ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մարտիրոսյան Անուշ Սամվելի

Զուգամիտության և միակության հարցեր որոշ օրթոնորմավորված սպլայն համակարգերով շարքերի համար

Ա.01.01 – "Մաթեմատիկական անալիզ" մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2014

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Мартиросян Ануш Самвеловна

Вопросы сходимости и единственности рядов по некоторым ортонормированным сплайн системам

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Математический анализ"

Ереван 2014

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետում:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր, ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս Գ. Գևորգյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր ՈՒ. Գոգինավա
	ֆիզ–մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Մ. Պողոսյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀՀ ԳԱԱ մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կկայանա 2014թ. հունիսի 24–ին ժ. 15^{00}–ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ–ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2014թ. մայիսի 23–ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Տ. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в факультета математики и механики ЕГУ

Научный руководитель:	доктор физ–мат. наук, профессор Академик НАН РА Г. Геворкян
Официальные оппоненты:	доктор физ–мат. наук, профессор У. Гогинава
	кандидат физ–мат. наук, доцент М. Погосян
Ведущая организация:	Институт математики НАН РА

Защита диссертации состоится 24 июня 2014г. в 15^{00} на заседании специализированного совета ВАК-а 050 при ЕГУ (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан 23–го мая 2014г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ–мат. наук, профессор Т. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию ортогональных рядов по общей системе Франклина, системе Стромберга и некоторым всплеск системам.

Система Франклина одна из классических ортонормированных систем. Она была введена в 1928 году Франклином [1] как пример ортонормированного базиса в $C[0,1]$. В дальнейшем эта система была исследована с разных точек зрения. В частности известно, что она безусловный базис в пространствах $L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ (С.Бочкарёв [2]) и $H_1[0,1]$ (П. Войтащик [3]). Применяя систему Франклина С.В. Бочкарёв [4] построил базис в пространстве функций аналитических в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и непрерывных в его замыкании $\overline{D}$. Важную роль при изучении системы Франклина играет так называемая экспоненциальная оценка для функций системы Франклина, которая получена З. Чисельским уже в 1966 году [5]. С подробным обзором результатов по системе Франклина можно ознакомиться в работе [6].

Изучались различные обобщения системы Франклина как на отрезке путём обобщения последовательности точек формирующего систему (общая система Франклина), так и на всю действительную ось (система Стромберга, которая ещё и обобщается до полиномиальных всплесков).

Цель работы. Целью настоящей работы является исследование вопросов сходимости и единственности рядов по общей системе Франклина, полиномиальной системе Стромберга и некоторого класса всплеск систем.

Методы исследования. В работе применены методы метрической теории функций, функционального анализа.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты работы имеют теоретический характер и могут быть использованы при изучении похожих свойств для других систем функций.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры теории функций ЕГУ а также на международных конференциях "Harmonic Analysis and Approximations – V" (Цахкадзор, Армения 2011), "Second International Conference Mathematics in Armenia: Advances and Perspectives" , (Цахкадзор, Армения 2013), "ICNAAM 2013", (Родос, Греция 2013).

Основные результаты диссертации опубликованы в 3 статьях и 4 тезисах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 77 страницах, состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитированной литературы, включающего 42 наименований.

Содержание работы

Во введении приведен исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации а также краткое описание содержания диссертации.

Содержание главы 1. Первая глава диссертации посвящена исследованию рядов по общей системе Франклина соответствующей сильно регулярной и квазидиадической последовательности.

Изучение общей системы Франклина началось в 1997 году с работы [7]. Она переводит построение функций системы Франклина из двоичных точек к так называемым допустимым разбиениям отрезка $[0,1]$. Последовательность (разбиение) $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ называется допустимой, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0,1)$, $n \geq 2$, $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0,1]$ и каждая точка $t \in (0,1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем два раза.

Общая функция Франклина определяется следующим образом: пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n\}$. Пусть π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой:

$$\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Через S_n обозначим пространство функций определённых на $[0,1]$, которые непрерывны слева, линейны на (τ_i^n, τ_{i+1}^n) и непрерывны в τ_i^n, если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$. Ясно, что $\dim S_n = n+1$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Поэтому существует единственная функция $f \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1}, $\|f\|_2 = 1$ и $f(t_n) > 0$. Эту функцию называют n-ой функцией Франклина, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$. Общая система Франклина $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$ и для $n \geq 2$ функция $f_n(x)$ есть n-ая функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.

