ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՐԹՈՒՐ ԵՐԵՄԻ ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԽՄԲԵՐԻ n-ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐԻ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ԸՆԴԼԱՅՆՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա.01.06 – “Հանրահաշիվ և թվերի տեսություն” մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2015

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГРИГОРЯН АРТУР ЕРЕМОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ n-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП И ИХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук по специальности
А.01.06 – “Алгебра и теория чисел”

ЕРЕВАН - 2015

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի խորհրդի կողմից:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.–մաթ. գիտ. դոկտոր Վ. Ս. Աթաբեկյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.–մաթ. գիտ. դոկտոր, Ս. Հ. Դալալյան
	ֆիզ.–մաթ. գիտ. թեկնածու, Ա. Լ. Տալամբուցա
Առաջատար կազմակերպություն՝	Խ. Աբովյանի անվ. Հայկական պետական մանկավարժական համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2015թ. հունիսի 9–ին ժ. 15^{00}–ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի Մաթեմատիկայի-050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքվել է 2015թ. մայիսի 8–ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена советом факультета математики и механики Ереванского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физ.–мат. наук, В. С. Атабекян
Официальные оппоненты:	доктор физ.–мат. наук, С. Г. Далалян
	кандидат физ.–мат. наук, А. Л. Таламбуца
Ведущая организация:	Армянский государственный педагогический университет им. Х. Абовяна

Защита диссертации состоится 9 июня 2015г. в 15^{00} на заседании специализированного совета ВАК-а Математика-050 при Ереванском государственном университете (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 8–ого мая 2015г.

Ученый секретарь специализированного совета Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации исследуются некоторые свойства n-периодических произведений групп и группы автоморфизмов центральных расширений n-периодических произведений циклических групп порядка n. Изучается также вопрос существования нетривиальных пар делителей нуля в целочисленных групповых кольцах свободных периодических групп нечётного периода $n \geq 665$. Построены примеры неаменабельных простых групп ограниченного периода.

Классические операции свободного и прямого произведения групп являются точными, ассоциативными, наследственными по подгруппам операциями на классе всех групп. Говорят, что на классе групп $\mathcal{K}$ задана некоторая точная операция $\circ$, если каждому семейству групп $G_i, i \in I$ из заданного класса $\mathcal{K}$ сопоставлена некоторая группа $G = \circ_{i\in I} G_i$ и заданы вложения $G_i \to G$, образами которых порождается группа G. При этом операция $\circ$ называется ассоциативной, если множество I разбито на подмножества $I_j, j \in J$, таких что группа G канонически изоморфна группе $\circ_{j\in J}(\circ_{k\in I_j} G_k)$. Если класс $\mathcal{K}$ замкнута по подгруппам, то операция $\circ$ называется наследственной по подгруппам, если для любых подгрупп H_i сомножителей G_i тождественные вложения $H_i \to G_i$ продолжаются до вложения $\circ$-произведения семейства подгрупп $\{H_i\}_{i\in I}$ в $\circ$-произведение $\circ_{i\in I} G_i$. А.И.Мальцевым был поставлен вопрос о существовании отличной от свободного и прямого произведения ассоциативной, точной и наследственной по подгруппам операции на классе всех групп. Эта проблема была отмечена также в монографии А.Г.Куроша «Теория групп».

В работе [1] С.И.Адяном было установлено, что с использованием некоторой модификации теории Новикова-Адяна, для каждого нечётного $n \geq 665$ можно построить новые операции умножения групп. Построенные операции были названы *n-периодическими произведениями (периода n)*. n-периодическое произведение определяется на классе всех групп (см. также [2], где разобран случай групп, содержащих инволюции) и является факторгруппой свободного произведения данного семейства групп $G_\alpha, \alpha \in I$ по специально выбранной системе определяющих соотношений вида $A^n = 1$. В [1] были доказаны следующие ключевые свойства n-периодического произведения: 1. каждое n-периодическое произведение данного семейства групп $G_\alpha, \alpha \in I$ является факторгруппой свободного произведения $F = \prod_{\alpha\in I}^{*} G_\alpha$ по некоторой нормальной подгруппе L, которая является нормальным замыканием некоторых слов вида $A^n, A \in F$; 2. $G_\alpha \cap L = \{1\}$ для всех $\alpha \in I$; 3. для всякого слова $X \in F$ или $X^n = 1$ в факторгруппе F/L, или X сопряжён в F/L некоторому элементу из $G_\alpha \subset F/L$ для некоторого $\alpha \in I$.

Впоследствии оказалось, что n-периодические произведения обладают и многими другими важными свойствами групп. Отметим, в частности, результат работы [3], где доказано что «почти все» n-периодические произведения являются хопфовыми группами, т.е. группами, всякие сюръективные эндоморфизмы которых являются их автоморфизмами. В [4] доказано, что каждый нормальный автоморфизм n-периодического произведения циклических групп порядка r является внутренним автоморфизмом, если n делится на r.

Из определений n-периодического произведения и свободных периодических групп следует, что свободная периодическая группа $B(m, n)$ является n-периодическим произведением m циклических групп порядка n. В частности, любая группа многообразия всех периодических групп периода n является гомоморфным образом n-периодического произведения некоторых циклических групп.

В известной работе [5] доказано, что для любого конечного ранга $m > 1$ и нечётного $n \geq 665$ группа $B(m, n)$ неаменабельна и случайные блуждания на группах $B(m,n)$ невозвратны (решение проблемы Г.Кестена). Заметим, что группы $B(m,n)$ – первые примеры неаменабельных групп, удовлетворяющие нетривиальному тождеству (а именно, тождеству $x^n = 1$).

