

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Հակոբյան Տիգրան Ստեփանի

ՃՇԳՐԻՏ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ ՄԻԱՉԱՓ և ՔՎԱԶԻ-ՄԻԱՉԱՓ
ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ

Ա.04.02 -- «Տեսական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА
ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Акопян Тигран Степанович

ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ В ОДНОМЕРНЫХ И
КВАЗИ-ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности
01.04.02 -- “Теоретическая физика”

ЕРЕВАН - 2013

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի Պետական Համալսարանի գիտական խորհրդի կողմից:

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆ.	Ա. Մուրադյան
	Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր	Դ. Կարախանյան
	Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆ.	Գ. Ջորջաձե

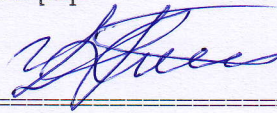
Առաջատար կազմակերպություն՝ Տեսական Ֆիզիկայի Լաբորատորիա, ՄՍՀԻ, Դուրնա
Պաշտպանությունը կայանալու է 2013թ. հունիսի 06-ին ժամը 11⁰⁰-ին ԵՊՀ-ի ֆիզիկայի 049
մասնագիտական խորհրդում: Հասցե՝ Երևան, Ա. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2013 թ. հունիսի 5-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար

Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ



Վ. Պ. Քալանթարյան

Тема диссертации утверждена ученым советом Ереванского Государственного Университета

Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук, проф.	А. Мурадян
	доктор физ.-мат. наук	Д. Караханян
	доктор физ.-мат. наук, проф.	Г. Джорджадзе

Ведущая организация: Лаборатория Теоретической Физики ОИЯИ, Дубна

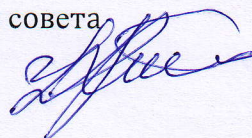
Защита состоится 06 июля 2013г. в 11 часов на заседании специализированного совета по физике ВАК 049 при Ереванском Государственном Университете по адресу: Ереван ул. А. Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ

Автореферат разослан 5 июня 2013 г.

Ученый секретарь специализированного совета

кандидат физ.-мат. наук, доцент



В. П. Калантарян

Общая характеристика работы.

Данная работа посвящена исследованию одномерных и квази-одномерных систем. В частности, исследована угловая часть модели Калоджеро, которая сама задаёт интегрируемую механическую систему на многомерной сфере. Построены интегралы движения полученной сферической системы. Исследована также системы спинов на лестничной решётке с дополнительными диагональными взаимодействиями. В частности, изучена ее фазовая диаграмма при нулевой температуре. Для достаточно широкой области параметров этой системы исследована возможность обобщения теоремы Либа-Маттиса об антиферромагнитном упорядочения минимальных уровней энергии. Эта проблема исследована также для обобщённой одномерной модели Хаббарда с расширенной унитарной симметрией. Построены и исследованы различные интегрируемые обобщения модели Хаббарда.

Актуальность

В последние десятилетия достигнут значительный прогресс в исследовании низкоразмерных систем с взаимодействием между частицами. Объясняется это тем, что, во-первых, многие важные эффекты, которые широко исследуются в настоящее время и до сих пор не находят достаточно удовлетворительного объяснения в рамках более или менее завершённой теории, являются эффективно низкоразмерными. Во-вторых, одномерные, квази-одномерные и двумерные системы проще трёхмерных систем, поэтому они легче поддаются изучению как аналитическими, так и численными методами. В третьих, некоторые свойства систем в различных измерениях имеют общие черты. В четвёртых, в последнее время в результате технологического прогресса в области нанотехнологии, квантовых точек, оптических решёток стало возможным не только получение достаточно чистых одномерных и квази-одномерных структур, но и синтез кристаллических решёток из искусственных атомов с заранее заданной структурой.

В одномерии парное взаимодействие с потенциалом, обратно пропорциональным квадрату расстояния, задаёт интегрируемую систему, которая известна как рациональная модель Калоджеро [1]. Она вместе с её различными обобщениями является одной из немногих многочастичных интегрируемых систем с взаимодействием, имеет множество приложений в современной физике и достаточно подробно изучена в литературе (см. обзоры [2, 3]). Кван-

товая система Калоджеро описывает свободные частицы с дробной статистикой, тип которого определяется силой взаимодействия [4]. Кроме того, вариационное основное состояние дробного квантового эффекта Холла, известное как состояние Лафлина [5], можно рассматривать как некоторую деформацию основного состояния этой модели [6]. В данной работе изучается угловая часть модели Калоджеро, которая сама является интегрируемой системой. Последняя описывает частицы на многомерной сфере в поле сложного потенциала, который обобщает потенциала Хиггса на сфере [7].

Одной из основных проблем физики конденсированных сред является изучение свойств сильно коррелированных материалов, где каждый атом содержит локализованные орбитали с сильным кулоновским и обменным взаимодействием. Простейшей такой системой является модель Хаббарда, которая описывает переход между проводящим и диэлектрическим состояниями. Она является решёточной фермионной моделью с перескоками электронов на соседние узлы, и кулоновским отталкиванием двух электронов в одном узле. В настоящее время предложены и исследованы также различные обобщения модели Хаббарда для многозонных электронных систем в присутствии дополнительных взаимодействий, при ограничениях на перескоки электронов, при наличии дополнительных симметрий и т. д. В пределе сильного кулоновского взаимодействия модель Хаббарда переходит в модель Гайзенберга, который представляет собой систему спинов в узлах решетки с обменным взаимодействием между соседними спинами. Она, в свою очередь, является simplest системой взаимодействующих квантовых спинов. Как и для модели Хаббарда, рассматриваются также её различные расширения, например, при наличии спиновых обменов более высокого порядка.

Следует отметить, что из огромного количества известных взаимодействующих спиновых и фермионных квантовых систем на решетках лишь некоторые можно решить точно, вычислив спектр или свободную энергию в термодинамическом пределе. В основном – это одномерные системы, для которых работает метод обратной задачи рассеяния. Однако, некоторые важные свойства системы носят более универсальный характер, чем интегрируемость: им удовлетворяет достаточно широкий класс систем. К таким свойствам относятся наличие и степень вырождения уровней энергии, квантовые числа основного состояния, упорядочение минимальных уровней энергии по значению спина, и т. д. Часто для выявления таких общих свойств условие интегрируемости не требуется, так как существуют другие точные методы. Примером

является теорема Либа-Маттиса об антиферромагнитном упорядочении энергетических уровней для широкого класса так называемых двухподрешеточных спиновых систем, которое также верно для некоторых моделей Хаббарда [8]. Теорема Либа-Маттиса была обобщена на различные спиновые и фермионные системы на решетке: цепочку Гайзенберга со спином 1 с биквадратичным взаимодействием, расширенную цепочку Хаббарда [9], двухподрешеточную модель Хаббарда при половинном заполнении [10]. Ферромагнитное упорядочение уровней энергии, которое обратное антиферромагнитному, было также сформулировано и доказано для цепочки Гайзенберга спина $1/2$ [11].

Значительная активность наблюдается и в области изучения квази-одномерных спиновых систем, таких как модель спиновой лестницы, которая представляет собой полосу, вырезанную из квадратной спиновой решётки, и её различные обобщения. В течение последних лет также было получено много соединений такого типа, имеющих структуру, аналогичную структуре двумерных высокотемпературных сверхпроводников [16]. Было высказано предположение, что механизмы, аналогичные существующим, в слоях CuO_2 высокотемпературных сверхпроводников также могут приводить к сверхпроводящему поведению [17]. Преимущество лестничных систем состоит в том, что они допускают изучение методами, которые используются также для одномерных систем, тогда как для двумерных систем такие методы неприменимы.

Целью настоящей работы является

- Исследование сферической части рациональной модели Калоджеро и конформной механики в целом, как отдельной системы.
- Исследование фазовой диаграммы спиновой системы на лестничной решётке с диагональными взаимодействиями.
- Обобщение антиферромагнитного упорядочения уровней энергии по значению спина для фрустрированных спиновых систем на лестничной решётке.
- Обобщение антиферромагнитного упорядочения уровней энергии по значению спина для одномерных квантовых систем с $SU(N)$ симметрией.
- Исследование обобщённых интегрируемых цепочек Хаббарда с расширенной симметрией.

Научная новизна работы

Впервые сформулировано и доказано обобщение теоремы Либа-Матиса об антиферромагнитном упорядочении минимальных уровней энергии (в зависимости от спина) для фрустрированной спиновой системы. До этого все полученные точные результаты относились только к двухподрешеточным системам.

Впервые сформулировано и доказано её обобщение для квантовой системы с симметрией $SU(N)$. До этого все точные результаты относились только к обычной спиновой группе $SU(2)$.

Впервые построен полный набор интегралов для сферической системы, которая соответствует угловой части классической рациональной модели Калоджеро, и установлена их связь с базисом квантовых синглетных состояний, построенных с помощью парных валентных связей.

Практическая ценность

Установленная невырожденность основного состояния для $SU(N)$ инвариантных квантовых цепочек может быть применена для доказательства отсутствия щели в спектре в пределе бесконечного числа узлов (термодинамический предел).

Антиферромагнитное упорядочение уровней энергии для фрустрированных спиновых систем на квази-одномерной решётке, а также для $SU(N)$ инвариантных одномерных квантовых $SU(N)$ инвариантных квантовых систем на одномерной решётке может быть применена для проверки численного расчета спектров различных систем.

Автор выносит на защиту следующие основные положения и результаты

- Построены интегралы движения сферической механики, соответствующей угловой части рациональной модели Калоджеро, с помощью редукции из матричной модели. Эти интегралы представлены в удобной графической форме, что выявляет их связь с базисными синглетными состояниями обычных квантовых спинов, построенных с использованием парных валентных связей.
- Разработана процедура построения интегралов движения сферической механики, исходя из интеграла движения базовой конформной механики

определенной конформной размерности.

