ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱԶԻԶՅԱՆ ՀԵՐՄԻՆԵ ՀՈՎՀԱՆՆԵՍԻ

ՓԱԹԵԹԻ ՏԻՊԻ ՈՐՈՇ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱ-ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

Ա.01.02 - «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, Մաթեմատիկական ֆիզիկա»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

ԵՐԵՎԱՆ 2016

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АЗИЗЯН ЭРМИНЕ ОГАНЕСОВНА

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.02 - "Дифференциальные уравнения и Математическая физика"

Ереван 2016

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Ե Պ Հ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի գիտական խորհրդի հ.5 նիստում (24.05.2016թ):

Գիտական ղեկավար՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Խ. Ա. Խաչատրյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Ս. Կրիվոշեև

- ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Լ. Պ. Տեփոյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ - Հայ-Ռուսական (Սլավոնական) Համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2016թ. հոկտեմբերի 18-ին ժամը 15:00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե՝ ք.Երևան, 3750025, փ. Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Ե Պ Հ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2016թ. սեպտեմբերի -ին:

050 մասնագիտական խորհրդի

գիտական քարտուղար,

ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր՝ Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета факультета математики и механики ЕрГУ (№ 5, 24.05.2016г).

Научный руководитель - доктор физ.-мат. наук Х.А. Хачатрян

Официальные оппоненты - доктор физ.-мат. наук, профессор А. С. Кривошеев

- кандитдат физ.-мат. наук, доцент Л. П. Тепоян

Ведущая организация -Российско-Армянский (Славянский) Университет

Защита диссертации состоится 18-го октября 2016г. в 15:00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском государственном университете.

Адрес: г. Ереван, 3750025, ул. Алек Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрГУ.

Автореферат разослан -го сентября 2016г.

Ученый секретарь

специализированного совета,

доктор физ.-мат. наук, профессор Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с операторами типа Гаммерштейна в настоящее время является одним из важных и активно развивающихся направлений нелинейного функционального анализа. Среди таких уравнений по своей сложности и важности в приложениях особое место занимают нелинейные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения сверточного типа на полуоси и на всей числовой прямой. Основной сложностью таких уравнений является отсутствие полной непрерывности (компактности) соответствующих нелинейных операторов в рассматриваемых функциональных пространствах. Немаловажным затруднением исследования таких уравнений является неограниченность тех областей, где рассматриваются эти уравнения.

Важность изучения таких уравнений в первую очередь связана с многочисленными приложениями в самых различных областях современного естествознания. В частности, указанные классы уравнений возникают в теории переноса излучения, в кинетической теории газов, в p-адической математической физике, в квантовой механике, в задачах теории нелокального взаимодействия, в эконометрике и т.д. (см. [1]-[6]).

В большинстве рассматриваемых в приложениях случаев тождественно нулевая (или постоянная) функция удовлетворяет указанным уравнениям, и возникает необходимость в построении второго положительного решения в некотором конусе.

Отсутствие полной непрерывности соответствующих операторов и неограниченности области интегрирования в уравнениях делают практически невозможным применение различных классических принципов о неподвижных точках.

Исторически вопросам изучения и построения нетривиальных решений для нелинейных уравнений Гаммерштейна посвящены исследования многих авторов: М.А. Красносельского, Ф. Браудера, П.П. Забрейко, В.Я. Стеценко, Н. Бобылева, П.Е. Соболевского, Дж. Банаса, Ц. Панчала, Г. Брейзиса, Р. Прекупа и др. (см. [7]-[10] и ссылки в них). В этом направлении разработаны ряд эффективных методов исследования, получены удобные в приложениях признаки существования положительных (нетривиальных) решений для различных видов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна.

Однако классическая теория, как правило, ограничивается изучением тех нелинейных уравнений, у которых соответствующий интегральный оператор обладает свойством полной непрерывности (или компактности), а сами уравнения в большинстве случаев рассматриваются в ограниченных областях.

Анализ нелинейных сверточных интегральных операторов, не обладающих свойствами полной непрерывности (у которых линейная мажоранта или миноранта - оператор типа Винера-Хопфа с единичным спектральным радиусом) на протяжении нескольких лет систематически проводился в основном работах В.С. Владимирова, Н.Б. Енгибаряна, Л.Г. Арабаджяна, А.Х. Хачатряна и Х.А. Хачатряна (см. например [2], [11]-[16] и ссылки в них).