Заметим, что если последовательность $\mathcal{T}$ диадическая, т.е. $t_n = \frac{2j-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + j$, $1 \leq j \leq 2^k$, $k = 0,1,2,...$, то соответствующая система Франклина есть классическая система Франклина.

Иногда на последовательность $\mathcal{T}$ налагают требование регулярности или структурные условия. Определения условий, с которыми мы будем иметь дело приведены ниже.

Последовательность $\mathcal{T}$ называется квазидиадической, если

$$t_{2^k+1} < t_{2^k+2} < ... < t_{2^{k+1}}$$

и между двумя соседними точками из $\{t_n : 0 \leq n \leq 2^k\}$ находится по одной точке из $\{t_n : 2^k < n \leq 2^{k+1}\}$.

Последовательность $\mathcal{T}$ называется сильно регулярной, если существует постоянная $\gamma > 1$, такая что

$$\gamma^{-1} < \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_i^n}{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n} < \gamma, \quad \text{для} \quad n = 2,3,..., \quad i = 1,2,...,n-1.$$

Рассмотрим ряд по общей системе Франклина соответствующей сильно регулярной и квазидиадической последовательности

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t). \tag{1}$$

Мажоранту частных сумм и функцию Пэли этого ряда принято обозначать соответственно через

$$S^*(t) = \sup_N \left| \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(t) \right| \quad \text{и} \quad P(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(t) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если это ряд Фурье-Франклина некоторой интегрируемой функции f, то рассмотрим их как операторы действующие в пространстве L_1 и обозначим соответственно через $S^* f$ и Pf.

Для оператора Пэли вопросы слабого или сильного типа (p,p) рассмотрены в связи с изучением безусловной базисности системы в L_p, $1 < p < \infty$. Это связано с тем, что для того, чтобы некоторая замкнутая минимальная система функций $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset L_p$, $1 < p < \infty$ была безусловным базисом в L_p, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых постоянных c_p и C_p, выполнялось

$$c_p \|f\|_p \le \|P_\Phi f\|_p \le C_p \|f\|_p, \quad f \in L_p,\ 1 < p < \infty.$$

Итак, для доказательства безусловной базисности некоторой ортонормированной системы в L_p, $1 < p < \infty$ доказывается, что оператор Пэли по этой системе имеет сильный тип (p,p). В работе [8], наряду с другими результатами, было доказано, что если последовательность $\mathcal{T}$ квазидиадическая и слабо регулярная, то соответствующая общая система Франклина является безусловным базисом в $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$. В работе [9] условие слабой регулярности было ослаблено. И наконец в работе [10] было доказано, что при любой допустимой последовательности $\mathcal{T}$ соответствующая общая система Франклина является безусловным базисом в $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$. Именно в указанных работах доказывается, что оператор Пэли для соответствующего ряда имеет сильный тип (p,p), $1 < p < \infty$. Однако, это доказательство не опирается на слабый тип $(1,1)$, как это обычно делается.

Для классической системы Франклина С.В. Бочкарёв в [4] доказал, что оператор Пэли имеет слабый тип (1,1). А вот вопрос о слабом типе $(1,1)$ оператора Пэли для рядов по общей системе Франклина оставался открытым. В параграфе 1.1 диссертационной работы доказывается следующая теорема

Теорема 1 *Если последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная и квазидиадическая, то оператор Пэли имеет слабый тип (1,1), т.е. существует постоянная C, зависящая только от γ, такая, что для любого $g \in L_1[0,1]$*

имеет место

$$\mu\{t:\ Pg(t)>y\}\le\frac{C}{y}\|g\|_1.$$

Позднее Г.Г. Геворкян в [11] обобщил этот результат доказав, что оператор Пэли будет иметь слабый тип (1,1) в случаях, когда последовательность сильно регулярная или квазидиадическая и слабо регулярная. Однако до сих пор этот вопрос в общем случае (не налагая никаких дополнительных свойств на последовательность) не решен.