- Для лестничной системы со спином $1/2$ с дополнительными диагональными и четырёхспиновыми циклическими взаимодействиями, инвариантной относительно продольной оси симметрии, минимальные уровни энергии в секторе с фиксированным спином и четностью (при отражении) не вырождены и монотонно растут с ростом спина при фиксированной четности.
- Для расширенной одномерной модели Хаббарда с $SU(N)$ симметрией минимальные уровни энергии в отдельных секторах, которые образованы эквивалентными мультиплетами, не вырождены и упорядочены в соответствии с доминантным порядком соответствующих диаграмм Юнга.
- В трехмерной фазовой диаграмме лестничной модели со спином $1/2$ с дополнительными диагональными обменными взаимодействиями установлено наличие трех различных трехмерных квантовых фаз: ферромагнитной фазы и двух массивных антиферромагнитных фаз Холдейна с различным топологическим порядком. С большой точностью численно вычислена поверхность фазового перехода, разделяющая эти фазы.

Апробация работы

Основные работы диссертационной работы докладывались на международных конференциях: Armenia-Dubna Workshop on Problems of integrable (supersymmetric) systems, 24-25 December 2012, Dubna; Aspects of Integrable Systems and AdS/CFT, 1 November 2012, Tehran; Supersymmetry in Integrable Systems, 27-30 August, 2012, Yerevan; Modern problems of physics of low-dimensional systems, dedicated to 70-th anniversary of Professor E.Kazaryan, 21-22 March, 2012, Yerevan Supersymmetries in Integrable Systems, 01-04.08.2011, Hannover, Germany; Supersymmetry in Integrable Systems, 24-28.08.2010, Yerevan; Modern Problems in Optics and Photonics, 27.08-02.09.2009, Yerevan; Supersymmetry and Quantum Symmetries, 29.07-03.08.2009, Dubna; XIX Colloquium on Integrable Systems and Quantum Symmetries, 18-20.06.2009, Prague; XXVII Colloquium on Group-theoretical methods in Physics, 13-19.08.2008, Yerevan; Supersymmetry and Quantum Symmetries, 30.07- 04.08.2007, Dubna, и др., а также на научных семинарах кафедры теоретической физики физического факультета ЕГУ, отдела теоретической физики ЕрФИ.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 22 работы, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 220 наименований, содержит 224 страниц печатного текста, включая 32 рисунка.

Краткое содержание диссертации

В главе 1 исследуются интегралы движения сферической части рациональной модели Калоджеро. Сферическая система Калоджеро рассматривается как отдельная интегрируемая система, описывающая взаимодействующие частицы на сфере, что можно рассматривать как многомерное обобщение известного осциллятора Хиггса. Хотя эволюция данной системы очевидным образом выводится из траекторий движения базовой системы Калоджеро, нахождение ее интегралов движения и их связь с интегралами движения системы Калоджеро является далеко нетривиальной задачей. Сферические инварианты представлены в виде диаграмм, которые схожи с схематическим представлением для синглетных состояний, образованных валентными связями из обычных квантовых спинов.

В первой части этой главы исследуется сферическая система, в котором гамильтониан определяется угловой частью рациональной системы Калоджеро, и её интегралы движения. Применяется метод редукции матричной модели.

В §1.1 приводится определение модели Калоджеро как системы одномерных частиц с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \sum_{i < j} \frac{g^2}{(q_i - q_j)^2},$$

и описываются её свойства. Известны различные способы решения модели Калоджеро и нахождения её интегралов движения, к числу которых относятся метод Лакса, метод редукции матричной модели, сведение к системе свободных частиц с использованием конформной симметрии. Более того, модель является максимально суперинтегрируемой, т. е. обладает $2N - 1$ незави-

симыми интегралами движения, среди которых имеется N коммутирующих интегралов Лиувилля. Эти интегралы построены и исследованы в литературе [18, 19]. Каждый из интегралов Лиувилля определяет в свою очередь отдельную динамическую систему, которая тоже является максимально суперинтегрируемой.

Следует отметить, что конформная симметрия, которая задаётся группой $SL(2, R)$ и является на самом деле симметрией действия, а не гамильтониана. Последний является одним из трёх генераторов группы:

$$D = p_r r, \quad K = \frac{r^2}{2}, \quad H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{\mathcal{I}(u)}{2r^2}, \quad (1)$$

где r, p_r и u^α описывают радиальную и сферическую части системы Калоджеро. Тем не менее, благодаря этой симметрии, в системе возникает дополнительный интеграл движения: элемент Казимира конформной алгебры, который квадратичен по (угловым) импульсам и соответствует угловой части $\mathcal{I}(u)$ гамильтониана H .

Следует отметить, что рациональная модель Калоджеро является частным (интегрируемым) случаем конформной механики – более общего класса систем обладающих $SL(2, R)$ симметрией. В конформной механике, как и в модели Калоджеро, радиальные и угловые переменные разделяются. Вся информация о конформной механике закодирована в её сферической части, которую можно рассматривать как отдельную систему, которую мы называем сферической механикой. Эта система сама по себе представляет интерес, так как описывает многоцентровое обобщение $(N - 1)$ -мерного осциллятора Хиггса [7]. Очевидно, сферическая механика, построенная на базе рациональной модели Калоджеро, является интегрируемой системой. Однако, построение её интегралов движения, изучение их алгебры и их связи с интегралами движениями базовой системы является нетривиальной задачей.

В §1.2 угловая часть системы Калоджеро рассматривается как обобщение осциллятора Хиггса [7] на многомерную сферу. Приводятся частные случаи трёхчастичной и четырёхчастичной модели с исключённым центром масс. В первом случае угловая часть гамильтониана совпадает с гамильтонианом осциллятора Хиггса на окружности, а во втором она определяет одночастичную систему на сфере с центрами сил, которые образуют кубookтаэдр.

В §1.3 сферическая механика получается методом редукции из угловой части свободной эрмитовой матричной модели. Сначала приводится стандартный вывод лиувиллевских интегралов исходной модели Калоджеро с использованием редукции эрмитовой матричной модели. Интегралы являются

$U(N)$ инвариантными многочленами ($SU(N)$ инвариантными, если исключен центр масс) и соответствуют старшим состояниям конформной алгебры. Затем показывается, что интегралы движения сферической системы описываются инвариантами группы $SU(N) \times SL(2, R)$, действующей посредством скобок Пуассона. Это позволяет строить инварианты сферической механики сверткой индексов $SU(N)$ инвариантных тензоров

$$d_{a_1 \dots a_k} = \text{Tr}(T_{a_1} \dots T_{a_k})$$

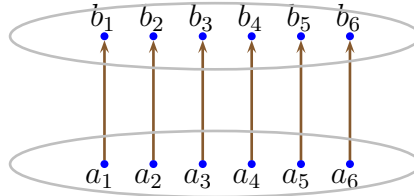
с индексами компонент M_{ab} тензора углового момента матричной модели с последующей редукцией по группе $SU(N)$. Здесь T_a являются генераторами унитарной группы, удовлетворяющими условию ортогональности $\text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}$. Для упрощения расчётов разработана диаграммная техника построения таких инвариантов, где используются следующие графические обозначения:

$$M_{ab} = \begin{array}{c} a \longrightarrow b \end{array} \quad d_{abcde} = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array}$$

В качестве примера рассматриваются инварианты

$$\sum_{a_i, b_i} d_{a_1 \dots a_{2k}} d_{b_1 \dots b_{2k}} M_{a_1 b_1} \dots M_{a_{2k} b_{2k}},$$

которые нетривиальны только для чётных k . Им соответствуют графические диаграммы:



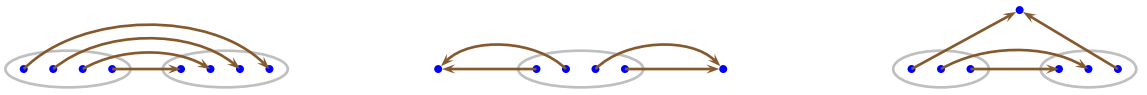
Они в некоторой степени являются аналогами интегралов Лиувилля базовой модели Калоджеро. Однако, в отличие от них, они не находятся в инволюции: их скобки Пуассона выражаются через другие, более сложные инварианты. Не все построенные таким образом интегралы движения независимы. Интегралы углового момента удовлетворяют перекрестному соотношению

$$M_{a'b} M_{ab'} = M_{ab} M_{a'b'} - M_{aa'} M_{bb'},$$

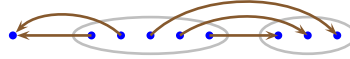
которое представляется в простой графической форме:

$$\begin{array}{c} b \\ \uparrow \\ a \end{array} \quad \begin{array}{c} b' \\ \uparrow \\ a' \end{array} = \begin{array}{c} b \quad b' \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad a' \end{array} + \begin{array}{c} b \longrightarrow b' \\ a \longrightarrow a' \end{array}$$

Оно исключает из рассмотрения инварианты с пересекающимися линиями. Используя это соотношение, показывается, что элементы Казимира, соответствующие алгебре углового момента, не являются независимыми, а выражаются через степени сферического гамильтониана. Диаграммы же, которые меняют знак при отражении относительно своей оси симметрии, просто за нуляются. Инварианты для системы с центром масс выражаются через инварианты с исключенным центром масс. Кроме того, функционально независимыми могут быть лишь инварианты, построенные с помощью симметризованных тензоров $d_{a_1 \dots a_k}$, что позволяет представить их на диаграммах одной точкой. Все эти свойства резко ограничивают количество независимых инвариантов. Существует единственный инвариант второго порядка, которая соответствует гамильтониану сферической системы. Отсутствует инвариант третьего порядка. Существуют три инварианта четвёртого порядка, которые описываются диаграммами:



Они функционально независимы для больших значений N . Единственный инвариант пятого порядка задаётся диаграммой:



Далее приводятся диаграммы для 16 инвариантов шестого порядка по импульсам. Путём вычислений с использованием пакета Mathematica устанавливается, что вместе с вышеприведёнными инвариантами меньшего порядка они образуют функционально независимый набор при достаточно большом значении числа частиц.