Более сильной формой неаменабельности является понятие равномерной неаменабельности, введённое в совместной работе [6]. Известны некоторые классы равномерно неаменабельных групп. С другой стороны, существуют неаменабельные группы, которые не являются равномерно неаменабельными. В работе [7] доказано, что для каждого нечётного числа $n \geqslant 1003$ любая конечно порождённая нециклическая подгруппа H свободной бернсайдовой группы $\mathrm{B}(m,n)$ – равномерно неаменабельная группа.

Первые примеры неаменабельных групп без свободных подгрупп были построены А.Ю.Ольшанским в [8] (контрпример к гипотезе фон Неймана). Эти группы являются периодическими, но с неограниченно возрастающими порядками элементов.

Тем не менее, кажется, до последних пор не были известны примеры неаменабельных конечно порождённых простых групп ограниченного периода. Используя понятие n-периодического произведения, в диссертации доказано существование простых неаменабельных групп ограниченного периода. В частности, показано, что n-периодическое произведение двух циклических групп порядка k, где $(k,n) = 1$, является 2-порождённой неаменабельной группой периода kn.

Продолжая исследование свойств периодических произведений периода n, доказывается, что если множители $G_\alpha, \alpha \in I$ свободного произведения $F =$

$\prod_{\alpha\in I}^{*} G_\alpha$ не содержат инволюций и удовлетворяют условиям $G_\alpha^n = G_\alpha$ для всех $\alpha \in I$, то F содержит единственную n-подгруппу.

Согласно классическому результату Виландта башня автоморфизмов $G = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_k \lhd \cdots$ любой конечной группы с тривиальным центром обрывается через конечное число шагов. Аналогичное утверждение не верно для всех бесконечных групп (например, башня автоморфизмов бесконечной диэдральной группы бесконечно возрастает). В начале семидесятых Г. Баумслагом был поднят вопрос об исследовании башен автоморфизмов абсолютно свободных и некоторых относительно свободных групп. В частности, он сформулировал гипотезу о том, что башня автоморфизмов свободной группы конечного ранга должна быть «очень короткой».

В 1975 году Дж.Дайер и Е.Форманек в [9] подтвердили гипотезу Г.Баумслага доказав, что если F свободная группа конечного ранга > 1, то её группа автоморфизмов $Aut(F)$ совершенна. Напоминаем, что группа называется *совершенной*, если её центр тривиален и все её автоморфизмы – внутренние. Для свободных групп бесконечного ранга совершенность группы $Aut(F)$ доказал В.Толстых в [10]. Ясно, что если группа автоморфизмов группы G_0 с тривиальным центром совершенна, то её башня автоморфизмов обрывается уже на первом шагу.

Позднее, новые доказательства и разные обобщения результата работы [9] были получены Е.Форманеком в [11], Д.Г.Храмцовым в [12], Р.Бридсоном и К.Вогтманом в [13].

В работе Атабекяна [14] установлено, что для всех нечётных показателей $n \geq 1003$ при любом $m > 1$ группа внутренних автоморфизмов $Inn(B(m,n))$ – единственная нормальная подгруппа группы $Aut(B(m,n))$, которая изоморфна свободной бернсайдовой группе $B(s,n)$ какого-либо ранга $s \geq 1$. Из этого вытекает, что подгруппа внутренних автоморфизмов $Inn(B(m,n))$ является характеристической подгруппой в $Aut(B(m,n))$ и, поэтому, группа автоморфизмов $Aut(B(m,n))$ свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ совершенна.

В диссертации рассматриваются группы автоморфизмов известных центральных расширений свободных бернсайдовых групп $B(m,n)$ бесконечной циклической группой. Эти группы, обозначаемые через $A(m,n)$, построены и исследованы в работах [15], [16]. Как доказано в [16], группы $A(m,n)$ не имеют кручения и любые две нетривиальные циклические подгруппы $A(m,n)$ имеют нетривиальное пересечение. Если в коммутативной группе пересечение любых двух нетривиальных подгрупп бесконечно, то она изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы рациональных чисел. Это свойство можно считать характеристическим свойством аддитивной группы рациональных чисел, поэтому группы $A(m,n)$ называют также некоммутативными аналогами аддитивной группы рациональных чисел.

Одно из основных свойств групп $A(m,n)$ заключается в том, что любой элемент группы $A(m,n)$ в степени n равен некоторой степени элемента d, порождающего центр группы, причём d имеет бесконечный порядок. Если к определяющим соотношениям группы $A(m,n)$ добавить ещё одно соотношение $d^k = 1$, то в полученной группе $A_k(m,n)$ центр, порождаемый элементом d, будет иметь порядок k. Группа $A_k(m,n)$ обладает следующим интересным свойством: группа $A_k(m,n)$ допускает только дискретную топологию. Вопрос о существовании нетопологизируемой счётной группы был поставлен А.А.Марковым и оставался открытым несколько десятилетий.

В 2014 г. А.Созутов и Е.Дураков в работе [17] показали, что группы автоморфизмов групп $A(m,n)$ не имеют инволюций. Это, по сути первая работа об автоморфизмах этих групп. Поскольку центр каждой группы автоморфно допустимая подгруппа (характеристическая подгруппа), то каждый автоморфизм α группы $A(m,n)$ естественным образом индуцирует автоморфизм $\overline{\alpha}$ группы $B(m,n)$. Продолжая исследования в этом направлении, в диссертации показано, что группа внутренних автоморфизмов группы $A(m,n)$ является характеристической подгруппой группы всех автоморфизмов при $m > 1$ и нечётных $n \geq 1003$.