В последние годы в работах Х.А. Хачатряна были начаты детальные и систематические исследования нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактными операторами Гаммерштейна и Урысона на полуоси и на всей прямой (см. [13]-[16] и ссылки в них). В этих работах найдены естественные достаточные условия, обеспечивающие существование однопараметрических семейств положительных решений в рассматриваемых функциональных пространствах. Изучена зависимость решений от параметров.

В работах Х.А. Хачатряна получены также специальные признаки единственности построенного положительного решения.

Диссертационная работа посвящена дальнейшему исследованию и построению нетривиальных решений для новых классов нелинейных интегральных уравнений и граничных задач для интегро-дифференциальных уравнений сверточного типа с некомпактным оператором Гаммерштейна.

С использованием факторизационных методов для соответствующих линейных операторов, методов построения инвариантных конусных отрезков для нелинейных операторов, а также методов теории монотонных операторов удается получить глобальные теоремы существования положительных решений в определенных банаховых пространствах.

Цель работы. Цель диссертационной работы является исследование вопросов положительной разрешимости в определенных функциональных пространствах некотораяа классов нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа свертки а также их дискретных аналогов.

Методы исследования. Использовались методы теории монотонных нелинейных операторов, методы консервативных интегральных уравнений Виннера-Хопфа, специальне итерационные методы, методы теории функций вещественной переменой, методы теории матрица и др..

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Она может иметь приложения в задачах температурного скачках в кинетической теории газов, в задачах нелокального взаимодействия, в теории переноса излучения, в p-адической теории струны.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

- Установление достаточных условий существования однопараметрического семейства положительных и ограниченных решений для некоторог класса интегальных уравнений Гаммерштеейна с монотонной и знакоперемвнной нелинейностью.

- Построение покомпонентно положительных решений в пространстве ограниченных последовательностей для некоторых классов бесконечных систем нелинейных алгебраических урвнений с матрицами типа Теплица.

- Построение однопараметрического семейства положительных решений в пространстве l_1 некоторого класса дискретных нелинейных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра в закритическом случае.

- Установление достаточных условий существование положительных решений в пространстве Соболева $W_1^2(\mathbb{R}^+)$ для специальных классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с монотонной нелинейностью.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отдела методов математической физики Института математики НАН Армении, на семинаре кафедры дифференциальных уравнений ЕГУ, на конференции посвященной 110-летию академика НАН РА А.Л. Шагиняна (Ереван, Армения 2016г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Работа изложена на 83 странице, состоит из введения, двух глав, содержащих 8 параграфов, заключения, списка литературы, включающего 130 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, дан краткий обзор литературы по теме диссертации, общие направления и изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена изучению и решению одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна с почти разностным ядром и со знакопеременной нелинейностью, а также исследованию некоторых классов дискретных нелинейных уравнений типа Гаммерштейна и Гаммерштейна-Вольтерра.

В первой части главы 1 рассматривается следующий класс нелинейных интегральных уравнений на полуоси:

$$\varphi(x) = \lambda(x) \int\limits_0^\infty K(x-t) H(t, \varphi(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

относительно неизвестной измеримой и вещественной функции $\varphi(x)$.

Относительно функций λ и K предполагается выполнение следующих условий:

a) существует число $\varepsilon \in (0,1]$ такое, что

$$0 < \varepsilon \leq \lambda(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty) \tag{2}$$

b) $1 - \lambda \in L_1(\mathbb{R}^+), \ \lambda(x) \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$, (3)

c) $K(\tau) \geq 0, \ \tau \in \mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty), \quad K \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}),$ (4)

d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) d\tau = 1, \quad K(x) > 0$ при $x < 0,$ (5)

e) $\nu(K) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau K(\tau) d\tau < 0,$ (6)

причем последний интеграл абсолютно сходится.

Функция $H(t, z)$, описывающая нелинейность в уравнении (1), определена на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, принимает вещественные значения и допускает определенное представление (см. ниже).

Уравнения вида (1) имеют непосредственные применения в различных областях математической физики. В частности, указанные уравнения встречаются в теории переноса излучения в спектральных линиях, в кинетической теории газов, в p-адической математической физике (см. [1], [3], [11]).

В случае, когда функция $H(t,z)$ допускает представление:

$$H(t,z) = z - \omega(t,z),$$

где $\omega(t,z)$ - определена на множестве $\mathbb{R}^+ \times [A, +\infty)$, $(A > 0)$, удовлетворяет на этом множестве условию Каратеодори по аргументу z, причем

- $\omega(t,z) \downarrow$ по z на $[A, +\infty)$,
- $\exists\ \omega^o \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C^0(\mathbb{R}^+)$, $m_1(\omega^o) = \int\limits_0^\infty x\omega^o(x)dx < +\infty$ такая, что

$$0 \leq \omega(t,z) \leq \omega^o(t+z),\ t \in \mathbb{R}^+,\ z \geq A,$$

уравнение (1) достаточно подробно исследовалось в работе [13].