В §1.4 устанавливается связь построенных инвариантов с базисными синглетными состояниями из валентных связей для квантовых спинов, введённых Темперли и Либом [20]. Для этой цели используется другой метод построения тех же инвариантов по заданной схеме, который является дуальным, или обратным к предыдущему. Динамические переменные теперь содержат не линии, а вершины диаграмм, которым приписывается индекс $\sigma_i = \pm$:

$$O^{\sigma_1 \dots \sigma_n} = \sum_{a_1, \dots, a_n} d_{a_1 \dots a_n} A_{a_1}^{\sigma_1} \dots A_{a_n}^{\sigma_n} = \text{Tr} A^{\sigma_1} \dots A^{\sigma_n},$$

где $A_a^+ = P_a$, $A_a^- = Q_a$. Вершины попарно связываются антисимметричным тензором, как показано на рисунке:

$$\epsilon_{\sigma\sigma'} = \sigma \xrightarrow{\quad} \sigma' \qquad \text{Tr}(A^{\sigma_1} \dots A^{\sigma_5}) = \begin{array}{c} \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ \hline \end{array}$$

Симметризованные величины $O^{\sigma_1 \dots \sigma_n}$ образуют представление конформной группы со спином $s = n/2$, на котором её алгебра действует посредством скобок Пуассона. Это представление аналогично квантовому симметрическому спинору n -го ранга, который является мультиплетом спина $n/2$ обычной группы $SU(2)$. Вычисляются также коммутаторы $O^{\sigma_1 \dots \sigma_n}$ и исследуется их конформная структура. Инварианты сферической механики соответствуют $SL(2, R)$ скалярам и получаются свертыванием индексов тензорных величин $O^{\sigma_1 \dots \sigma_n}$ с помощью $\epsilon_{\sigma\sigma'}$. Их структура идентична структуре квантовых $SU(2)$ синглетов, образованных парными валентными связями между индексами соответствующих мультиплетов. Одно из отличий состоит в том, что в классическом случае некоторые синглеты обращаются в ноль, что исключается в квантовом случае.

Во второй части данной главы интегралы сферической системы строятся иным способом. Этот метод, в отличие от первого, применим и для более общей конформной механики, которая обладает дополнительными интегралами движения, при этом её интегрируемость изначально не предполагается. Возникает вопрос: будет ли полученная из него сферическая механика тоже обладать соответствующим интегралом, если да, и то как его построить? В §1.5 рассматривается интеграл движения конформной механики произвольной конформной размерности s и из неё строятся возможные интегралы движения соответствующей сферической системы. Сначала он разлагается в сумму с разделёнными радиальными и угловыми переменными:

$$I_s(p_r, r, u) = \sum_{m=-s}^s f_{s,m}(u) R_{s,m}(p_r, r).$$

Тогда действие $\mathcal{I}$ на угловые функции задаётся выражением

$$\{\mathcal{I}, f_{s,m}\} = 2\sqrt{(s-m)(s+m+1)}f_{s,m+1} - 2\mathcal{I}\sqrt{(s-m+1)(s+m)}f_{s,m-1}, \quad (2)$$

которое похоже на действие оператора проекции спина для компоненты x , что позволят применить теорию представлений ортогональной группы. Эти уравнения решаются применением поворота вокруг оси y на угол $-\pi/2$:

$$\tilde{f}_{s,m} = \sum_{m'} (-\mathcal{I})^{-\frac{m'}{2}} d_{m'm}^s(\pi/2) f_{s,m'},$$

где $d_{m'm}^s$ обозначает малую матрицу Вигнера, которая описывает вращение вокруг оси y для обычного квантового спина. Формальное решение имеет вид:

$$\tilde{f}_{s,m}(t) = e^{i\omega_m(t-t_0)} \tilde{f}_{s,m}(t_0), \quad \omega_m = 4m\sqrt{\mathcal{I}}.$$

Для систем с положительной сферической частью оно хорошо определено. Произведения этих величин с нулевой суммарной частотой определяют интегралы движения сферической механики. Далее строятся интегралы, которые являются полиномами от первоначальных коэффициентов $f_{s,m}(u)$ и сферического гамильтониана. Для целого спина таковым является величина, соответствующая нулевому значению его проекции:

$$\mathcal{J}_s(u) = \mathcal{I}(u)^{\frac{s}{2}} \tilde{f}_{s,0}(u) = \sum_{\ell=0}^s \frac{(2\ell-1)!!(2s-2\ell-1)!!}{\sqrt{(2s)!}} \mathcal{I}(u)^\ell f_{s,2\ell-s}(u).$$

Затем доказывается, что величина

$$\mathcal{J}_s^m = (-\mathcal{I})^s \tilde{f}_{s,m} \tilde{f}_{s,-m}$$

также является полиномиальным интегралом движения исходного сферического гамильтониана. В отличие от $\mathcal{J}_s(u)$, она определена как для целого, так и полуцелого значения спина.

В конце этот метод применяется к сферической части четырёхчастичной модели Калоджеро с исключенным центром масс, которая является двумерной системой на обычной сфере. Для неё явным образом строятся интегралы движения $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}$ и $\mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$. Единственное алгебраическое соотношение между ними имеет вид:

$$\mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{J}_2 \mathcal{I} + \frac{1}{3} \mathcal{I}^3 + 4g^2 \mathcal{I}^2.$$

Таким образом, остаются три функционально независимых сферических инварианта, что подтверждает суперинтегрируемость данной сферической системы.

Данная глава основана на работах [A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7].

В главе 2 построена трёхмерная фазовая диаграмма модели фрустрированной спиновой лестницы с диагональными взаимодействиями при нулевой температуре. Следует отметить, что в настоящее время фрустрированные спиновые системы являются предметом интенсивных исследований [12]. Интерес к ним возник в результате прогресса в синтезе соответствующих магнитных материалов [13], а также оптических решёток и их применении в квантовых вычислениях [14].

Отметим, что квази-одномерные системы осуществляют переход от одномерной модели Гайзенберга к двумерной на квадратной решётке. При нулевой температуре квантовые флуктуации нарушают дальний антиферромагнитный порядок в одномерии, который предположительно существует и в двумерии. Спектр же возбуждений является безмассовым (отсутствует щель между основным состоянием и элементарными возбуждениями), а парные спиновые корреляции убывают в зависимости от расстояния по степенному закону. Тем не менее, переход от одномерной решётки к квадратной посредством спиновых лестниц при увеличении количества связанных цепей не является гладким. В то время как низкоэнергетические свойства лестницы с нечётным числом цепей аналогичны свойствам одной цепочки (непрерывные возбуждения и степенной спад спиновых корреляций), лестницы с чётным числом цепей характеризуются конечной энергетической щелью и экспоненциальным затуханием корреляций. Эти замечательные свойства квантовых спиновых лестниц аналогичны свойствам цепочек Гайзенберга, соответственно, с нечётными и чётными значениями спина, которые установил Холдейн [21]. Таким образом, возникает естественный вопрос: как лестничные фазы связаны с фазами спиновой цепочки? Оказалось, что существует непрерывный путь от фазы Холдейна (цепочка Гайзенберга спина 1) к фазе лестницы со спином $1/2$, не содержащий критических точек [22]. Этот путь проходит вдоль одной из диагоналей лестницы и нарушает Z_2 симметрию относительно продольной оси обеих моделей. Поэтому интерес для изучения представляет наиболее общая модель фрустрированной спиновой лестницы с различными значениями диагональных взаимодействий, которая содержит все предыдущие исследования в качестве частных случаев.

В §2.1 определяется гамильтониан (см. рис. 1с)

$$H = \sum_l J_{\parallel} (\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{1,l+1} + \mathbf{S}_{2,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1}) + J_{\times 1} \mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1} + J_{\times 2} \mathbf{S}_{1,l+1} \cdot \mathbf{S}_{2,l} + \sum_{l=1}^N J_l^{\perp} \mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l}, \quad (3)$$

где $\mathbf{S}_{1,l}$ и $\mathbf{S}_{2,l}$ являются операторами спина $1/2$ первой и второй цепочек. Фиксируется масштаб энергии и выбирается удобная параметризация трёхмерного фазового пространства модели в виде правильного октаэдра. Эта модель содержит как частные случаи цепочку Гайзенберга со спином 1, димеризованную цепочку и цепочку с взаимодействием между следующими соседями, зигзагообразную лестничную модель, а также другие ранее исследованные

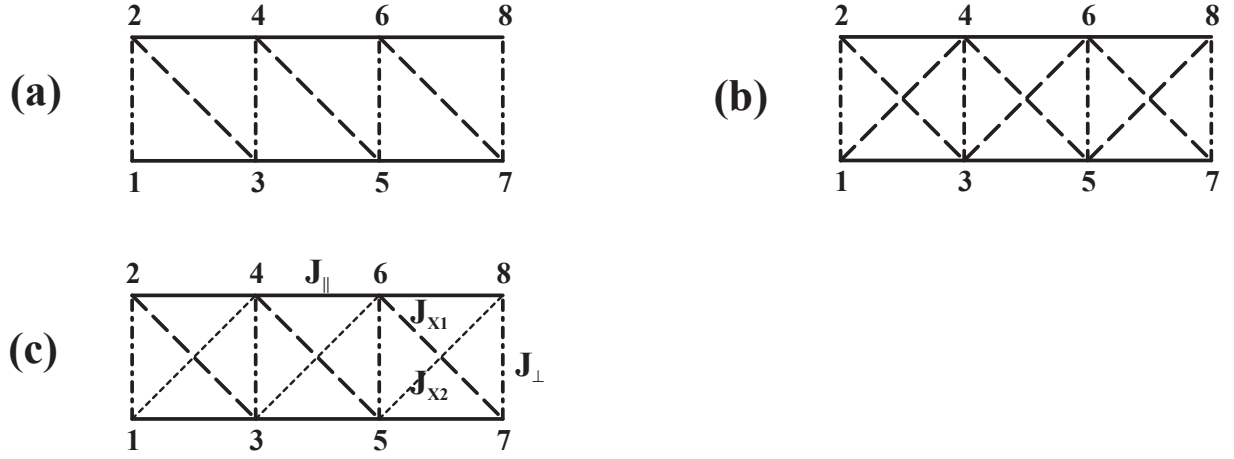


Рис. 1: Модели фрустрированных лестниц: (а) Зигзагообразная цепочка. (б) Фрустрированная лестница с равными диагональными взаимодействиями. (с) Фрустрированная лестница с произвольными диагональными взаимодействиями.