В связи с безусловной базисностью в пространствах L_p, $p>1$ интересно также исследовать эквивалентность асимптотических условий

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mu\{t:\ P(t)>\lambda\}=0 \tag{2}$$

и

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mu\{t:\ S^*(t)>\lambda\}=0. \tag{3}$$

В параграфе 1.2 диссертационной работы доказывается следующая теорема

Теорема 2 *Для рядов по общей системе Франклина с квазидиадическим и сильно регулярным разбиением из условия* (2) *следует* (3).

Аналогичный вопрос для классической системы Франклина рассмотрен в работе [12] и отметим, что даже для классической системы Франклина не известно – следует ли из (3) соотношение (2)?

Напомним, что функция g называется A-интегрируемой на множестве X (мы будем иметь дело с $X=\mathbb{R}$ и $X=[0,1]$), если она удовлетворяет условию

$$\mu\{t\in X:|g(t)|>\lambda\}=o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

и существует

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_X[g(t)]_\lambda dt,\quad \text{где}\quad [g(t)]_\lambda=\begin{cases}g(t), & |g(t)|\le\lambda,\\ 0, & |g(t)|>\lambda.\end{cases}$$

При этом обозначается

$$(A)\int_X g(t)dt=\lim_{\lambda\to\infty}\int_X[g(t)]_\lambda dt.$$

В параграфе 1.3, с применением последней теоремы и слабого типа (1,1) оператора Пэли, получены теоремы для подрядов Фурье по общим системам Франклина. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3 *Пусть ряд (1) является рядом Фурье-Франклина некоторой интегрируемой по Лебегу функции. Тогда для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n f_n(t)$ является рядом Фурье-Франклина в смысле A-интегрирования некоторой A-интегрируемой функции. В частности любой подряд такого ряда является рядом Фурье-Франклина в смысле A-интегрирования некоторой A-интегрируемой функции.*

Аналогичные результаты для классической системы Франклина получены в работе Г.Г. Геворкяна [12]. В работе Л.А. Балашова [13] сформулирован аналог теоремы для подрядов ряда Фурье-Хаара. Отметим, что поскольку в L_1 не существует безусловного базиса, то подряд ряда Фурье интегрируемой функции не обязан быть рядом Фурье в смысле интегрирования по Лебегу.

Содержание главы 2. Вторая глава диссертации посвящена исследованию рядов по полиномиальной системе Стромберга. Определяются они следующим образом: пусть m - натуральное число. Обозначим $A_0 = \mathbb{Z}_+ \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z}_-$ и $A_1 = A_0 \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (где $Z_+ = \{0, 1, 2, ...\}$, $Z_- = \{0, -1, -2, ...\}$). Для каждого $i = 0, 1$ пусть S_i^m есть пространство функций из $L_2(\mathbb{R}) \cap C^m(\mathbb{R})$, которые на каждом интервале разбиения A_i являются полиномами степени $m+1$. Ясно, что $S_0^m \subset S_1^m$ и коразмерность S_0^m в S_1^m равна единице. Поэтому существует единственная, с точностью знака, функция $\tau \in S_1^m$ такая, что $\tau \perp S_0^m$ и $\|\tau\|_2 = 1$. Эта функция τ и есть всплеск Стромберга степени $m \geq 0$. Ортогональность и полнота в $L_2(\mathbb{R})$ системы функций

$$f_{jk}(x) = 2^{j/2}\tau(2^j x - k),\ j, k \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

т.е. то, что τ есть всплеск, доказана в работе [14].

Эта система имеет похожие свойства с системой Франклина. В частности, в работе [14] получена экспоненциальная оценка для τ: $|\tau(x)| \leq C_0 r^{|x|}$, $0 < r < 1$. Более того, в той же работе Стромберг доказал, что система f_{jk} является безусловным базисом в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ и в $H_1(\mathbb{R})$.

Частные суммы ряда

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{jk} f_{jk}(t) \tag{5}$$

по системе функций (4) определим следующим образом:

$$S_{JK}(t) = \sum_{(j,k) \leq (J,K)} a_{jk} f_{jk}(t), \tag{6}$$

где $(j, k) \leq (J, K)$ означает $j < J$, $k \in \mathbb{Z}$ или $j = J$, $k \leq K$. При этом предполагается, что для каждого целого j ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_{jk} f_{jk}(x)$, и для каждого целого j_0 ряд $\sum\limits_{j \leq j_0} \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_{jk} f_{jk}(x)$ сходятся.