Пара элементов A, B целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}[G]$ группы G, где $AB = 0$ и $A, B \neq 0$, называется *тривиальной* парой делителей нуля в $\mathbb{Z}[G]$, если найдутся такие элементы $X, Y \in \mathbb{Z}[G]$ и элемент $h \in G$ конечного порядка $n > 1$, что либо $A = X(1-h)$ и $B = (1+h+\ldots+h^{n-1})Y$, либо $A = X(1+h+\ldots+h^{n-1})$ и $B = (1-h)Y$. Когда G является циклической группой, тогда каждая пара делителей нуля в $\mathbb{Z}[G]$ является тривиальной парой. Однако, если G является нециклической периодической группой, то существование нетривиальных пар делителей нуля в $\mathbb{Z}[G]$ не очевидно. В 1990 г. С.В.Иванов поставил вопрос (см. [18], задача 11.36.д): *Пусть $m \geq 2$ и $n \gg 1$ нечётно. Верно ли, что каждая пара делителей нуля в $\mathbb{Z}[B(m,n)]$ тривиальна?*

В 2012 г. в работе [19] дано отрицательное решение этого вопроса, а именно, построены нетривиальные пары делителей нуля в групповых кольцах $\mathbb{Z}[B(m,n)]$ свободных периодических групп $B(m,n)$ для всех нечётных периодов $n > 10^{10}$. Автору диссертации удалось значительно снизить границу показателей n, для которых вопрос решается отрицательно.

Цель работы.

1. Построение неаменабельных конечно порождённых простых групп ограниченного периода.
2. Исследование n-подгрупп свободного произведения $F = \prod^{*}_{\alpha \in I} G_\alpha$ семейства групп G_α, $\alpha \in I$, не содержащих инволюций и удовлетворяющих условию $G_\alpha^n = G_\alpha$ для всех $\alpha \in I$.
3. Изучение группы автоморфизмов известных центральных расширений свободных бернсайдовых групп $B(m,n)$ бесконечной циклической группой, называемые также некоммутативными аналогами аддитивной группы рациональных чисел.
4. Исследование нетривиальных пар делителей нуля в целочисленных групповых кольцах $\mathbb{Z}[B(m,n)]$ свободных периодических групп $B(m,n)$.

Методы исследования. В работе применяются различные методы комбинаторной теории групп и теории n-периодических произведений, а также – элементы теории Новикова-Адяна.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы имеют теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при исследовании n-периодических произведений групп, при исследовании неаменабельных групп, групповых колец и их делителей нуля, а также групп автоморфизмов периодических групп и их центральных расширений.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации были представлены на годичной научной конференции 2013 г. Российско-Армянского (Славянского) университета, на семинаре "Теория групп" Ереванского государственного университета, на международной конференции “Алгебра и математическая логика, Казань-2014”, на международной конференции “Мальцевские чтения, Новосибирск-2015”.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх статьях и двух тезисах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Диссертация изложена на 68 страницах и состоит из введения, четырёх глав, содержащих 14 параграфов, и списка литературы из 62 наименований.

Содержание работы

Во введении приведён обзор результатов, связанных с темой диссертации а также краткое описание содержания диссертации.

Содержание главы 1. В главе исследуется вопрос о существовании конечно порождённых неаменабельных простых групп ограниченного периода.

Группа G называется аменабельной, если для неё существует конечно-аддитивная мера μ, определённая на σ-алгебре всех подмножеств группы G и такая, что $\mu(G) = 1$ и $\mu(gA) = \mu(A)$ для всяких $g \in G$, $A \subset G$. Интересный критерий аменабельности группы был получен Р.Григорчуком в 1978 г. в работе [20]. Обозначим через H_n множество элементов длины n свободной группы F_m, принадлежащих группе H. Число $\alpha_H = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|H_n|}$ называется показателем роста подгруппы H. Оно заключено в границы

$$\sqrt{2m-1} < \alpha_H \leq 2m - 1.$$

Согласно критерию Григорчука, группа F_m/H аменабельна тогда и только тогда, когда $\alpha_H = 2m - 1$. Одним из классических результатов о неаменабельных группах является теорема 5 из работы [5] С.И.Адяна, утверждающая, что для всех нечётных $n \geq 665$ и $m > 1$ группы $B(m, n)$ неаменабельны. Группы $B(m, n)$ – первые примеры неаменабельных групп, удовлетворяющие нетривиальному тождеству и, тем самым, не содержат свободных подгрупп ранга 2. Тем самым, эти группы являются контрпримерами к гипотезе фон Неймана. Отметим, что первые примеры неаменабельных групп без свободных подгрупп были построены в [8]. Эти группы являются периодическими и простыми, но с неограниченно возрастающими порядками элементов. В этих работах используется приведенный выше критерий неаменабельности, полученный Григорчуком.

Основными результатами первой главы являются:

Теорема 1.1. *n-периодическое произведение любого семейства групп G_i, $i \in I$, без инволюций и удовлетворяющих равенству $G_i^n = G_i$ является простой неаменабельной группой.*

Из этой теоремы, в частности, вытекает

Следствие 1.1 *n-периодическое произведение любого семейства групп G_i, $i \in I$, нечётного периода k, где $(k, n) = 1$, является простой неаменабельной группой периода kn.*

Следствие 1.2 *Существуют 2-порождённые простые неаменабельные группы ограниченного периода.*

Следствие 1.3 *Если нечётное число r взаимно просто с нечётным числом $n \geq 1003$, то n-периодическое произведение конечного числа циклических групп периода r есть простая неаменабельная группа периода nr.*

При доказательстве приведённых результатов используются следующие леммы:

Лемма 1.1 *Каждое слово над групповым алфавитом $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ из бесконечной последовательности слов*

$$X_0 = a,\ X_{i+1} = X_i b X_i^{-1} \text{ при } i > 0,$$

не содержит квадратов непустых подслов.