модели.

В §2.2 идентифицируются две топологически различные антиферромагнитные фазы с помощью соответствующих струнных параметров порядка, которые описывают две топологически различные антиферромагнитные фазы Холдейна (цепочки Гайзенберга спина 1) [23] и ферромагнитная фаза. Фазы Холдейна обозначаются через $HD_{\perp}$ и HD_{χ} и соответствуют триплетам соответственно вдоль вертикальных и диагональных ребер лестницы.

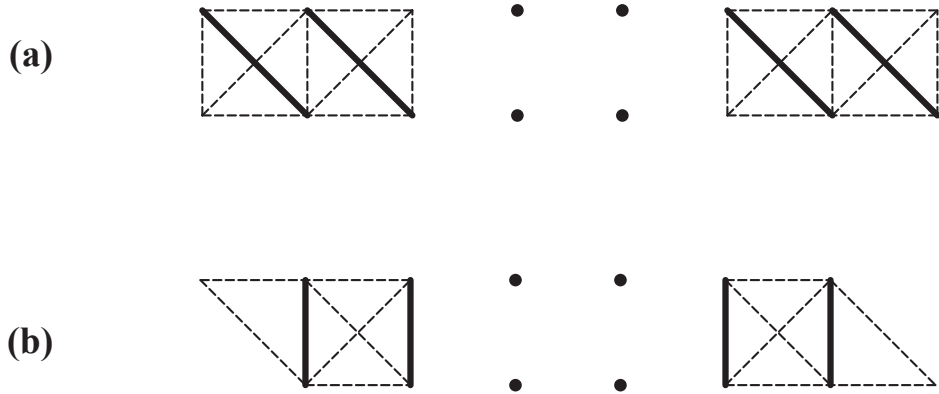


Рис. 2: Алгоритм наращивания, используемый нами в DMRG расчётах со свободными границами: (а) в фазе HD_{χ} , где триплетные пары образуются вдоль диагоналей, (б) в фазе $HD_{\perp}$, где они образуются вдоль ступеней. В обоих случаях основное состояние является невырожденным.

В §2.3 детально описывается основной метод, который используется для

определения поверхности фазового перехода между двумя антиферромагнитными фазами. Он основан на методе ренормализационной группы для матрицы плотности (densisy matrix renormalization group: DMRG) [24]. Этот метод развивает метод численной ренормгруппы, разработанный Вильсоном для решения проблемы Кондо. Для одномерных и квази-одномерных квантовых систем он позволяет достаточно точно вычислять энергии основного состояния и нескольких элементарных возбуждений для относительно большого числа спинов и в настоящее время широко применяется для исследования фазовых диаграмм и фазовых переходов.

Разработанный нами алгоритм использует метод DMRG с с подходящими открытыми граничными условиями, что позволяет с достаточно хорошей точностью вычислять поверхность перехода. Суть его заключается в том, чтобы приближаться к поверхности с двух сторон одновременно, применяя в каждой фазе свои граничные условия, приведённые на рис. 2, при которых снимается возможное вырождение, свойственное цепочке Холдейна.

§2.4 посвящён исследованию зигзагообразной модели ($J_{X_2} = 0$, см. рис. 1а), которая соответствует двумерному сечению фазовой диаграммы. Здесь вычислена с достаточно высокой точностью вся линия перехода между двумя фазами $HD_{\perp}$ и HD_X . Модель Маджумдара-Гоша, основное состояние которого двукратно вырождено и соответствует вертикальным или диагональным димерам, принадлежит этой линии. Отмечаются области, в которых переход из ферромагнитного в антиферромагнитное состояние соответствует точно решаемой модели [25]. Идентифицируется точка тройного перехода.

В §2.5 исследуется общая трехмерная фазовая диаграмма одной из восьми областей октаэдра с положительными значениями параметров взаимодействия. Остальные области рассматриваются в нашей работе [A8]. Сначала рассматриваются области, в которых фазовый переход может быть точно вычислен аналитическими методами. В частности, рассматривается сечение $2J_{\parallel} = J_{X_1} + J_{X_2}$, где ферромагнитное состояние всегда является точным собственным состоянием полного гамильтониана. Используя условия неустойчивости спиновых волн в ферромагнитной фазе, находится точная граница ферромагнитной области.

Установлено, что все антиферромагнитные основные состояния с ненулевой щелью принадлежат классу универсальности, соответствующей фазе Холдейна. В трехмерной фазовой диаграмме определена двумерная поверхность перехода между двумя топологически различными фазами Холдейна, каждый из которых задается своим так называемым струнным топологическим

параметром порядка. В некоторых областях поверхности, соответствующих фазовому переходу второго рода, щель и струнный параметр порядка задуляются. В остальной области наблюдается переход первого порядка с конечной щелью.

В фазовой диаграмме выявлены три большие трёхмерные области: ферромагнитная область и две антиферромагнитные области, которые соответствуют фазе продольных димеров и фазе Холдейна. Две антиферромагнитные фазы принадлежат одному классу универсальности и отличаются лишь топологически. Детально исследованы двумерные поверхности перехода между этими тремя фазами.

Данная глава основана на работах [A8, A9].

В главе 3 сформулировано и доказано обобщение теоремы Либа-Маттиса для системы спинов $1/2$ на лестничной решётке с дополнительными диагональными и циклическим четырёхспиновым обменными взаимодействиями.

В §3.1 рассматриваются общие свойства двухподрешёточных и фрустрированных антиферромагнитных спиновых систем. В двухподрешёточных системах в классическом случае все локальные спиновые взаимодействия невозможно минимизировать одновременно, что приводит к антиферромагнитному порядку. Данное свойство не выполняется для фрустрированных систем. Далее приводится известная теорема Либа-Маттиса для двухподрешёточных систем: минимальные уровни энергии с секторов с определённым значением спина не вырождены и монотонно растут с ростом спина.

В §3.2 доказывается обобщение данного утверждения для модели спиновой лестницы (3) с равными диагональными взаимодействиями ($J_{\times_1} = J_{\times_2} = J_{\times}$, см. рис. 1b) для параметров, удовлетворяющих условию:

$$J_{\parallel} > |J_{\times}|. \quad (4)$$

Константы взаимодействий в общем случае могут зависеть от узлов решётки.

Благодаря спиновой симметрии и инвариантности гамильтониана при отражении относительно продольной оси лестницы, уровни энергии характеризуются спином S , проекцией спина S^z и четностью при отражении $\sigma = \pm 1$. Для того, чтобы облегчить использование зеркальной симметрии, вводятся симметричная и антисимметричная суперпозиции двух спинов на каждой ступени: $\mathbf{S}_l^{(s,a)} = \mathbf{S}_{1,l} \pm \mathbf{S}_{2,l}$. Гамильтониан (3) выражается через них проще:

$$H = \sum_{l=1}^{N-1} (J_s \mathbf{S}_l^{(s)} \cdot \mathbf{S}_{l+1}^{(s)} + J_a \mathbf{S}_l^{(a)} \cdot \mathbf{S}_{l+1}^{(a)}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N J_{\perp} (\mathbf{S}_l^{(s)})^2, \quad (5)$$

а константы $J_{s,a} = (J_{\parallel} \pm J_{\times})/2$ положительны ввиду (4). Затем определяется базис, в котором среди недиагональных матричных элементов гамильтониана нет положительных. Он составлен из обычных триплетных и синглетного состояний на каждой ступени лестницы с дополнительным знаковым множителем. В секторе с фиксированными значениями (S^z, σ) эта матрица является связанной, и согласно теореме Перрона-Фробениуса, её (относительное) основное состояние не вырождено и представляется в виде положительной суперпозиции всех базисных состояний. Используя это свойство, находится значение спина относительного основного состояния: $S = |S^z|$. Исключением является сектор с $S^z = 0$ и $\sigma = (-1)^{N-1}$, где $S = 1$. Далее, используя единственность относительного основного состояния и свойства спиновых мультиплетов, доказывается, что минимальные уровни энергии в отдельных секторах (S, σ) не вырождены (т. е. соответствуют единственному мультиплету спина S) и растут с ростом спина при фиксированной четности.

В §3.3 изучаются спин, четность и степень вырождения основного состояния, а также обсуждается термодинамический предел. Согласно результатам предыдущего раздела, основное состояние является либо невырожденным синглетом с четностью $\sigma = (-1)^N$, либо невырожденным триплетом с четностью $\sigma = (-1)^{N-1}$, либо их вырожденной суперпозицией. Показано, что при дополнительном условии $J_{\perp} > 2|J_{\times}|$ на значения параметров гамильтониана реализуется только первый случай. Однако, в общем случае все три сценария могут иметь место, как показывают результаты по численной диагонализации гамильтониана с нечётным числом ступеней при различных значениях констант связи. При этом третий случай синглет-триплетного вырождения соответствует критической точке перехода между двумя топологически различными фазами Холдейна в термодинамическом пределе.

В §3.4 сравниваются свойства гамильтониана обобщённой спиновой лестницы, установленные в предыдущих разделах, с аналогичными свойствами, полученными ранее для ферромагнитных взаимодействий вдоль ступеней, вдоль диагоналей и равных продольных и диагональных взаимодействиях. Первые две системы являются двухподрешётчными, а третья сохраняет суммарный спин каждой ступени. Получено полное соответствие.

В §3.5 рассматривается спиновая лестница с граничной примесью произвольного спина. Все рассуждения аналогичны рассуждениям в §3.2 и §3.3. В заключение рассматривается частный случай периодической цепочки с нечётным числом спинов $1/2$, который точно решается, и для которого уровни двукратно вырождены по четности.