В параграфе 2.3 доказывается, что если ряд (6) есть "частичная сумма" ряда Фурье некоторой функции $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, то этот ряд абсолютно сходится на $\mathbb{R}$. Однако для $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ это утверждение уже не верно (пример приведен в том же параграфе диссертации).

Мажоранту частных сумм и функцию Пэли ряда (5) обозначим соответственно через

$$S^*(t) = \sup_{J,K} |S_{JK}(t)| \quad \text{и} \quad P(t) = \left(\sum_{j,k} a_{jk}^2 f_{jk}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В случае когда ряд (5) является рядом Фурье-Стромберга некоторой функции $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, то будем писать $S^* f$ и Pf.

Как уже отмечалось оператор Пэли для рядов по классической системы Франклина (см. [4]) и даже для общей системы Франклина с некоторыми дополнительными условиями на разбиение (см. [11]) имеет слабый тип (1,1). В параграфе 2.2 диссертации доказывается, что и в случае полиномиального всплеска Стромберга этот оператор имеет слабый тип (1,1).

В параграфе 2.1 доказывается следующая теорема

Теорема 4 *Пусть $S_{JK}(t)$ п.в. сходится к функции $f(t)$ и*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \mu \{ t \in \mathbb{R} : \; S^*(t) > \lambda \} = 0.$$

Тогда для всех $j, k \in \mathbb{Z}$ выполняются

$$a_{jk} = (A) \int_{\mathbb{R}} f(t) f_{jk}(t) dt.$$

Аналогичная теорема для классической системы Франклина доказана в работе [12]. Теорема верна и для общей системы Франклина в случае сильно регулярного и квазидиадического разбиения (см. [15]).

Однако оказывается, некоторые свойства, которые верны для системы Франклина, и даже для линейных периодических всплесков Стромберга, не верны для полиномиальной системы Стромберга. Так, например известно, что для системы Хаара сходимость почти всюду функции Пэли и самого ряда на множестве положительной меры эквивалентны (см. [16, 17]). Аналогичные утверждения верны и для классической системы Франклина (см.[18]), для общей системы Франклина порождённой квазидиадическим и сильно регулярным разбиением (см. [19]), периодического линейного всплеска Стромберга (см. [20]). Оказывается в не периодическом случае это не верно, а именно для линейных всплесков Стромберга существует ряд $\sum_{j,k} a_{jk} f_{jk}(x)$, который почти всюду расходится, но $\sum_{j,k} a_{jk}^2 f_{jk}^2(x)$ сходится (соответствующий пример приведен в параграфе 2.3). Отметим, что для общей системы Франклина, вообще говоря, такое утверждение тоже не верно (см. [21]).

Содержание главы 3. Третья глава диссертации посвящена изучению эквивалентности безусловной и абсолютной сходимости п.в. на множестве положительной меры рядов по всплеск системам.

Известно, что для числовых рядов безусловная и абсолютная сходимость эквивалентны. Для функциональных рядов в общем случае это не верно. Например ряд по системе Радемахера $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r_n(x)$, $x \in [0,1]$, п.в. абсолютно расходится, но при любой перестановке σ ряд $(\sigma) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r_n(x)$ п.в. сходится.

Однако для системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ П.Л. Ульяновым и Е.М. Никишиным (см. [22]) доказана теорема о том, что для безусловной сходимости п.в. на множестве $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 0$ ряда по системе Хаара $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы п.в. на E была конечна сумма $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n \chi_n(x)|$.

Г.Г. Геворкян [23] распространил эту теорему на ряды по классической системе Франклина. А для общей системы Франклина аналогичный результат получен в [24]. В третей главе диссертационной работы найдены условия, при выполнении которых можно сформулировать аналогичную теорему для рядов по всплеск системам. Точнее, верна следующая теорема

Теорема 5 *Пусть всплеск f удовлетворяет соотношению*

$$\max_{x \in [m,m+1)} |f(x)| \le C\varphi(m),\ m \in \mathbb{Z},$$

где φ кусочно постоянная функция соответствующая всплеску f:

$$\varphi(x) = \int_m^{m+1} |f(t)| dt, \quad \text{когда } x \in [m, m+1),\ m \in \mathbb{Z}.$$

Пусть ещё существуют функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ такие, что для некоторых постоянных $C > 0$ и $0 < q < 1$ выполняются

$$\Phi_2(x) \le C\Phi_1(x),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \Phi_2(\pm m) \le q\Phi_2(\pm(m-1)),\ m \in \mathbb{N},$$

которые удовлетворяют

$$\Phi_1(x) \le \varphi(x) \le \Phi_2(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Тогда для того, чтобы ряд

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{Z} \\ \Delta_{jk}\subset(-a,a)}} a_{jk} f_{jk}(x), \text{ где } a > 0 \text{ произвольное число, а } \Delta_{jk} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right],$$

п.в. безусловно сходился на E, $\mu(E) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы этот ряд п.в. абсолютно сходился на E .

Отметим, что указанным условиям удовлетворяют например полиномиальные всплески Стромберга, а так же любой всплеск с компактным носителем. В случае когда f–всплеск с компактным носителем, как следствие из этой теоремы, получим теорему, которая доказана в работе [25]:

Теорема 6 *Пусть f–всплеск с компактным носителем. Тогда ряд*

$$\sum_{j\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{Z}} a_{jk} f_{jk}(x)$$

п.в. безусловно сходится на E, $\mu(E) > 0$, тогда и только тогда, когда этот ряд п.в. абсолютно сходится на E.

Литература

[1] Ph. Franklin. A set of continous orthogonal functions. *Math. Ann.*, 100:522–529, 1928.

[2] S.V. Bočkarev. Some inequalities for Franklin series. *Analysis Mathematica*, 1(4):249–257, 1975.

[3] P. Wojtaszczyk. The Franklin system is an unconditional basis in H_1. *Arkiv for Matematik*, 20(1-2):293–300, 1982.

[4] С.В. Бочкарев. Существование базисов в пространстве функций, аналитических в круге, и некоторые свойства системы Франклина. *Матем. сб.*, 95(1):3–18, 1974.

[5] Z. Ciesielski. Properties of the orthonormal Franklin system. II. *Studia Math.*, 27:289–323, 1966.

[6] Z. Ciesielski, A. Kamont. Survey on the orthogonal Franklin system. In *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund*, Approximation Theory, page 84–132, DARBA, Sofia, 2002.

[7] Z. Ciesielski, A. Kamont. Projections onto piecewise linear functions. *Funct. Approx.Comment Math.*, 25:129–143, 1997.

[8] Gegham Gevorkyan, Anna Kamont. On general Franklin systems. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 374:59, 1998.

[9] Г.Г. Геворкян, А.А. Саакян. Безусловная базисность общей системы Франклина. *Известия НАН Армении*, 35(4):2–22, 2000.

[10] Gegham G. Gevorkyan, Anna Kamont. Unconditionality of general Franklin systems in $L^p[0,1], 1 < p < \infty$. *Studia Math.*, 164(2):161–204, 2004.

[11] G.G. Gevorkyan. On series by general Franklin system. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 48(5):189–208, 2013.

[12] Г.Г. Геворкян. Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина. *Математические заметки*, 59(4):521–545, 1996.

[13] Л.А. Балашов. Обобщенное интегрирование рядов по системе Хаара. In *Всесоюзная школа по теории функций*, page 3, Ереван, 1987.

[14] J.O. Stromberg. A modified Franklin system and higher-order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces. In *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund*, Wadsworth Math., pages 475–494, Wadsworth, Belmont, CA, 1983.

[15] M.P. Poghosyan. Uniqueness of series by general Franklin systems. *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.*, 35(4):77–83, 2000.

[16] Ф.Г. Арутюнян. О рядах по системе Хаара. *Докл: АН АрмССР*, 42:134–140, 1966.

[17] R. Gundy. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 124:228–248, 1966.

[18] Г.Г. Геворкян. О рядах по системе Франклина. *Analysis Mathematica*, 16(2):87–114, 1990.