Лемма 1.2 *Каждое слово C_i (где через C_i $(i \geq 0)$ обозначаем несократимую форму коммутатора $[(ab)^d,\ X_i\,(ab)^d\,X_i^{-1}]$ в группе $B(2,n) * G_1 * G_2$) является элементарным периодом ранга 2 над свободным произведением $G_1 * G_2$, причём для любых $i > j \geq 0$ слова C_i и $C_j^{\pm 1}$ не сопряжены в ранге 1.*

Содержание главы 2. Периодическим произведением показателя n семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ называется группа, получающаяся в результате добавления к соотношениям свободного произведения $F = \prod\limits_{i \in I} {}^* G_i$ всех определяющих соотношений вида $A^n = 1$, где A есть элементарный период некоторого ранга α при определённой классификации периодических слов свободного произведения F и при этом слово A^n входит в некоторое *минимизированное в ранге* $\alpha - 1$ слово из класса $\overline{\mathscr{M}}_{\alpha-1}$ (см. определение п.8 [1])

По аналогии работы [21], где определено понятие так называемой $\overline{n}$-подгруппы, подгруппу L свободного произведения $F = \prod_{\alpha \in I}^* G_\alpha$ назовём n-подгруппой, если она удовлетворяет условиям:

1. L является нормальным замыканием некоторых слов вида $A^n, A \in F$;

2. $G_\alpha \cap L = \{1\}$ для всех $\alpha \in I$;

3. для всякого слова $X \in F$ или $X^n = 1$ в факторгруппе F/L, или X сопряжён в F/L некоторому элементу из $G_\alpha \subset F/L$ для некоторого $\alpha \in I$.

Доказаны следующие основные утверждения.

Теорема 2.1 *Пусть $n \geq 665$ произвольное нечётное число, а множители $G_\alpha, \alpha \in I$ свободного произведения $F = \prod_{\alpha \in I}^* G_\alpha$ не содержат инволюций и удовлетворяют условиям $G_\alpha^n = G_\alpha$ для всех $\alpha \in I$. Тогда F содержит единственную n-подгруппу.*

Следствие 2.1 *В классе всех групп G не содержащих инволюций и удовлетворяющих условию $G^n = G$ n-периодическое произведение совпадает с $\overline{n}$-периодическим произведением для всех нечётных периодов $n \geq 665$.*

Для доказательства основной теоремы главы 2, элементарные периоды, которые определяются совместной индукцией, делятся на два класса и на основе этой классификации строится некоторая вспомогательная группа Γ_L, зависящая от заданной нормальной n-подгруппы L. В ходе доказательства нами используются также следующие леммы:

Лемма 2.1 *Для всякого непустого слова $X \in \mathscr{A}_\alpha$, можно указать такое слово S и такое слово Y, что выполнено соотношение $X = SYS^{-1}$ в ранге α, где Y либо есть элемент одной из групп G_i, либо имеет вид A^r, где A – отмеченный элементарный период некоторого ранга $\gamma \leq \alpha + 1$ и A^q входит в некоторое слово из множества $\overline{\mathscr{M}}_{\gamma-1}$.*

Лемма 2.3 *Если A есть элементарный период не первого типа некоторого ранга $\gamma \geq \alpha$ и A^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathscr{M}}_{\gamma-1}$, то A имеет бесконечный порядок в Γ_L.*

Содержание главы 3. В главе 3 мы исследуем автоморфизмы некоммутативного аналога аддитивной группы рациональных чисел.

Рассматриваемые нами группы являются центральными расширениями свободных периодических групп $B(m, n)$ бесконечной циклической группой и обозначаются через $A(m, n)$. Группа $A(m, n)$ имеет следующее задание:

$$A(m,n) = \langle a_1, a_2, ...a_m, d \,|\, a_j d = d a_j \text{ и } A^n = d \quad \text{для всех } A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{E}_i \text{ и } 1 \leq j \leq m \rangle, \tag{1}$$

где $n \geq 665$ – произвольное нечётное число, $m > 1$, а для каждого ранга i множество $\mathscr{E}_i$ состоит из периодических слов ранга i вида A^n с элементарными периодоми A, таких что при некоторых P, Q имеет место включение $PA^nQ \in \overline{\mathscr{M}}_i$, причём, если $A^n, B^n \in \mathscr{E}_i$, то периоды A и $B^{\pm 1}$ не сопряжены.

Одно из основных свойств групп $A(m, n)$ заключается в том, что любой элемент группы $A(m, n)$ в степени n равен некоторой степени элемента d, порождающего центр группы, причём d имеет бесконечный порядок. Группа $B(m, n)$ изоморфна факторгруппе группы $A(m, n)$ по центру, которая является циклической группой порождённой элементом d. Поскольку центр каждой группы автоморфно допустимая подгруппа (характеристическая подгруппа), то каждый автоморфизм α группы $A(m, n)$ естественным образом индуцирует автоморфизм $\overline{\alpha}$ группы $B(m, n)$ и, таким образом, возникает каноничекий гомоморфизм $f : Aut(A(m, n)) \to Aut(B(m, n))$. Доказывается

Лемма 3.1 *Естественный гомоморфизм $f : Aut(A(m, n)) \to Aut(B(m, n))$ определенный формулой $f(\alpha) = \overline{\alpha}$ не является сюръективным гомоморфизмом.*

Лемма 3.2 *Если $f(\phi)$ является внутренним автоморфизмом группы $B(m,n)$, то ϕ является внутренним автоморфизмом группы $A(m,n)$.*

Основным результатом данной главы является следующая теорема:

Теорема 3.1 *Группа внутренних автоморфизмов группы $A(m,n)$ является характеристической подгруппой группы всех автоморфизмов $Aut(A(m,n))$ группы $A(m,n)$ для всех $m>1$ и нечётных $n \geq 1003$.*

В ходе доказательства существенно используется следующая лемма.

Лемма 3.3 *Пусть Φ – произвольный автоморфизм группы $Aut(A(m,n))$. Обозначим $\Phi(Inn(A(m,n))) = H$. Тогда $Inn(A(m,n)) \cap H \neq \{1\}$.*

Также нами исследуются некоторые свойства множества

$$P = \{a \in A(m,n) \,|\, i_a \in H\}.$$

Из соотношения $i_a \circ (i_b)^{-1} = i_{ab^{-1}}$ следует, что если $a,b \in P$, то $ab^{-1} \in P$, т.е. P – подгруппа группы $A(m,n)$.