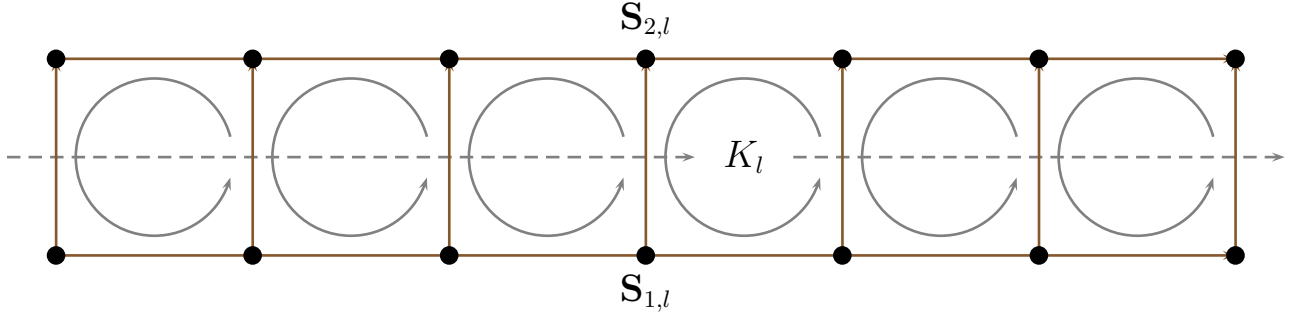


Рис. 3: Спиновая лестница с четырехспиновым циклическим взаимодействием по плакетам.

В §3.6 рассматривается та же система с периодическими граничными условиями. Результаты, аналогичные результатам §3.2, получены лишь с секторе с четностью $\sigma = (-1)^N$. В отличие от системы со свободными граничными условиями здесь остаётся открытым вопрос о вырождении и спине основного состояния. Причиной является отсутствие точных результатов для сектора $\sigma = (-1)^{N-1}$.

Наконец, в §3.7 аналогичные результаты получены для спиновой лестницы с циклическим обменным взаимодействием четырёх спинов:

$$H = \sum_{l=1}^{N-1} J_{\parallel} (\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{1,l+1} + \mathbf{S}_{2,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1}) + \sum_{l=1}^N J_{\perp} \mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l} + \sum_{l=1}^{N-1} K (P_{l,l+1}^{\square} + P_{l,l+1}^{\square-1}).$$

Здесь оператор циклического обмена четырех спинов $P^{\square} + P^{\square-1}$ представляет собой суперпозицию двух противоположных циклических перестановок четырех спинов вокруг каждого квадрата, как представлено на рис. 3. Наложим условия на константы взаимодействий:

$$J_{\parallel} > 2K > 0. \quad (6)$$

Выведена форма гамильтониана, которая подобно (5) удобна для расчета базиса:

$$H = \sum_{l=1}^{N-1} (J_s \mathbf{S}_l^{(s)} \cdot \mathbf{S}_{l+1}^{(s)} + J_a \mathbf{S}_l^{(a)} \cdot \mathbf{S}_{l+1}^{(a)}) + \sum_{l=1}^{N-1} K (P_{l,l+1}^{\parallel} + P_{l,l+1}^{\bar{=}} - P_{l,l+1}^{\times}) + \sum_{l=1}^N \frac{J_{\perp}}{2} (\mathbf{S}_l^{(s)})^2. \quad (7)$$

константы переопределены по правилу: $J_{s,a} = J_{\parallel}/2 \pm K$. Здесь $P_{l,l+1}^{\parallel}$, $P_{l,l+1}^{\bar{=}}$ и $P_{l,l+1}^{\times}$ обозначают, соответственно, продольные, поперечные и диагональные перестановки пар спинов.

Далее, используя данное представление гамильтониана, строится отрицательный базис. Все результаты §3.2 и §3.3 верны также для данной системы при условии $J_{\parallel} > 2K > 0$ на параметры. Отдельно рассматривается предельный случай $J^{\parallel} = 2$, когда группа симметрии $SU(2) \times Z_2$ расширяется до $U(2)$.

Данная глава основана на работах [A10, A11, A12, A13].

В главе 4 изучаются обобщённые одномерные модели Хаббарда с расширенной симметрией. Следует отметить, что за последнее время спиновые и фермионные системы с расширенной симметрией интенсивно изучаются в литературе [26, 27, 28]. Этот интерес обусловлен их применением в системах холодных атомов [29, 30]. Интересная классификация низкоэнергетического поведения $SU(N)$ симметричных спиновых цепочек, состоящая из трёх различных фаз и обобщающая различное поведение целых и полуцелых спиновых цепочек [31], была предложена и проверена в работах [26, 27].

В §4.1 сформулировано и доказано обобщение Теоремы Либа-Матиса для обобщённой цепочки Хаббарда с унитарной симметрией:

$$H = \sum_{x,\alpha} -t_x (c_{x+1,\alpha}^+ c_{x,\alpha} + c_{x,\alpha}^+ c_{x+1,\alpha}) + V(n_1, \dots, n_L) + \sum_{x,a} J_x T_x^a T_{x+1}^a - \sum_{x,\alpha>\beta} K_x (c_{x+1,\alpha}^+ c_{x+1,\beta}^+ c_{x,\beta} c_{x,\alpha} + c_{x,\alpha}^+ c_{x,\beta}^+ c_{x+1,\beta} c_{x+1,\alpha}), \quad (8)$$

где предполагаются открытые граничные условия. Коэффициенты t_x , J_x и K_x положительны и зависят от узла x . Фермионы характеризуются N различными ароматами α , которые являются обобщениями обычного спина, а унитарная симметрия обеспечивает равноправие ароматов. Дополнительные члены в гамильтониане описывают одновременные перескоки пар электронов между соседними узлами, обменные взаимодействия соседних обобщённых спинов посредством генераторов унитарной группы: $T_x^a = \sum_{\alpha,\beta} c_{x,\alpha}^+ T_{\alpha\beta}^a c_{x,\beta}$, а также наиболее общий потенциал взаимодействия частиц.

Сначала, используя свойства фермионных операторов, строится базис, в котором матрица гамильтониана не имеет положительных элементов вне своей диагонали, упорядочив следующим образом операторы рождения фермионов:

$$|\{x^1\}, \dots, \{x^N\}\rangle = \prod_{\alpha=1}^N (c_{x_1^{\alpha},\alpha}^+ c_{x_2^{\alpha},\alpha}^+ \dots c_{x_{M_{\alpha}}^{\alpha},\alpha}^+) |0\rangle, \quad (9)$$

где произведение берется слева направо, а набор $\{x^{\alpha}\}$ определяет упорядоченные координаты всех фермионов с данным ароматом: $x_1^{\alpha} < \dots < x_{M_{\alpha}}^{\alpha}$.

Другими словами, группируются вместе частицы одного и того же аромата, а внутри одной группы они располагаются в соответствии с их положением.

Благодаря этой симметрии, уровни энергии параметризуются диаграммой Юнга $\mathbb{Y}$ и числами M_α , задающими количество фермионов данного типа. Диаграммы Юнга характеризуют мультиплеты группы $U(N)$. Число их элементов, равно числу частиц M , а число строк не превосходит N . Каждому элементу диаграммы ставится в соответствие одна частица, затем проводится симметризация по строкам и антисимметризация по столбцам.

Устанавливается, что в подпространстве с фиксированными значениями M_α матрица гамильтониана в построенном базисе является связанной. Как следствие, её относительное основное состояние там не вырождено и представляется в виде положительной суперпозиции всех базисных состояний. Сравнением с простым пробным состоянием находится мультиплет, которому принадлежит относительное основное состояние: он характеризуется схемой Юнга со строками длины M_α . Далее, используя единственность относительного основного состояния и теорию представлений унитарной группы, доказывается, что минимальные уровни энергии в отдельных секторах $\mathbb{Y}$ не вырождены с точностью до мультиплета и упорядочены в соответствии с доминантным порядком среди диаграмм Юнга, а именно: $\mathbb{Y}_1 \succ \mathbb{Y}_2$, если $\mathbb{Y}_2$ получается из $\mathbb{Y}_1$ смещением некоторых элементов с верхних строк в нижние. Пример доминантного упорядочения диаграмм при $N \geq 4$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \succ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \succ \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \succ \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \succ \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}.$$

§4.2 посвящён основному состоянию данной системы. Доминантный порядок является частичным: не все диаграммы Юнга можно сравнивать друг с другом как, к примеру, диаграммы $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$. Диаграммы Юнга с различным количеством элементов, которые соответствуют разным числам частиц, вообще не сравниваются. Однако, существует минимальная диаграмма $\mathbb{Y}_{\text{gs}}$, все столбцы которой, кроме последнего, имеют максимально-возможную длину N . Поэтому основное состояние расширенной цепочки Хаббарда с M частицами образует невырожденный антисимметричный мультиплет порядка $m = M \bmod N$ и размерностью $d = \binom{N}{m}$. В частности, если число частиц кратно N , основное состояние является невырожденным синглетом. В пределе свободных фермионов основное состояние соответствует полностью заполненным нижним уровням энергии отдельных частиц.

В §4.3 устанавливается антиферромагнитное упорядочение энергетических уровней для квантово-механической системы одномерных идентичных фермионов с $SU(N)$ внутренними степенями свободы и взаимодействием, зависящим только от пространственных координат:

$$H_{\text{QM}} = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_1, \dots, x_M). \quad (10)$$

Данный результат является обобщением аналогичного правила для случая $SU(2)$ симметрии, установленной Либом и Маттисом в работе [32]. Гамильтониан инвариантен относительно группы $\mathcal{S}_M^{\text{space}} \times \mathcal{S}_M^{\text{spin}} \times SU(N)$, состоящей из симметрической группы перестановок пространственных и спиновых степеней свободы, а также унитарного вращения спиновых переменных. Однако, уровни энергии параметризуются лишь двумя диаграммами Юнга: одной для пространственных координат, и другой – для спиновых, поскольку унитарная группа и группа перестановок, действующие на одни и те же спиновые индексы, описываются одной схемой Юнга (дуальность Шура-Вейля). Условие антисимметричности полной волновой функции согласно теории представлений симметрической группы приводит к взаимной сопряжённости этих диаграмм. Гамильтониан не зависит от спинов, поэтому уровни энергии определяются типом симметрии при перестановке координат. Согласно же обобщению осцилляционной теоремы для многих частиц, минимальные уровни энергии для волновых функций с определённой симметрией при перестановке координат упорядочены согласно обратному доминантному порядку соответствующих диаграмм Юнга [32]. Поскольку операция сопряжения диаграмм обращает доминантный порядок, то для спиновых мультиплетов имеем прямой доминантный порядок уровней энергии, как и для обобщённой модели Хаббарда.

