваться в СССР и во многих других странах (Польша, Венгрия, Швеция, США и др.).

В 1966 году Л. Карлесон дал положительный ответ на задачу Н.Н.Лузина, доказав, что ряды Фурье класса L^2 сходятся почти всюду. Ранее, еще 1923 году А. Н. Колмогоров построил пример всюду расходящегося ряда Фурье. Усовершенствовав метод Карлесона, в ряде работ был расширен класс функций, ряды Фурье которых обладают свойством сходимости почти всюду. Н. Ю. Антоновым [1] установлено, что ряды Фурье функций класса $L \log L \log\log\log L$ сходятся почти всюду. С. В. Конягин [19] установил, что любой класс Орлича, шире чем $L\sqrt{\log L/\log\log L}$, не является классом сходимости почти всюду рядов Фурье. Аналогичные вопросы активно рассматривались также для других классических ортонормированных систем. Эти и другие вопросы подробно рассмотрены в монографиях [32], [3], [16], [26], [12].

В настоящее время интенсивно развивается также теория кратных рядов Фурье. Отметим, что многие результаты для одномерных рядов Фурье не верны для кратных рядов Фурье. Ч. Фефферман [9] построил пример непрерывной функции, двойной тригонометрический ряд Фурье которой расходится всюду по прямоугольникам. Аналогичную теорему для системы Уолша доказал Р.Д.Гецадзе [10]. С.В.Конягин [20] и Р.Д.Гецадзе [11] установили расходимость по мере кратных рядов Фурье по кубам. Многие результаты кратных рядов Фурье рассмотрены в монографии Л.В.Жижиашвили [13] и М.И.Дьаченко [6].

Цель работы. Изучение свойств сходимости треугольных и секторных частичных сумм двойных рядов Фурье по тригонометрической системе, по системам Уолша и Хаара. Исследование почти всюду расходящихся перестановок одномерных рядов Фурье-Хаара.

Методы исследования. В работе применяются методы теории функции и ортогональных рядов.

Научная новизна.

Впервые изучаются вопросы сходимости почти всюду свободных треугольных и секторных частичных сумм двойных рядов Фурье по тригонометрической системе, по системам Уолша и Хаара. Полученные результаты почти полностью решают некоторые вопросы о сходимости и расходимости почти всюду таких рядов по указанным методам суммирования.

1. Построена функция $f \in \cap_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{T}^2)$, двойной ряд Фурье по тригонометрической системе которой расходится по треугольным суммам почти всюду.

2. Получена аналогичная теорема также для секторных сумм.

3. Установлена существование характеристической функции, одномерный ряд Фурье-Харра которой расходится почти всюду после некоторой перестановки его членов.

4. Построена характеристическая функция, треугольные суммы двойного ряда Фурье-Уолша которой расходятся по почти всюду.

5. Доказана, что треугольные суммы двойных рядов Фурье-Хаара функций из класса $L \log L$ сходятся почти всюду.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные результаты и разработанные методы работы представляют теоретический интерес. Они могут найти применение в дальнейших исследованиях свойств сходимости ортогональных рядов по классическим ортонормированным системам.

Апробация полученных результатов. Основные результаты работы докладывались на семинарах по действительному анализу факультета Математики и механики ЕГУ, а также на семинарах по действительному анализу в Институте математики НАН Армении.

Публикации По теме диссертации опубликованы 3 работы, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы из 42 наименований, содержит 70 страниц текста.

Содержание работы

В 1876 году французский математик Дю-Буа-Реймон [7] впервые построил пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в данной точке. В дальнейшем, другие примеры непрерывных функций с аналогичным свойством расходимости были построены Лебегом и Фейером. В начале 20-ого века Лебег изобрел свою теорию интеграла, которая открыла новые возможности в исследованиях в теории рядов Фурье. Вопрос о сходимости или расходимости рядов Фурье функций из различных пространств Лебега стал одной из главных проблем в теории тригонометрических рядов. В 1912 году А. Н. Лузин [21] решив задачу Фату, построил пример тригонометрического ряда, который расходится всюду на вещественной оси. В 1923 году А. Н. Колмогоров [18] построил пример суммируемой по Лебегу функции, ряд Фурье которой расходится всюду. Задача о сходимости почти всюду рядов Фурье функций из класса L^2, поставленная Лузином, долгое время ждала своего решения. Л. Карлесон [5] в 1966 году дал положительный ответ на эту задачу.