В настоящей диссертации при существенно других ограничениях на функцию $H(t,z)$ доказывается существование однопараметрического семейства положительных решений.

В §1.1 приведены некоторые обозначения и вспомогательные факты из линейной теории консервативных интегральных уравнений свертки.

Прежде чем сформулировать основной результат §1.2 введем следующие функции: пусть $\omega_1(t,u)$ и $\omega_2(t,u)$ - определенные на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ измеримые, вещественнозначные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

- существует число $\delta > 0$ такое, что

  1) $\omega_j \in Car_u(\mathbb{R}^+ \times [\delta, +\infty))$, т.е. при каждом фиксированном $u \in [\delta, +\infty)$ функции $\{\omega_j(t,u)\}_{j=1,2}$ измеримы по $t > 0$, и почти при всех $t \in \mathbb{R}^+$ эти функции непрерывны по u на множестве $[\delta, +\infty)$,

  2) $\omega_j(t,u) \geq 0$, $(t,u) \in \mathbb{R}^+ \times [\delta, +\infty)$, $j = 1, 2$,

  3) при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ $\omega_1(t,u) \uparrow$ по u на $[\delta, +\infty)$, а $\omega_2(t,u) \downarrow$ по u на $[\delta, +\infty)$,

  4) существуют

$$\sup_{u \geq \delta} \omega_j(t,u) = \beta_j(t),$$

где $\beta_j \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, $m_1(\beta_j) = \int\limits_0^\infty t\beta_j(t)dt < +\infty$, $j = 1, 2$. Основным результатом §1.2 является следующая

Теорема 1.1. *Пусть $H(t,u)$ допускает представление:*

$$H(t,u) = u + \omega_1(t,u) - \omega_2(t,u),$$

где $\{\omega_j(t,u)\}_{j=1,2}$ *удовлетворяют условиям 1)-4), а функции* λ *и* K *- условиям* (2)-(6). *Тогда уравнение* (1) *обладает однопараметрическим семейством положительных и ограниченных решений* $\{\varphi_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Pi}$, *где*

$$\Pi = [\delta + \delta_2, +\infty), \ \delta_2 = \sup_{x\geq 0} f_2(x),$$

δ *- определяется из условий на* $\{\omega_j(t,u)\}_{j=1,2}$, *а* f_2 *- суммируемое, ограниченное на* $\mathbb{R}^+$ *положительное решение линейного уравнения*

$$f_2(x) = g_2(x) + \lambda(x)\int_0^\infty K(x-t)f_2(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{7}$$

где

$$g_2(x) = \lambda(x)\int_0^\infty K(x-t)\beta_2(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{8}$$

Более того,

a) *если* $\gamma_1, \ \gamma_2 \in \Pi, \ \gamma_1 > \gamma_2,$ *то*

$$\varphi_{\gamma_1}(x) - \varphi_{\gamma_2}(x) \geq \gamma_1 - \gamma_2,$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_\gamma(x) = \dfrac{\gamma}{\alpha(1-\gamma_+)}$, $\forall\gamma\in\Pi$, где

$$\alpha \equiv \inf_{x\geq 0} B^*(x) > 0,$$

B^* *- специальное ограниченное решение однородного линейного уравнения*

$$B(x) = \lambda(x)\int_0^\infty K(x-t)B(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{9}$$

а $\gamma_+ \in (0,1)$ *однозначно определяется из уравнения факторизации Н.Б. Енгибаряна для ядра* K *(см. §1.1 главы 1).*

Следует отметить, что существование положительных и ограниченных решений для уравнений (7) и (9) в теореме 1.1 не предполагается, а устанавливается в ходе доказательства (см. гл.1 §1.2).

§1.3 главы 1 посвящен исследованию следующего класса нелинейных дискретных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра:

$$x_n = \sum_{k=n}^\infty a_{j-n}h_j(x_j), \quad n = 0,1,2,... \tag{10}$$

относительно искомого бесконечного вектора

$$x = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)^T,$$

где T - знак транспонирования.