Целью второй части данной главы является построение и изучение интегрируемых расширений модели. Следует отметить, что после открытия высокотемпературной сверхпроводимости выяснилось, что обычная теория БКШ, основанная на приближении среднего поля, неприменима для её объяснения. В работе [33] Андерсон предложил исследовать высокотемпературную сверхпроводимость в рамках модели сильно коррелированных электронов. Большинство из многочисленных исследований в данном направлении, появившихся впоследствии, использовали приближённые или численные методы. Известно всего лишь несколько точных результатов. Один из них получен в рамках алгебраического подхода и основан на свойствах так называемых электронных η -пар [34], которые образуют состояния, обладающие

так называемым внедиагональным дальним порядком [35]. Данное свойство предполагает также эффект Мейснера и квантование потока, которые сопутствуют сверхпроводимости. Сверхпроводимость обеспечивается мобильностью так называемых η -пар, которые аналогичны куперовским парам в стандартной теории [35, 34]. Однако основное состояние обычной модели Хаббарда не обладает таким свойством, поэтому стали рассматриваться её различные расширения [36, 37].

В §4.4 строятся квантовые цепочки, в которых, в отличие от обычных моделей, состояния на каждом узле решётки образуют не один [38], а сразу несколько неприводимых мультиплетов квантовой группы. Гамильтониан при этом строится из локальных сплетающих операторов между приводимыми представлениями, причём его ограничение на состояния с максимальными значениями спиновых проекций (старшие состояния) соответствует более простому базовому гамильтониану, интегрируемость которого известна заранее. Следовательно, уровни энергии исходного гамильтониана совпадают с уровнями энергии базовой системы, но с дополнительным вырождением, которое соответствует степеням свободы, связанным с мультиплетами квантовой группы. В общем случае дополнительное вырождение зависит от уровня энергии, что приводит к нетривиальному интегрируемому обобщению базового гамильтониана. Далее рассматриваются конкретные случаи, когда базовый гамильтониан соответствует модели Гайзенберга, или цепочке Холдейна-Шастри [39, 40] с дальними взаимодействиями спинов. Следует отметить, что указанная конструкция является обобщением метода, применённого в работе [41] для исследования расширенной модели Хаббарда в пределе сильного отталкивания.

В §4.5 рассматриваются представления гамильтонианов, построенных в предыдущем разделе, через фермионные операторы в простейших случаях, когда пространство состояний каждого узла трёхмерное или четырёхмерное. Построенные таким образом фермионные гамильтонианы приводят к ранее известным и новым интегрируемым расширениям модели Хаббарда. Эти модели, кроме обычных членов, отвечающих за перескоки электронов и взаимодействие Хаббарда, содержат также взаимодействия связанных зарядов, перескоки пар электронов, кулоновское и обменное спиновое взаимодействия соседей. В случае, когда базовая модель задаётся неоднородной цепочкой Гайзенберга, одна из построенных расширений модели Хаббарда обладает сверхпроводящим основным состоянием, которая обеспечивается наличием внедиагонального дальнего порядка.

Данная глава основана на работах [A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21, A22]

Выводы

В заключение перечислим основные результаты диссертационной работы.

1. Построены интегралы движения сферической механики, соответствующей угловой части рациональной модели Калоджеро, используя редукцию из матричной модели. Эти интегралы соответствуют синглетам группы $SU(N) \times SL(2, R)$, что позволяет использовать графическое описание для их построения и дальнейшей классификации. Приведены явные выражения для всех функционально независимых интегралов движения вплоть до шестого порядка по импульсам. Установлена связь развитой диаграммной техники с базисными синглетными состояниями обычных квантовых спинов, построенных с использованием парных валентных связей.
2. Разработана процедура построения интегралов движения соответствующей сферической механики, исходя из интеграла движения базовой конформной механики определённой конформной размерности. Для системы Калоджеро указанная процедура определяет другой метод построения сферических интегралов. Для сферической части четырехчастичной модели Калоджеро с исключенным центром масс построен таким образом полный набор функционально-независимых интегралов движения.
3. Исследована трёхмерная фазовая диаграмма лестничной модели со спином $1/2$ с дополнительными диагональными взаимодействиями, которая содержит, как частный случай, множество хорошо известных ранее исследованных моделей. Доказано наличие только трех различных трёхмерных квантовых фаз: ферромагнитной фазы и двух массивных антиферромагнитных фаз Холдейна с различным топологическим порядком. С использованием ренормгруппового метода для матрицы плотности (DMRG) численно вычислена с достаточной точностью поверхность фазового перехода, разделяющая эти фазы. Некоторые части этой поверхности, разделяющие две массовые фазы Холдейна, являются критическими с нулевой щелью (массой) и нулевым строковым топологическим параметром порядка. Остальная ее область соответствует фазовому переходу первого рода с конечной щелью и двум вырожденным синглетным

основным состояниям. Показана, что хотя топология эти двух фаз различается, их термодинамические свойства вблизи критической поверхности одинаковы.

4. Сформулировано и доказано обобщение теоремы Либа-Маттиса об антиферромагнитном упорядочении уровней энергии для системы спинов $1/2$ на лестничной решетке, инвариантной относительно продольной оси симметрии решетки, с дополнительными диагональными взаимодействиями и с открытыми границами. Доказано, что для широкой области значений параметров минимальные уровни $E(S, \sigma)$ в секторах с определенными значениями спина S и четности (при отражении) $\sigma = \pm 1$ монотонно растут с ростом спина при неизменной четности: $E(S_1, \sigma) > E(S_2, \sigma)$ при $S_1 > S_2$. Уровень $E(S, \sigma)$ образован всеми состояниями одного мультиплета спина S . В этом смысле он не вырожден. Основное состояние антиферромагнитной системы с N степенями является невырожденным спин-синглетом с четностью $\sigma = (-1)^N$, или невырожденным триплетом с четностью $\sigma = (-1)^{N+1}$, либо их вырожденной комбинацией, что характерно для цепочки Халдейна спина 1.
5. Аналогичное свойство доказано также для спиновой лестницы с четырехпиновым циклическим обменным взаимодействием, а также при наличии граничной примеси. Частичные результаты получены для периодической системы.
6. Сформулировано и доказано обобщение теоремы Либа-Маттиса об антиферромагнитном упорядочении уровней энергии для расширенной многозонной одномерной модели Хаббарда с $SU(n)$ симметрией, включающей в себя парные перескоки электронов, спиновый обмен и произвольный потенциал на узле. Минимальные уровни $E(\mathbb{Y})$ в отдельных секторах, которые объединяют эквивалентные представления и характеризуются диаграммами Юнга $\mathbb{Y}$, упорядочены в соответствии с доминантным порядком для этих диаграмм: $E(\mathbb{Y}_1) > E(\mathbb{Y}_2)$ при $\mathbb{Y}_1 \succ \mathbb{Y}_2$. Уровень $E(\mathbb{Y})$ не вырожден, то есть соответствующие собственные состояния составляют один $\mathbb{Y}$ мультиплет. Основное состояние цепочки с M фермионами образует невырожденный антисимметричный $SU(N)$ мультиплет порядка $k = M \bmod N$ и размерности $d = \binom{N}{k}$. Он является синглетом, если M кратно N .
7. Построены и исследовано семейство интегрируемых расширений обычной

цепочки Хаббарда. Отличительным свойством этого семейства гамильтонианов является сильное вырождение уровней энергии, которое является следствием достаточно широкой симметрии относительно аффинной квантовой группы. Установлено, что основное состояние одного из представителей данного семейства обладает сверхпроводящим свойством, которое обусловлено наличием внедиагонального дальнего порядка.

Литература

- [1] F. Calogero. *Solution of the One-Dimensional N-Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials*, Journal of Mathematical Physics **12**: 419–436 (1971).
- [2] A. P. Polychronakos. *The physics and mathematics of Calogero particles*, Journal of Physics A: Mathematical General **39**: 12793–12845 (2006).
- [3] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov. *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71**: 313–400 (1981).
- [4] A. P. Polychronakos. *Non-relativistic bosonization and fractional statistics*, Nuclear Physics B **324**: 597–622 (1989).
- [5] R. B. Laughlin. *Anomalous quantum Hall effect - An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations*, Physical Review Letters **50**: 1395–1398 (1983).
- [6] H. Azuma and S. Iso. *Explicit relation of the quantum Hall effect and the Calogero-Sutherland model*, Physics Letters B **331**: 107–113 (1994).
- [7] P. W. Higgs. *Dynamical symmetries in a spherical geometry. I*, Journal of Physics A: Mathematical General **12**: 309–323 (1979).
- [8] E. Lieb and D. Mattis. *Ordering energy levels of interacting spin systems*, Journal of Mathematical Physics **3**: 749–& (1962).
- [9] T. Xiang and N. Dambroumenil. *Theorem on the one-dimensional interacting-electron system on a lattice*, Physical Review B **46**: 11179–11181 (1992).
- [10] S. Shen. *Strongly correlated electron systems: Spin-reflection positivity and some rigorous results*, International Journal of Modern Physics B **12**: 709–779 (1998).
- [11] B. Nachtergaele, W. Spitzer, and S. Starr. *Ferromagnetic ordering of energy levels*, Journal of Statistical Physics **116**: 719–738 (2004).
- [12] H. T. Diep. *Frustrated Spin Systems*. Singapore: World Scientific, 2005.