Теорема A (Карлесон, 1966)**.** *Ряд Фурье любой функции из класса L^2 сходится почти всюду.*

Эта знаменитая теорема Карлесона открыла новую эпоху в развитии теории рядов Фурье. Усовершенствовав метод Карлесона, Хант [15] доказал сходимость почти всюду рядов Фурье в классах функций L^p, $p > 1$. Шелин [27] установил, что свойство сходимости п. в. рядов Фурье сохраняется и в более широком классе функций, а именно в классе функций $L\log(L)\log\log(L)$. В 2001 году Антонов [2] усилил результат Шелина и доказал следующую теорему:

Теорема B (Антонов, 2001)**.** *Ряд Фурье любой функции $f \in L\log(L)\log\log\log(L)$ сходится почти всюду.*

Эта теорема в настоящее время дает самый широкий известный класс Орлича, функции которого обладают свойством сходимости почти всюду рядов Фурье. С другой стороны С. В. Конягин [19] доказал, что

Теорема C (Конягин, 2000)**.** *Если функция $\Phi(t) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ такова что*

$$\limsup \frac{\Phi(t)}{t\sqrt{\log t/\log\log t}} = \infty,$$

то существует функция из класса $L(\Phi)$, ряд фурье которой расходится всюду.

В настоящее время эти теоремы, дополняющие друг друга, являются наилучшими известными результатами положительного и отрицательного характера, характеризующие класс сходимости почти всюду рядов Фурье, а вопрос о нахождение точного такого класса все еще остается открытым.

Вопросы сходимости почти всюду рядов Фурье широко рассмотрены также в многомерном случае. В отличие от одномерного, в многомерном случае существуют качественно разные типы сходимости. Ограничимся лишь рассмотрением двойных рядов.

Обозначим через $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi$ единичную окружность, а $\mathbb{T}^2$ означает единичный тор. Если $\Phi(t) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ есть некоторая функция, то обозначим через $\Phi(L)(\mathbb{T}^2)$ класс измеримых функций $f(x,y)$ на торе $\mathbb{T}^2$, которые удовлетворяют неравенству

$$\int_{\mathbb{T}^2} \Phi\left(|f(x,y)|\right) dxdy < \infty.$$

Для данной функции $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ рассматривается ее двойной ряд Фурье

$$f(x,y) \sim \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} e^{i(nx+my)}, \tag{0.1}$$

где

$$c_{nm} = c_{nm}(f) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(t,s)e^{i(nt+ms)}dtds$$

есть коэффициенты Фурье функции f. Если $G \subset \mathbb{R}^2$ есть некоторая область, то обозначим

$$S_G(x,y,f) = \sum_{(n,m)\in G} c_{nm} e^{i(nx+my)}. \tag{0.2}$$

Сходимости и расходимости двойных рядов Фурье по разным областям суммирования посвящено много работ. Отметим некоторые из низ:

Теорема D (Ч. Фефферман, [8])**.** *Если $P \subset \mathbb{R}$ есть произвольная многоугольная область, содержащая начало координат, тогда для любой функции $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$ при $p > 1$ имеем*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} S_{\lambda P}(x,y,f) = f(x,y) \text{ п. в. }, \tag{0.3}$$

где

$$\lambda P = \{(\lambda x, \lambda y) : (x,y) \in P\}, \quad \lambda > 0.$$

Теорема E (Шелин, [27]). *Если прямоугольник $P \subset \mathbb{R}^2$ содержит начало координат, то для любой функции $f \in L(\log L)^3 \log\log L(\mathbb{T}^2)$ имеет место соотношение (0.3).*

В той же работе Шелин рассматривал также случай, когда P есть квадрат. Им установлено, что в этом случае сходимость п. в. имеет место в более широком классе функций, а именно в $L(\log L)^2 \log\log L(\mathbb{T}^2)$.

Теорема F (Тевзадзе, [30]). *Для любой последовательности прямоугольников*

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \ldots, \quad \cup_k R_k = \mathbb{R}^2, \tag{0.4}$$

стороны которых параллены осям координат, частичные суммы $S_{R_k}(x, y, f)$ двойного ряда Фурье любой функции $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ сходятся п. в..