[19] M.P. Poghosyan. Almost everywhere convergence of series by generalized Franklin systems. *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.*, 35(2):64–77, 2000.

[20] G.G. Gevorkyan. Theorems on the modified Franklin-Strömberg system. II. *Izv. Akad. Nauk Armenii Mat.*, 26(1):31–51, 94, 1991.

[21] G.G. Gevorkyan. On series by general Franklin system. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 48(5):189–208, 2013.

[22] Е. Никишин, П. Ульянов. Об абсолютной и безусловной сходимости. *УМН*, 22(3):240–242, 1967.

[23] Г.Г. Геворкян. Некоторые теоремы о безусловной сходимости и мажоранте рядов Франклина и их применение в пространстве $\mathrm{Re}H_p$. *Труды МИАН*, 93, 1989.

[24] Г.Г. Геворкян, К.А. Керян. Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по общей системе Франклина. *Изв. РАН*, 73(2):69–90, 2009.

[25] С.В. Головань. О безусловной и абсолютной сходимости рядов по системам типа всплесков. *Фунд. и прикладная математика*, 6(1):81–92, 2000.

Работы автора по теме диссертации

[1] Г.Г. Геворгян, А.С. Мартиросян. Мажоранта и функция Пэли рядов по общей системе Франклина. *Тр. МИАН*, 280:138–149, 2013.

[2] К.А. Керян, Мартиросян А.С. Теорема единственности для рядов по системе Стромберга. *Изв. НАН Армении*, 47(6):29–52, 2012.

[3] А.С. Мартиросян. О безусловной и абсолютной сходимости рядов по всплеск системам. *Изв. НАН Армении*, 45(5):49–66, 2010.

[4] Anush Martirosyan. Equivalence of absolute and unconditional convergences for wavelet systems. *AIP Conference Proceedings*, 1558(1):2127–2129, 2013.

[5] Anush Martirosyan. Equivalence of the absolute and unconditional convergences for wavelet systems. *Second International Conference Mathematics in Armenia, Abstracts*, pages 47–48, 2013.

[6] К. Керян, А. Мартиросян. Теорема единственности для рядов по системе Стромберга. *Shirakatsi AMU Annual meeting 2012, Abstracts*, pages 66–67, 2013.

[7] G. Gevorkyan, A. Martirosyan. Paley function and A-integrity of series by general Franklin systems. *Harmonic Analysis and Approximations, V, Abstracts*, pages 41–42, 2011.

Summary

Main results of the thesis are the following:

For series by general Franklin system corresponding to quasi-dyadic and strongly regular partitions it is proved that

- Paley operator is of weak type (1,1).
- If Paley function $P(t)$ of a series satisfies to condition

  $$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mu \{t:\ P(t) > \lambda\} = 0,$$

  then

  $$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mu \{t:\ S^*(t) > \lambda\} = 0,$$

  where $S^*(t)$ - is the majorant of partial sums of that series.
- If series is a Fourier-Franklin series of some integrable function, then every subseries is a Fourier-Franklin series for a A-integrable function in sense of A-integrability.

For series by Stromberg's system of order $m \geq 0$ it is proved that

- If partial sum of the series a.e. converges to a function $f(t)$ and the majorant of partial sums satisfies to the condition

  $$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\mu\{t \in \mathbb{R}:\ S^*(t) > \lambda\} = 0,$$

  then for all $j, k \in \mathbb{Z}$ the coefficients can be found by the formula

  $$a_{jk} = (A)\int_{\mathbb{R}} f(t) f_{jk}(t)dt.$$

- Paley operator is of weak type (1,1).
- If the series is a Fourier-Stromberg series of some function $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, then partial sums of that series are absolute convergent. However there exists a function from $L_\infty(\mathbb{R})$, for which this is not true (example is constructed for $m = 0$, 1).
- There exists a series by Stromberg system of order $m = 0$, which diverges almost everywhere, but its Paley function converges.