- [13] C. Lacroix, P. Mendels, and F. Mila. *Introduction to Frustrated Magnetism*. 2011.
- [14] J. Struck, C. Ölschläger, R. Le Targat, P. Soltan-Panahi, A. Eckardt, M. Lewenstein, P. Windpassinger, and K. Sengstock. *Quantum Simulation of Frustrated Classical Magnetism in Triangular Optical Lattices*, *Science* **333**: 996 (2011).
- [15] S. T. Bramwell and M. J. P. Gingras. *Spin Ice State in Frustrated Magnetic Pyrochlore Materials*, *Science* **294**: 1495–1501 (2001).
- [16] E. Dagotto. *Experiments on ladders reveal a complex interplay between a spin-gapped normal state and superconductivity*, *Reports on Progress in Physics* **62**: 1525–1571 (1999).
- [17] E. Dagotto and T. M. Rice. *Surprises on the way from one- to two-dimensional quantum magnets: The ladder materials*, *Science* **271**: 618–623 (1996).
- [18] S. Wojciechowski. *Superintegrability of the Calogero-Moser system*, *Physics Letters A* **95**: 279–281 (1983).
- [19] V. B. Kuznetsov. *Hidden symmetry of the quantum Calogero-Moser system*, *Physics Letters A* **218**: 212–222 (1996).
- [20] H. N. V. Temperley and E. H. Lieb. *Relations between the 'percolation' and 'colouring' problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the 'percolation' problem*, *Royal Society of London Proceedings Series A* **322**: 251–280 (1971).
- [21] F. D. M. Haldane. *Nonlinear field theory of large-spin Heisenberg antiferromagnets: Semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy-axis Néel State*, *Physical Review Letters* **50**: 1153–1156 (1983).
- [22] S. R. White. *Equivalence of the antiferromagnetic Heisenberg ladder to a single $S=1$ chain*, *Physical Review B* **53**: 52–55 (1996).
- [23] E. H. Kim, G. Fáth, J. Sólyom, and D. J. Scalapino. *Phase transitions between topologically distinct gapped phases in isotropic spin ladders*, *Physical Review B* **62**: 14965–14974 (2000).
- [24] S. R. White. *Density matrix formulation for quantum renormalization groups*, *Physical Review Letters* **69**: 2863–2866 (1992).
- [25] D. V. Dmitriev, V. Y. Krivnov, and A. A. Ovchinnikov. *Exact ground states for a class of one-dimensional frustrated quantum spin models*, *Physical Review B* **56**: 5985–5995 (1997).

- [26] M. Greiter and S. Rachel. *Valence bond solids for $SU(n)$ spin chains: Exact models, spinon confinement, and the Haldane gap*, Physical Review B **75**: 184441 (2007).
- [27] S. Rachel, R. Thomale, M. Fühlinger, P. Schmitteckert, and M. Greiter. *Spinon confinement and the Haldane gap in $SU(n)$ spin chains*, Physical Review B **80**: 180420 (2009).
- [28] M. Aguado, M. Asorey, E. Ercolessi, F. Ortolani, and S. Pasini. *Density-matrix renormalization-group simulation of the $SU(3)$ antiferromagnetic Heisenberg model*, Physical Review B **79**: 012408 (2009).
- [29] C. Honerkamp and W. Hofstetter. *Ultracold fermions and the $SU(N)$ Hubbard model*, Physical Review Letters **92**: 170403 (2004).
- [30] A. V. Gorshkov, M. Hermele, V. Gurarie, C. Xu, P. S. Julienne, J. Ye, P. Zoller, E. Demler, M. D. Lukin, and A. M. Rey. *Two-orbital $SU(N)$ magnetism with ultracold alkaline-earth atoms*, Nature Physics **6**: 289–295 (2010).
- [31] F. D. M. Haldane. *Nonlinear field theory of large-spin heisenberg antiferromagnets: semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy-axis Néel state*, Physical Review Letters **50**: 1153–1156 (1983).
- [32] E. Lieb and D. Mattis. *Theory of ferromagnetism and the ordering of electronic energy levels*, Physical Review **125**: 164–172 (1962).
- [33] P. W. Anderson. *The resonating valence bond state in La_2CuO_4 and superconductivity*, Science **235**: 1196–1198 (1987).
- [34] C. N. Yang. *η pairing and off-diagonal long-range order in a Hubbard model*, Physical Review Letters **63**: 2144–2147 (1989).
- [35] C. N. Yang. *Concept of off-diagonal long-range order and the quantum phases of liquid he and of superconductors*, Reviews of Modern Physics **34**: 694–703 (1962).
- [36] J. de Boer, V. E. Korepin, and A. Schadschneider. *η pairing as a mechanism of superconductivity in models of strongly correlated electrons*, Physical Review Letters **74**: 789–792 (1995).
- [37] J. de Boer and A. Schadschneider. *Exact ground states of generalized Hubbard models*, Physical Review Letters **75**: 4298–4301 (1995).
- [38] V. Pasquier and H. Saleur. *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*, Nuclear Physics B **330**: 523–556 (1990).

- [39] F. D. M. Haldane. *Exact Jastrow-Gutzwiller resonating-valence-bond ground state of the spin-1/2 antiferromagnetic Heisenberg chain with $1/r^2$ exchange*, Physical Review Letters **60**: 635–638 (1988).
- [40] B. S. Shastry. *Exact solution of an $S=1/2$ Heisenberg antiferromagnetic chain with long-ranged interactions*, Physical Review Letters **60**: 639–642 (1988).
- [41] F. C. Alcaraz, D. Arnaudon, V. Rittenberg, and M. Scheunert. *Finite chains with quantum affine symmetries*, International Journal of Modern Physics A **9**: 3473–3496 (1994).

Основные результаты диссертации изложены в следующих публикациях

- [A1] T. Hakobyan, O. Lechtenfeld, and A. Nersessian. *The spherical sector of the Calogero model as a reduced matrix model*, Nuclear Physics B **858**: 250–266 (2012).
- [A2] T. Hakobyan, O. Lechtenfeld, A. Nersessian, and A. Saghatelian. *Invariants of the spherical sector in conformal mechanics*, Journal of Physics A: Mathematical General **44**: 055205 (2011).
- [A3] T. Hakobyan, S. Krivonos, O. Lechtenfeld, and A. Nersessian. *Hidden symmetries of integrable conformal mechanical systems*, Physics Letters A **374**: 801–806 (2010).
- [A4] T. Hakobyan, A. Nersessian, and V. Yeghikyan. *The cuboctahedric Higgs oscillator from the rational Calogero model*, Journal of Physics A: Mathematical General **42**: 205206 (2009).
- [A5] T. Hakobyan and A. Nersessian. *Lobachevsky geometry of (super)conformal mechanics*, Physics Letters A **373**: 1001–1004 (2009).
- [A6] T. Hakobyan, O. Lechtenfeld, A. Nersessian, A. Saghatelian, and V. Yeghikyan. *Action-angle variables and novel superintegrable systems*, Physics of Particles and Nuclei **43**: 577–582 (2012).
- [A7] T. Hakobyan, O. Lechtenfeld, A. Nersessian, A. Saghatelian, and V. Yeghikyan. *Integrable generalizations of oscillator and Coulomb systems via action-angle variables*, Physics Letters A **376**: 679–686 (2012).
- [A8] T. Hakobyan, J. H. Hetherington, and M. Roger. *Phase diagram of the frustrated two-leg ladder model*, Physical Review B **63**: 144433 (2001).

- [A9] T. Hakobyan, J. H. Hetherington, and M. Roger. “ An overview on the phase diagram of frustrated two-leg ladder model”. In: *Proceedings of the Workshop "Low dimensional integrable models and their applications in field theory and statistical physics*. Ed. by Bytsko, A. G. and Karowski, M. 2001, 35–47.
- [A10] T. Hakobyan. *Energy-level ordering and ground-state quantum numbers for a frustrated two-leg spin-1/2 ladder*, Physical Review B **75**: 214421 (2007).
- [A11] T. Hakobyan. *Antiferromagnetic ordering of energy levels for a spin ladder with four-spin cyclic exchange: Generalization of the Lieb-Mattis theorem*, Physical Review B **78**: 012407 (2008).
- [A12] T. Hakobyan. “ An overview on the phase diagram of frustrated two-leg ladder model”. In: *Proceedings of Workshop on Supersymmetries and Quantum Symmetries*. Ed. by Ivanov, E. and Fedoruk, S. JINR, 2008, 383–386.
- [A13] T. Hakobyan. *Energy-level ordering for frustrated spin ladder models*, Physics of Atomic Nuclei **73**: 339–344 (2010).
- [A14] T Hakobyan. *The ordering of energy levels for $SU(N)$ symmetric antiferromagnetic chains*, Nuclear Physics B **699**: 575–594 (2004).
- [A15] T. Hakobyan. *Ordering of energy levels for extended $SU(N)$ Hubbard chain*, Symmetry, Integrability and Geometry-Methods and Applications **6**: 024 (2010).
- [A16] T. Hakobyan and A. Sedrakyan. *Spin chain Hamiltonians with affine U_q symmetry*, Physics Letters B **377**: 250–254 (1996).
- [A17] A. Avakyan, T. Hakobyan, and A. Sedrakyan. *A family of affine quantum group invariant integrable extensions of the Hubbard Hamiltonian*, Nuclear Physics B **490**: 633–652 (1997).
- [A18] A. Avakyan, T. Hakobyan, and A. Sedrakyan. *Integrable extensions of Hubbard Hamiltonian*, International Journal of Modern Physics B **11**: 3207–3222 (1997).
- [A19] J. Ambjorn, A. Sedrakyan, A. Avakyan, and T. Hakobyan. *A new family of integrable extended multi-band Hubbard Hamiltonians*, Modern Physics Letters A **13**: 495–503 (1998).
- [A20] J. Ambjorn, A. Avakyan, T. Hakobyan, and A. Sedrakyan. *Bethe Ansatz and thermodynamic limit of affine quantum group invariant extensions of the t - J model*, Journal of Mathematical Physics **40**: 5687–5701 (1999).