Любопытно отметить, что Тевзадзе [30] в своей работе устанавливает более общую теорему. А именно, если ортонормированная система $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (a, b)$, такова, что все ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \tag{0.5}$$

сходятся почти всюду, то двойные ряды

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \phi_n(x) \phi_m(y), \quad \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}^2 < \infty,$$

сходятся почти всюду по любым последовательностям прямоугольников (0.4).

Усилив теорему E, Антонов установил следующую теорему, которая является самим широким известным классом функций, двойные ряды Фурье которых сходятся п.в. по квадратам.

Теорема G (Антонов, [2]). *Если $P \subset \mathbb{R}^2$ есть квадрат и $f \in L(\log L)^2 \log\log\log L(\mathbb{T}^2)$, то имеет место соотношение (0.3).*

Надо заметить, что в теоремах D-G последовательносити частичных сумм зависят только от одного параметра, и в их доказательставах используется теорема Карлесона и его одномерные обобщения. Иным свойством обладают прямоугольные частичные суммы

$$S_{NM}(x, y, f) = \sum_{|n| \le N, |m| \le M} c_{nm} e^{i(nx+my)}, \tag{0.6}$$

где областями суммирования являются всеозможные прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат. Такие суммы зависят от двух независимых параметров N, M и их свойства сходимости совершенно не похожи на свойства предыдущих частичных сумм. Этот факт обосновывается следующей теоремой:

Теорема H (Ч. Фефермана, [9]). *Существует непрерывная функция $f \in C(\mathbb{T}^2)$, прямоугольные частичные суммы ряда Фурье которой расходятся всюду, точнее*

$$\limsup_{N,M \to \infty} |S_{NM}(x, y, f)| = \infty, \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2.$$

Отметим также, что в выше приведенных теоремах сходимости двойных рядов Фурье рассматриваются многоугольники, стороны которых параллельны фиксированным направлениям. Оказывается, что это тоже является важным обстоятельством в этих теоремах.

В первой главе рассматривается вопрос сходимости почти всюду треугольных частичных сумм двойных рядов Фурье, при этом отношения сторон суммирующих треугольних областей не постоянны. Будем рассматривать области следующих видов:

$$\Delta(a, b) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a|x| + b|y| \le 1\right\}, \quad a, b > 0, \tag{0.7}$$

$$W(\alpha, \beta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\cos\theta, |y| = r\sin\theta, r \ge 0, \alpha \le \theta \le \beta\}, \tag{0.8}$$
$$0 \le \alpha < \beta \le \frac{\pi}{2},$$

Области вида (0.7) представляют ромбы. Если $\Delta = \Delta(a, b)$, то обозначим

$$\rho(\Delta) = \frac{\max\{a, b\}}{\min\{a, b\}}.$$

Ясно, что Δ будет квадратом, если $a = b$ или то же самое, что $\rho(\Delta) = 1$. Отметим также, что каждая область (0.8) можно представить в виде объединения четырех секторов вида

$$V(\alpha,\beta) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}, \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi, \tag{0.9}$$

где $\mathbb{R}_+$ есть множество вещественных неотрицательных чисел. Последовательность областей G_k назовем полным, если $\cup_{k=1}^{\infty} G_k = \mathbb{R}^2$.

В первой главе диссертации доказывается

Теорема 1. *Существуют функция $f \in \cap_{1\leq p<\infty} L^p(\mathbb{T}^2)$ и полная возрастающая последовательность Δ_k, $k = 1, 2, \ldots$, областей вида (0.7), такие, что $\rho(\Delta_k) \to 1$ и имеет место соотношение*

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{\Delta_k}(x,y,f)| = \infty \text{ п. в. на } \mathbb{T}^2.$$

Чтобы сравнить результат теоремы 1 с выше изложенными положительными результатами приведем следующее следствие вышеупомянутого общего результата Феффермана [8]. Как отмечается в [8] оно в то же время эквивалентно общей теореме Феффермана.

Теорема I (Фефферман)**.** *Если Δ_k, $k = 1, 2, \ldots$, есть полная возрастающая последовательность квадратов вида (0.7) ($\rho(\Delta_k) = 1$), то для любой функции $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, имеет место соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} S_{\Delta_k}(x,y,f) = f(x,y) \text{ п. в. на } \mathbb{T}^2. \tag{0.10}$$

Теоремы 1 и I утверждают, что ситуация существенно меняется при замене условия $\rho(\Delta_k) = 1$ на $\rho(\Delta_k) \to 1$. Условие $\rho(\Delta_k) \to 1$ означает, что в бесконечности ромбы Δ_k "превращаются"в квадраты. Теорема 1 показывает, что все равно этого не достаточно для сохранения свойства сходимости (0.10).

Аналогичная теорема доказывается также для секторных сумм. Отметим, что хотя при неограниченной области G сумма (0.2) не является конечным, но она определена п.в. в случае $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$.

Теорема 2. *Для любой возрастающей последовательности W_k, $k = 1, 2, \ldots$, областей вида (0.7) существует функция $f \in \cap_{1\leq p<\infty} L^p(\mathbb{T}^2)$ такая, что*

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{W_k}(x,y,f)| = \infty \text{ п. в. на } \mathbb{T}^2.$$

Ясно, что области

$$\Delta(a,b) \cap \mathbb{R}^2_+, \tag{0.11}$$

$$W(\alpha,\beta) \cap \mathbb{R}^2_+, \tag{0.12}$$

будут, соответственно, треугольниками и секторами с вершинами в начале координат. Хорошо известно, что двойной ряд Фурье (0.1) вещественной функции $f \in L(\mathbb{T}^2)$ имеет запись в вещественной форме (по синусам и косинусам), а сумма (0.2), соответствующая некоторой ромбовой области (0.7), совпадает с суммой членов двойного вещественного ряда Фурье с номерами из треугольника (0.11). Аналогично, сумма ряда (0.1) по областям (0.8) превращаются суммы по секторам (0.12) в вещественном случае.

Вторая глава посвящена вопросам абсолютной и безусловной сходимости одномерных рядов Фурье-Хаара. Система Хаара введена Хааром 1909 году в своей диссертачии [14]. Она ширако используется не только в теории функций, а также в теории вероятностей и вычислительной математике. Последовательность частичных сумм любого ряда по системе Хаара образует мартингал. Система Хаара а также его преобразования являются важным объектом в теории рядов Фурье, так как они хорошо применяется во многих задачах гармонического анализа. В частности результаты и методы, которые будут рассмотрены во второй главе, будут применены в третей главе. Хорошо известно, что ряд Фурье-Хаара любой непрерывной функций сходится равномерно, а ряд суммируемой функции сходится почти всюду. Что касается перестановкам рядов Хаара, они как мы увидем ниже могут и расходится п.в..

Определение 1. *Функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

определенный на множестве E назовем безусловно сходящимся почти всюду на E, если этот ряд сходится п.в. при любой перестановке его членов.

Определение 2. *Ортонормированная система* $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *называется системой сходимости, если все ряды (0.5) сходятся почти всюду, и эту систему назовем системой безусловной сходимости, если эти же ряды сходятся почти всюду при любой перестановке их членов.*

Известно, что все классические системы, в том числе и система Хаара, являются системами сходимости, но не являются системами безусловной сходимости. То, что система Хаара является системой сходимости получается из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла. Первые результаты о безусловной сходимости п.в. рядов Хаара получены П. Л. Ульановым. Им установлена

Теорема J (Ульянов, [31])**.** *Система Хаара не является системой безусловной сходимости.*

Эта теорема другими словами означает, что существует функция $f \in L^2(0,1)$, ряд Фурье-Хаара которой расходится почти всюду после некоторой перестановки его членов. Вопрос о том настолько "хорошим"могут быть функции с такими свойствами был исследован А. М. Олевским [23]. В своей работе Олевский получил следующую общую теорему, которая устанавливает также, что не существуют полных ортонормированных систем безусловной сходимости.

Теорема K (Олевский, [23])**.** *Для любой полной ортонормированной системы* $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, *существует непрерывная функция* $f \in C[0,1]$, *ряд Фурье которой по этой системе после некоторой перестановки членов неограниченно расходится почти всюду.*

Следующий результат показывает, что для рядов по системе Хаара абсолютная сходимости п.в. и безусловная сходимость п.в. эквивалентны.

Теорема L (Ульянов-Никишин, [22])**.** *Для безусловной сходимости п.в. на множестве* $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$, *ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы для п.в. $x \in E$ *была конечна сумма*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \chi_n(x)|.$$

В главе 2 доказываются теоремы, которые показывают, что безусловная сходимость п.в. может не выполнятся даже для характеристических функций. В случае системы Хаара эта функция может быть даже характеристической функцией некоторого открытого множества.

Теорема 3. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $G \subset [0,1]$, *с* $|G| < \varepsilon$, *такое, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\mathbb{I}_G)\chi_k(x)| = \infty \text{ п.в. на } [0,1].$$

Теорема 4. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует открытое множество* $E \subset [0,1]$, *с* $|E| < \varepsilon$, *такое, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\mathbb{I}_E)\chi_k(x)| = \infty \text{ п.в. на } [0,1] \setminus E.$$

Из теоремы 3 и теоремы Ульанова-Никишина немедленно получаем

Теорема 5. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $G \subset [0,1]$, *с* $|G| < \varepsilon$, *такое, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\mathbb{I}_G)\chi_k(x)$$

неограниченно расходится почти всюду после некоторой перестановки его членов.

Отметим, что в теореме 4 нельзя получить расходимость п.в. на всем отрезке $[0,1]$, так как из открытости множества E следует безусловная сходимость в любой точке $x \in E$. Следующая теорема показывает, что в теореме Олевского исключительная функция может быть и характеристической функцией.

Теорема M. *(Олевский) Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *есть полная ортонормированная система. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $G \subset [0,1]$, *с* $|G| < \varepsilon$, *такое, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\mathbb{I}_E)\varphi_k(x)$$

неограниченно расходится п.в..

Третья глава диссертации посвящена вопросам почти всюду сходимости и расходимости треугольных сумм двойных рядов Фурье по системам Уолша и Хаара. Отметим, что система Уолша своими свойствами похожа на тригонометрическую систему, но есть и существенные отличия. Появление теоремы Карлесона повлияло также на развитие исследований вопросов сходимости почти всюду рядов Фурье-Уолша. Теорема аналогичная теореме Карлесона была установлена Биллардом [4] в 1967 году. Дальнейшее изучение свойств сходимости рядов Уолша было сделано в работах Шелина [28], Антонова [1] и Шелина-Сория [29]. Наилучший известный класс, обеспечивающий сходимость п.в. рядов Фурье-Уолша, устанавливает следующая теорема.

Теорема N (Антонов, 2001). *Ряд Фурье-Уолша любой функции $f \in L\log(L)\log\log\log(L)$ сходится почти всюду.*

Что касается двойных рядов Фурье-Уолша, то отметим, что из общего результата Тевзадзе (теорема F) следует аналогичное свойство сходимости также для системы Уолша. С другой стороны вопрос о сходимости почти всюду кратных рядов Фурье-Уолша по кубам в классе функций L^p при $p < 2$ все еще остается открытым.

В главе 3 мы рассматриваем вопросы расходимости почти всюду двойных рядов Фурье по системам Хаара и Уолша по неравнобедренным треугольным и секторным областям.

Пусть $\phi = \{\phi_n(x),\, n \in \mathbb{N}\}$ есть некоторая ортонормированная система. Для данной области $G \subset \mathbb{R}^2_+$ обозначим через

$$S_G(x, y, \phi, f) = \sum_{(n,m)\in G} a_{nm}\phi_n(x)\phi_m(y), \quad a_{nm} = \int_0^1\int_0^1 f(t,s)\phi_n(t)\phi_m(s)dtds,$$

частичную сумму двойного ряда Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Будем рассматривать секторные и треугольные области

$$V(\alpha,\beta) = \left\{(n,m):\, n,m \in \bar{\mathbb{N}}, \quad \frac{m}{n} \in (\tan\alpha, \tan\beta)\right\}, \quad 0 \le \alpha < \beta \le \frac{\pi}{2},$$
$$\Delta(u,v) = \left\{n,m \in \bar{\mathbb{N}} : \frac{n}{v} + \frac{m}{u} \le 1\right\}, \quad u,v > 0,$$

где $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ в случае системы Хаара и $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, во время системы Уолша.

Определение 3. *Возрастающую последовательность областей G_k назовем полной, если*

$$\cup_k G_k = \bar{\mathbb{N}}^2.$$

Обозначим через $\mathbb{I}_F(x,y)$ характеристическую функцию множество $F \subset (0,1)^2$, а через χ и w соответственно будут обозначены системы Хаара и Уолша.

Приведем результаты полученные в третей главе.

В следующих двух теоремах устанавливаются явления аналогичные тригонометрической системы для двойных рядов по системе Уолша. В первой из них рассматриваются секторные, а во второй–треугольные области.

Теорема 6. *Для любой возрастающей последовательности секторов V_k существует множество $F \subset (0,1)^2$, для которого*

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{V_k}(x,y,w,\mathbb{I}_F)| = \infty \text{ п.в. на } (0,1)^2.$$

Теорема 7. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset (0,1)^2$, с $|E| < \varepsilon$, и возрастающая последовательность треугольных областей Δ_k, такие, что*

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{\Delta_k}(x,y,w,\mathbb{I}_E)| = \infty \text{ п.в. на } (0,1)^2.$$

Следующая теорема показывает, что в отличие от тригонометрической системы и системы Уолша треугольные суммы двойных рядов Фурье-Хаара ведут себя хорошо в классе функций $L\log L(0,1)^2$.

Теорема 8. *Если $f \in L\log(L)(0,1)^2$, то*

$$\lim_{u,v\to\infty} S_{\Delta(u,v)}(x,y,\chi,f) = f(x,y) \text{ п.в. на } (0,1)^2.$$

Вопрос, аналогичный теореме 8, для сферических сумм рассмотрен в работах Ониани [24, 25] и Кемхадзе [17].

Следующая теорема устанавливает, что двойные ряды Фурье-Хаара ограниченных функций могут расходится почти всюду по возрастающим секторным областям. Более того, имеем

Теорема 9. *Если V_k есть полная возрастающая последовательность секторов, то существует множество $F \subset (0,1)^2$, такое , что*

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{V_k}(x,y,\chi,\mathbb{I}_F)| = \infty \text{ п.в. на } (0,1)^2.$$

Литература

[1] Антонов Н. Ю. , Условия конечности мажорант последовательностей операторов и сходимость рядов Фурье, Тр. ИММ УрО РАН, **7** (2001), no 1, 3–20.

[2] Antonov N. Yu., Convergence of Fourier series, East Journal on Approximation, **2**(1996), no 2, 187–196.

[3] Бари Н.К., Тригонометрические ряды, Москва, "Физматгиз".(1961)

[4] Billard P., Sur la convergence presque partout des séries de Fourier Walsh des functions de l'espace $L^2(0,1)$, Studia Math., **28**(1967), 363–388.

[5] Carleson L., On the convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math., **116**(1966), 135–137.

[6] Дьаченко М.И., Некоторые проблемы теории кратных триеонометрических рядов, Успехи Мат. Наук, **47**(1992), no 5, 99–162.

[7] Du Bois-Reymond T. , Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformen, Abh. Akad. Wiss. München, **X**(1876), 1–103.

[8] Fefferman Ch., On the convergence of multiple Fourier series, Bull. Amer. Math. Soc., **77**(1971), no 5, 744–745.

[9] Fefferman Ch., On the divergence of multiple Fourier series, Bull. Amer. Math. Soc., **77**(1971), no 2, 191–195.

[10] Гецадзе Р.Д.,Непрерывная функция с расходящимся почти всюду кратным рядом Фурье по системе Уолша-Пелли, Матем. сб., , **128(170)**(1985), no 2(10), 269–286.

[11] Гецадзе Р.Д., О расходимости по мере общих кратных ортогональных рядов Фурье, Тр. МИАН СССР, **190**(1989), no 2, 75–87.

[12] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А., Ряды и преобразования Уолша, М. Наука. (1987)

[13] Жижиашвили Л.В., Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа, Тбилиси, Изд-во ун-та.(1983)

[14] Haar A., Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann., **69**(1910), 331–371.

[15] Hunt A., On the convergence of Fourier series, Orthogonal expansions and continuous analogous, Proc. Conf. Southern Inninois Univ. Edvardsville, 235–255.(1968)

[16] Кашин Б. С., Саакян А. А., Ортогональные ряды, Москва, Наука. (1984)

[17] Кемхадзе Г. Г., О сходимости шаровых частичных сумм кратных рядов Фурье-Хаара, Труды Мат. Инст. им. А.М.Размадзе, **55**(1977), 27-38.

[18] Kolmogoroff A. N. ,Une serie de Fourier-Lebesgue divergente partout, C. r. Acad, Sci., Paris, **183** (1926), 1327–328.

[19] Конягин С.В., О всюду расходящегося тригонометрического ряда Фурье, Мат. Сборник, **191**(2000), no 1, 97-120.

[20] Конягин С.В.,О перестановках функций и расходимости рядов Фурье по кубам, Тр. МИАН СССР, **189**(1989), no 2, 98–109.

[21] Luzin N. N., On a case of Taylor series, Mat. Sbornik, **23**(1912), 295-302.

[22] Никишин Е. М., Ульянов П. Л., Об абсолютной и безусловной сходимости, Успехи матем. наук, **22**(1967), no 3, 240–242.

[23] Олевский А.М. Расходящиеся ряды Фурье непрерывных функций, Докл. АН СССР. **141**(1961), no1, 28–31.

[24] Ониани Г.Г., О взаимосвязи между сходимости по прямоугольникам и по сферам кратных рядов Хаара, Успехи Мат. Наук, **76**(2012), no 1, 186–187.

[25] Ониани Г.Г., О сходимости кратных рядов Хаара, Изв. РАН, сер. математика, **78**(2014), no 1, 186–187.

[26] Schipp F., Wade W. R., Simon P. and Pál J., Walsh Series, an Introduction to Dyadic Harmonic Analysis, Adam Hilger, Bristol, New York.(1990)

[27] Sjölin P., Convergence almost everywhere certain singular integrals and multiple Fourier series, Arkiv för Mat., **9**(1971), 65–90.

[28] Sjölin P., An inequality of Paley and convergence a. e. of Walsh-Fourier series, Arkiv för Mat., **7**(1969), 551–570.

[29] Sjölin P., Soria F., Remark on a theorem of N. Yu. Antonov, Studia Math., **158**(2003), no 1, 79–96.

[30] Тевзадзе Н. Р., О сходисости двойного ряда Фурье функции интегрируемая с квадратом, Сообщения АН Груз. ССР, **58**(1970), no 2, 277–279.

[31] Ульянов П. Л., Расходящиеся ряды Фурье класса $L^p(p \geq 2)$, Докл. АН СССР, **137**(1961), no 4, 768–789.

[32] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т.1,2, Москва, "Мир".(1965)

Работы автора по теме диссертации

[1] Мурадян К. Р., Об абсолютной расходимости рядов Фурье-Хаара характеристических функций, Изв. НАН Армении, **46**(2011), no 6, 299–304.

[2] Karagulyan G. A. , Muradyan K. R., On the Divergence of Triangular and Sectorial Sums of Double Fourier Series, Dokl. NAN Armenii **114**(2014), no 2, 97–100.

[3] Karagulyan G. A. , Muradyan K. R., On the divergence of Walsh and Haar series by sectorial and triangular regions, Proc. of the Yerevan State University, **234**(2014), no 2, 3–12.

Summary

Main results of the thesis are the following:

- There exists a function $f \in \cap_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{T}^2)$ and a complete increasing sequence of triangular regions Δ_k, $k = 1, 2, \ldots$, such that $\rho(\Delta_k) \to 1$ and
$$\limsup_{k\to\infty} |S_{\Delta_k}(x, y, f)| = \infty \text{ a.e. on } \mathbb{T}^2.$$
- For an arbitrary sequence of regions W_k, $k = 1, 2, \ldots$, of the form (0.8) there exists a function $f \in \cap_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{T}^2)$ such that
$$\limsup_{k\to\infty} |S_{W_k}(x, y, f)| = \infty \text{ a.e. on } \mathbb{T}^2.$$
- For any $\varepsilon > 0$, there exists a set $G \subset [0, 1]$ such that $|G| < \varepsilon$ and
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\mathbb{I}_G)\chi_k(x)| = \infty \text{ a.e. on } [0, 1].$$
- For any $\varepsilon > 0$, there exists an open set $E \subset [0, 1]$ such that $|E| < \varepsilon$ and
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\mathbb{I}_E)\chi_k(x)| = \infty \text{ a.e. on } [0, 1] \setminus E.$$
- Let $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a complete orthonormal system. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists a set $G \subset [0, 1]$ such that $|G| < \varepsilon$ and the series
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\mathbb{I}_G)\varphi_k(x)$$
diverges unboundedly a.e. on [0,1].
- For an arbitrary sequence of sectors V_k, $k = 1, 2, \ldots$ there exists a set $F \subset (0, 1)^2$ such that
$$\limsup_{k\to\infty} |S_{V_k}(x, y, w, \mathbb{I}_F)| = \infty \text{ a. e. on } (0, 1)^2.$$
- For any $\varepsilon > 0$, there exists a set $E \subset [0, 1]$ and an increasing sequence of triangular regions Δ_k, $k = 1, 2, \ldots$, such that
$$\limsup_{k\to\infty} |S_{\Delta_k}(x, y, w, \mathbb{I}_E)| = \infty \text{ a. e. on } [0, 1].$$
- If $f \in L\log(L)(0, 1)^2$, then
$$\lim_{u,v\to\infty} S_{\Delta(u,v)}(x, y, \chi, f) = f(x, y) \text{ a. e. on } (0, 1)^2.$$
- If V_k, $k = 1, 2, \ldots$ is a complete increasing sequence of sectors, then there exists a measurable set $F \subset (0, 1)^2$ such that
$$\limsup_{k\to\infty} |S_{V_k}(x, y, \chi, \mathbb{I}_F)| = \infty \text{ a. e. on } (0, 1)^2.$$

Ամփոփում

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ արդյունքները՝

- Գոյություն ունի $f \in \cap_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{T}^2)$ ֆունկցիա և (0.7) տեսքի Δ_k, $k=1,2,\dots$, լրիվ աճող փիրույթների հաջորդականություն այնպիսին, որ $\rho(\Delta_k)\to 1$ և տեղի ունի

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{\Delta_k}(x,y,f)| = \infty \text{ h. ա. } \mathbb{T}^2\text{-ում :}$$

- Կամայական W_k, $k=1,2,\dots$, (0.8) տեսքի աճող փիրույթների հաջորդականության համար գոյություն ունի $f \in \cap_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{T}^2)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{W_k}(x,y,f)| = \infty \text{ h. ա. } \mathbb{T}^2\text{-ում :}$$

- Կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $G\subset[0,1]$ բազմություն՝ $|G|<\varepsilon$, այնպիսին, որ

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\mathbb{I}_G)\chi_k(x)| = \infty \text{ h. ա. } [0,1]\text{-ում :}$$

- Կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $E\subset[0,1]$ բաց բազմություն՝ $|E|<\varepsilon$, այնպիսին, որ

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\mathbb{I}_E)\chi_k(x)| = \infty \text{ h. ա. } [0,1]\setminus E\text{-ում :}$$

- Դիցուք $\Phi=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ է: Այդ դեպքում կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $G\subset[0,1]$ բազմություն՝ $|G|<\varepsilon$, այնպիսին, որ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\mathbb{I}_E)\varphi_k(x)$$

  շարքը անսահմանափակ տարամիտում է հ.ա. $[0,1]$ -ում :

- Կամայական V_k, $k=1,2,\dots$ աճող սեկտորների հաջորդականության համար գոյություն ունի $F\subset(0,1)^2$ բազմություն, այնպիսին, որ

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{V_k}(x,y,w,\mathbb{I}_F)| = \infty \text{ h. ա. } (0,1)^2\text{-ում :}$$

- Կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $E\subset(0,1)^2$ բազմություն՝ $|E|<\varepsilon$, և Δ_k, $k=1,2,\dots$ աճող եռանկյուն փիրույթների հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{\Delta_k}(x,y,w,\mathbb{I}_E)| = \infty \text{ h. ա. } [0,1]\text{-ում :}$$

- Եթե $f\in L\log(L)(0,1)^2$, ապա

$$\lim_{u,v\to\infty} S_{\Delta(u,v)}(x,y,\chi,f) = f(x,y) \text{ h. ա. } (0,1)^2\text{-ում :}$$

- Եթե V_k, $k=1,2,\dots$ լրիվ աճող սեկտորների հաջորդականություն է, ապա գոյություն ունի $F\subset(0,1)^2$ բազմություն, այնպիսին, որ

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{V_k}(x,y,\chi,\mathbb{I}_F)| = \infty \text{ h. ա. } (0,1)^2\text{-ում :}$$