Доказана следующая лемма.

Лемма 3.4 *Для подгруппы P справедливы следующие утверждения:*

(1) подгруппа P нормальна в $A(m,n)$,

(2) для любого $\phi \in H$ подгруппа P – ϕ-инвариантна, т.е. $P^\phi = P$ (через P^ϕ обозначен образ множества P при автоморфизме ϕ),

(3) для каждого автоморфизма $\phi \in H$ и для любого элемента $a \in P$ элемент $a\,a^\phi a^{\phi^2} \cdots a^{\phi^{n-1}}$ принадлежит центру группы $A(m,n)$,

(4) для любого элемента $a \in A(m,n)$ и для каждого автоморфизма $\phi \in H$ имеет место включение $a^{-1}a^\phi \in P$.

Мы используем также следующие леммы.

Лемма 3.5 (см. [22][следствие 1]) *Пусть $n \geq 1003$ – произвольное нечётное число и N – нетривиальная нормальная подгруппа свободной бернсайдовой группы $B(m\,,n)$ произвольного ранга m. Тогда, если N изоморфна некоторой свободной бернсайдовой группе $B(r\,,n)$, то $N = B(m,\,n)$.*

Лемма 3.6 (см. [23][следствие 2]) *Пусть φ такой автоморфизм группы $B(m,n)$, что $N^\varphi = N$ для каждой нормальной подгруппы $N \in \mathcal{M}_n$, где $n \geq 1003$ – произвольное нечётное число. Тогда φ – внутренний автоморфизм.*

Лемма 3.7 *Пусть $\varphi : G \to G$ произвольный автоморфизм и N такая нормальная подгруппа группы G, что факторгруппа G/N является неабелевой простой группой. Тогда, если подгруппы N, N^φ ,..., $N^{\varphi^{k-1}}$ – попарно различные, а $N^{\varphi^k} = N$, то факторгруппа $G/\bigcap\limits_{i=1}^{k} N^{\varphi^i}$ разлагается в прямое произведение* *своих нормальных подгрупп* $N_j / \bigcap_{i=1}^{k} N^{\varphi^i}$, $j = 1, 2, ..., k$, *где* $N_j = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} N^{\varphi^i}$ *и каждая факторгруппа* $N_j / \bigcap_{i=1}^{k} N^{\varphi^i}$ *изоморфна группе* G/N.

Содержание главы 4. В этой главе нами был улучшен результат С.В.Иванова и Р.Михайлова о существовании нетривиальных пар делителей нуля в групповом кольце $\mathbb{Z}[B(m,n)]$ группы $B(m,n)$, изложенный в [19].

Для данной группы G обозначим через $\mathbb{Z}[G]$ групповое кольцо группы G над кольцом целых чисел. Если $h \in G$ является элементом конечного порядка $n > 1$ и $X, Y \in \mathbb{Z}[G]$, то в групповом кольце $\mathbb{Z}[G]$ имеем следующие равенства

$$X(1-h) \cdot (1 + h + ... + h^{n-1})Y = 0, \tag{2}$$

$$X(1 + h + ... + h^{n-1}) \cdot (1-h)Y = 0. \tag{3}$$

Следовательно, $X(1-h)$ и $(1 + h + ... + h^{n-1})Y$, $X(1 + h + ... + h^{n-1})$ и $(1-h)Y$ левые и правые делители нуля в групповом кольце $\mathbb{Z}[G]$ (если ни один из них не равен 0), которых мы называем тривиальной парой делителей нуля, связанных с данным элементом $h \in G$ конечного порядка n.

Таким образом, пара $A, B \in \mathbb{Z}[G]$, где $AB = 0$ и $A, B \neq 0$, является *тривиальной* парой делителей нуля в $\mathbb{Z}[G]$, если найдутся такие элементы $X, Y \in \mathbb{Z}[G]$ и элемент $h \in G$ конечного порядка $n > 1$, что либо $A = X(1-h)$ и $B = (1 + h + ... + h^{n-1})Y$, либо $A = X(1 + h + ... + h^{n-1})$ и $B = (1-h)Y$.

С.В.Иванов поставил вопрос (см. [18], задача 11.36.д): Пусть $m \geq 2$ и $n \gg 1$ нечётно. Верно ли, что каждая пара делителей нуля в $\mathbb{Z}[B(m,n)]$ тривиальна, т.е. если $AB = 0$ в $\mathbb{Z}[B(m,n)]$, то $A = XC$, $B = DY$, где $X, Y, C, D \in \mathbb{Z}[B(m,n)]$ такие, что $CD = 0$ и множество $supp(C) \cup supp(D)$ содержится в циклической подгруппе группы $B(m,n)$?

В 2012 г. С.В.Иванов и Р.Михайлов в [19] дали отрицательное решение этого вопроса, построив нетривиальные пары делителей нуля в $\mathbb{Z}[B(m,n)]$ для всех нечётных периодов $n > 10^{10}$. Модификация приведённой в [19] доказательства позволяет значительно снизить границу показателей n, для которых вопрос решается отрицательно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1 *Пусть* $B(m,n)$ *свободная бернсайдова группа ранга* $m \geq 2$, $n \geq 665$ - *произвольное нечётное число и* a_1, a_2 - *свободные порождающие группы* $B(m,n)$. *Обозначим* $c = a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}$ *и пусть* $A = (1 + c + ... + c^{n-1})(1 - a_1 a_2 a_1^{-1})$, $B = (1 - a_1)(1 + a_2 + ... + a_2^{n-1})$. *Тогда* $AB = 0$ *в* $\mathbb{Z}[B(m,n)]$ *и пара* A, B *является нетривиальной парой делителей нуля в целочисленном групповом кольце* $\mathbb{Z}[B(m,n)]$ *группы* $B(m,n)$.

Отметим, что доказательство этой теоремы основано на лемме, которая доказана в работе [19].

Напомним, что подгруппа K группы G называется *антинормальной*, если для каждого элемента $g \in G \setminus K$ имеет место равенство $gKg^{-1} \cap K = \{1\}$.

Лемма 4.2 (см. лемма 2, [19]) *Предположим, что G является группой, $a, b \in G$, $d = aba^{-1}$, элементы $c = aba^{-1}b^{-1}$ и b имеют порядок $n > 1$, циклические подгруппы $\langle c \rangle, \langle ab^i \rangle$ являются нетривиальными антинормальными подгруппами и $d \notin \langle c \rangle, c^j d \notin \langle ab^i \rangle$ для всех $i, j \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Тогда невозможны равенства вида $CD = 0$,*

$$(1 + c + ... + c^{n-1})(1 - d) = XC, \quad (1 - a)(1 + b + ... + b^{n-1}) = DY,$$

где $X, Y \in \mathbb{Z}[G], C, D \in \mathbb{Z}[H]$, H является циклической подгруппой в G.

Список литературы

[1] Адян С. И., “Периодические произведения групп”, Тр. МИАН СССР, **142**, 1976, 3–21.

[2] Адян С. И., “Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева”, *Матем. заметки, том 88, N 6*, 2010., 803–810.

[3] Адян С. И., Атабекян В. С. О хопфовости n-периодических произведений групп. Матем. заметки, том 95, N 4, сс. 483–491, 2014.

[4] Gevorgyan A.L. On automorphisms of periodic products of groups. Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences. (2012), 228 (2), p. 3–9.

[5] Адян С. И. Случайные блуждания на свободных периодических группах // Изв. АН СССР. Сер. матем, **46**:6, (1982) 1139–1149.

[6] Arzhantseva G. N., Burillo J., Lustig M., Reeves L., Short H., Ventura E., Uniform non-amenability // Adv. Math., 197:2 (2005), 499–522.

[7] Атабекян В. С., “О подгруппах свободных бернсайдовых групп нечётного периода $n \geq 1003$”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:5 (2009), 3–36.

[8] Ольшанский А. Ю. К вопросу о существовании инвариантного среднего на группе // УМН, 35:4(214) (1980), 199–200.

[9] Dyer J., Formanek E., The automorphism group of a free group is complete. *J. London Math. Soc.* (2) 11 (1975), no. 2, 181–190.

[10] Tolstykh V., The automorphism tower of a free group. *J. London Math. Soc.* **61**(2)(2000) 423–440.

[11] Formanek E., Characterizing a free group in its automorphism group. *J. Algebra* **133**(2) (1990) 424–432.

[12] Khramtsov D. G. Completeness of groups of outer automorphisms of free groups. *Group-theoretic investigations*, 128–143, Akad. Nauk SSSR Ural. Otdel., Sverdlovsk, 1990 (in russian).

[13] Bridson M. R., Vogtmann K. Automorphisms of automorphism groups of free groups, *J. Algebra* **229**(2000) 785–792.

[14] Atabekyan V. S. The groups of automorphisms are complete for free Burnside groups of odd exponents $n \geq 1003$. International Journal of Algebra and Computation, v.23, no. 6, (2013), p. 1485–1496.

[15] Адян С. И., О некоторых группах без кручения, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 35:3 (1971), 459–468.

[16] Адян С. И., *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975.

[17] Sozutov A. I., Durakov E. B., *On groups with isolated involution*, Sibirsk. Mat. Zh., 55:4 (2014), 863–874.

[18] Мазуров В. Д., Мерзляков Ю. И., Чиркин В.А. (ред.), *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, изд-е 11, Изд-во Ин-та матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1982.

[19] Ivanov S. V., Mikhailov R., “On Zero-divisors in Group Rings of Groups with Torsion”, *Canadian Mathematical Bulletin, v. 45, n. 6,*, 2012., 63-71.

[20] Григорчук Р.И., *Симметричные случайные блуждания на дискретных группах*, Многокомпонентные случайные системы, Наука, М., 1978, 132–152.

[21] Ivanov S. V., “On periodic products of groups”, *Internat. J. Algebra Comput., v. 5, n. 1*, 1995., 7–17.

[22] Атабекян В. С., “Нормализаторы свободных подгрупп свободных бернсайдовых групп неччтного периода $n \geq 1003$”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **15**:1 (2009), 3–21.

[23] Атабекян В. С., “О нормальных подгруппах в периодических произведениях С. И. Адяна”, *Алгоритмические вопросы алгебры и логики*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Ивановича Адяна, Тр. МИАН, **274**, 2011, 15–31.

Работы автора по теме диссертации

1. Атабекян В.С., Геворгян А.Л., Григорян А.Е., “О неаменабельных простых группах ограниченного периода”, *Вестник Казанского государственного энергетического университета N.4 (19)*, 2013, 9–15.
2. Геворгян А.Л., Григорян А.Е., “Об n-подгруппах свободных произведений”, *Восьмая годичная научная конференция РАУ. Труды.*, 2014, 34–38.
3. Григорян А.Е., Карапетян М.Р., Пайлеванян А.С., “О групповых кольцах групп с периодическими определяющими соотношениями”, *Восьмая годичная научная конференция РАУ. Труды.*, 2014, 39–42.
4. A.Ye.Grigoryan, “Inner automorphisms of non-commutative analogues of the additive group of rational numbers”, *Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences*, **1(236)** (2015), 12–14.
5. A.L.Gevorgyan, A.E.Grigoryan, “On simple non-amenable groups”, *Материалы международной конференции "Алгебра и математическая логика”, Казанский (Приволжский) федеральный университет*, 2014, 57–58.
6. A.E.Grigorian, Sh.A.Stepanyan, “On the automorphisms of Adyan’s groups”, *International Conference Mal’tsev Meeting, Novosibirsk*, 2015, 140.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

ԱՐԹՈՒՐ ԵՐԵՄԻ ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԽՄԲԵՐԻ n-ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐԻ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ԸՆԴԼԱՅՆՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ատենախոսությունում ուսումնասիրվում են n-պարբերական արտադրյալների որոշ հատկություններ: Ուսումնասիրվում են նաև n-րդ կարգի ցիկլիկ խմբերի n-պարբերական արտադրյալների հայտնի կենտրոնական ընդլայնումները անվերջ ցիկլիկ խմբով ու դրանց ավտոմորֆիզմների խմբերը: Հետազոտվում են ազատ պարբերական խմբերի ամբողջաթիվ խմբային օղակներում զրոյի ոչ տրիվիալ բաժանարարների գոյության հարցը: Նաև կառուցվում են սահմանափակ պարբերություն ունեցող ոչ ամենաբել պարզ խմբերի օրինակներ:

G խումբը կոչվում է ամենաբել խումբ, եթե դրա համար գոյություն ունի վերջավոր-ադիտիվ μ չափ՝ որոշված խմբի բոլոր ենթաբազմությունների σ-հանրահաշվի վրա, որի համար $\mu(G) = 1$ և $\mu(gA) = \mu(A)$ բոլոր $g \in G$ տարրերի և $A \subset G$ ենթաբազմությունների համար:

Ոչ ամենաբել խմբերի մասին դասական արդյունքներից մեկը Ս.Ադյանի թեորեմն է այն մասին, որ բոլոր կենտ $n \geq 665$ և $m > 1$ թվերի համար ազատ պարբերական $B(m,n)$ խմբերը ոչ ամենաբել են: Ա.Օլշանսկին կառուցել է ոչ ամենաբել խմբերի այլ օրինակներ: Նրա կառուցած խմբերը կամ առանց ոլորման պարզ խմբեր են, կամ էլ՝ պարբերական պարզ խմբեր են, սակայն այդ խմբերը չունեն վերջավոր պարբերություն:

Խմբերի $\{G_i\}_{i\in I}$ ընտանիքի n-պարբերական արտադրյալ կոչվում է այն խումբը, որը ստացվում է $F = \prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ ազատ արտադրյալից դրա որոշիչ առնչություններին ավելացնելով $A^n = 1$ տեսքի բոլոր առնչությունները, որտեղ A-ն որևէ ռանգի տարրական պարբերություն է և A^n-ը $\overline{\mathscr{M}}_{\alpha-1}$ բազմության ինչ-որ բառի ենթաբառ է:

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ արդյունքները:

- *Ինվոլյուցիա չպարունակող և $G_i^n = G_i$,$i \in I$, հավասարություններին բավարարող խմբերի կամայական G_i, $i \in I$ ընտանիքի n-պարբերական արտադրյալը ոչ ամենաբել պարզ խումբ է:*
- *Տրված k կենտ պարբերություն ունեցող խմբերի կամայական G_i, $i \in I$, ընտանիքի n-պարբերական արտադրյալը kn սահմանափակ պարբերությամբ ոչ ամենաբել պարզ խումբ է, եթե k-ն և n-ը փոխադարձաբար պարզ թվեր են:*

Մասնավորապես.

•Եթե r կենտ թիվը փոխադարձաբար պարզ է $n \geq 1003$ կենտ թվի հետ, ապա վերջավոր թվով r կարգ ունեցող ցիկլիկ խմբերի n-պարբերական արտադրյալը որ պարբերությամբ ոչ ամենաբել պարզ խումբ է:

•Դիցուք $n \geq 665$ կամայական կենտ թիվ է և $F = \prod^{*}_{\alpha \in I} G_\alpha$ ազատ արտադրյալի $G_\alpha, \alpha \in I$ արտադրիչները բավարարում են $G_\alpha^n = G_\alpha$ պայմանին բոլոր $\alpha \in I$ համար: Այդ դեպքում F ազատ արտադրյալը պարունակում է միակ N նորմալ ենթախումբ, որ 1) $N \cap G_i = \{1\}$, 2) N ենթախումբը $C^n \in F$ տեսքի բառերի ինչ-որ բազմության նորմալ փակույթ է և եթե $X \in N$ տարրը F/N-ում համալուծ չէ G_i կոմպոնենտներից վերցրած որևէ տարրի, ապա F/N քանորդ խմբում տեղի ունի $X^n = 1$ հավասարությունը:

Ատենախոսությունում հետազոտվում են նաև ռացիոնալ թվերի ադիտիվ խմբի ոչ կոմմուտատիվ անալոգների՝ $A(m, n)$ խմբերի ավտոմորֆիզմները: $A(m, n)$ խմբերն ունեն հետևյալ ներկայացումը.

$$A(m, n) = \langle a_1, a_2, ...a_m, d \,|\, a_j d = d a_j \;\; A^n = d \;\; A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{E}_i \;\; 1 \leq j \leq m \rangle,$$

որտեղ $n \geq 665$ կամայական կենտ թիվ է, $m > 1$, իսկ յուրաքանչյուր i ռանգի համար $\mathscr{E}_i$ բազմությունը բաղկացած է բոլոր i ռանգի A^n պարբերական բառերից, որտեղ A տարրական բառ է, այնպիսին, որ ինչ-որ P, Q բառերի համար տեղի ունի $PA^nQ \in \overline{\mathscr{M}}_i$, ընդ որում, եթե $A^n, B^n \in \mathscr{E}_i$, ապա A և $B^{\pm 1}$ համալուծ չեն: Ապացուցվում է, որ

• $A(m, n)$ խմբի ներքին ավտոմորֆիզմների խումբը բոլոր ավտոմորֆիզմների $Aut(A(m, n))$ խմբի բնութագրիչ ենթախումբ է բոլոր $m > 1$ և կենտ $n \geq 1003$ թվերի համար:

Տվյալ G խմբի համար նշանակենք $\mathbb{Z}[G]$-ով G խմբի ամբողջաթիվ խմբային օղակը: Տարրերի $A, B \in \mathbb{Z}[G]$ զույգը, որտեղ $AB = 0$ և $A, B \neq 0$, կոչվում է 0-ի տրիվիալ բաժանարարների զույգ $\mathbb{Z}[G]$-ում, եթե գոյություն ունեն $X, Y \in \mathbb{Z}[G]$ և $h \in G$ վերջավոր $n > 1$ կարգի տարր այնպիսիք, որ կամ $A = X(1 - h)$ և $B = (1 + h + ... + h^{n-1})Y$, կամ $A = X(1 + h + ... + h^{n-1})$ և $B = (1 - h)Y$:

1990 թ. Ս.Իվանովն առաջադրել էր հետևյալ խնդիրը. դիցուք $m \geq 2$ և $n \gg 1$ կենտ է. արդյո՞ք ազատ պարբերական խմբի $\mathbb{Z}[B(m, n)]$ խմբային օղակի զրոյի բաժանարարների յուրաքանչյուր զույգ տրիվիալ է:

Ապացուցվում է, որ

• Կամայական կենտ $n \geq 665$ թվի համար $\mathbb{Z}[B(m, n)]$ խմբային օղակում գոյություն ունեն զրոյի ոչ տրիվիալ բաժանարարների զույգեր ($m > 1$):

SUMMARY

ARTUR YEREM GRIGORYAN

ON SOME PROPERTIES OF n-PERIODIC PRODUCTS OF GROUPS AND THEIR CENTRAL EXPANSIONS

The dissertation is devoted to the study of some properties of n-periodic products. We also have obtained some results about known central expansions of n-periodic products by infinite cyclic group and their automorphisms groups. In dissertation also investigated the question about the existence of non-trivial zero-divisors in group rings of free periodic groups over the integers. Also constructed examples of simple non-amenable groups of bounded periods.

A group G is called an amenable group, if there exists such finite-additive measure μ on σ-algebra of all subsets of G such that $\mu(G) = 1$ and $\mu(gA) = \mu(A)$ for all $g \in G$ and $A \subset G$.

The S.Adyan's theorem is a one of the classical results about non-amenable groups. According to this theorem the free periodic groups $B(m, n)$ are non-amenable for all odd $n \geq 665$ and $m > 1$. A.Ol'shanskii constructed other examples of non-amenable groups. Constructed by him groups are either simple torsion-free groups or periodic simple groups, but these groups do not have finite period.

The n-periodic product of the family of groups $\{G_i\}_{i \in I}$ is called the group which is obtained from free product $F = \prod\limits_{i \in I} {}^{*} G_i$ by adding all defining relation of the form $A^n = 1$, where A is an elementary period of some rank and A^n is subword of some word from set $\overline{\mathscr{M}}_{\alpha-1}$.

The following results were obtained in the dissertation:

• The n-periodic product of any family of groups $G_i, i \in I$ without involution and satisfying equalities $G_i^n = G_i, i \in I$ is a non-amenable simple group.

• The n-periodic product of any family of groups $G_i, i \in I$ of the given odd period k is a non-amenable simple group of finite period kn, if k and n are coprime numbers.

Particularly:

• If r and $n \geq 1003$ are coprime odd numbers, then n-periodic product a finite family of finitely generated groups of period r is a non-amenable simple group of period nr.

• Let $n \geq 665$ be an odd number and multipliers $G_\alpha, \alpha \in I$ of free product $F = \prod_{\alpha \in I}^{*} G_\alpha$ satisfy the equality $G_\alpha^n = G_\alpha$ for all $\alpha \in I$. Then the free product F

contains only one normal subgroup N such that 1) $N \cap G_i = \{1\}$, 2) subgroup N is the normal closure of some words $C^n \in F$ and if element $X \in N$ is not conjugated to an element from components G_i, then the equality $X^n = 1$ holds in the quotient group F/N.

In the dissertation also investigated the automorphisms of the groups $A(m,n)$ which are non-commutative analogues of additive group of rational numbers. The groups $A(m,n)$ have the following representation:

$$A(m,n) = \langle a_1, a_2, ...a_m, d \,|\, a_j d = d a_j \text{ and } A^n = d \text{ for all } A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{E}_i \text{ and } 1 \leq j \leq m \rangle,$$

where $n \geq 665$ is an arbitrary odd number, $m > 1$, and for every rank i the set $\mathscr{E}_i$ contains all periodic words A^n off rank i such that for some words P, Q take place $PA^nQ \in \overline{\mathscr{M}}_i$. Besides, if $A^n, B^n \in \mathscr{E}_i$, then A and $B^{\pm 1}$ are not conjugate. It is proved, that

• The inner automorphisms group of the group $A(m,n)$ is characteristic subgroup in the automorphisms group $Aut(A(m,n))$ for all $m > 1$ and odd $n \geq 1003$.

For a given group G denote by $\mathbb{Z}[G]$ the group ring of G over the integers. Pair of elements $A, B \in \mathbb{Z}[G]$, where $AB = 0$ and $A, B \neq 0$, is called a trivial pair of zero-divisors in $\mathbb{Z}[G]$, if there are $X, Y \in \mathbb{Z}[G]$ and element $h \in G$ of finite order $n > 1$ such that $A = X(1-h)$ and $B = (1+h+...+h^{n-1})Y$, or $A = X(1+h+...+h^{n-1})$ and $B = (1-h)Y$

S.Ivanov in 1990 asked the following question: Suppose $m \geq 2$ and $n \gg 1$ is odd. Is it true, that every pair of zero-divisors in $\mathbb{Z}[B(m,n)]$ is trivial?

It is proved, that

• There are non-trivial pairs of zero-divisors in the group rings $\mathbb{Z}[B(m,n)]$ for any $m > 1$ and odd $n \geq 665$.