В системе (10) предполагается, что последовательность элементов $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\textbf{a)}\ a_k \geq 0,\ k = 0, 1, 2, ...,\ a_0 = 0, \tag{11}$$

$$\textbf{b)}\ \mu \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty, \tag{12}$$

$$\textbf{c)}\ \mu > 1 \quad \text{(условие закритичности)}. \tag{13}$$

Последовательность измеримых и вещественнозначных функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию критичности:

$$h_j(0) = 0,\ j = 0, 1, 2, ... \tag{14}$$

и некоторым другим условиям (см. ниже).

Система (10), кроме чисто математического интереса, имеет применение в дискретных задачах нелинейной теории переноса излучения (см.[1]). Кроме того, система (10) является естественным дискретным аналогом нелинейного интегрального уравнения в свертках типа Гаммерштейна-Вольтерра:

$$f(x) = \int_x^{\infty} v(t - x) H(t, f(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{15}$$

имеет многочисленные применения в самых различных областях естествознания.

До формулировки основного результата §1.3 вводится в рассмотрение следующая функция, определенная на отрезке $[0, 1]$:

$$\chi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k, \quad p \in [0, 1].$$

С использованием свойств последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ легко доказывается, что существует единственное число $p_0 > 0$ такое, что

$$\chi(p_0) = 1.$$

Предполагается, что последовательность функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:

I) существует число $\alpha > 0$ такое, что при каждом фиксированном $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функции $\omega_j(u) \equiv h_j(u) - u \uparrow$ по u на множестве $\Omega_j \equiv [\alpha p_0^j, +\infty)$, $j = 0, 1, 2, ...$,

II) функции $\omega_j(u)$ непрерывны на множестве Ω_j, $j = 0, 1, 2, ...$,

III) существует

$$\tau_j \equiv \sup_{u \geq \alpha} \omega_j(u) < +\infty,\ j = 0, 1, 2, ... ,$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^{\infty}$ - последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{k=0}^{\infty} j\tau_j\ p_0^{-j} < +\infty,$$

IV) $\omega_j(u) \geq 0$, при $u \in \Omega_j$ и $j = 0, 1, 2, ...$.

В §1.3 доказывается следующая

Теорема 1.2. *Пусть последовательность* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (11)-(13), *а* $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ *обладает свойствами I)-IV). Тогда для любого* $\gamma \in \Pi \equiv [\alpha, +\infty)$ *система* (10) *имеет покомпонентно положительное решение* $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Pi}$, $x_\gamma = (x_{0,\gamma}, x_{1,\gamma}, ..., x_{n,\gamma}...)^T$, *такое, что*

1) $x_\gamma \in l_1$.

Если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Pi$ *и* $\gamma_1 > \gamma_2$, *то справедливы оценки снизу:*

2)$x_{n,\gamma_1} - x_{n,\gamma_2} \geq (\gamma_1 - \gamma_2)p_0^n$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

При этом, если существует натуральное число N_0 *такое, что при всяком фиксированном* $u \geq 0$

$\omega_{j+1}(u) \leq \omega_j(u)$, $j = N_0, N_0 + 1, ...,$ *то*

3) $x_{n+1,\gamma} \leq x_{n,\gamma}$, $n = N_0, N_0 + 1, ...,$ $\forall \gamma \in \Pi$.

После доказательства теоремы 1.2 в §1.3 приведены также примеры последовательности $\{\omega_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$, для которых выполняются все условия теоремы 1.2 .

Последняя часть главы 1 посвящена исследованию следующего класса нелинейных систем бесконечных алгебраических уравнений:

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k}\mu_k(y_k), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{16}$$

относительно бесконечного вектора

$$\vec{y} = (..., y_{-1}, y_0, y_1, ...)^T.$$

В системе (16) $A \equiv (a_{n-k})_{n,k=-\infty}^{\infty}$ - бесконечная теплицева матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

$$a_j \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j = 1, \tag{17}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |j| a_j < +\infty \ \text{ и } \ \nu(A) \equiv \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j a_j \neq 0. \tag{18}$$

При условиях (17)-(18) доказывается, что функция

$$\rho(q) \equiv \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j q^{|j|}, \tag{19}$$

взаимно однозначно отображает $(0,1)$ на $(0,1)$. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ единственное решение уравнения

$$\rho(q(\varepsilon)) = \varepsilon,$$

а $\vec{r} = (..., r_{-1}, r_0, r_1, ...)^T \in l_1$ - некоторый бесконечный вектор, координаты которого удовлетворяют следующим неравенствам:

$$r_k \geq \frac{1}{\varepsilon} q^{|k|}(\varepsilon), \ k \in \mathbb{Z}.$$

В §1.4 сперва рассматривается следующая система бесконечных линейных алгебраических уравнений:

$$\tilde{y_n} = \tau_n + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} \tilde{y_k}, \ n \in \mathbb{Z} \tag{20}$$

относительно бесконечного вектора $\vec{\tilde{y}} = (..., y_{-1}, y_0, y_1, ...)^T$, где

$$\tau_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} r_k, \ n \in \mathbb{Z}$$

и доказывается, что (20) имеет положительное решение в пространстве m, где m пространство бесконечных векторов вида $\vec{b} = (...b_{-1}, b_0, b_1, ...)^T$ для которых $\sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} b_n < +\infty$.

Затем доказываются следующие основные теоремы §1.4:

Теорема 1.3. *Пусть бесконечная матрица* A *удовлетворяет условиям* (17), (18). *Пусть, далее, последовательность функций* $\{\mu_k(z)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ удовлетворяет следующим условиям:

I) $\mu_k(0) \equiv 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}$,

II) *существует число* $\eta \geq \eta_0 = \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{y_n}$ *такое, что при каждом фиксированном* $k \in \mathbb{Z}$ *функция* $\mu_k(z) \uparrow$ *по* z *на отрезке* $[q^{|k|}(\varepsilon), \eta]$,

III) $\mu_k(\cdot) \in C[q^{|k|}(\varepsilon), \eta], \ k \in \mathbb{Z}$,

IV) *выполняются следующие неравенства:*

$$\mu_k(q^{|k|}(\varepsilon)) \geq \frac{1}{\varepsilon} q^{|k|}(\varepsilon) \ k \in \mathbb{Z},$$

$$\mu_k(z) \leq z + r_k, \quad z \in [q^{|k|}(\varepsilon), \eta], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда система (16) *имеет положительное решение* $\vec{y} \in m$. *Более того,*

$$q^{|k|}(\varepsilon) \leq y_k \leq \eta, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1.4. *Пусть выполняются все условия теоремы 1.3. Тогда справедливы следующие предельные соотношения для решения* $\vec{y} = (..., y_{-1}, y_0, y_1, ...)^T$:

$$\text{если} \quad \nu(A) > 0, \quad \text{то} \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} y_k \xrightarrow[N \to -\infty]{} 0,$$

$$\text{если} \quad \nu(A) < 0, \quad \text{то} \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} y_k \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0.$$

В конце главы 1 приведены примеры функций $\{\mu_k(z)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющих условиям доказанных теорем 1.3 и 1.4.

Вторая глава диссертации посвящена вопросам разрешимости следующего класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$-y'' + \mu y = \int\limits_0^\infty K(x-t) H(t, y(t)) dt, \ x \in \mathbb{R}^+. \tag{21}$$

Такие уравнения имеют непосредственное применения в различных областях математической физики. В частности, уравнения вида (21) возникают в задачах теории нелокального взаимодействия, в кинетической теории газов (задача о скин-эффекте) и т.д (см. [3]-[5]).

В линейном случае, когда $H(t, u) \equiv u, \ t \in \mathbb{R}^+$ уравнение (21) при различных ограничениях на μ и K исследовалось в работах Н.Б. Енгибаряна, А.Х. Хачатряна и Х.А. Хачатряна (см. [5], [16]).

В том случае, когда функция $H(t,u)$ не зависит от переменной t, т.е

$$H(t,u) = G(u),$$

на некотором отрезке $[0,\eta]$ обладает следующими свойствами:

$$G \in C[0,\eta], \quad G(u) \geq u, \quad u \in [0,\eta], \quad G \uparrow \text{на } [0,\eta],$$

$$G(0) = 0, \quad G(\eta) = \eta,$$

μ - числовой параметр, а ядро K - непрерывная функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)d\tau = \mu > 0, \tag{22}$$

$$K(-\tau) > K(\tau), \ \tau \in \mathbb{R}^+, \tag{23}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^j K(\tau)d\tau < +\infty, \ j = 1,2 \ , \tag{24}$$

уравнение (21) в пространстве Соболева $W^2_\infty(\mathbb{R}^+)$ было изучено в работе Х.А. Хачатряна (см.[16]). В указанной работе Х.А. Хачатряном доказано, что уравнение (21) с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \ y \in W^2_\infty(\mathbb{R}^+)$$

имеет неотрицательное (тождественно ненулевое), монотонно возрастающее решение $y(x)$ с пределом η на бесконечности.

Основным исследуемым объектом настоящей главы - следующая краевая задача:

$$\begin{cases} -y'' + \mu y = \int\limits_0^\infty K(x-t)H(t,y(t))dt, \ x \in \mathbb{R}^+, \\ y(0) = 0, \ y \in W^2_1(\mathbb{R}^+). \end{cases} \tag{25}$$

При определенных ограничениях на $H(t,u)$ доказывается конструктивная теорема существования неотрицательного (нетривиального) решения для этой задачи.

§2.1 - §2.2 посвящены обозначениям и некоторым новым вспомогательным фактам из теории консервативных интегральных уравнений Винера-Хопфа.

В §2.1 доказывается следующая ключевая лемма:

Лемма 2.1. *Пусть ядро K - непрерывная функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (22)-(24). Тогда для всякого $\varepsilon \in (0,1)$ существует число $p_\varepsilon > 0$ (причем единственное) такое, что*

$$\Phi(p_\varepsilon) = \frac{\alpha\varepsilon}{2\lambda^2} \ ,$$

где $\lambda = \sqrt{\mu}$, $\quad \Phi(p) = \int\limits_{-\infty}^{0} R(t)e^{pt}dt$, $\quad R(x) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} K(x - z + \tau)d\tau dz$, $x \in \mathbb{R}$, *а* $\quad \alpha \equiv \int\limits_{-\infty}^{0} K(t)dt$.

Далее, фиксируя $\varepsilon \in (0,1)$ в §2.2 вводится некоторая функция $\beta(t)$, определенная $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$\beta \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad m_1(\beta) \equiv \int\limits_{0}^{\infty} x\beta(x)dx < +\infty, \tag{26}$$

$$\beta(x) \geq \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\rho_\varepsilon(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{27}$$

где

$$\rho_\varepsilon(x) = \int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda(x-\tau)}e^{-p_\varepsilon\tau}d\tau = \begin{cases} e^{-p_\varepsilon x}x, \quad \lambda = p_\varepsilon, \\ \dfrac{e^{-p_\varepsilon x} - e^{-\lambda x}}{\lambda - p_\varepsilon}, \quad \lambda \neq p_\varepsilon, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^+. \tag{28}$$

С помощью этой функции рассматривается специальный класс неоднородных интегральных уравнений Винера-Хопфа следующего вида:

$$f(x) = g(x) + \int\limits_{0}^{\infty} R(x-t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{29}$$

относительно вещественной измеримой функции $f(x)$, где

$$g(x) = \int\limits_{0}^{\infty} T(x-t)\beta(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{30}$$

а

$$T(\tau) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda z}K(\tau + z)dz = \int\limits_{t}^{\infty} K(u)e^{-\lambda(u-\tau)}du, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Для уравнения (29) доказывается

Теорема 2.1. *При условиях* (22)-(24) *и* (26)-(28) *уравнение* (29) *имеет неотрицательное суммируемое и существенно ограниченное решение* $f(x)$, *причем* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *Более того, это решение снизу оценивается функцией* $e^{-p_\varepsilon x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

§2.3. посвящен формулировке и доказательству основного результата главы 2.

Пусть h - определенная на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ вещественная и измеримая функция, удовлетворяющая следующим условиям: существует число

$$\eta \geq \frac{\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} f(x)}{\lambda(1-\gamma_+)}$$

такое, что

i) $h \in C[0,\eta], h \uparrow$ на $[0,\eta]$,

j) $h(0) = 0, \quad h(\eta) = \eta, \quad h(u) \leq u, \quad u \in [0,\eta]$,

где f - ограниченное решение уравнения (29), а $\gamma_+ \in (0,1)$ и однозначно определяется с помощью ядра R.

Относительно функции $H(t,u)$ предполагается выполнение следующих условий:

a) при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функция $H(t,u) \uparrow$ по u на $[\rho_\varepsilon(t),\eta]$,

b) функция $H(t,u)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$,

c) существует $\varepsilon \in (0,1)$ такое, что выполняются следующие неравенства:

$$H(t,\rho_\varepsilon(t)) \geq c_\varepsilon \rho_\varepsilon(t), \quad H(t,u) \leq h(u) + \beta(t),$$

$$t \in \mathbb{R}^+, \quad u \in [\rho_\varepsilon(t),\eta], \quad c_\varepsilon \equiv \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon} .$$

Основным результатом главы 2 является следующая

Теорема 2.2. *Пусть ядро K-непрерывная функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям* (22)-(24). *Тогда, если $H(t,u)$ - удовлетворяет условиям a)-c), то задача* (25) *имеет неотрицательное ненулевое решение* $y(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. *Более того* $y(x) > 0$, *при* $x > 0$.

В конце §2.3 приведены примеры функции $H(t,u)$ для иллюстрации положительного результата.

§2.4 посвящен изучению и решению соответствующих систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. С помощью специальных факторизационных методов и методов теории примитивных матриц доказывается разрешимость указанной системы в пространстве Соболева

$$W_{1,2}^{\times N}(\mathbb{R}^+) \equiv \{f(x) = (f_1(x),...,f_N(x))^T, \quad f_j \in W_1^2(\mathbb{R}^+), \quad j = 1,2,....,N\}.$$

Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [1]-[4].

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю д.ф.м. наук Х.А. Хачатряну за постановку задач и постоянную помощь при выполнении диссертационной работы.

Литература

[1] Н.Б. Енгибарян. Об одной нелинейной задаче переноса излучения. Астрофизика, 1965 г., том 1, № 3, стр. 297-302.

[2] Н.Б. Енгибарян. О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае. Известия РАН, сер. Математика., 2006 г., том 70, № 5, стр. 79-96.

[3] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян. Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях. ТМФ, 2012 г., том 172,№ 3, стр.497-504.

[4] Дж. Касти, Р. Калаба. Методы погружения в прикладной математике. 1976, Москва, "Мир" , -224 стр.

[5] Н.Б. Енгибарян, А.Х. Хачатрян. Интегро-дифференциальное уравнение нелокального взаимодействия волн. Матем. Сборник, 2007 г., том 196, № 6, стр. 89-106.

[6] I.D. Sargan. The distribution of wealth. Econometrics., 1957, vol 25, № 4, pp. 568-590.

[7] М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. О разрешимости нелинейных операторных уравнений. Функц. анализ и его прилож. 1971 г., том 5, № 3, стр. 42-44.

[8] C.D. Panchal. Existence theorems for equation of Hammerstein type. Quarterly Journal of Mathematics, 1984, vol 35, № 3, pp. 311-319.

[9] R. Precup. Methods in Nonlinear Integral Equations. Springer-Verlag, New York, 2007, -232p.

[10] J. Banas. Integhrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations. J.Austral. Math. Soc. (A) 1989, vol 46, pp. 61-68.

[11] V.S. Vladimirov, Y.I. Volovich. Nonlinear Dynamics equation in p-adic string theory. Theoretical and Mathematical physics. 2004, vol 138, № 3, pp. 355-368.

[12] Л.Г. Арабаджян. Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна. Известия НАН Армении, Математика, 1997 г., том 32, № 1, стр. 21-28.

[13] Х.А. Хачатрян. Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью. Известия РАН. сер. Матем., 2012 г., том 76, № 1, стр. 173-200.

[14] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. Об одном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором. Мат. сборник, РАН, 2010 г., том 201, № 4, стр. 125-136.

[15] A.Kh.Khachatryan and Kh.A.Khachatryan. On an integral equation with monotonic nonlinearity. Memoirs on Differential equations and Mathematical Physics. 2010, vol. 51, № 3, pp. 59-72.

[16] Х.А. Хачатрян. Разрешимость одного класса интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с монотонной нелинейностью на полуоси. Известия Российской Академии Наук, сер. математическая 2010 г, № 5, том 74, стр. 191-204.

Список опубликованных работ автора по теме диссертации

[1] Х.А. Хачатрян, М.Ф. Броян, Э.О. Азизян. О разрешимости одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка в пространстве $W_1^2(\mathbb{R}^+)$. Известия НАН Армении. Математика, 2015, том 50, № 5, стр.61-73 (in scopus).

[2] Х.А. Хачатрян, Э.О. Азизян. Построение положительного решения для одного класса нелинейных систем бесконечных алгебраических уравнений. Математика в высшей школе. 2015, том 11, № 2, стр.13-20.

[3] Э.О. Азизян. Однопараметрическое семейство положительных решений одного класса интегральных уравнений Гаммерштейна со знакопеременной нелинейностью. Вестник РАУ, 2016, № 1, стр.18-28.

[4] Э.О. Азизян, Х.А. Хачатрян. Однопараметрическое семейство положительных решений для одного класса дискретных нелинейных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра. Уфимский математический журнал. 2016, том 8, № 1, стр.15-21 (in scopus).

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հ.Հ. Ազիզյան

ՓԱԹԵԹԻ ՏԻՊԻ ՈՐՈՇ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱ-ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

Ատենախոսական աշխատանքը նվիրված է փաթեթի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ և ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների որոշ դասերի և դրանց դիսկրետ անալոգների համար դրական լուծումների կառուցմանը և ուսումնասիրությանը:

Նշված հավասարումներում համապատասխան ոչ գծային ինտեգրալ օպերատորները օժտված չեն կոմպակտության հատկությամբ դիտարկվող բանախյան տարածություններում:

Ուսումնասիրվող հավասարումները, բացի մաթեմատիկական հետաքրքրությունից, ունեն կարևոր կիրառական նշանակություն մաթեմատիկական ֆիզիկայի այնպիսի ճյուղերում ինչպիսիք են գազերի կինետիկ տեսությունը, ճառագայթման տեղափոխման տեսությունը, p-ադիկ մաթեմատիկական ֆիզիկան և այլն:

Ատենախոսությունում ստացվել են և պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- Համերշտեյնի ոչ կոմպակտ օպերատորներով ծնվող փաթեթի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների մի դասի համար ապացուցվել է դրական և սահմանափակ լուծումների մեկ պարամետրանոց ընտանիքի գոյությունը: Գտնվել է նաև այդ ընտանիքի յուրաքանչյուր լուծման սահմանային արժեքն անվերջությունում:

- Գերկրիտիկականության դեպքում Համերշտեյն-Վոլտերայի ոչ գծային դիսկրետ հավասարումների համար գտնվել են ոչ գծայնությունը նկարագրող ֆունկցիաների համար բավարար պայմաններ, որոնք ապահովում են լուծումների մեկ պարամետրանոց ընտանիքի գոյությունը l_1 տարածությունում: Ապացուցվել է կառուցված լուծումների մոնոտոնությունը, ինչպես ըստ պարամետրի, այնպես էլ համապատասխան ինդեքսի:

- Ստոխաստիկ տյոպլիցյան մատրիցներով ոչ գծային անվերջ հանրահաշվական համակարգի մի դասի համար ստացվել են լուծելիության թեորեմներ սահմանափակ, անվերջ վեկտորների տարածությունում: Կառուցված լուծումների համար ստացվել են ասիմպտոտիկ գնահատականներ $\pm\infty$ -ում:

- Կիսաառանցքի վրա 2-րդ կարգի ոչ գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների մի դասի համար ձևակերպվել են $W_1^2(\mathbb{R}^+)$ Սոբոլևի տարածությունում դրական լուծումների գոյության համար բավարար պայմաններ:

- Առաջարկվել են հատուկ իտերացիոն մեթոդներ մոտավոր լուծումների կառուցման համար: Բերվել են նշված հավասարումների համար մասնավոր օրինակներ, որոնք ունեն տեսական և կիրառական նշանակություն:

R E S U M E

Hermine Azizyan

THE ISSUES OF SOLVABILITY FOR SOME CONVOLUTION TYPE NONLINEAR INTEGRAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The thesis work is devoted to the issues of construction and studing of positive solutions for some classes of convolution type nonlinear integral and integro-differential equations, as well as their discrete analogues.

The corresponding nonlinear integral operators of above mentioned equations don't passess the proporty of comlete continuity in natural Banach spaces. The investigated equations, besides pure mathematical interest, have important applications in the following branches of mathematical physics: radiative transfer theory in spectral lines, kinetic theory of gases, p-adic mathematical physics and etc.

The basic results obtained in thesis are the following:

- The existence of one-parametric family of positive and bounded solutions for one class of convolution type nonlinear integral equations on semiaxis with Hammerstein type noncompact operators is proved. The limit value of each solution at infinity is also found.

- For Hammerstein-Volteryan type nonlinear discrete equations in supercritical case for existence of one parametric family solutions in space l_1 the natural suffitions conditions on nonlinearity are found. The monotonic dependence of constructed solutions both on parameter, and on corresponding index is estublished.

- For one class of nonlinear infinite sistem of algebraic equations with Teoplitz type sthochastic matrixes the theorems of solvability in space of infinite bounded vectors are proved. The asymptotic behaviour of constructed solutions are also studied.

- The existence of positive solutions in Sobolev's space $W_1^2(\mathbb{R}^+)$ for one class of nonlinear integro-differential equations for second order in half line the sufficent conditions are formulated.
- Special iteration methods for construction of approximate solutions are suggested. The concrete examples of above mentioned equations, having separate theoretical and applied interest are listed.