For series by wavelet systems it is proved, that in case when a wavelet satisfies to conditions listed below (note that any wavelet with compact support, Stromberg's wavelets of any order satisfy to these conditions), absolute and unconditional convergences a.e. on a set of positive measure are equivalent. Conditions are the following: let a wavelet f satisfies to the condition

$$\max_{x\in[m,m+1)} |f(x)| \le C\varphi(m),\ m\in\mathbb{Z},$$

and there exists exponential decaying functions Φ_1 and Φ_2 such that

$$\Phi_1 \le \varphi \le \Phi_2 \le C\Phi_1,$$

where

$$\varphi(x) = \int_m^{m+1} |f(t)|dt,\ \text{where } x\in[m,m+1),\ m\in\mathbb{Z},$$

is a piecewise constant function, and $C>0$ is an absolute constant.

Ամփոփագիր

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

Քվազիերկուական և ուժեղ ռեգուլյար տրոհումներին համապատասխան Ֆրանկլինի ընդհանրացված համակարգով շարքերի համար ապացուցվել է, որ

- Պելիի ֆունկցիան ունի թույլ (1,1) տիպ:
- Շարքի Պելիի ֆունկցիայի համար

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\cdot\mu\{t:\ P(t)>\lambda\}=0$$

  գնահատականից հետևում է մասնակի գումարների մաժորանտի համար նույնատիպ գնահատական՝

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\cdot\mu\{t:\ S^*(t)>\lambda\}=0\ :$$

- Եթե շարքը հանդիսանում է ինտեգրելի ֆունկցիայի Ֆուրյե-Ֆրանկլինի շարք, ապա դրա կամայական ենթաշարք ինչ-որ A-ինտեգրելի ֆունկցիայի Ֆուրյե-Ֆրանկլինի շարք է (A-ինտեգրելիության իմաստով):

Ստրոմբերգի m-րդ կարգի բազմանդամային վեյվլետ համակարգով շարքերի համար ապացուցվել են հետևյալ թեորեմները

- Եթե շարքը h.ա. զուգամիտում է f ֆունկցիային և դրա մասնակի գումարների մաժորանտը բավարարում է

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \cdot \mu \{ t : \, S^*(t) > \lambda \} = 0$$

  պայմանին, ապա բոլոր $j, k \in \mathbb{Z}$ համար $f(t) f_{jk}(t)$ ֆունկցիաները A-ինտեգրելի են և շարքի գործակիցները վերականգնավում են հետևյալ բանաձևերով

$$a_{jk} = (A) \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) f_{jk}(t) dt :$$

- Պելիի ֆունկցիան ունի թույլ (1,1) տիպ:

- Եթե շարքը $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$ ֆունկցիայի Ֆուրյե-Ստրոմբերգի շարք է, ապա դրա մասնակի գումարները բացարձակ զուգամետ են: Կառուցվում է $f \in L_\infty$ ֆունկցիայի օրինակ, որի համար այս պնդումն արդեն ճիշտ չէ (օրինակը կառուցվում է $m = 0, 1$ դեպքերում):

- Բերվում է շարքի օրինակ, որը համարյա ամենուրեք տարամետ է, բայց քառակուսիներից կազմված շարքը ամենուրեք զուգամետ է (օրինակը կառուցվում է գծային դեպքում):

Ընդհանուր վեյվլետ համակարգերով շարքերի համար ապացուցվում է, որ հետևյալ պայմաններին բավարարելու դեպքում (որոնց բավարարում են մասնավորապես բոլոր կոմպակտ կրիչով վեյվլետները, ինչպես նաև Ստրոմբերգի բազմանդամային վեյվլետները) դրական չափի բազմության վրա h.ա. ոչ պայմանական և բացարձակ զուգամիտությունները իրար համարժեք են. ենթադրվում է, որ f վեյվլետը բավարարում է

$$\max_{x \in [m, m+1)} |f(x)| \le C \varphi(m), \; m \in \mathbb{Z}$$

պայմանին, որտեղ

$$\varphi(x) = \int_m^{m+1} |f(t)| dt, \; x \in [m, m+1), \; m \in \mathbb{Z}$$

կտոր առ կտոր հաստատուն ֆունկցիա է, իսկ $C > 0$ հաստատուն է: Բացի այդ գոյություն ունեն Φ_1 և Φ_2 ֆունկցիաներ, որոնք էքսպոնենցիալ նվազում են և բավարարվում են հետևյալ անհավասարությունները

$$\Phi_1 \le \varphi \le \Phi_2 \le C \Phi_1 :$$