- [A21] T. Hakobyan, D. Sedrakyan, A. Sedrakyan, I. Gomez, and F. Dominguez-Adame. *Delocalization of states in two-component superlattices with correlated disorder*, Physical Review B **61**: 11432–11436 (2000).
- [A22] T. Hakobyan. *The possibility of gapless excitations in antiferromagnetic spin chains with long-range interactions*, Journal of Physics A: Mathematical General **36**: L599–L604 (2003).

Exact methods in one-dimensional and quasi-one-dimensional systems

Summary

The thesis is devoted to the investigations of one-dimensional and quasi-one-dimensional models of interacting particles by means of exact algebraic and analytical methods. In the last decades, significant progress in the study low-dimensional systems with strong correlation between the particles. as a result of technological progress in nanotechnology, quantum dots, optical lattices, it became possible not only getting enough clean one-dimensional structures, synthesis of artificial lattice atoms with a predetermined structure.

The goal of the current thesis is:

- The investigation of the integrals of motion for the spherical mechanics related to the angular part of the rational Calogero and general conformal mechanics;
- The study of the phase diagram of the general frustrated spin-ladder model;
- The generalization of the antiferromagnetic ordering of the energy levels on the spin value of frustrated spin-ladder systems with reflection symmetry and to quantum spin chains with $SU(N)$ symmetry;
- The study of generalized integrable chains Hubbard extended affine quantum group symmetries with degenerate energy spectrum.

Using the matrix-model description of the spherical mechanics, which is defined by the spherical sector of the rational Calogero model, a diagrammatic technique is developed. It allows to find explicit expressions of the constants of motion of the spherical mechanics and calculate their Poisson brackets. All functionally independent constants of motion to any given order in the momenta can be obtained in this way. The technique is related to the valence-bond basis for singlet states. A direct relation between the constants of motion for general conformal mechanics and those for its spherical mechanics is established also.

Using Density-Matrix Renormalization Group method, the general phase diagram of the two-leg ladder frustrated by the diagonal interactions is investigated. It is confirmed that all antiferromagnetic gapped states belong to the same universality class as the Haldane phase. In a three-dimensional phase diagram, a continuous surface with singularities in the string-order parameter or its first derivative is determined, which corresponds to a transition between two Haldane phases with

different topological order. Some parts of this transition surface are critical with zero gap and vanishing string-order parameter. In the complementary parts, the transition is first order with finite gap and string order. The boundary of this surface with the ferromagnetic region is a critical end line, when the surface is critical and a triple line anywhere else.

The Lieb-Mattis theorem about antiferromagnetic ordering of energy levels on bipartite lattices is generalized to reflection-invariant spin-1/2 ladder model frustrated by diagonal and four-spin cyclic exchange interactions. It is proved that the lowest energies in sectors with fixed spin and reflection quantum numbers are monotone increasing functions of total spin. The nondegeneracy of most levels is proved also. For a wide range of coupling constants, the ground state is a unique spin singlet. For other values of couplings, it may be also a unique spin triplet or may consist of both multiplets. Similar results have been obtained for the ladder with arbitrary boundary impurity spin. Some partial results have also been obtained in the case of periodical boundary conditions.

The Lieb-Mattis theorem on the antiferromagnetic ordering of energy levels is generalized to $SU(N)$ extended Hubbard model with Heisenberg exchange and pair-hopping terms. It is proved that the minimum energy levels among the states from equivalent representations are nondegenerate and ordered according to the dominance order of Young diagrams, which characterize equivalence classes of $SU(N)$ multiplets. The ground state forms a unique antisymmetric multiplet. The relation with the similar ordering among the spatial wavefunctions with different symmetry classes of ordinary quantum mechanics is discussed also.

The family of quantum Hamiltonians, which have affine quantum group symmetry, is constructed. Their eigenvalues coincide with the eigenvalues of the usual spin chain Hamiltonians, but have the degeneracy of levels, corresponding to affine quantum group. The space of states of these spin chains is formed by the tensor product of fully reducible representations of quantum group. The fermionic representations of constructed spin chain Hamiltonians show that we have new extensions of Hubbard Hamiltonians. All of them are integrable and have affine quantum group symmetry. The exact ground state of a such type model is presented, exhibiting superconducting behavior via η -pairing mechanism.

Ամփոփագիր

Ատենախոսությունը նվիրված է միաչափ և քվադի-միաչափ փոխադրող մասնիկներից կազմված համակարգերի ուսումնասիրմանը ճշգրիտ մեթոդների միջոցով: Վերջին տարիներին զգալիորեն աճել է հետաքրքրությունը ուժեղ կորելացված մասնիկներից կազմված ցածր չափողականություն ունեցող համակարգերի նկատմամբ: Մասնավորապես, այն պայմանավորված է առաջընթացով նանոտեխնոլոգիայի, քվանտային կետերի, օպտիկական ցանցերի և այլ բնագավառներում:

Ատենախոսության նպատակն է հանդիսանում.

- ռացիոնալ Կալոջերոյի մոդելի անկյունային մասի շարժման ինտեգրալների կառուցումը և ուսումնասիրումը;
- ընդհանրացված աստիճանատիպ սպինային ցանցի փուլային դիագրամայի կառուցումը;
- Էներգիայի մակարդակների կարգավորման ուսումնասիրությունը ընդհանրացված աստիճանատիպ սպինային ցանցերի և ունիտար համաչափությամբ օժտված միաչափ ընդհանրացված Հաբարդի մոդելների համար:

Օգտագործելով մատրիցական մոդելի ներկայացումը, ուսումնասիրվել է սֆերիկ մեխանիկան, որի համիլտոնյանն է հանդիսանում ռացիոնալ Կալոջերոյի մոդելի անկյունային մասը: Օգտագործելով մշակված դիագրամային տեխնիկան, այդ համակարգի համար կառուցվել են շարժման ինտեգրալները: Այդ տեխնիկան թույլ է տալիս գտնել բոլոր անկախ ինտեգրալները և հաշվարկել դրանց Պուասոնի փակագծերը: Այդ դասական ինտեգրալների կառուցվածքը նման է վալենտական կապերի միջոցով կազմված քվանտային սպինային սինգլետների կառուցվածքին: Ուղղակի կապ է հաստատվել նաև ընդհանուր կոնֆորմ մեխանիկայի շարժման ինտեգրալների և համապատասխան սֆերիկ մեխանիկայի շարժման ինտեգրալների միջև:

Կառուցվել է փուլային դիագրաման ընդհանրացված աստիճանատիպ ցանցի վրա սահմանված սպինային համակարգի համար անկյունագծային փոխադրեցությունների առկայությամբ: Այդ նպատակով մշակվել և կիրառվել է կրիտիկական կետերը ճշգրիտ հաշվարկելու նոր եղանակ, որի հիմքն է հանդիսանում վերանորմավորման խմբի մեթոդը

խտության մատրիցի համար: Հաստատվել է, որ բոլոր անտիֆերոմագնետիկ հիմնական վիճակները, որոնց գրգռումները նկարագրվում են զանգված ունեցող քվադրամասնիկներով, համապատասխանում են Հոլդեյնի փուլին: Եռաչափ փուլային դիագրամայում հաշվարկվել է կրիտիկական մակերևույթը, որն համապատասխանում է լարային տիպի կարգի պարամետրով բնութագրվող փուլային անցմանը: Այն սահմանում է քվանտային փուլային անցումները երկու Հոլդեյնի փուլերի միջև, որոնք բնութագրվում են տարբեր տոպոլոգիական կարգերով: Այդ անցումային մակերևույթի որոշակի հատվածները համապատասխանում են երկրորդ կարգի փուլային անցումներին, որոնք նկարագրվում են անզանգված քվադրամասնիկներով, իսկ հավելյալ մասերում փուլային անցումը առաջին կարգի է:

Լիբ-Մատիսի թեորեմը էներգետիկ մակարդակների անտիֆերոմագնետիկ կարգավորման մասին երկմաս ցանցերի վրա սահմանված քվանտային սպինային համակարգերի համար ընդհանրացվել է վերոնշված աստիճանատիպ սպինային ցանցի համար: Բացի անկյունագծանին փոխազդեցություններից այն պարունակում է նաև չորս սպինների ցիկլիկ փոխազդեցությունը: Մասնավորապես ապացուցվել է, որ մինիմալ էներգիայի մակարդակները սպինի և զույգության որոշակի արժեքների համար այլասերված չեն և մոնոտոն աճում են սպինի աճի հետ մեկտեղ: Հիմնական վիճակը, որպես կանոն, այլասերված չէ և հանդիսանում է կամ սինգլետ, կամ տրիպլետ, կամ էլ, որոշ դեպքերում, այն կարող է կազմել սինգլետ-տրիպլետ զույգ: Նմանատիպ արդյունքներ են ստացվել նաև սահմանի վրա սպինային խառնուրդի առկայությանը: Որոշ մասնակի արդյունքներ են արձանագրվել նաև պարբերական սահմանային պայմանների դեպքում:

Լիբ-Մատիսի թեորեմը ընդհանրացվել է նաև $SU(N)$ համաչափությամբ օժտված ընդլայնված Հաբարդի մոդելի համար, որը պարունակում է Հայզենբերգի սպինային փոխանակումը և զույգ էլեկտրոնների թռիչքը բնութագրող անդամներ: Ապացուցվել է, որ նվազագույն էներգետիկ մակարդակները տարբեր Յունգի դիագրամներով բնութագրվող համարժեք $SU(N)$ մուլտիպլետներում այլասերված չեն և կարգավորված են ըստ Յունգի դիագրամների համար սահմանված հայտնի դոմինանտ կարգի: Հիմնական վիճակն ևս չունի այլասերում և կազմում է անտիսիմետրիկ մուլտիպլետ: