ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ և ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

(ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ)

ՕՎՍԱՆՆԱ ՀԱՄԼԵՏԻ ՕՀԱՆՅԱՆ

ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉ ՓՈԽԱՆՑՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԴԻՍԿՐԵՏ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄ

Ե.13.01 - «Կառավարում, կառավարման համակարգեր և դրանց տարրերը» մասնագիտությամբ տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի աստիճանի համար

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ

Գիտական ղեկավար՝

Տ.գ.դ., պրոֆեսոր Օ.Ն. Գասպարյան

ԵՐԵՎԱՆ 2016

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ատենախոսությունը նվիրված է մեկ մուտքով և ելքով կառավարման գծային դիսկրետ համակարգերի հաճախականային և արմատային դասական մեթոդների տարածմանն դիկսրետ բազմաչափ ավտոմատ կառավարման համակարգերի (ԲԱԿՀ), այսինքն՝ մի քանի մուտքով և ելքով ու առանձին կապուղիների միջև փոխկապակցված համակարգերի վրա: Կառավարման բազմաչափ օբյեկտների օրինակներ են ռոբոտ-մանիպուլյատորները, քիմիական և այլ տեխնոլոգիական գործընթացները, գիրոկայունացված հարթակները, անօդաչու թռչող սարքերը և այլն [3,4,5,13,62,98,110]:

<u>Աշխատանքի արդիականությունը</u>

Մեկ մուտքով և ելքով ավտոմատացված կառավարման դիսկրետ համակարգերի հետազոտման մեթոդներին նվիրված է լայն գրականություն [5,22,38,43,81,123]:Ներկայումս բավական տարածված մեթոդների դասին է պատկանում z-ձևափոխությունն ու երկգծային ձևափոխությունը, որոնք հիմնված են իմպուլսային տարրերով համակարգերի դիտարկմանը ժամանակի դիսկրետ պահերին: Միևնույն ժամանակ, ավելի քիչ ուշադրություն է հատկացվում դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հետազոտման համար, հաշվի առնելով վերջիններիս կառուցվածքային հատկությունները: Այս ամենը պայմանավորում է ատենախոսության թեմայի արդիականությունը, որում միաչափ դիսկրետ համակարգերի հիմնական դասական մեթոդները տարածվում են տարբեր տիպի քառակուսային (այսինքն՝ միևնույն քանակությամբ մուտքեր և ելքեր ունեցող) դիկսրետ ԲԱԿՀ-երի վրա: Ընդ որում ատենախոսությունում հիմնական մաթեմատիկական գործիք է հանդիսանում բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների մեթոդը, որը հնարավորություն է տալիս համապատասխանեցնել N- չափանի (այսինքն N մուտք և N ելք ունեցող) գծային ԲԱԿՀ-ն N հատ միաչափ բնութագրիչ համակարգերի բազմության հետ, որոնք ազդում են մուտքային և ելքային վեկտորական ազդեցությունների կոմպլեքս տարածության մեջ N հատ գծայնորեն անկախ ուղղությունների երկայնքով: Դա թույլ է տալիս N- չափանի փոխկապակցված ԲԱԿՀ-երի հետազոտությունը բերել N հատ

անկախ միաչափ բնութագրիչ համակարգերի հետազոտմանը: Հարկ է նշել, որ ԲՓՖ-երի մեթոդը նախկինում կիրառվել է միայն անընդհատ ԲԱԿՀ-երի նկատմամբ, իսկ ատենախոսությունում այդ մեթոդը առաջին անգամ տարածվում է քառակուսային դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի վրա, որոնք ներկայացված են z և երկգծային (ϖ-ձևափոխության) ձևափոխությունների միջոցով:

<u>Աշխատանքի նպատակը</u>

Ատենախոսության նպատակն է հանդիսանում միաչափ դիսկրետ համակարգերի հաճախականային և արմատային հետազոտման մեթոդների տարածումը, ԲՓՖ-երի մեթոդի հիման վրա, գիտատեխնիկական գրականությունում նկարագրված դիսկրետ ԲԱԿՀ–երի հիմնական կառուցվածքային դասերի (ընդհանուր տեսքի, միատիպ, ցիրկուլյանը ու հակացիրկուլյանտ, պարզ սիմետրիկ և այլն) վրա:

<u>Հետազոտման հիմնական խնդիրները</u>

Աշխատության հիմնական խնդիրները հետևյալն են՝

1. ԲՓՖ-երի մեթոդի տարածումը դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի տարբեր դասերի վրա և, մասնավորապես, ընդհանուր տեսքի, ինչպես նաև միատիպ, ցիրկուլյանտ, հակացիրկուլյանտ և պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումների դուրս բերումը:

2. z և երկգծային ձևափոխությունների միջոցով ներկայացված հիմնական դասերի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հաճախականային բնութագրերի ընդհանուր հատկությունների հետազոտությունը Նայքվիստի, Նիլկոլսի և Բոդեի դիագրամներով:

3. Հիմնական տիպի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի z և ϖ հարթությունների վրա արմատային հետագծերի ընդհանուր հատկությունների հետազոտությունը, այդ թվում կանոնավոր (ոչ խիստ ռացիոնալ) ԲՓՖ-երով ԲԱԿՀ-երի լրացուցիչ արմատային հետագծերի հատկությունները:

4. MATLAB ծրագրավորման լեզվի հիման վրա z և ϖ հարթություններում դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հաճախականային բնութագրերի և արմատային հետագծերի կառուցման ալգորիթմների ու թվային մեթոդների մշակում:

Հետազոտման հիմնական մեթոդները

Աշխատանքում դրված խնդիրների լուծման ժամանակ օգտագործվել են ավտոմատ կառավարման դասական և ժամանակակից տեսության մեթոդները, բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների (ԲՓՖ) մեթոդը, մատրիցների և ֆունկցիոնալ վերլուծության տեսությունը, գծային հանրահաշվի թվային մեթոդները, ինչպես նաև ժամանակակից ինֆորմացիոն տեխնոլոգիաների մեթոդներն ու միջոցները:

Գիտական նորույթը

Հետազոտման ընթացքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները՝

1. Առաջին անգամ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների մեթոդը տարածվել է հիմնական կառուցվածքային դասերի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի վրա (ընդհանուր տեսքի, միատիպ, ցիրկուլյանտ, հակացիրկուլյանտ և պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-եր): Դա թույլ է տալիս N - չափանի փոխկապակցված դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի վերլուծությունը բերել N հատ առանձին միաչափ բնութագրիչ համակարգերի կայունության վերլուծության:

2. Առաջարկվել են դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի z և ϖ հարթություններում արմատային հետագծերի կառուցման և հետազոտման նոր մեթոդներ: Դիտարկված են միատիպ, ցիրկուլյանտ, հակացիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-երի, ինչպես նաև պարզ սիմետրիկ համակարգերի արմատային հետագծերի կառուցման առանձնահատկությունները: Ցույց է տրված, որ z հարթությունում միատիպ և պարզ սիմետրիկ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի ասիմպտոտների կենտրոնները գտնվում են իրական առանցքի վրա, իսկ մնացած տիպի ԲԱԿՀ-երի համար այդ կենտրոնները կարող են լինել կոմպլեքս-համալուծ:

3. Միաչափ դիսկրետ համակարգերի տատանողականության ցուցանիշի դասական հասկացությունը տարածվում է դիսկրետ բազմաչափ համակարգերի վրա: Այդ ցուցանիշը որոշվում է փակ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի ընդհանրացված ԱՀԲ-երի մաժորանտի ռեզոնանսային արժեքի մեծությամբ:

4. Մշակված են դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հիմնական կառուցվածքային դասերի կայունության հետազոտման և տատանողականության ցուցանիշի որոշման գործընթացները Նայքվիստի, Նիքոլսի և Բոդեի դիագրամների օգնությամբ:

Աշխատանքի գործնական նշանակությունը

Ատենախոսությունում ստացված տեսական արդյունքները իրականացված են ալգորիթմական և ծրագրային տեսքով, որը հնարավորություն է տալիս ավտոմատացնել նախագծման և կարգավորիչների ընտրության գործընթացները՝ ելնելով դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի տրված որակական չափանիշներից:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները

1. Կամայական N չափողականություն ունեցող դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի, որոնց փոխանցման մատրիցները տրված են z և ϖ ձևափոխությունների միջոցով, կանոնական ներկայացումները:

2. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշի որոշելու և կայունության վերլուծության մեթոդները Նայքվիստի, Բոդեի և Նիկոլսի հաճախականային դիագրամների օգնությամբ: Միատիպ, ցիրկուլյանտ, հակացիրկուլյանտ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության հետազոտման առանձնահատկությունները:

3. z և ϖ հարթություններում դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի կառուցման ընդհանուր հատկություններն ու կանոնները: Դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հատուկ դասերի՝ միատիպ, ցիրկուլյանտ և հակացիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-երի, այդ թվում նաև պարզ սիմետրիկ համակարգերի արմատային հետագծերի հատկությունները:

4. MATLAB ծրագրային փաթեթ՝ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հիմնական դասերի որակի և կայունության թվային հետազոտման համար:

Աշխատանքի արդյունքների ներդրումը

Աշխատանքի հիմնական տեսական և գործնական արդյունքները զեկուցվել են՝

- ՀՊՃՀ տարեկան գիտաժողովներում (Երևան 2012թ.),
- ՀԱՊՀ Կիբեռնետիկայի ֆակուլտետի «Կառավարման համակարգեր» ամբիոնի գիտական սեմինարներում (2015թ.),
- Նովոսիբիրսկ քաղաքի «Приоритетные научные направления: от теории к практике» XXII Միջազգային հեռակա գիտա-գործնական կոնֆերանսում (05.02.2016թ.):

<u>Հրատարակումները</u>

Ատենախոսական աշխատանքի հիմնական արդյունքները հրատարակվել են 8 գիտական աշխատանքներում՝

1. Օհանյան Օ.Հ. Դիսկրետ հասարակ սիմետրիկ համակարգերի կայունության վերլուծությունը // ՀՊՃՀ Լրաբեր 80. - Երևան, 2013. -Մաս 1.- էջ 208-213:
2. Օհանյան Օ.Հ., Գասպարյան Օ.Ն. Դիսկրետ պարզ սիմետրիկ ավտոմատ կարգավորման համակարգերի արմատային հետագծերը // ՀԱՊՀ Լրաբեր,-Երևան, 2016. -Մաս 1.- էջ 195-199:
3. Гаспарян О.Н., Варданян Н.А., Уликян А.Т., Оганян О.Г. Проектирование регуляторов для простых симметричных систем автоматического регулирования // Информационные технологии и управление: ISSN 1829-071x: Сборник научных трудов. – Ереван, 2011. - Том 5. - С. 8-16.
4. Гаспарян О.Н., Оганян О.Г. Исследование дискретных однотипных систем регулирования на основе билинейного преобразования // Вестник НПУА. Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2015.- № 2.- С.21-31.
5. Гаспарян О.Н., Оганян О.Г. Исследование многомерных дискретных систем регулирования методом характеристических передаточных функций // Сборник материалов XXII Международной научно-практической конференции «Приоритетные научные направления: от теории к практике // 5 февраля 2016 г. - Новосибирск, 2016.- С. 132-141.
6. Гаспарян О.Н., Оганян О.Г. Корневые годорафы дискретных циркулянтных систем регулирования // Известия. НАН РА и НПУА: ISSN 0002-306 X: Серия технических. – 2016. - Том LXIX, № 1. С. 61-69.
7. Оганян О.Г. Корневые годорафы дискретных симметричных систем автоматического регулирования // Perspektywi czneopracowania są naukąi technikami – 2026, 07 – 15 listopada 2015 roku.- Прага, 2015.- Vol. 12.,- С. 30-33.
8. Уликян А.Т., Оганян О.Г. Проектирование простых симметричных систем автоматического регулирования // Материали за XI Международна Научна Практична Конференция «Ключови Въпросив Съвременната Наука - 2015», 17 - 25 април 2015 г. Том 19. - С. 75-78.

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, 5 գլուխներից, եզրակացությունից, գրականության ցանկից, որը ներառում է 126 անուն գրականություն: Աշխատանքի ընդհանուր ծավալը կազմում է 150 էջ, ներառյալ 76 նկար: Հավելվածը ներկայացված է 6 էջի վրա:

Աշխատանքի համառոտ բովանդակությունը

Ներածության մեջ հիմնավորված է աշխատանքի արդիականությունը, տրված են աշխատանքի նպատակը և խնդիրները, ներկայացված են հետազոտման հիմնական մեթոդները և եղանակները, գիտական նորույթն և աշխատանքի գործնական նշանակությունը, պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները, թեմային վերաբերվող հրատարակումներն, ինչպես նաև ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը:

Առաջին գլխում հակիրճ նկարագրված են մեկ մուտքով և ելքով կառավարման դիսկրետ հաակարգերի հետազոտման հիմնական դասական մեթոդները: Տրված է հաճախականային տիրույթում, ինչպես նաև z և երկգծային ձևափոխությունների հիման վրա կարգավորման դիսկրետ համակարգերի նկարագրությունը, քննարկված են դիսկրետ համակարգերի կայունության վերլուծությունը և տատանողականության ցուցանիշի հասկացությունը, ձևակերպված է Նայքվիստի չափանիշը:

Երկրորդ գլուխում դիտարկված է բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիայի (ԲՓՖ) մեթոդի կիրառումը տարբեր կառուցվածքային դասերի գծային անընդհատ ԲԱԿՀ-երի ուսումնասիրման դեպքում: 2.1-ում տրված է ընդհանուր տեսքի անընդհատ ԲԱԿՀ-երի փոխանցման մատրիցների կանոնական ներկայացումը նմանության ձևափոխությունների և դիադային նշանակումների օգնությամբ: N- չափանի անընդհատ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծությունը բերվում է N հատ անկախ միաչափ համակարգերի կայունության վերլուծության, որը կարելի է իրականացնել կառավարման դասական տեսության մեթոդներով: Ձևակերպված է Նայքվիստի ընդհանրացված չափանիշը: 2.2-ում տրված են միաչափ ԲԱԿՀ-երի կառուցվածքային առանձնահատկությունները և կանոնական ներկայացումները: 2.3-ում դիտարկված են

անընդհատ նորմալ ԲԱԿՀ-երի ԲՓՖ-երը և կանոնական ներկայացումները, որոնք իրարից տարբերվում են վերջիններիս կանոնական բազիսի օրթոգոնալությամբ:

Երրորդ գլխում բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիայի մեթոդը տարածված է ընդհանուր տեսքի գծային դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի վրա: 3.1-ում դիտարկված է առանձին կապուղիներում զրոյական կարգի էքստրապոլյատորի սինքրոն և սինֆազ իմպուլսային տարրերով ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի մատրիցային կառուցվածքային սխեման, որը բերված է անընդհատ մասով և իդեալական իմպուլսային տարրերով մատրիցային կառուցվածքի: 3.2-ում ստացված են ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումները, ենթադրելով, որ առանձին կապուղիներում իմպուլսային տարրերը աշխատում են սինքրոն, որոնց փոխանցման մատրիցները նկարագրվում են z ձևափոխության միջոցով (z հարթությունում): Տրված է դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի ներքին կառուցվածքային երկրաչափական մեկնաբանությունը բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիայի մեթոդի տեսանկյունից: Դիտարկված են դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծության խնդիրները Նայքվիստի չափանիշի միջոցով, ինչպես նաև տարածված է անընդհատ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշ հասկացությունը դիսկրետ համակարգի համար: Ձևակերպված են z հարթության վրա ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատների հետագծերի վարքի հիմնական կանոնները: 3.3-ում դիտարկված են երկգծային ձևափոխության օգնությամբ (ω հարթությունում) ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հետազոտման հարցերը: Դիտարկված են ϖ հարթությունում ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատկությունները:

Չորրորդ գլուխը նվիրված է դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի վրա բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիայի մեթոդի կիրառմանը, այսինքն՝ առանձին կապուղիների փոխադարձ ֆունկցիաներով և կոշտ փոխադարձ կապերով բազմաչափ դիսկրետ համակարգերին: 4.1-ում դիտարկված են z- հարթությունում դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացմանը և կայունության վերլուծությանը վերաբերող հարցեր: Տրված են դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի համար Նայքվիստի չափանիշի ուղիղ և հակադարձ ձևակերպումները, նկարագրված են բնութագրիչ համակարգերի տատանողականության գործակցի որոշման գործընթացները: Հետազոտված են z-

հարթությունում դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հիմնական հատկությունները: 4.2-ում դիտարկված են երկգծային ձևափոխության օգտագործման դեպքում դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կայունության հետազոտման և կանոնական ներկայացման վերաբերյալ հարցերը:

Ձևակերպված են ϖ հարթությունում արմատային հետագծերի վարքի ընդհանուր կանոնները:

Հինգերորդ գլուխը վերաբերվում է դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի հետազոտմանը, այսինքն՝ դիսկրետ համակարգերի, որոնց փոխանցման մատրիցները տեղափոխելի են իրենց համալուծ մատրիցների հետ: Դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի սկզբունքային յուրահատկությունը նրա կանոնական բազիսի օրթոգոնալությունն է և, որպես հետևանք, կրկնակի բազիսի համընկումն է կանոնականի հետ: 5.2-ում տրված է z-հարթության մեջ գործնականում լայն տարածում գտած ցիրկուլյանտ և հակացիրկուլյանտ, ինչպես նաև պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումները: Ցույց է տրված, որ փակ ԲԱԿՀ-երի ընդհանրացված ԱՀԲ-երի մաժորանտի ռեզոնանսային արժեքով որոշվող նորմալ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի տատանման գործակիցը հավասար է միաչափ բնութագրիչ համակարգերի տատանման գործակիցներից առավելագույնին: Դիտարկված են դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի և ԱԲԱԿՀ-երի z-հարթությունում արմատային հետագծերի հատկությունները: Դիտարկված են ϖ հարթությունում դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի և ԱԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատկությունները և դուրս են բերված այն պայմանները, որոնց դեպքում արմատային որոշ հետագծեր անցնում են անսահմանությունով k ուժեղացման գործակցի վերջավոր արժեքի դեպքում: Ստացված է անսահմանությունում գտնվող արմատների համար k գործակիցը հաշվելու բանաձևը:

3-5 գլուխներում ստացված բոլոր տեսական արդյունքները, որոնք պարզաբանվում են դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի թվային օրինակների հաշվարկներով, իրականացվել է MATLAB ծրագրավորման լեզվի օգնությամբ մշակված կիրառական ծրագրային փաթեթի միջոցով:

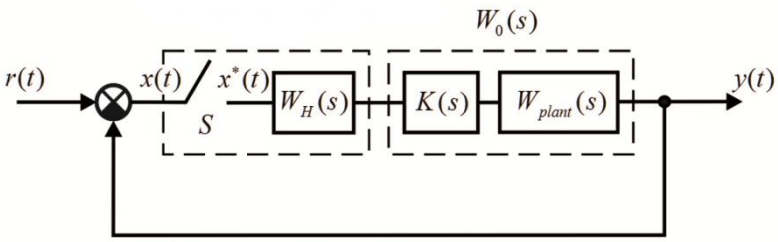
ԳԼՈՒԽ 1.

ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՄԵԿ ՄՈՒՏՔՈՎ ԵՎ ՄԵԿ ԵԼՔՈՎ ԴԻՍԿՐԵՏ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

1.1 Նախաբան

Ավտոմատ կառավարման դիսկրետ համակարգերը, որոնք հաճախ անվանվում են նաև իմպուլսային համակարգեր, հետագայում ընդունվեցին որպես հետադարձ կապով համակարգեր, որոնց մեկ կամ մի քանի կետերում տեղի է ունենում որոշակի ազդանշանի իմպուլսային ընդհատում T անընդհատ պարբերությամբ (կամ $f_S = 1/T$ հաստատուն հաճախությամբ) [26,97,123]:

Կառավարման մեկ մուտքով և մեկ ելքով գծային դիսկրետ համակարգի (միաչափ համակարգի) պարզագույն կառուցվածքային սխեման ցույց է տրված նկ.1.1-ում:



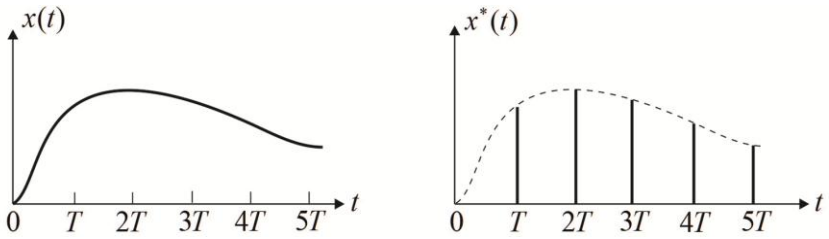
Նկ.1.1. Դիսկրետ կառավարման պարզագույն համակարգ

Իրական իմպուլսային տարրը նկ.1.1-ում ներկայացված է իդեալական S (*Switch*) բանալու և $W_H(s)$ փոխանցման ֆունկցիա ունեցող զրոյական կարգի (zero-order hold) էքստրապոլյատորի հաջորդական միացման ձևով [38,50]:

S իդեալական բանալին մուտքի $x(t)$ անընդհատ ազդանշանը փոխակերպում է T պարբերությամբ բազմաչափ իմպուլսների հաջորդականության:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x(t)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x(kT)\delta(t-kT) \qquad (1.1)$$

որտեղ՝ $\delta(t-kT)$-ը Դիրակի միավոր դելտա-ֆունկցիան է, այսինքն միավոր մակերեսով ֆունկցիա է անվերջության դեպքում, և $t \neq kT$ դեպքում հավասար է զրոյի (նկ. 1.2):

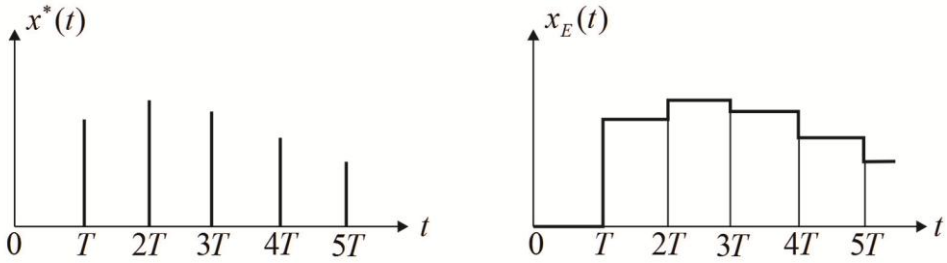


Նկ.1.2. Իմպուլսային տարրի մուտքային ու ելիքային ազդանշանները

Նկ.1.1-ի $x(kT)$-երը անվանվում են $x(t)$ անընդհատ ֆունկցիայի դիսկրետ մեծություններ, երբ $t = kT$: Նշենք, որ (1.1)-ում $x^*(t)$-ն հանդիսանում է դիսկրետ ֆունկցիա ժամանակից, որը գոյություն ունի միայն $t = kT$ պահին, որտեղ k-երը $0 < k < \infty$ միջակայքում փոփոխվող ամբողջ թվերն են: Զրոյական կարգի էքստրապոլյատորի $W_H(s)$ փոխանցման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$W_H(s) = \frac{1 - \exp(-Ts)}{s} \quad : \tag{1.2}$$

Զրոյական կարգի էկստրապոլյատորը, որն անվանվում է նաև զրոյական կարգի մտապահող սարք կամ ֆիքսատոր, S իդեալական բանալու ելքում գտնվող $x(kT)$ մակերեսն ունեցող անվերջ ակնթարթային ազդանշանների հաջորդականությունը փոխակերպում է $x_E(t)$ աստիճանաձև ազդանշանի, ինչպես ցույց է տրված նկ.1.3-ում:



Նկ.1.3. Զրոյական կարգի մտապահող սարքի մուտքի ու ելքի ազդանշանի տեսքը

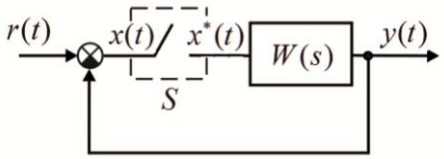
Նկ.1.1-ում $W_0(s)$ փոխանցման ֆունկցիան նկարագրում է դիսկրետ համակարգի ելակետային անընդհատ մասը, որը ընդհանուր դեպքում մտնում է $W_{plant}(s)$ կարգավորման օբյեկտ և $K(s)$ փոխանցման ֆունկցիայով անընդհատ կարգավորող սարք (կարգավորիչ) ՝

$$W_0(s) = W_{plant}(s)K(s) : \tag{1.3}$$

Դիսկրետ կարգավորման համակարգերի հետազոտման ժամանակ սովորաբար ընդունված է էկստրապոլյատորը դասել համակարգի անընդհատ մասին [5,21,26,81]:

Ընդ որում, նկ.1.1-ում ներկայացված համակարգը հանգում է նկ. 1.4-ի տեսքին, այսինքն ներկայացվում է S իդեալական բանալու և ընդհանրացված (բերված) փոխանցման ֆունկցիայով անընդհատ գծային մասի հաջորդական միացման՝

$$W(s) = W_{plant}(s)K(s)W_H(s) \qquad (1.4)$$



Նկ.1.4. Ընդհանրացված գծային մասով դիսկրետ համակարգ

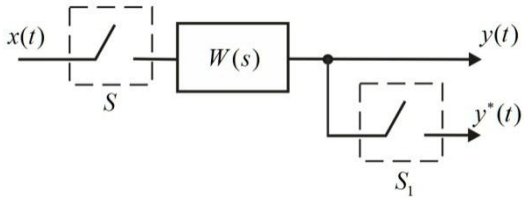
Հետագայում դիսկրետ համակարգերը կդիտարկենք նկ. 1.4-ում տրված ձևով: Նկ. 1.4-ում ներկայացված ավտոմատ կարգավորման գծային դիսկրետ համակարգերի հետազոտման ու նախագծման մեթոդներին մեծ գրականություն է նվիրված [30,31,43,59,105,114,121]: Ստորև ներկայացվում է դիսկրետ համակարգերի նկարագրման ամենահաճախ կիրառվող դասական եղանակները:

1.2. Գծային դիսկրետ համակարգերի հաճախականային նկարագրությունը

Հաճախականային բնութագրերի օգնությամբ ավտոմատ կարգավորման գծային անընդհատ համակարգերի վերլուծության ու նախագծման մեթոդները ամենալայն տարածումն ունեն [6,13,32,37,80,105,123]: Ինժեներները շատ դեպքերում նախընտրում են գործնականում օգտագործել այս մեթոդները: Այս հանգամանքը, ինչպես նաև այն, որ անընդհատ ազդանշանը գոյություն ունի դիսկրետ համակարգերի մեծ մասում, հանգեցրել է դիսկրետ համակարգերի դեպքում հաճախականային բնութագրերի մեթոդի ընդհանրացման: Ուստի, սովորաբար հաճախականային մեթոդը եղել է դիսկրետ (իմպուլսային) համակարգերի վերլուծության համար կիրառվող առաջին մեթոդը:

<u>Բաց համակարգեր:</u> Նկ. 1.5-ում ցույց է տրված տարրական դիսկրետ համակարգ բաց վիճակում, որում $y(t)$ անընդհատ ելքային ազդանշանը պայմանականորեն

ընդհատվում է սինքրոն և փուլային կերպով՝ $x(t)$ մուտքի ազդանշանով, ելքի S_1 լրացուցիչ (ֆիկտիվ) իմպուլսային տարրի օգնությամբ:



Նկ.1.5 Դիսկրետ բաց համակարգը S_1 լրացուցիչ իմպուլսային տարրով

Համակարգի ելքում Ֆիկտիվ իմպուլսային տարրի մուտքը հաճախ օգտակար է լինում դիսկրետ համակարգերի նկարագրության ժամանակ: Ընդ որում $y^*(t)$ ելքային իմպուլսային ազդանշանը կապված է $y(t)$ անընդհատ ազդանշանի հետ (1.1) արտահայտությամբ՝

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \mathrm{y}(t)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \mathrm{y}(kT)\delta(t-kT) \tag{1.5}$$

Նկ.1.5-ում բերված համակարգի (ընդհանրացված) անընդհատ մասի $W(s)$ փոխանցման ֆունկցիայի միջոցով նշանակված է $w(t)$ կշռային ֆունկցիան: Բաց համակարգի $y(t)$ ելքի անընդհատ ազդանշանը հավասար է՝

$$y(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} w(t-kT)x(kT): \tag{1.6}$$

(1.6) հավասարման երկու կողմերի Լապլասյան ձևափոխության արդյունքում [26,62,117,126] ստացվում է՝

$$Y(s) = W(s)X^*(s) \tag{1.7}$$

որտեղ՝ $X^*(s)$-ը արտահայտվում է $x(t)$ անընդհատ ազդանշանի $X(s)$ Լապլասյան ձևափոխության միջոցով հետևյալ կերպ

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(s+jk\omega_S)\,, \tag{1.8}$$

որտեղ՝

$$\omega_S = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_S\,, \tag{1.9}$$

ω_S-ը ընդհատման անկյունային հաճախությունն է ռադ/վրկ-ով:

Այնուհետև, $y^*(t)$ ելքի իմպուլսային ազդանշանի Լապլասյան ձևափոխությունը հավասար է՝

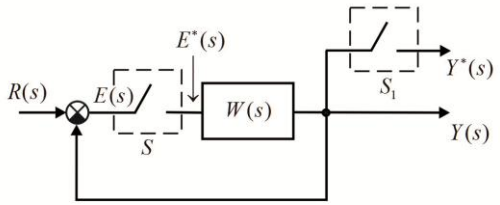
$$Y^*(s) = W^*(s)X^*(s): \tag{1.10}$$

որտեղ՝ $W^*(s)$-ը նկ.1.5–ի բաց համակարգի իմպուլսային փոխանցման ֆունկցիան է, որը կապում է $x^*(t)$ և $y^*(t)$ իմպուլսային ազդանշանները՝

$$W^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} W(s + jk\omega_S): \tag{1.11}$$

Տվյալ ֆունկցիան հանդիսանում է $j\omega_S$ ժամանակամիջոց ունեցող պարբերական ֆունկցիա s–ից: $W^*(j\omega)$ հաճախականային փոխանցման ֆունկցիան ստացվում է $W^*(s)$-ից (1.11)-ում $s = j\omega$ փոխարինումով:

<u>Փակ համակարգեր:</u> Փակ դիսկրետ կառավարման համակարգի կառուցվածքի պարզագույն սխեման բերված է նկ.1.6-ում, որտեղ ցույց է տրվում նաև համակարգի ելքի S_1 ֆիկտիվ իմպուլսային տարրը, որը նպատակահարմար է ներմուծել համակարգի վերլուծության համար:



Նկ.1.6. Փակ դիսկրետ համակարգ

Փակ դիսկրետ համակարգի ելքի $y(t)$ անընդհատ ազդանշանի $Y(s)$ Լապլասյան ձևափոխությունը նկ.1.6-ում տրված է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} W(s + jk\omega_S)} \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} R(s + jk\omega_S): \tag{1.12}$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (1.11)-ը, ստացվում է՝

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + W^*(s)} R^*(s), \tag{1.13}$$

որտեղ՝ $R^*(s)$-ը $r^*(t)$ մուտքային իմպուլսային ազդանշանի Լապլասյան ձևափոխությունն է: Այս կերպ, դիսկրետ փակ և բաց համակարգերի համար հնարավոր չէ $Y(s)/X(s)$ և $Y(s)/R(s)$ հարաբերությունը, այսինքն մուտքի ու ելքի

անընդհատ ազդանշանների Լապլասյան ձևափոխությունը արտահայտել բերված (ընդհանրացված) համակարգի անընդհատ մասի $W(s)$ փոխանցման ֆունկցիայով:

Բաց համակարգի $W^*(j\omega)$ փոխանցման ֆունկցիայի ամպլիտուդա-ֆազային բնութագիրը (ԱՖԲ) ունի մի շարք կարևոր առանձնահատկություններ: Այսպես, $W^*(j\omega)$ ԱՖԲ-ն հանդիսանում է պարբերական ֆունկցիա $j\omega_S$ պարբերությամբ ω հաճախության, այսինքն $W^*(j\omega)$-ն հաճախությունների $-\infty<\omega<\infty$ տիրույթում նույնն է, ինչ $W^*(j\omega)$-ն՝ հաճախությունների $0<\omega<\infty$ տիրույթում: Ավելին, քանի որ $W^*(j\omega)$-ն սիմետրիկ է իրական առանցքի նկատմամբ, ապա $\omega_S/2$-ից մինչև ω_S հաճախությունների տիրույթի հետագիծը հանդիսանում է ԱՖԲ-ի հայելային արտացոլումը 0-ից մինչև $\omega_S/2$ հաճախականային տիրույթում: $\omega=\omega_S/2$ դեպքում $W^*(j\omega)$ ԱՖԲ-ը հանդիսանում է իրական մեծություն: Եթե $W(s)$-ը պարունակում է ինտեգրող անդամներ (օրինակ՝ $1/s$ տեսքի անդամներ), ապա $W^*(j\omega)$ արժեքը հավասար է անվերջության $\omega=0$ և $\omega=\omega_S$ դեպքերում [13,22,26]:

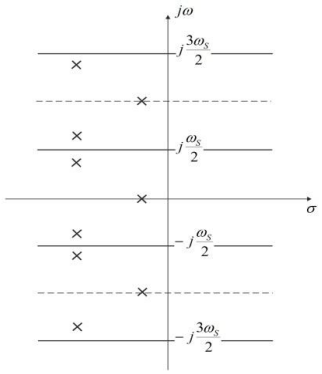
<u>Կայունության վերլուծություն:</u> Փակ դիսկրետ համակարգի բնութագրիչ հավասարումը, ըստ (1.12)-ի, հավասար է (1.14) հավասարմանը՝

$$1+W^*(s)=1+\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}W(s+jk\omega_S)=0: \qquad (1.14)$$

Համակարգի կայունության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ (1.14) հավասարման արմատները լինեն s կոմպլեքս հարթության ձախ կիսահարթությունում: Հաշվի առնելով, որ $W^*(s)$ - ն (1.11) հանդիսանում է $j\omega_S$ պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա s-ից, (1.14) բնութագրիչ հավասարումը պարունակում է անսահման թվով արմատներ, որոնք կրկնվում են $j\omega_S$ պարբերությունից մինչև կեղծ առանցք:

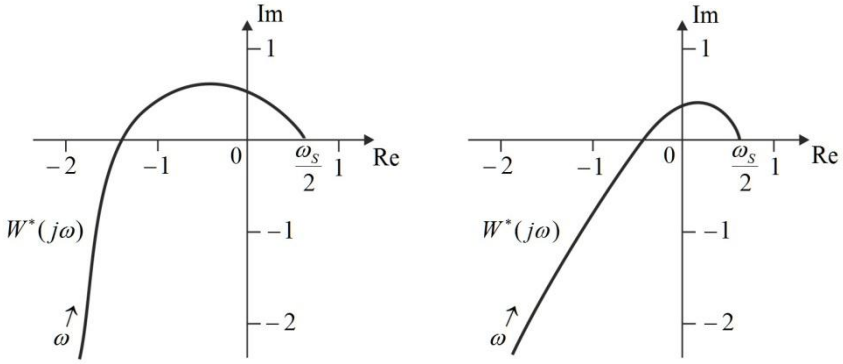
Փաստորեն, բնութագրիչ հավասարման արմատների կոմպլեքս հարթությունը բաժանված է $j\omega_S$ լայնությամբ անսահման շերտերի, իսկ շերտերից յուրաքանչյուրում բևեռների բաշխվածությունը միանման է (նկ.1.7) ((1.14) հավասարման արմատները նկ.1.7-ում ցույց են տրված խաչերի տեսքով): Բևեռները

$-j\omega_S/2$-ից $+j\omega_S/2$ տիրույթում հաճախ անվանվում են հիմնական, իսկ մնացած բևեռները՝ լրացուցիչ [46,62,101]:



Նկ.1.7. (1.14) Բնութագրիչ հավասարման արմատային հարթություն

Դիսկրետ համակարգի կայունության վերլուծության համար կարելի է օգտվել Նայքվիստի հաճախականային չափանիշից, որի համաձայն, փակ համակարգի կայունության համար, երբ բաց համակարգը կայուն է, անհրաժեշտ է, որ բաց համակարգի $W^*(j\omega)$ ԱՖԲ-ն կոմպլեքս հարթությունում չընդգրկի $(-1, j0)$ կրիտիկական կետը (նկ.1.8):



ա) անկայուն բ) կայուն

Նկ.1.8 Նայքվիստ չափանիշի կիրառությունը դիսկրետ համակարգի կայունության վերլուծության համար

Հարկ է նշել որ, հաշվի առնելով $W^*(j\omega)$ ԱՖԲ-երի նշված առանձնահատկությունները, բավարար է դիտարկել $W^*(j\omega)$ հետագիծը միայն 0-ից մինչև $\omega_S/2$ հաճախականային տիրույթում: Եթե ω_S ընդհատման հաճախությունը մեծ է համակարգի թողանցման շերտի լայնությունից, ապա $W^*(j\omega)$ արտահայտության մեջ, գործնական հաշվարկների դեպքում, կարելի է սահմանափակվել առաջին երեք անդամներով՝

$$W^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}W(j\omega+jk\omega_S)\approx\frac{1}{T}W(j\omega)+\frac{1}{T}W(j\omega+j\omega_S)+\frac{1}{T}W(j\omega-j\omega_S): \qquad (1.15)$$

1.3. Գծային դիսկրետ համակարգերի նկարագրությունը z-տիրույթում

Մեկ մուտքով ու մեկ ելքով դիսկրետ համակարգերի վերլուծության և նախագծման համար լայնորեն օգտագործվող մեթոդներից են z-ձևափոխության մեթոդները [81]:

Ժամանակի իմպուլսային ֆունկցիայի $x^*(t)$ (1.1) Լապլասյան ձևափոխությունը $X^*(s)$ (1.8), նույնպես կարելի է գրել տեղափոխման հայտնի թեորեմի հիման վրա՝

$$X^*(s)=\sum_{k=0}^{k=\infty}x(kT)\exp(-ksT)\,, \qquad (1.16)$$

(1.16) հավասարումը ցույց է տալիս, որ $X^*(s)$-ը իրենից ներկայացնում է $\exp(sT)$-երի անվերջ շարք: Ուստի Հուրվիցի և այլ գիտնականների կողմից առաջարկվեց օգտագործել հետևյալ փոխարինումը [65,69]՝

$$z=\exp(sT) \qquad (1.17)$$

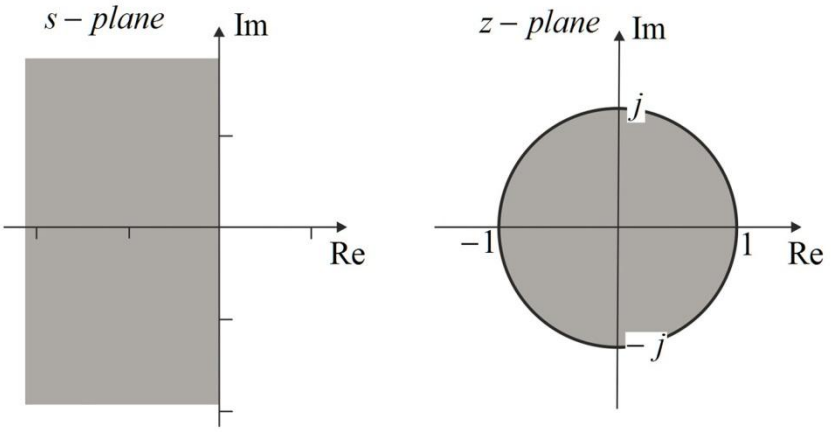
և հետևաբար $X(z)$ կլինի z-ից ստացվող ֆունկցիա, որը կորոշվի հետևյալ կերպ՝

$$X(z)=X^*\left(\frac{1}{T}\ln z\right)=\sum_{k=0}^{k=\infty}x(kT)z^{-k}\ : \qquad (1.18)$$

Տվյալ հավասարումը ստացել է $x^*(t)$ ժամանակի իմպուլսային ֆունկցիայի z-ձևափոխություն անվանումը [97,114,123]: (1.18)-ից երևում է, որ $x^*(t)$ ժամանակի որոշակի իմպուլսային ֆունկցիաների z- ձևափոխության որոշման համար հարկավոր է գտնել այս ֆունկցիայի Լապլասյան ձևափոխությունը և s կոմպլեքս փոփոխականը փոխարինել $(\ln z)/T$ -ով:

Պետք է նշել, որ (1.17) արտահայտությունը պարզ կերպով արտացոլում է s հարթության $s=j\omega$ կեղծ առանցքը z հարթության միավոր շառավղով շրջանագծում, ընդ որում, s հարթության ձախ կիսահարթությունը արտացոլվում է տվյալ շրջանագծի ներսում (նկ. 1.9): Այնուհետև, s հարթության աջ կեսը արտացոլվում է այն տիրույթում, որն ընկած է միավոր շրջանագծից դուրս: Մյուս կողմից, (1.17) արտահայտության հիման վրա z հարթությունից անցումը s հարթության միանշանակ չէ, քանի որ ω_S

լայնություն ունեցող s հարթության վրա առկա յուրաքանչյուր շերտ նկ.1.7-ում արտացոլվում է ողջ z հարթության վրա [38,123]:



Նկ.1.9. s հարթության ձախ կիսահարթության արտացոլումը z հարթության միավոր շրջանագծի մեջ

<u>Բաց համակարգեր:</u> Դիտարկենք երկու սինքրոն իմպուլսային տարրերով բաց համակարգ (1.6), որտեղ երկրորդ՝ S_1 տարրը հանդիսանում է ֆիկտիվ (1.18): Համանման ձևով $y^*(t)$ ելքի ժամանակի իմպուլսային ֆունկցիայի z-ձևափոխությունը ներկայացվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$Y(z) = Y^*\left(\frac{1}{T}\ln z\right) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \mathrm{y}(kT)z^{-k}: \tag{1.19}$$

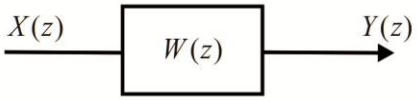
Այս դեպքում, օգտագործելով (1.6) արտահայտությունը, կարելի է ցույց տալ, որ $Y(z)$ ելքի (1.19) z- ձևափոխությունը հավասար է՝

$$Y(z) = W(z)X(z), \tag{1.20}$$

որտեղ՝

$$W(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} w(kT)z^{-k} \tag{1.21}$$

անվանվում է բաց դիսկրետ համակարգի z փոխանցման ֆունկցիա: $Y(z)$-ի և $X(z)$-ի z-ձևափոխություններին համապատասխան նկ. 1.5-ում պատկերված համակարգը կարելի է ներկայացվել նկ. 1.10-ում համարժեք կառուցվածքային սխեմայով:



Նկ.1.10. Համակարգի z-ձևավորությանը համարժեք կառուցվածքային սխեման

Կարևոր է ընդգծել, որ (1.20) հավասարումը նկարագրում է $y(t)$ ելքային անընդհատ ազդանշանը միայն $t = kT$ $(k = 0,1,2,...)$ ժամանակի դիսկրետ պահին, քանի որ z - ձևափոխությունը կիրառվում է միայն դիսկրետ ազդանշանների համար:

$W(z)$ փոխանցման իմպուլսային ֆունկցիան ունի մի շարք կարևոր առանձնահատկություններ, որոնք ստացվում են $W^*(s)$ փոխանցման իմպուլսային ֆունկցիայից (1.11): Այսպես, $W(z)$ ֆունկցիայի (որտեղ $z = \exp(sT)$ և $s = j\omega$) ԱՖԲ - ը, 0-ից մինչև ω_S հաճախականային տիրույթում այնպիսին է, ինչպիսին՝ $k\omega_S$-ից մինչև $(k+1)\omega_S$ տիրույթում, որտեղ k-ն ամբողջ թիվ է: $W(z)$-ի արժեքը միշտ իրական է $z = 1$ $(\omega = 0)$ և $z = -1$ $(\omega = k\omega_S / 2)$ դեպքում, $W(z)$ ֆունկցիան վերջավոր է, երբ $z = 1$, եթե $W(s)$-ը չունի բևեռ կոորդինատի սկզբում և այլն: Կարելի է նշել նաև, որ $W(s)$ և $W(z)$ փոխանցման ֆունկցիաների n բևեռների քանակը միշտ նույնն է լինում, և այդ բևեռները կապված են (1.17) արտահայտությամբ:

<u>Փակ համակարգեր և դրանց կայունության վերլուծությունը:</u> Նկ.1.6-ում պատկերված փակ դիսկրետ համակարգի համար ելքի z - ձևափոխությունը, որը որոշում է ելքի $y(t)$ անընդհատ ազդանշանի արժեքը $t = kT$ ժամանակի դիսկրետ պահին, ունի հետևյալ տեսքը՝

$$Y(z) = \Phi(z)R(z)\,, \tag{1.22}$$

որտեղ՝

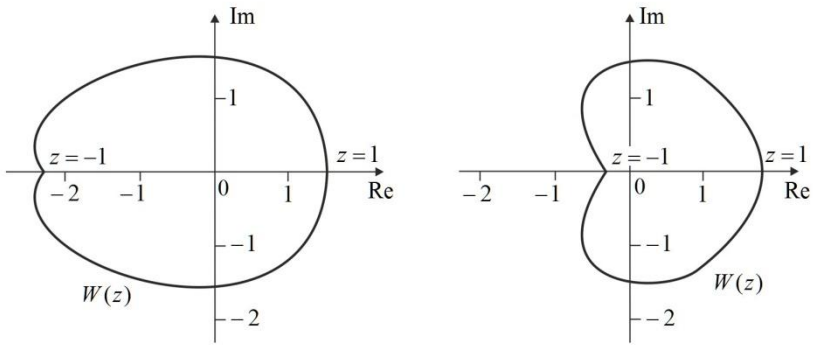
$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} \tag{1.23}$$

կոչվում է փակ դիսկրետ համակարգի ելքի փոխանցման ֆունկցիա: Ընդ որում փակ համակարգի բնութագրիչ հավասարումը հավասար է՝

$$1 + W(z) = 0: \tag{1.24}$$

Քանի որ (1.17) ֆունկցիան արտացոլում է z-հարթության միավոր շրջանագծի ներսում առկա s հարթության ձախ կիսահարթությունը, ապա նկ.1.6-ում պատկերված փակ դիսկրետ համակարգի կայունության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ (1.24) բնութագրիչ հավասարման բոլոր արմատները գտնվեն այն միավոր շրջանագծի ներսում, որն ունի կենտրոն z - հարթության կոորդինատային առանցքի սկզբում:

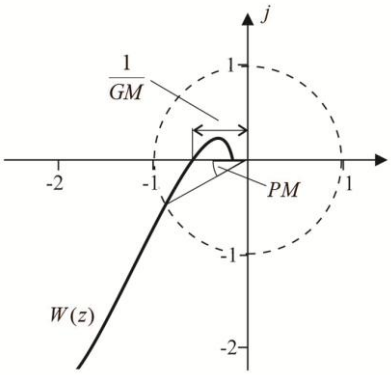
z-ձևափոխության տեսքով տրված դիսկրետ համակարգի կայունության վերլուծության համար կարելի է կիրառել Նայքվիստի չափանիշի հատուկ ձևափոխությունը [33,45,91]: Չափանիշի համաձայն, փակ համակարգը կայուն է, երբ բաց համակարգը կայուն է և $W(z)$ հետագիծը z-ի միավոր շրջանագծով փոփոխման դեպքում չի ընդգրկում $(-1, j0)$ կրիտիկական կետը (նկ.1.11): Երբ բաց համակարգը անկայուն է, $W(z)$ հետագիծը պետք է ընդգրկի $(-1, j0)$ կետը դրական ուղղությամբ p անգամ, որտեղ p-ն $W(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի անկայուն բևեռների քանակն է:



ա) անկայուն բ) կայուն

Նկ.1.11. Դիսկրետ համակարգի կայունության պարզաբանումը ըստ Նայքվիստի չափանիշի

Դիսկրետ համակարգերի կայունության պաշարների գնահատման համար կարելի է օգտագործել դասական հասկացություններ՝ կայունության պաշար ըստ մոդուլի GM (Gain Margin) և ըստ փուլի PM (Phase Margin), որոնք որոշվում են Նայքվիսիտի հետագծով՝ նույն կերպ, ինչ անընդհատ համակարգերի դեպքում է [13,62]:



Նկ.1.12. Միաչափ դիսկրետ համակարգի կայունության պաշարները

Կայունության պաշարն ըստ GM մոդուլի անվանվում է $W(z)$ [կամ $W^*(s)$] բերված (ընդհանրացված) գծային մասի փոխանցման ֆունկցիայի GM լրացուցիչ ուժեղացման

գործակից, որի դեպքում $W(z)$ հետագիծն անցնում է $-1, j0$ կրիտիկական կետով և փակ համակարգը գտնվում է կայունության սահմանին (Պայմանականորեն կայուն համակարգերը կարող են ունենալ կայունության մի քանի պաշարներ): Համապատասխանաբար, PM կայունության պաշարը ըստ փուլի լրացուցիչ նվազագույն ֆազային անկյունն է, որի դեպքում $W(z)$ հետագիծը անցնում է $(-1, j0)$ կետով: Նշված հասկացությունները գրաֆիկորեն ներկայացված են նկ.1.12-ում:

1.4. Փակ դիսկրետ համակարգերի հաճախականային բնութագրերը և տատանողականության ցուցանիշը

Ինչպես նշվեց, կառավարման անընդհատ համակարգերի նախագծման ժամանակ լայնորեն օգտագործվում է հաճախականային բնութագրերի մեթոդը: Մեթոդի օգտագործման ժամանակ հետազոտվում է համակարգի ելքը, որի մուտքի վրա ընկնում են հաստատուն ամպլիտուդով ու հաճախությամբ սինուսոիդային ազդանշաններ: Ընդ որում, եթե փակ համակարգը կայուն է, ապա համակարգի ելքային ազդանշանը կայունացած վիճակում (անցումային գործընթացների ավարտից հետո) նույնպես համարվում է սինուսոիդալ ազդանշան, որն ունի մուտքի ազդանշանի հաճախություն, սակայն ընդհանուր առմամբ՝ մեկ այլ ամպլիտուդով և ըստ փուլի լրացուցիչ շարժով: Ելքի ու մուտքի սինուսոիդալ ազդանշանների ամպլիտուդների առավելագույն հարաբերությունը, ելքի ազդանշանի Ω հաճախության զրոյից անվերջություն փոխվելու դեպքում (որը անվանվում է *տատանողականության ցուցանիշ*), ծառայում է որպես փակ համակարգի կայունության պաշարի օգտակար չափ: Համանման գնահատականը կիրառվում է նաև դիսկրետ համակարգերի նախագծման ժամանակ [38,39,59]:

Ենթադրենք նկ.1.6-ում պատկերված փակ դիսկրետ համակարգի մուտքի վրա ընկնում է A ամպլիտուդով և Ω հաճախությամբ անընդհատ սինուսոիդալ ազդանշան՝

$$r(t) = A\sin(\Omega t): \tag{1.25}$$

Այս դեպքում S_1 ֆիկտիվ իմպուլսային բանալու ելքային ազդանշանի $Y^*(s)$ աստղանիշով ձևափոխությունը և $Y(z)$ z- ձևափոխությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$Y^*(s)=\Phi^*(s)R^*(s)=\frac{W^*(s)}{1+W^*(s)}R^*(s)\,, \qquad (1.26)$$

$$Y(z)=\Phi(z)R(z)=\frac{W(z)}{1+W(z)}R(z)\,: \qquad (1.27)$$

Փակ համակարգի ելքի և մուտքի T ընդհատման պարբերություն ունեցող ակնթարթային իմպուլսների հաջորդականությունները միմյանց հետ կապված են (1.26) և (1.27) հավասարումների միջոցով:

Այս հաջորդականությունները տրվում են (1.1) արտահայտությամբ: Մուտքի $r(t)$ (1.25) սինուսոիդալ ազդանշանի ժամանակավոր դիսկրետ հաջորդականությունը, $A=1$ դեպքում և $t=kT$ պահին, կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$r(kT)=\sin(\Omega kT)\,, \quad k=0,1,2,\ldots\ : \qquad (1.28)$$

Ի տարբերություն $r(t)$ ժամանակի անընդհատ ֆունկցիայի, (1.28) հաջորդականությունը հանդիսանում է պարբերական միայն այն դեպքում, եթե ազդանշանի Ω հաճախության և $\omega_S=2\pi/T$ ընդհատման անկյունային հաճախության հարաբերությունը իրենից ներկայացնի ամբողջ թիվ:

Նկ.1.6-ում պատկերված փակ դիսկրետ համակարգի ելքի $y(kT)$ հաջորդականությունը, երբ մուտքում ընկնում է $r(t)$ սինուսոիդալ ազդանշանը (1.25), որոշվում է $\Phi^*(j\Omega)$ փակ համակարգի փոխանցման ֆունկցիայի միջոցով հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$y(kT)=\left|\Phi^*(j\Omega)\right|\sin(\Omega kT+\arg\{\Phi^*(j\Omega)\}),\quad k=0,1,2,\ldots.: \qquad (1.29)$$

$y(kT)$ մեծությունը (1.29) կարելի է նաև արտահայտել $\Phi(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի միջոցով (1.27), երբ z-ը փոխարինվում է $\exp(j\Omega T)$-ով՝

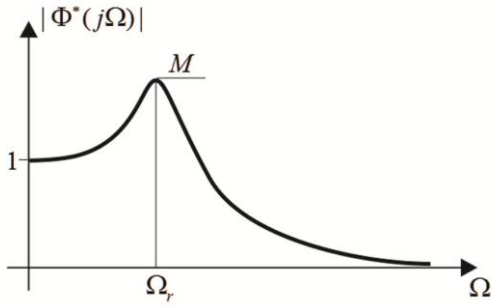
$$y(kT)=\left|\Phi(z)\big|_{z=\exp(j\Omega T)}\right|\sin\left(\Omega kT+\arg\{\Phi(z)\big|_{z=\exp(j\Omega T)}\}\right): \qquad (1.30)$$

Երբ նկ.1.6-ում պատկերված փակ դիսկրետ համակարգի մուտքում ընկնում է Ω հաճախությամբ $r(t)$ սինուսոիդալ ազդանշան, ելքում ստացվում է (ժամանակի $t=kT$ պահին) իմպուլսների հաջորդականությունը, որոնց պարուրիչը հանդիսանում է սինուսոիդալ նույն Ω հաճախությամբ, սակայն $|\Phi^*(j\Omega)|$ անգամ փոփոխված

ամպլիտուդով և $\arg\{\Phi^*(j\Omega)\}$ փուլային շարժով, ներկայացվում է (1.29) արտահայտությամբ:

Կայուն աստատիկ համակարգերի համար (որոնցում կարգավորման օբյեկտը կամ կարգավորին ունի ինտեգրող օղակ) Ω հաճախությունից $|\Phi^*(j\Omega)|$ մոդուլի տիպային կախվածությունը ցույց է տրված նկ. 1.13-ում: M ռեզոնանսային արժեքի հարաբերական մեծության բնութագիրը կոչվում է կառավարման դիսկրետ համակարգի անընդհատ տատանողականության ցուցանիշ՝

$$M = \max_{0 \le \Omega \le \infty} \frac{|W^*(j\Omega)|}{|1+W^*(j\Omega)|} = \max_{0 \le \Omega \le \infty} \frac{\left|W(z)\big|_{z=\exp(j\Omega T)}\right|}{\left|1+W(z)\big|_{z=\exp(j\Omega T)}\right|} \quad : \qquad (1.31)$$



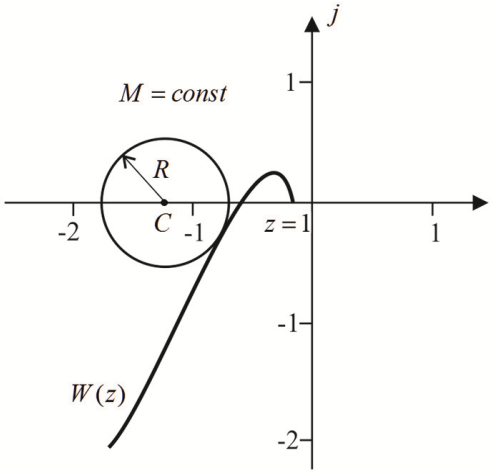
Նկ.1.13. Մուտքային սինուսոիդալ ազդանշանի $|\Phi^*(j\Omega)|$ մոդուլի տիպային կախվածությունը Ω հաճախությունից

Դիսկրետ համակարգի կայունության սահմանին մոտենալու դեպքում, երբ $W^*(j\Omega)$ կամ $W(z)$ հետագծերը մոտենում են $(-1, j0)$ կրիտիկական կետին, M մեծությունը ձգտում է անվերջության, ինչը հեշտությամբ կարելի է հասկանալ (1.31) արտահայտությունից: Ուստի M տատանողականության ցուցանիշը հաճախ օգտագործվում է որպես կայունության պաշարի չափում: Դա հարմար է այն առումով, որ փակ համակարգի կայունության պաշարը որոշվում է մեկ՝ այնպիսի M մեծությամբ, որն ունի փոփոխության բավարար չափով նեղ սահմաններ (գործնականում թույլատրելի M արժեքները գտնվում են $M = 1.1$ -ից մինչև $M = 2.5 \div 3$ սահմաններում):

Տատանողականության ցուցանիշը գտնելու համար անհրաժեշտություն չկա կառուցել ամպլիտուդա-հաճախականային բնութագիրը (նկ.1.14) կամ գտնել առավելագույնը (1.31): Որպեսզի համակարգը ունենա M տրված արժեքից փոքր տատանողականության ցուցանիշ, $W(z)$ (կամ $W^*(j\omega)$) Նայքվիստի հետագիծը չպետք

է մտնի $(-1, j0)$ կրիտիկական կետի շուրջը գտնվող որոշակի արգելված գոտուց ներս (նկ.1.14): Այս գոտին իրենից ներկայացնում է C կենտրոնով և R շառավղով շրջան, որտեղ՝

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}, \quad C = \left(-\frac{M^2}{M^2 - 1}, j0 \right): \tag{1.32}$$



Նկ.1.14. $M = const$ արգելված գոտին Նայքվիստի $W(z)$ հետագծի համար

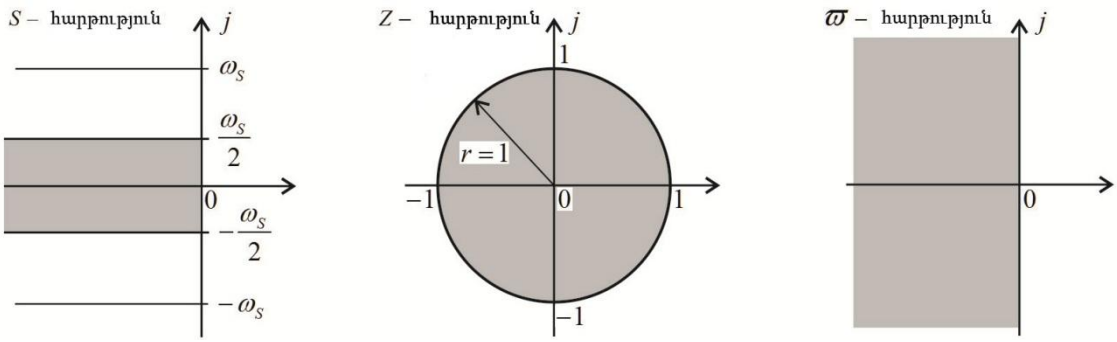
1.5. Դիսկրետ գծային համակարգերի նկարագրությունը երկգծային ձևափոխության հիման վրա

Դիսկրետ համակարգերի նախագծման ու վերլուծության սովորական հաճախականային բութագրերի օգտագործումը չափազանց դժվար է, քանի որ (1.14) փակ համակարգի բնութագրիչ հավասարումը հանդիսանում է s կոմպլեքս փոփոխականից տրանսցենդենտ ֆունկցիա: Ուստի դիսկրետ համակարգերի սովորական հաճախականային բնութագրերը գործնականում շատ հազվադեպ են կիրառվում: Մյուս կողմից, ինչպես նշվել է վերևում, z-ձևափոխությունը տրանսցենդենտ ֆունկցիաները s-ից դարձնում է հանրահաշվական բազմանդամներ z-ից: Այնուամենայնիվ, $W(z)$ դիսկրետ փոխանցման ֆունկցիաները, չնայած իրենցից ներկայացնում են ռացիոնալ ֆունկցիաներ z-ից, թույլ չեն տալիս կիրառել կառավարման դասական տեսության այնպիսի կարևոր մեթոդներ, ինչպիսիք լոգարիթմական հաճախականային բնութագրերն են (Բոդեի դիագրամներ): Այս թերությունը բացակայում է այն մեթոդում, որը հիմնված է երկգծային ձևափոխության վրա [122]՝

$$z = \frac{1+(T/2)\varpi}{1-(T/2)\varpi} \quad : \tag{1.33}$$

(1.33) ֆունկցիան z հարթությանում միավոր շրջանագծի ներքին մասը արտապատկերում է $\varpi = u + j\nu$ հարթության ձախ կիսահարթություն, իսկ միավոր շրջանագիծը արտապակերվում է ϖ հարթության կեղծ առանցքի վրա: Երկգծային ձևափոխության օգնությամբ կատարվող արտապատկերումների հաջորդականությունը՝ s հարթության հիմնական շերտից դեպի z հարթություն և այնուհետև դեպի ϖ կոմպլեքս հարթություն, ներկայացված է նկ.1.15-ում: ϖ հարթությունից դեպի z հարթություն հետադարձ անցումը կատարվում է (1.33) արտահայտության հիման վրա, (1.34) հավասարման օգնությամբ՝

$$\varpi = \frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})} : \tag{1.34}$$



Նկ.1.15. s, z և ϖ կոմպլեքս հարթությունների արտապատկերումը

$W(z)$ ռացիոնալ փոխանցման ֆունկցիայից անցումը $W(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի իրականացվում է (1.33) արտահայտության օգնությամբ: Ընդ որում դիսկրետ համակարգը կայուն է, եթե $W(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի բոլոր բևեռները գտնվում են ϖ կոմպլեքս հարթության ձախ կիսահարթությունում: Հաշվի առնելով (1.17)-ը, և (1.34) արտահայտության մեջ $s = j\omega$ տեղադրման դեպքում վերջինս ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\varpi = \frac{2}{T}\frac{\left[1-\exp(-j\omega T)\right]}{\left[1+\exp(-j\omega T)\right]} = j\nu \ , \tag{1.35}$$

որտեղ՝

$$\nu = \frac{2}{T}\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega T}{2} \tag{1.36}$$

Այս փոփոխականը անվանվում է *ֆիկտիվ* հաճախականություն կամ *կեղծ հաճախականություն*: ϖ կոմպլեքս փոփոխականը (1.35) $s = j\omega$ դեպքում հանդիսանում է կեղծ մեծություն: ν ֆիկտիվ հաճախության արտահայտությունից (1.36) երևում է, որ այն հանդիսանում է պարբերական ֆունկցիա ω պարբերությամբ, որը հավասար է ω_S ընդհատման հաճախությանը: Նշենք, որ ω փոքր արժեքների դեպքում, երբ $\mathrm{tg}\,(\omega T/2) \approx \omega T/2$, ֆիկտիվ ν և իրական ω հաճախությունները մոտավորապես համընկնում են, այսինքն $\omega \approx \nu$: $W(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի կարևոր առանձնահատկությունների մեջ պետք է նշել, որ այն հանդիսանում է ϖ փոփոխականով ռացիոնալ ֆունկցիա: Այս հանգամանքը թույլ է տալիս $W(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառել լոգարիթմական հաճախականային բնութագրերի դասական մեթոդը, այդ թվում նաև հակաասիմպտոտիկ բնութագրերի մեթոդը: Եթե ենթադրենք, որ z_i m հատ զրոներով և p_i n հատ բևեռներով, որտեղ $m \le n$, $W(z)$ փոխանցման ֆունկցիան տրված է (1.37) տեսքով՝

$$W(z) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}\left(z - z_i\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(z - p_i\right)}\ , \tag{1.37}$$

ապա կարելի է ցույց տալ, որ համապատասխան $W(\varpi)$ կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$W(\varpi) = \frac{K_{\varpi}\left(-\frac{T}{2}\varpi + 1\right)^{(n-m)}\prod_{i=1}^{m}\left(\varpi - z_i^{\varpi}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(\varpi - p_i^{\varpi}\right)} \tag{1.38}$$

որտեղ՝

$$K_{\varpi} = \frac{(-1)^{n-m}K\prod_{i=1}^{m}\left(1 + z_i\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1 + p_i\right)}, \quad z_i^{\varpi} = -\frac{2}{T}\frac{\left(1 - z_i\right)}{\left(1 + z_i\right)}, \quad p_i^{\varpi} = -\frac{2}{T}\frac{\left(1 - p_i\right)}{\left(1 + p_i\right)}: \tag{1.39}$$

(1.38) և (1.39)-ից երևում է, որ $W(\varpi)$ բևեռների ու զրոների քանակը միշտ նույն է՝ անկախ $W(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի (1.37) բևեռների ու զրոների քանակից: Սա նշանակում է, որ $\varpi = j\infty$ դեպքում $W(\varpi)$ մեծությունը իրական է ու վերջավոր: Բացի այդ, $n > m$ դեպքում $W(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիան հանդիսանում է ոչ մինիմալ-փուլային, քանի որ ունի $n - m$ հատ իրական առանցքով դրական զրոներ $\varpi = 2/T$ կետում: Ի վերջո, կենտ $n - m$ դեպքում, (1.39)-ի մեջ K_{ϖ} գործակիցը բացասական թիվ

է, որը փաստացիորեն համարժեք է դրական հետադարձ կապ ունեցող համակարգին անցմանը:

Եզրակացություն I-ին գլխի վերաբերյալ

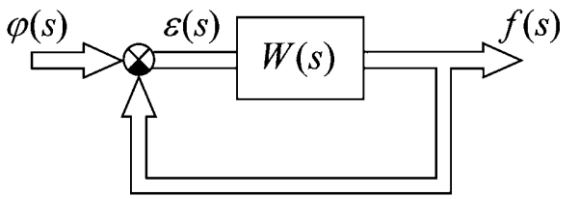
Գլուխ 1-ում հակիրճ նկարագրված է մեկ մուտքով և մեկ ելքով համակարգերի սովորական հաճախականային բնութագրերի, z- և երկգծային ձևափոխությունների միջոցով կառավարման գծային դիսկրետ համակարգերի ներկայացման հիմնական ձևերը, ինչպես նաև տրված է z- ձևափոխության շրջակայքում արմատային հետագծերի մեթոդի նկարագրությունը:

ԳԼՈՒԽ 2.

ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉ ՓՈԽԱՆՑՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

2.1. Ընդհանուր տեսքի գծային անընդհատ ԲԱԿՀ-երի փոխանցման մատրիցներ

Դիտարկենք N - չափանի կառավարվող և հետազոտվող անընդհատ բազմաչափ ավտոմատ կառավարման համակարգ (ԲԱԿՀ), որի մատրիցային կառուցվածքային սխեման ներկայացված է նկ.2.1-ում, որտեղ $\varphi(s)$, $f(s)$, $\varepsilon(s)$ -երը մուտքի, ելքի և սխալի վեկտորների Լապլասյան ձևափոխություններն են (այս վեկտորները կընդունվեն որպես C^N N - չափանի կոմպլեքս տարածության տարրեր): $W(s)=\{w_{kr}(s)\}$ -ը $N\times N$ չափանի բաց համակարգի փոխանցման քառակուսային մատրիցն է $w_{kr}(s)$ $(k,r=1,2,...,N)$ տարրերով, իսկ այդ տարրեը հանդիսանում են s կոմպլեքս փոփոխականով կոտորակա-ռացիոնալ ֆունկցիաներ [13,62]:



Նկ.2.1. Ընդհանուր տեսքի գծային անընդհատ ԲԱԿՀ –ի կառուցվածքային սխեմա

$W(s)$ մատրիցների գլխավոր անկյունագծի $w_{kk}(s)$ տարրերը իրենցից ներկայացնում են անընդհատ ԲԱԿՀ-ի առանձին կապուղիների փոխանցման ֆունկցիաներ, իսկ ոչ անկյունագծային $w_{kr}(s)\,(k\neq r)$ տարրերը՝ r -րդ կապուղուց k -րդ կապուղի փոխադարձ կապերի փոխանցման ֆունկցիաներ: $f(s)$ ելքի և $\varepsilon(s)$ սխալի վեկտորները կապված են $\varphi(s)$ մուտքային վեկտորի հետ հետևյալ օպերատորային հավասարումներով՝

$$\varepsilon(s)=\varphi(s)-f(s), \tag{2.1}$$

$$f(s)=\Phi(s)\varphi(s), \qquad \varepsilon(s)=\Phi_{\varepsilon}(s)\varphi(s), \tag{2.2}$$

որտեղ՝

$$\Phi(s)=\left[I+W(s)\right]^{-1}W(s)\ , \tag{2.3}$$

$$\Phi_{\varepsilon}(s)=\left[I+W(s)\right]^{-1}. \tag{2.4}$$

Վերևում ներկայացված են փակ անընդհատ ԲԱԿՀ-ի փոխանցման մատրիցները՝ համապատասխանաբար ըստ ելիքի և սխալի, I-ն՝ միավոր մատրից է: (2.3), (2.4)-ի մեջ $[I + W(s)]$ մատրիցը անվանվում է ԲԱԿՀ-ի *վերադարձի տարբերությային մարտրից* [3,7,20,28,58,64,88], իսկ դրա որոշիչը հավասար է՝

$$\det[I + W(s)] = \det[I + W(\infty)]\frac{P_{cl}(s)}{P(s)}, \qquad (2.5)$$

որտեղ՝ $P(s)$-ը և $P_{cl}(s)$-ը համապատասխանաբար բաց և փակ ԲԱԿՀ-ի բնութագրիչ բազմանդամներն են:

2.2. Ընդհանուր տեսքի ԲԱԿՀ-երի փոխանցման մատրիցների սպեկտրալ ներկայացումը: Բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաներ և կանոնական բազիս

<u>Բաց ԲԱԿՀ-եր:</u> Քանի որ բաց գծային ԲԱԿՀ-ի $W(s)$ փոխանցման մատրիցը [47,76,82] կազմված է s կոմպլեքս փոփոխականից կախված կոտորակա-ռացիոնալ սկալյար $w_{kr}(s)$ տարրերից, ապա $W(s)$-ի $q_i(s)$ սեփական արժեքները, այսինքն (2.6) հավասարման արմատները, նույնպես հանդիսանում են s փոփոխականից ֆունկցիաներ՝

$$\det[qI - W(s)] = 0, \qquad (2.6)$$

Այս $q_i(s)$ կոմպլեքս ֆունկցիաներն անվանվում են բաց ԲԱԿՀ-ի բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաներ (ԲՓՖ) [35,40,77,92,93,94,95]: Եթե պարզության համար բոլոր $q_i(s)$ $(i = 1, 2, ..., N)$ ընդունենք որպես տարբեր ԲՓՖ-եր, ապա $W(s)$ մատրիցի համապատասխան նորմավորված $c_i(s)$ $[|c_i(s)| = 1]$ սեփական վերկտորները կլինեն գծայնորեն անկախ և դրանցից հնարավոր կլինի C^N կոմպլեքս տարածությունում կազմել N-չափանի բազիս: Այս բազիսը ընդունված է անվանել բաց անընդհատ ԲԱԿՀ-ի կանոնական բազիս:

Քանի որ $c_i(s)$ վեկտորները գծայնորեն անկախ են, ապա նրանցից կարելի է կազմել $C(s) = [c_1(s)\ \ c_2(s)\ ....\ c_N(s)]$ ոչ եզակի մոդալ մատրից: Ապա բաց անընդհատ ԲԱԿՀ-ի $W(s)$ փոխանցման մատրիցը կարելի է ներկայացնել նմանության ձևափոխման օգնությամբ հետևյալ տեսքով՝

$$W(s) = C(s)\,diag\{q_i(s)\}C^{-1}(s)\,, \tag{2.7}$$

որտեղ՝ $diag\{q_i(s)\}$-ը անկյունագծային մատրից է, գլխավոր անկյունագծի $q_i(s)$ տարրերով, իսկ $C(s)$ -ը՝ մոդալ մատրից [44,102]:

Բաց ԲԱԿՀ-ի $W(s)$ փոխանցման մատրիցը կարելի է ներկայացնել նաև սպեկտրալ վերլուծման տեսքով, այսինք N դիադների գումարի տեսքով՝

$$W(s) = \sum_{i=1}^{N} c_i(s) > q_i(s) < c_i^{+}(s)\,: \tag{2.8}$$

Այս սպեկտրալ ձևը թույլ է տալիս երկրաչափորեն մեկնաբանել բաց և փակ անընդհատ ԲԱԿՀ-ի ներքին կառուցվածքը: $q_i(s)$ ԲՓՖ-երը կարելի է համարել որոշակի վերացական միաչափ, այսպես կոչված բնութագրիչ համակարգերի փոխանցման ֆունկցիաներ, համակարգերից յուրաքանչյուրը գործում է բաց ԲԱԿՀ -ի C^N տարածության կանոնական բազիսի $c_i(s)$ մեկ առանցքի ուղղությամբ: Ցանկացած s-ի համար $f(s)$ վեկտորը ներկայացվում է (2.8)-ի և նկ. 2.1-ի հիման վրա հետևյալ տեսքով՝

$$f(s) = W(s)\varepsilon(s) = \left[\sum_{i=1}^{N} c_i(s) > q_i(s) < c_i^{+}(s)\right]\varepsilon(s) = \sum_{i=1}^{N}[q_i(s)\beta_i(s)]c_i(s) \tag{2.9}$$

որտեղ՝

$$\beta_i(s) = < c_i^{+}(s), \varepsilon(s) > \,, \qquad i = 1, 2, \ldots, N\,, \tag{2.10}$$

$\varepsilon(s)$ վեկտորի պրոյեկցիաներ են $c_i(s)$ առանցքի վրա, այսինքն, որպես բաց ԲԱԿՀ-ի կանոնական բազիսի առանցքների ուղղությամբ արձագանքների գծային համակցություն (կոմբինացիա): Սա նշանակում է, որ բաց ԲԱԿՀ-ի կանոնական բազիսի առանցքները որոշում են C^N կոմպլեքս տարածության այն N ուղղությունները, որոնց երկայնքով ԲԱԿՀ արձագանքում է որպես որոշակի միաչափ համակարգ: Սխեմատիկորեն սա մեկնաբանվում է նկ.2.2-ում և 2.3-ում պատկերված կառուցվածքային սխեմաների օգնությամբ, որոնք կառուցվել են ըստ (2.7), (2.9) արտահայտությունների:

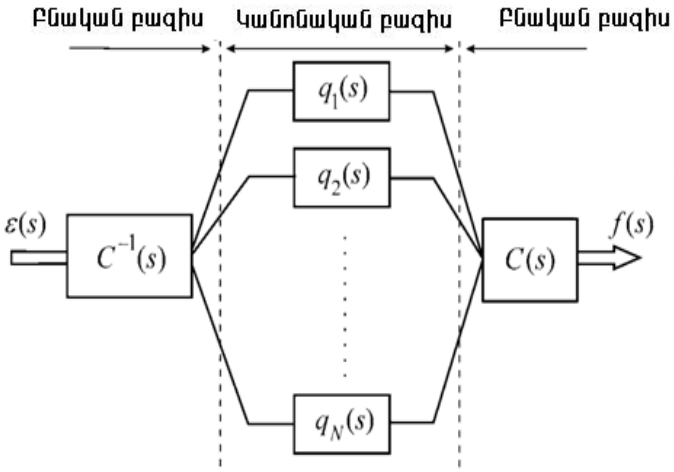
<u>Փակ ԲԱԿՀ-եր:</u> (2.7) նմանության ձևափոխության օգնությամբ բաց ԲԱԿՀ-ի $W(s)$ փոխանցման ֆունկցիայի ներկայացումը տեղադրելով $\Phi(s)$ մուտքով (2.3) և $\Phi_\varepsilon(s)$

սխալով (2.4) փակ անընդհատ ԲԱԿՀ-ի փոխանցման մատրիցի մեջ, մի շարք ոչ բարդ ձևափոխություններից հետո ստանում ենք (2.11) հավասարումը՝

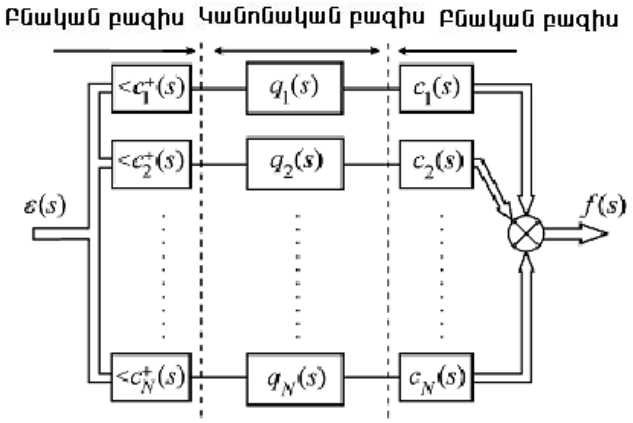
$$\Phi(s) = C(s)\,diag\left\{\frac{q_i(s)}{1+q_i(s)}\right\}C^{-1}(s)\,,\ \ \Phi_\varepsilon(s) = C(s)\,diag\left\{\frac{1}{1+q_i(s)}\right\}C^{-1}(s)\,: \qquad (2.11)$$

Նույն կերպ (2.3) և (2.4)-ի մեջ տեղադրելով (2.8) սպեկտրալ վերլուծման բանձևում, կստացվի՝

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{N} c_i(s) > \frac{q_i(s)}{1+q_i(s)} < c_i^{+}(s)\,,\ \ \Phi_\varepsilon(s) = \sum_{i=1}^{N} c_i(s) > \frac{1}{1+q_i(s)} < c_i^{+}(s)\,: \qquad (2.12)$$



Նկ.2.2. Բաց ԲԱԿՀ-ի ներկայացումը նմանության ձևափոխության օգնությամբ



Նկ.2.3. Բաց ԲԱԿՀ -ի ներկայացումը դիադների օգնությամբ

(2.11) և (2.12) արտահայտությունների դիտարկումը թույլ է տալիս անել կարևոր հետևություն այն մասին, որ $C(s)$ մոդալ մատրիցը և, հետևաբար, փակ ԲԱԿՀ-ի կանոնական բազիսը համընկնում են բաց համակարգի կանոնական բազիսի ու մոդալ մատրիցի հետ: Այլ կերպ ասած, միավոր հետադարձ կապի ներմուծումը չի հանգեցնում համակարգի կանոնական բազիսի փոփոխության: Ավելին, եթե

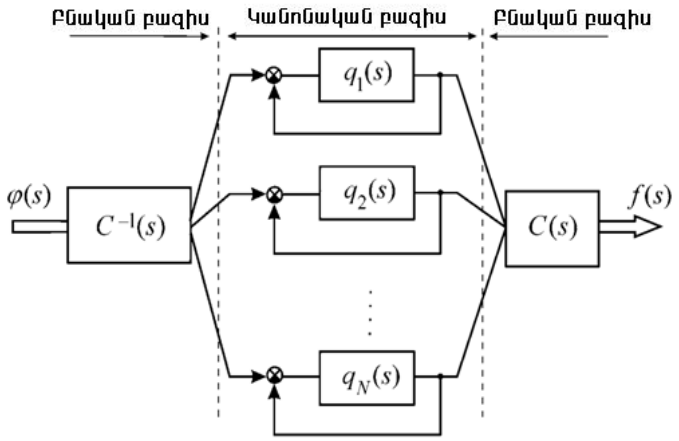
$q_i(s)$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ հանդիսանում են բաց ԲԱԿՀ-ի ԲՓՖ, ապա համապատասխան փակ ԲԱԿՀ-ի բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաները ըստ ելքի և սխալի կլինեն՝

$$\Phi_i(s) = \frac{q_i(s)}{1 + q_i(s)}, \quad \Phi_{\varepsilon i}(s) = \frac{1}{1 + q_i(s)}, \qquad i = 1, 2, \dots, N, \tag{2.13}$$

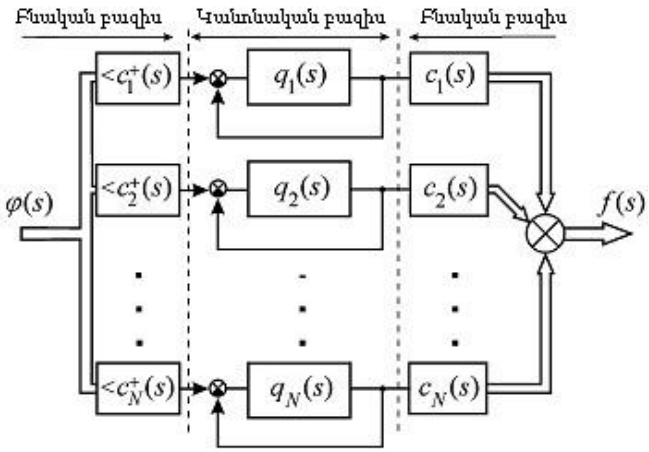
որոնք կապվում են $q_i(s)$-ի հետ նույն կախվածությամբ, ինչ մեկ մուտքով ու ելքով ավտոմատ կառավարման բաց և փակ համակարգերի սովորական փոխանցման ֆունկցիաները: Փակ ԲԱԿՀ-ի $f(s)$ ելքի և $\varepsilon(s)$ սխալի վեկտորները կարող են ներկայացվել արձագանքների գծային համակցությամբ՝ կանոնական բազիսի առանցքների երկայնքով՝

$$f(s) = \sum_{i=1}^{N} \left[\Phi_i(s) < c_i^+(s), \varphi(s) > \right] c_i(s), \; \varepsilon(s) = \sum_{i=1}^{N} \left[\Phi_{\varepsilon i}(s) < c_i^+(s), \varphi(s) > \right] c_i(s) \tag{2.14}$$

որտեղ փակ ԲԱԿՀ-ի $\Phi_i(s)$ և $\Phi_{\varepsilon i}(s)$ ԲՓՖ-ները որոշվում են (2.13) արտահայտությամբ: Նույն կերպ՝ եթե $\varphi(s)$ մուտքի վեկտորը ուղղված է կանոնական բազիսի որևէ առանցքով, ապա ԲԱԿՀ–ի ելքում կարող է մասնակցել միայն համապատասխան փակ բնութագրիչ համակարգը, իսկ սխալի ու ելքի վեկտորներն ուղղված կլինեն նույն բազիսի առանցքով: Վերջինս սխեմայի տեսքով բերված է նկ.2.4-ում և 2.5-ում:



Նկ.2.4. Փակ անընդհատ ԲԱԿՀ-ի ներկայացումը նմանության ձևափոխության միջոցով



Նկ.2.5. Փակ անընդհատ ԲԱԿՀ-ի սպեկտրալ ներկայացումը դիադների միջոցով

<u>ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծություն:</u> Նկ.2.1-ում պատկերված փակ ԲԱԿՀ-ի կայունության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի

$$\det[I + W(s)] = 0 \tag{2.15}$$

բնութագրիչ հավասարման արմատները գտնվեն արմատների կոմպլեքս հարթության ձախ կիսահարթությունում [55,60,62]: Օգտվելով $W(s)$ բաց ԲԱԿՀ-ի փախանցման մատրիցի կանոնական ներկայացումից՝ (2.7) նմանության ձևափոխման օգնությամբ, (2.15) հավասարումը կարելի է բերել հետևյալ տեսքի՝

$$\det\left[C(s)\,diag\{1+q_i(s)\}C^{-1}(s)\right]=0\,, \tag{2.16}$$

այստեղից անմիջականորեն կստացվի՝

$$\det[I+W(s)]=\underbrace{\det C(s)\det C^{-1}(s)}_{1}\det[diag\{1+q_i(s)\}]=\prod_{i=1}^{N}[1+q_i(s)]=0: \tag{2.17}$$

(2.17) արտահայտությունից երևում է, որ նկ. 2.1-ում պատկերված փակ անընդհատ N-չափանի ԲԱԿՀ-ի բնութագրիչ հավասարումը տրոհվում է համապատասխան N-միաչափ համակարգերի բնութագրիչ հավասարումների՝

$$1+q_i(s)=0, \qquad i=1,2,...,N: \tag{2.18}$$

Ուստի գծային անընդհատ ԲԱԿՀ-ի կայունության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ կայուն լինեն հետազոտվող ԲԱԿՀ-ի հետ կապված բոլոր փակ բնութագրիչ համակարգերը: Եթե բնութագրիչ համակարգերից մեկը գտնվում է կայունության սահմանին կամ անկայուն է, ապա համապատասխան (2.18)-ի հավասարումը կունենա արմատներ կեղծ առանցքի վրա կամ աջ կիսահարթությունում

և, համաձայն (2.17)-ի, ճիշտ նույնպիսի արմատներ կունենա նաև փակ ԲԱԿՀ-ը [52,63,68]:

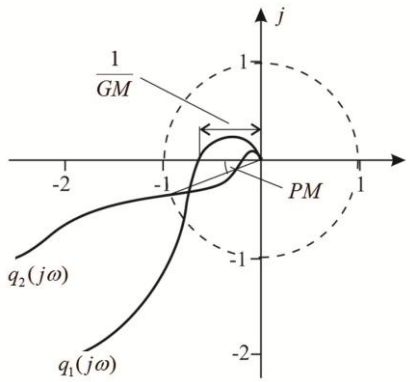
Այստեղից հետևում է, որ ԲՓՖ-ի մեթոդը հնարավորություն է տալիս N-չափանի անընդհատ ԲԱԿՀ-ի կայունության հետազոտումը փոխարինել N հատ միաչափ բնութագրիչ համակարգերի կայունության հետազոտմամբ կամ, այլ կերպ ասած, N-չափանի խնդիրը հանգեցնել N միաչափ խնդիրների ամբողջության:

Բնութագրիչ համակարգերի կայունության վերլուծության համար, որոշակի ձևափոխություններից հետո կարելի է օգտագործել մեկ մուտքով ու մեկ ելքով կարգավորման անընդհատ համակարգերի կայունության հայտնի չափանիշներից յուրաքանչյուրը: Այնուամենայնիվ, գործնականում ամենահարմարը Նայքվիստի հաճախականային չափանիշն է, որի տարբեր ձևերով ընդհանրացումները սահմանված են բազմաչափ համակարգերի համար [49,91,98,104,106,120]: Որոշենք բաց ԲԱԿՀ-ի ԲՓՖ-ն՝ $q_i(s)$ $(i=1,2,\dots,N)$, Նայքվիստի դիագրամները որպես կորեր կոմպլեքս հարթության վրա, փոխվելու դեպքում: Այս դեպքում, եթե բաց ԲԱԿՀ-ի բնութագրիչ հավասարումը ունենում է k բևեռներ աջ կիսահարթությունում, ապա փակ ԲԱԿՀ-ի կայունության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ հետագծերի ժամացույցի սլաքին հակառակ (դրական) ուղղությամբ շրջանցումների թիվը $(-1, j0)$ կրիտիկական կետի նկատմամբ հավասար լինի k-ի:որոնք համապատասխանում են $q_i(j\omega)$ ԲՓՖ-ին՝ ω հաճախության՝ $-\infty$-ից $+\infty$

Նայքվիստի չափանիշի գլխավոր առավելություններից մեկն այն է, որ ինչպես և միաչափ համակարգերի դեպքում, թույլ է տալիս դատողություն անել փակ անընդհատ ԲԱԿՀ-ի կայունության մասին՝ ըստ $W(s)$ բաց համակարգի փոխանցման մատրիցի $q_i(j\omega)$ բնութագրիչ հետագծերի: Բացի այդ, $W(s)$ փոխանցման մատրիցի մեջ $s=j\omega$ տեղադրելիս մատրիցը դառնում է սովորական կոմպլեքս գործակիցներով թվային $W(j\omega)$ մատրից, և դրա $q_i(j\omega)$ սեփական արժեքները գտնելը $\omega=\omega_k$ հաճախության արժեքների դեպքում, ներկայումս դժվար չէ: Մասնավորապես, կիրառական ծրագրերի ժամանակակից փաթեթները, օրինակ MATLAB փաթեթը թույլ է տալիս որոշել գործնականում ցանկացած N-չափանի բարդ քառակուսային

մատրիցների սեփական արժեքները, և հետևաբար հետազոտել ԲԱԿՀ-երի կայունությունը [86,124]:

Համակարգերի միաչափ բնութագրերի $q_i(j\omega)$ հետագծերի հիման վրա ներմուծվում է անընդհատ գծային ԲԱԿՀ-ի կայունության պաշար հասկացությունը: Յուրաքանչյուր $q_i(j\omega)$ հետագծի համար կարելի է սովորական եղանակով որոշել կայունության պաշարները ըստ GM_i մոդուլի և PM_i փուլի, և կապել կայունության N պաշարների երկու բազմության N-չափանի ԲԱԿՀ-ի հետ՝ ըստ $\{GM_i\}$ մոդուլի և $\{PM_i\}$ փուլի: Ընդ որում գծային անընդհատ ԲԱԿՀ-ի կայունության պաշար ասելով հասկանում են GM_i և PM_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ կայունության պաշարներից *ամենափոքրը*, այսինքն $GM = \min\{GM_i\}$, $PM = \min\{PM_i\}$ [108,109]: $N = 2$ դեպքի համար այն ցույց է տրված նկ. 2.6.-ում:

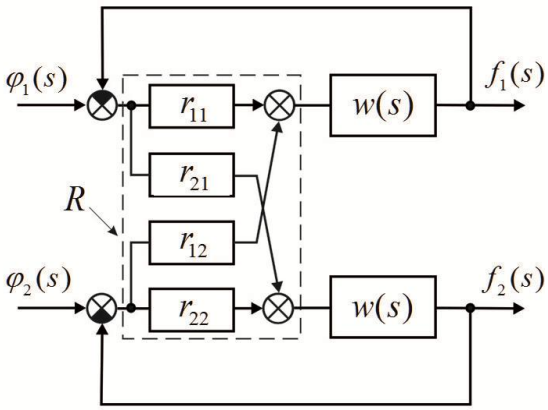


Նկ.2.6. Անընդհատ ԲԱԿՀ -ի կայունության պաշարների որոշում

2.3. Միատիպ ԲԱԿՀ-երի բնութագիրիչ փոխանցման ֆունկցիաները և կանոնական ներկայացումը

Տարբեր տեխնիկական կիրառություններում, օրինակ՝ ավիատիեզերքի տեխնիկայում, քիմիական ու պողպատի արդյունաբերությունում և բազմաթիվ այլ ոլորտներում, լայնորեն օգտագործվում են այսպես կոչված միատիպ բազմաչափ ավտոմատ կառավարման համակարգեր (ՄԲԱԿՀ) [27,62,121]: Այս ԲԱԿՀ-երում առանձին կապուղիներն ունենում են միատեսակ փոխանցման ֆունկցիաներ, և կապուղիների միջև փոխադարձ կապերը կոշտ են և բնութագրվում են իրական

թվային մատրիցով: Որպես պարզ օրինակ՝ նկ.2.7-ում ցույց է տրված կառավարման երկչափ միատիպ համակարգի բացված կառուցվածքային սխեման:

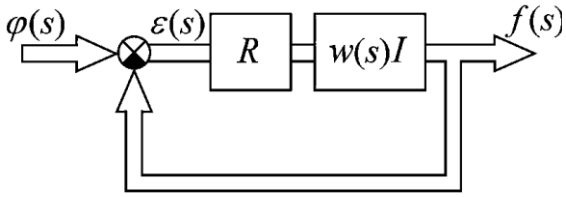


Նկ.2.7. Կարգավորման երկչափ միատիպ համակարգի հետադարձ կառուցվածքային սխեման

Գծային անընդհատ ՄԲԱԿՀ-ի մատրիցի կառուցվածքային սխեման ցույց է տրված նկ.2.8-ում, որտեղ

$$w(s) = \frac{M(s)}{D(s)} \quad , \tag{2.19}$$

$w(s)$-ը առանձին կապուղիների փոխանցման ֆունկցիան է, որը հանդիսանում է կոտորակա-ռացիոնալ ֆունկցիա s կոմպլեքս փոփոխականից, իսկ R-ը կոշտ փոխադարձ կապերի $N \times N$ չափանի թվային մատրից է:



Նկ.2.8. Անընդհատ ՄԲԱԿՀ-ի մատրիցայի կառուցվածքյաին սխեման

Պարզ է, որ նկ.2.8-ում պատկերված անընդհատ բաց ՄԲԱԿՀ-ի $W(s)$ փոխանցման մատրիցը՝

$$W(s) = w(s)R \tag{2.20}$$

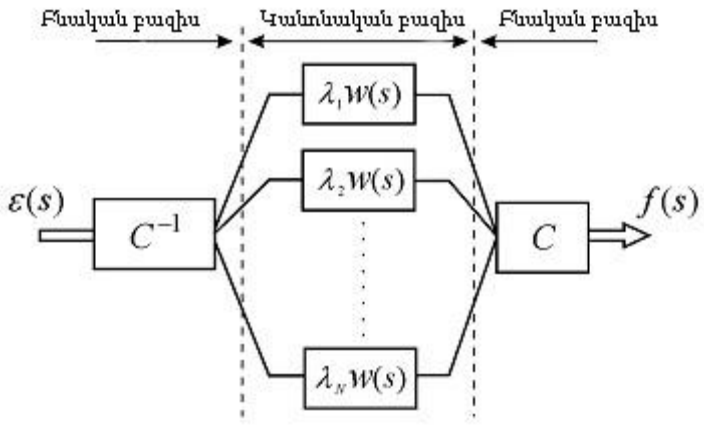
համընկնում է կոմպլեքս սկալյալ $w(s)$ բազմապատկիչի ճշգրտությամբ R փոխադարձ կապերի թվային մատրիցի հետ: Դիտարկենք ՄԲԱԿՀ փոխանցման մատրիցների կանոնական ներկայացումը: Մատրիցների տեսությունից հայտնի է, որ թվային մատրիցները սկալյար բազմապատկիչով բազմապատկելու դեպքում դրանց սեփական վեկտորները չեն փոխվում, իսկ սեփական արժեքները բազմապատկվում են նույն

բազմապատկիչով [65,96]: Հետևաբար, $\lambda_i \quad (i=1,2,...,N)$-ով նշանակենք R մատրիցի սեփական արժեքները, իսկ C-ով՝ այն մոդալ մատրիցը, որը կազմված է R մատրիցի c_i գծայնորեն անկախ նորմավորված սեփական վեկտորներից, ապա բաց ՄԲԱԿՀ-ի փոխանցման մատրիցի (2.7) և (2.8) կանոնական ներկայացումները, դիադային նշանակումների ու նմանության ձևափոխման օգնությամբ, կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$W(s) = C\,diag\{\lambda_i w(s)\}C^{-1}, \tag{2.21}$$

$$W(s) = \sum_{i=1}^{N} c_i > \lambda_i w(s) < c_i^{+}, \tag{2.22}$$

որտեղ՝ c_i^{+} վեկտորները երկակի են c_i-ի վեկտորների նկատմամբ, իսկ R իրական մատրիցի λ_i սեփական արժեքները կարող են լինել ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս թվեր:



Նկ.2.9. Բաց անընդհատ միատիպ ԲԱԿՀ -երի կանոնական ներկայացումը նմանության ձևափոխության միջոցով

(2.21) և (2.22) արտահայտությունների հիման վրա կարելի է անել հետևյալ հետևությունները: Առաջին՝ ՄԲԱԿՀ-ի կանոնական բազիսը ամբողջությամբ որոշվում է R փոխադարձ կապերի թվային մատրիցներով և կախված չէ առանձին կապուղիների $w(s)$ փոխանցման ֆունկցիայի տեսքից: Որպես հետևանք, վերջինս հաստատուն է այն դեպքում, երբ ԲԱԿՀ-ի ընդհանուր դեպքում կանոնական բազիսը ֆունկցիա է s կոմպլեքս փոփոխականից: Երկրորդ՝ բոլոր ԲՓՖ-երը՝

$$q_i(s) = \lambda_i w(s) = \lambda_i \frac{M(s)}{D(s)}, \qquad i=1,2,...,N \tag{2.23}$$

համընկնում են λ_i հաստատուն գործակիցների ճշգրտությամբ $w(s)$ փոխանցման ֆունցիայի հետ (նկ.2.9):

Հաշվի առնելով (2.21)-(2.23)-ը, ըստ ելքի և սխալի փակ անընդհատ ՄԲԱԿՀ-ի կանոնական ներկայացման համար ստացվում է հետևյալը՝

$$\Phi(s) = C\,diag\left\{\frac{\lambda_i w(s)}{1+\lambda_i w(s)}\right\}C^{-1} = \sum_{i=1}^{N} c_i > \frac{\lambda_i w(s)}{1+\lambda_i w(s)} < c_i^{+}, \qquad (2.24)$$

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = C\,diag\left\{\frac{1}{1+\lambda_i w(s)}\right\}C^{-1} = \sum_{i=1}^{N} c_i > \frac{1}{1+\lambda_i w(s)} < c_i^{+}: \qquad (2.25)$$

<u>ՄԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծություն</u>: Փակ անընդհատ ՄԲԱԿՀ-երի կայունությունը որոշվում է բնութագրիչ հավասարման (2.26) արմատների դասավորվածությամբ՝

$$det\left[1 + w(s)R\right] = \prod_{i=1}^{N}[1+\lambda_i w(s)] = 0 \qquad (2.26)$$

որը, ակնհայտորեն համարժեք է N հավասարումների համակարգին

$$1+\lambda_i w(s) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (2.27)$$

կամ, հաշվի առնելով (2.19)-ը համարժեք է (2.28) հավասարումներին՝

$$D(s) + \lambda_i M(s) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (2.28)$$

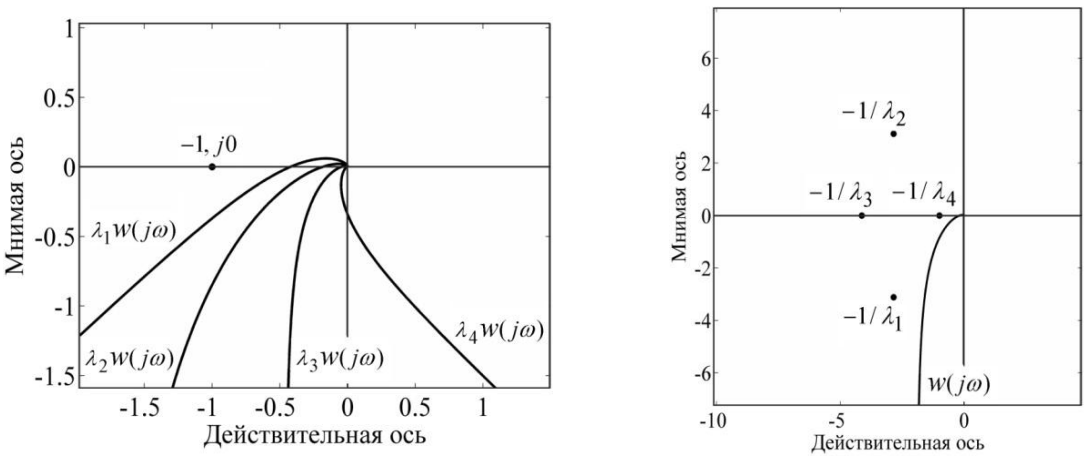
որոնք համընկնում են փակ միաչափ բնութագրիչ համակարգերի բնութագրիչ հավասարումների հետ:

Այն հանգամանքը, որ բաց բնութագրիչ համակարգերի $q_i(s)$ (2.23) փոխանցման ֆունկցիաները տարբերվում են առանձին կապուղիների $w(s)$ ընդհանուր փոխանցման ֆունկցիայից միայն λ_i թվային գործակիցներով, զգալիորեն պարզեցնում են անընդհատ ՄԲԱԿՀ-երի կայունության հետազոտումը: Ընդ որում հնարավոր են Նայքվիստի ընդհանրացված չափանիշի երկու ձևակերպումներ, որոնք հանգեցնում են տարբեր գրաֆիկական կառուցումների: Դրանցից առաջինը ըստ էության համապատասխանում է 2.1-ում բերվածին, միայն այն տարբերությամբ, որ փակ ՄԲԱԿՀ-ի կայունության համար պահանջվում է, որ ω հաճախության $-\infty$-ից մինչև $+\infty$ փոփոխման դեպքում յուրաքանչյուր $\lambda_i w(j\omega)$ բնութագրիչ հետագծերի

$(-1, j0)$ կրիտիկական կետի նկատմամբ (դրական ուղղությամբ) ժամ սլաքի ուղղությանը հակառակ շրջանցումների գումարը հավասար լինի k_0-ի, որտեղ k_0-ն՝ $w(s)$ փոխանցման ֆունկցիաների աջ բևեռների քանակն է: Ըստ այս ձևակերպման՝ կոմպլեքս հարթության վրա կառուցվում է $\lambda_i w(j\omega)$ N հետագծերի համախումբ, և վերլուծվում է դրանց դիրքը $(-1, j0)$ կետի նկատմամբ: Ըստ երկրորդ ձևակերպման՝ (2.27) հավասարումը գրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$w(s) = -\frac{1}{\lambda_i}, \; i = 1, 2, \ldots, N \quad : \tag{2.29}$$

Ընդ որում կոմպլեքս հարթության վրա կառուցվում է անընդհատ ՄԲԱԿՀ-ի մեկ առանձին կապուղու փոխանցման ֆունկցիայի՝ $w(j\omega)$, ամպլիտուդա-փուլային բնութագիրը և նշվում են N հատ $-1/\lambda_i$ կրիտիկական կետեր: Այս դեպքում փակ ՄԲԱԿՀ-ի կայունության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ $w(j\omega)$ հետագիծը ընդգրկի $-1/\lambda_i$ N կետերից յուրաքանչյուրին դրական ուղղությամբ k_0 անգամ: $w(s)$-ի կայունության դեպքում, այսինքն երբ $k_0 = 0$, Նայքվիստի երկու գրաֆիկները ներկայացված են նկ.2.10-ում:



ա) Ուղիղ ձև բ) հակադարձ ձև

Նկ.2.10. Անընդհատ ՄԲԱԿՀ -ի կայունության հետազոտումը Նայքվիստի չափանիշի օգնությամբ $(N = 4)$

2.4. Բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաները և նորմալ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումը

<u>Նորմալ ԲԱԿՀ-եր:</u> Նորմալ ԲԱԿՀ-երը կազմում են բազմաչափ կառավարման համակարգերի կարևոր մաս՝ իրենց հատուկ հատկանիշներով ու բնութագրերով [59,60,61,62]: Նորմալ է անվանվում այն ԲԱԿՀ-ը, որում բաց համակարգի $W(s)$ փոխանցման մատրիցը նորմալ է, այսինքն տեղափոխելի է իր համալուծ (այսինքն կոմպլեքս-համալուծ և տրանսպոնացված) մատրիցի հետ՝

$$W(s)W^*(s) = W^*(s)W(s): \tag{2.30}$$

Ինչպես հայտնի է, $W(s)$-ի նորմալ լինելուց բխում է փակ ԲԱԿՀ-ի ըստ ելքի՝ $\Phi(s)$ և ըստ սխալի՝ $\Phi_\varepsilon(s)$ փոխանցման մատրիցների նորմալ լինելը, և հակառակը՝ $\Phi(s)$ կամ $\Phi_\varepsilon(s)$ նորմալ լինելուց բխում է $W(s)$ -ի նորմալ լինելը: Այլ կերպ ասած՝ (2.30)-ի հետ միասին կարելի է գրել անընդհատ ԲԱԿՀ-ի նորմալության երկու հավասարազոր պայմաններ՝

$$\Phi(s)\Phi^*(s) = \Phi^*(s)\Phi(s) \text{ և } \Phi_\varepsilon(s)\Phi_\varepsilon^*(s) = \Phi_\varepsilon^*(s)\Phi_\varepsilon(s) : \tag{2.31}$$

Նորմալ անընդհատ ԲԱԿՀ-ի հիմնական, սկզբունքային առանձնահատկությունը կայանում է դրանց կանոնական բազիսի օրթոգոնալության մեջ: Բացի այդ՝ նորմալ ԲԱԿՀ-ի երկակի բազիսը նույնպես հանդիսանում է օրթոգոնալ և համընկնում է կանոնականի հետ [13,44]:

Հաշվի առնելով կանոնական բազիսի ուղղանկյունությունը՝ նորմալ անընդհատ ԲԱԿՀ-ի $C(s)$ մոդալ մատրիցը դասվում է միատարր մատրիցների դասին, որոնց համար $C^{-1}(s) = C^*(s)$: Ելնելով վերը նշվածից և հաշվի առնելով, որ երկակի բազիսը համընկնում է կանոնականի հետ (այսինքն՝ $c_i^+(s) = c_i(s)$), նորմալ ԲԱԿՀ-ի փոխանցման մատրիցների կանոնական ներկայացումը դիադային նշանակումների և նմանության ձևափոխության օգնությամբ, կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$W(s) = C(s)\,diag\{q_i(s)\}C^*(s) = \sum_{i=1}^{N} c_i(s) > q_i(s) < c_i(s)\,, \tag{2.32}$$

$$\Phi(s) = C(s)\,diag\left\{\frac{q_i(s)}{1+q_i(s)}\right\}C^*(s) = \sum_{i=1}^{N} c_i(s) > \frac{q_i(s)}{1+q_i(s)} < c_i(s)\,, \tag{2.33}$$

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = C(s)\, diag\left\{\frac{1}{1+q_i(s)}\right\} C^*(s) = \sum_{i=1}^{N} c_i(s) > \frac{1}{1+q_i(s)} < c_i(s): \qquad (2.34)$$

Նորմալ համակարգերի դասին են պատկանում ցիրկուլյանտ, հակացիրկուլյանտ, պարզ համաչափ ԲԱԿՀ-երը, այդ թվում նաև մեծ կիրառական նշանակություն ունեցող երկչափ սիմետրիկ և հակասիմետրիկ համակարգերը [18,22,25,34,54,62,71,72,73,74]:

<u>Անընդհատ ցիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-եր:</u> Անընդհատ ցիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-երի հիմնական հատկությունը $W(s)$, $\Phi(s)$ և $\Phi_{\varepsilon}(s)$ փոխանցման մատրիցների ցիրկուլյանտությունն է: Ինչպես հայտնի է, ցիրկուլյանտ մատրիցում յուրաքանչյուր հաջորդ տող կրկնում է նախորդ տողի բոլոր տարրերը մեկ տարրով դեպի աջ տեղաշարժվելով (բացի N-ից): Ընդ որում նախորդ տողի N-րդ տարրը դառնում է հաջորդի առաջին տարր [4,6,42,67,69]: $W(s)$ մատրիցի համար այն ունենում է հետևյալ տեսքը՝

$$W(s) = \begin{pmatrix} w_0(s) & w_1(s) & w_2(s) & \ldots\ldots & w_{N-1}(s) \\ w_{N-1}(s) & w_0(s) & w_1(s) & \ldots\ldots & w_{N-2}(s) \\ w_{N-2}(s) & w_{N-1}(s) & w_0(s) & \ldots\ldots & w_{N-3}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1(s) & w_2(s) & w_3(s) & \ldots\ldots & w_0(s) \end{pmatrix}: \qquad (2.35)$$

Պարզ է, որ ցանկացած ցիրկուլյանտ մատրից ամբողջությամբ որոշվում է դրա առաջին տողով: Օգտվելով $W(s)$ ցիրկուլյանտ մատրիցի առաջին տողի տարրերի (2.35)-ում ընդունված $w_0(s), w_i(s)$ նշանակումներից՝ այն կարելի է գրել հետևյալ մատրիցային բազմանդամի տեսքով՝

$$W(s) = w_0(s)I + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(s)U^k \qquad (2.36)$$

որտեղ՝ I-ն միավոր մատրից է, իսկ

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.37)$$

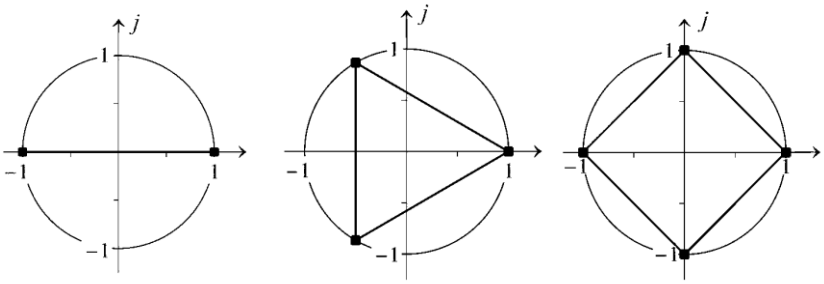
տեղափոխման օրթոգոնալ մատրից է: U տեղափոխման մատրիցի (2.37) β_i սեփական արժեքները հանդիսանում են

$$\det[\beta I - U] = \beta^N - 1 = 0 \qquad (2.38)$$

բնութագրիչ հավասարման արմատներ և ցանկացած N -ի դեպքում հավասար են՝

$$\beta_i = \exp\left\{ j\frac{2\pi(i-1)}{N} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad : \qquad (2.39)$$

β_i արմատները (2.39) երկրաչափորեն գտնվում են կոմպլեքս հարթության վրա՝ կանոնավոր N բազմանկյան գագաթներում, որը գտնվում է միավոր շառավղով շրջանագծի մեջ, ընդ որում β_1 առաջին արմատը միշտ իրական է և հավասար է մեկի (նկ.2.11): Նշենք նաև, որ U տեղափոխման մատրիցի C մոդալ մատրիցը, հանդիսանում է ունիտարր, այսինքն $C^{-1} = C^*$:



ա) $N = 2$, բ) $N = 3$, գ) $N = 4$

Նկ.2.11. Տեղափոխման U մատրիցի (2.37) սեփական արժեքները

[18]-ում ցույց է տրված, որ $W(s)$ ցիրկուլյանտ մատրիցի (2.36) $q_i(s)$ ԲՓՖ-երը ցանկացած N -ի դեպքում ներկայացվում են անալիտիկ ձևով՝

$$q_i(s) = w_0(s) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(s) \exp\left\{ j\frac{2\pi(i-1)}{N}k \right\}, \qquad i = 1, 2, \dots, N : \qquad (2.40)$$

$q_i(s)$-ի ԲՓՖ անալիտիկ ձևով գրելու հնարավորությունը, ցանկացած N -ի դեպքում, զգալիորեն պարզեցնում է ՑԲԱԿՀ-ի հետազոտումը: Կարևոր է նշել, որ ՑԲԱԿՀ կանոնական բազիսները կախված չեն s կոմպլեքս փոփոխականից և նույնն են միևնույն N չափողականության բոլոր համակարգերի համար՝ անկախ $w_0(s)$ և $w_k(s)$ $(k = 1, 2, \dots, N-1)$ փոխանցման ֆունկցիաների տեսքից:

<u>Պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-ներ:</u> Սիմետրիկ ՑԲԱԿՀ-երի մեջ հատուկ տեղ են զբաղեցնում պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-ները, որոնցում բոլոր փոխադարձ կապերի փոխանցման ֆունկցիաները համընկնում են, այսինքն՝

$$w_k(s) = w_1(s), \qquad k = 2, \dots, N-1 \qquad (2.41)$$

Պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-երի կարևոր առանձնահատկությունը միայն երկու տարբեր ԲՓՖ-եր ունենալն է: (2.42)-ը տեղադրելով (2.41)-ում, պարզ ձևափոխություններից հետո ստացվում է՝

$$q_1(s) = w_0(s) + (N-1)w_1(s), \tag{2.42}$$

$$q_2(s) = q_3(s) = ... = q_N(s) = w_0(s) - w_1(s): \tag{2.43}$$

Այսպիսով, անկախ N քանակից պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-ում կարելի է առանձնացնել միայն երկու՝ միմյանցից տարբերվող միաչափ բնութագրիչ համակարգեր: Կառավարման տեսությունում $q_1(s)$ ֆունկցիաները (2.42) հաճախ անվանում են միջինացված շարժման փոխանցման ֆունկցիաներ, իսկ մնացածները (2.43)՝ հարաբերական շարժման փոխանցման ֆունկցիաներ:

<u>Հակացիրկուլյանտ ԲԱԿՀ:</u> Նորմալ անընդհատ ԲԱԿՀ-ի վերջին տեսակը, որը կարելի է վերագրել առանձին ենթադասի, կրում է հակացիրկուլյանտ ԲԱԿՀ (ՀԲԱԿՀ) անվանումը [62,67]: Այս ԲԱԿՀ-ին են դասվում $W(s)$, $\Phi(s)$ և $\Phi_\varepsilon(s)$ հակացիրկուլյանտ փոխանցման մատրիցներով համակարգերը: Հակացիրկուլյանտ և ցիրկուլյանտ մատրիցների հիմնական տարբերությունը կայանում է նրանում, որ գլխավոր անկյունագծի երկու կողմերում գտնվող սիմետրիկ տարրերն ունեն հակադիր նշաններ, այսինքն յուրաքանչյուր հաջորդ տող ստացվում է նախորդից մեկ տարր աջ տեղաշարժվելով, ընդ որում նախորդ տողի վերջին տարրը դառնում է հաջորդի առաջին տարրը հակադիր նշանով: Այսպես, $W(s)$ անընդհատ բաց համակարգի հակացիրկուլյանտ փոխանցման մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$W(s) = \begin{pmatrix} w_0(s) & w_1(s) & w_2(s) & ..... & w_{N-1}(s) \\ -w_{N-1}(s) & w_0(s) & w_1(s) & ..... & w_{N-2}(s) \\ -w_{N-2}(s) & -w_{N-1}(s) & w_0(s) & ..... & w_{N-3}(s) \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ -w_1(s) & -w_2(s) & -w_3(s) & ..... & w_0(s) \end{pmatrix}: \tag{2.44}$$

Եթե ցիրկուլյանտ մատրիցներից պարզագույնը հանդիսանում է U տեղափոխմամբ մատրիցը (2.37), ապա հակացիրկուլյանտ մատրիցի դեպքում նման դեր խաղում է հակացիրկուլյանտ տեղափոխման մատրիցը, որը նշանակվում է U_--ով և ունի հետևյալ տեսքը՝

$$U_{-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.45)$$

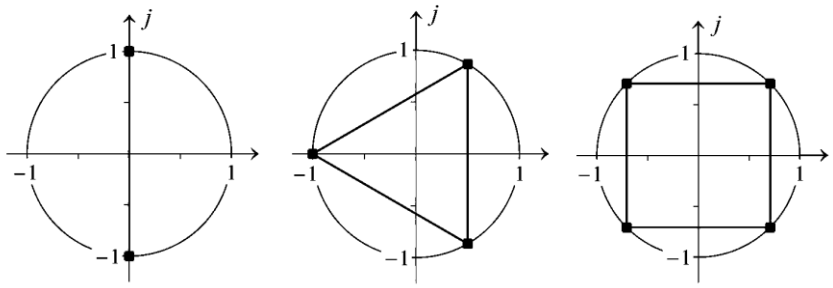
U_{-} (2.46) մատրիցի բնութագրիչ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\det[\beta I - U_{-}] = \beta^{N} + 1 = 0, \qquad (2.46)$$

իսկ դրա β_i արմատները՝

$$\beta_i = \exp\left\{ j\frac{[2(i-1)+1]\pi}{N} \right\}, \qquad i = 1, 2, \dots, N, \qquad (2.47)$$

ցանկացած N-ի դեպքում գտնվում են կոմպլեքս հարթության վրա՝ կանոնավոր N բազմանկյան գագաթներում,ինչպես ցույց է տրված նկ. 2.12-ում՝



ա) $N = 2$ բ) $N = 3$ գ) $N = 4$

Նկ.2.12. U_{-} տեղափոխման մատրիցի սեփական արժեքները՝ վերջին տարրի նշանի փոփոխությամբ

Ցանկացած (2.45) հակացիրկուլյանտ մատրից կարող է ներկայացվել ($N-1$) աստիճանի բազմանդամի տեսքով՝

$$W(s) = w_0(s)I + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(s)U_{-}^{k}, \qquad (2.48)$$

ընդ որում, ՀԲԱԿՀ (Հակացիրկուլյանտ ավտոմատ կառավարման բազմաչափ համակարգեր) N կենտ կարգի համար (որոնք ներկայացնում են հիմնական հետաքրքրությունը), (2.48) արտահայտությունը հարմար է ներկայացնել այլ կերպ՝

$$W(s) = w_0(s)I + w_{N/2}(s)U_{-}^{N/2} + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} [w_k(s)U_{-}^{k} - w_{N-k}(s)(U_{-}^{k})^{-1}]: \qquad (2.49)$$

Մատրիցների բազմանդամների հայտնի առանձնահատկությունների հիման վրա՝ ՀԲԱԿՀ-ի $q_i(s)$ ԲՓՖ-երը համակարգի ցանկացած N չափի դեպքում կարելի է ներկայացել հետևյալ անալիտիկ ձևով՝

$$q_i(s) = w_0(s) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(s) \exp\left\{ j \frac{[2(i-1)+1]\pi}{N} k \right\}, \qquad i = 1, 2, \dots, N, : \qquad (2.50)$$

Հակասիմետրիկ փոխադարձ կապերով երկչափ համակարգերի մասնավոր, սակայն շատ կարևոր դեպքում (2.50)-ից բխում է հայտնի արտահայտությունը՝

$$q_{1,2}(s) = w_0(s) \pm j\, w_1(s) : \qquad (2.51)$$

Եզրակացություն II գլխի վերաբերյալ

Տրված է բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների՝ տարբեր կառուցվածքային դասերի անընդհատ ԲԱԿՀ-երի վրա կիրառման հակիրճ նկարագրություն: Այդ մեթոդը թույլ է տալիս կապ ստեղծել անընդհատ N մուտքերով և N ելքերով ԲԱԿՀ-երի և N հատ, այսպես կոչված, միաչափ բնութագրիչ համակարգերի հետ, որոնցից յուրաքանչյուրը մուտքային և ելքային վեկտորական ազդակների N-չափանի կոմպլեքս տարածության մեջ ազդում է միայն մեկ ուղղությամբ (կանոնական բազիսի մեկ առանցքով):

ԳԼՈՒԽ 3.

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏԵՍՔԻ ԴԻՍԿՐԵՏ ԲԱԿՀ-ԵՐԻ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆ ՈՒ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

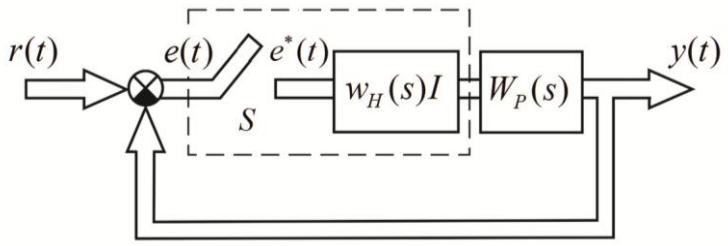
Բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների մեթոդը գլուխ 3-ում տարածվել է ընդհանուր տեսքի գծային դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի վրա՝ կիրառելով z- և ϖ-ձևափոխությունները [31,114,123]:

3.1. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի ուսումնասիրությունը z-տիրույթում

3.1.1. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի կանոնական նկարագրությունը

N մուտքերով և N ելքերով ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի մատրիցային կառուցվածքային սխեման ներկայացված է նկ.3.1.1-ում՝ որտեղ $r(t), y(t), e(t)$-համապատասխանաբար N-չափանի մուտքի, ելքի և սխալի վեկտորներն են, $W_P(s)=\{w_{kr}^P(s)\}$-ը $w_{kr}^P(s)$ $(k,r=1,2,...,N)$ տարրերով $N\times N$ չափանի անընդհատ կարգավորվող օբյեկտի քառակուսային փոխանցման մատրիցն է, որը s կոմպլեքս փոփոխականով կոտորակա-ռացիոնալ փոփոխական է, S-ը՝ N- չափանի իմպուլսային տարր է T_S ընդհատման պարբերությամբ, որը նկարագրում է ԲԱԿՀ-ի առանձին ալիքներում N սինքրոն իդեալական բանալիներով, I-ն՝ $N\times N$ չափանի միավոր մատրից է, $w_H(s)$-ը զրոյական կարգի էքստրապոլյատորի անընդհատ ֆունկցիան է ԲԱԿՀ-ի առանձին կապուղիներում, որն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$w_H(s)=\frac{1-\exp(-sT_S)}{s}: \tag{3.1.1}$$

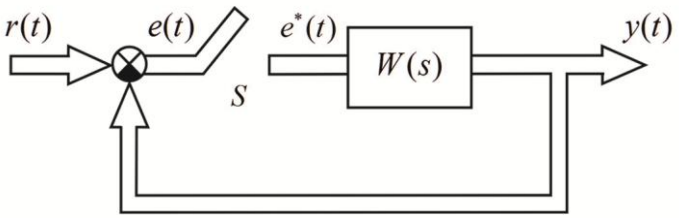


Նկ. 3.1.1. N մուտքերով և N ելքերով ընդհանուր տեսքի գծային դիսկրետ ԲԱԿՀ

$W_P(s)$ մատրիցի գլխավոր անկյունագծի $w_{rr}^P(s)$ տարրերն իրենցից ներկայացնում են դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի անընդհատ մասի առանձին կապուղիների հաճախականային

ֆունկցիաներ, իսկ $w_{kr}^{P}(s)$ $(k \neq r)$-ը՝ r-րդ կապուղղուց դեպի k-րդ կապուղու փոխանցման ֆունկցիաներ: Նշենք, որ $W_P(s)$ փոխանցման մատրիցը ընդհանուր դեպքում կարող է նկարագրել ոչ միայն N-չափանի կարգավորման օբյեկտը, այլ նաև համակարգի հնարավոր անընդհատ ուղղումները:

Ինչպես մեկ մուտքով և մեկ ելքով դիսկրետ համակարգերի դեպքում, զրոյական կարգի էքստրապոլյատորները դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի առանձին կապուղիներում վերաբերվում են համակարգի անընդհատ մասին [62,123]: Այդ դեպքում նկ. 3.1.1-ի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կառուցվածքային սխեման կներկայացվի S իդեալական իմպուլսային բանալու միջոցով և կընդունի հետևյալ տեսքը (նկ. 3.1.2)՝



Նկ. 3.1.2. Դիսկրետ ԲԱԿՀ՝ անընդհատ մասով և իդեալական իմպուլսային բանալիով

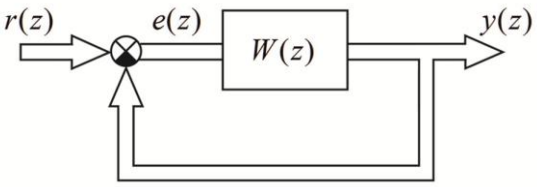
$$W(s) = w_H(s) W_P(s), \tag{3.1.2}$$

դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի բերված (ընդհանրացված) անընդհատ մասի փոխանցման մատրիցն է $w_{kr}(s)$ տարրերով՝ $w_{kr}(s) = w_{kr}^{P}(s) w_H(s)$ $k, r = 1, 2, ..., N$: Այս կերպ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կառուցվածքային սխեման (նկ. 3.1.1) բերվել է ստանդարտ տեսքի, որը կարելի է օգտագործել կանոնական նկարագրության և գծային դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի ուսումնասիրման համար:

Նկ.3.1.2-ում z-ձևափոխության կիրառումը դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի վրա հանգեցնում է նկ.3.2.1-ի մատրիցային կառուցվածքային սխեմայի, որտեղ $W(z)$ մատրիցը կազմված է $w_{kr}(z)$ կոտորակա-ռացիոնալ փոխանցման ֆունկցիաներից, որոնք հաշվվում են $w_{kr}(t)$ կշռային ֆունկցիայի միջոցով z-ձևափոխությամբ՝

$$w_{kr}(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} w_{kr}(kT_S) z^{-k}, \quad k, r = 1, 2, ..., N \tag{3.1.3}$$

Նույն կերպ որոշվում են նաև $r(z), y(z), e(z)$ վեկտորները, $r(t), y(t), e(t)$ վեկտոների $r_i(t), y_i(t), e_i(t)$ ($i = 1, 2, ..., N$) բաղադրիչների միջոցով:



Նկ. 3.1.3. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի մատրիցային կառուցվածքային սխեման z-ձևափոխության տիրույթում

Ցույց տանք, որ նկ. 3.1.3-ի կառուցվածքային սխեման նկարագրում է N-չափանի $r(t)$, $y(t)$ և $e(t)$ վեկտորները միայն ժամանակի $t = kT_S$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ դիսկրետ պահերին, այսինքն՝ ենթադրվում է, որ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի ելքի վրա առկա է կեղծ N-չափանի S_1 իմպուլսային բանալի, որը սինքրոն կերպով աշխատում է S բանալու հետ:

Դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի $y(z)$ ելքի և $e(z)$ սխալի վեկտորները (նկ.3.2.1), կապված են մուտքի $r(z)$ վեկտորի հետ հետևյալ կերպ՝

$$e(z) = r(z) - y(z), \tag{3.1.4}$$

$$y(z) = \Phi(z) r(z), \qquad e(z) = \Phi_e(z) r(z), \tag{3.1.5}$$

որտեղ՝

$$\Phi(z) = \left[I + W(z)\right]^{-1} W(z) \tag{3.1.6}$$

$$\Phi_e(z) = \left[I + W(z)\right]^{-1} \tag{3.1.7}$$

$\Phi(z)$ և $\Phi_e(z)$-ը փակ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի բնութագրիչ ֆունկցիաներ են, համապատասխանաբար ըստ ելքի և սխալի: (3.1.8) մատրիցը (3.1.6), (3.1.7) հավասարումներում կոչվում է դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի *վերադարձի տարբերութային մատրից* (return difference matrix):

$$\Delta(z) = I + W(z) \tag{3.1.8}$$

Դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի $W(z)$ փոխանցման մատրիցի սեփական արժեքները ֆիքսված z-ի դեպքում, այսինքն հավասարման արմատները՝

$$\det[qI - W(z)] = 0, \tag{3.1.9}$$

հանդիսանում են նաև z փոփոխականով կոմպլեքս ֆունկցիաներ: Այդ $q_i(z)$ կոմպլեքս ֆունկցիաները կոչվում են բաց դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաներ (ԲՓՖ): Եթե պարզության համար ընդունենք, որ բոլոր $q_i(z)$ ($i = 1, 2, ..., N$)

բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաները տարբեր են, ապա $W(z)$ մատրիցի $c_i(z)$ $[|c_i(z)|=1]$ սեփական վեկտորները կլինեն գծայնորեն անկախ, և կձևավորեն N-չափանի C^N կոմպլեքս տարածության բազիս: Տվյալ բազիսը կոչվում է դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կանոնական բազիս: Կազմելով $c_i(z)$ վեկտորներից բաղկացած $C(z)=[c_1(z)\ c_2(z)\ \dots\ c_N(z)]$ մոդալ մատրիցը, դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի $W(z)$ փոխանցման մատրիցը, ինչպես անընդհատ ԲԱԿՀ-ի դեպքում, կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևափոխության տեսքով՝

$$W(z)=C(z)\,diag\{q_i(z)\}C^{-1}(z)=\sum_{i=1}^{N}c_i(z)>q_i(z)<c_i^{+}(z): \qquad (3.1.10)$$

Վերջին արտահայտությունը տեղադրելով $\Phi(z)$ (3.1.8) և $\Phi_e(z)$ (3.1.7) փոխանցման մատրիցների մեջ, կստանանք

$$\Phi(z)=C(z)\,diag\left\{\frac{q_i(z)}{1+q_i(z)}\right\}C^{-1}(z)=\sum_{i=1}^{N}c_i(z)>\frac{q_i(z)}{1+q_i(z)}<c_i^{+}(z)\ , \qquad (3.1.11)$$

$$\Phi_e(z)=C(z)\,diag\left\{\frac{1}{1+q_i(z)}\right\}C^{-1}(z)=\sum_{i=1}^{N}c_i(z)>\frac{1}{1+q_i(z)}<c_i^{+}(z)\,, \qquad (3.1.12)$$

որտեղ ԲԱԿՀ-ի ԲՓՖ-երը՝

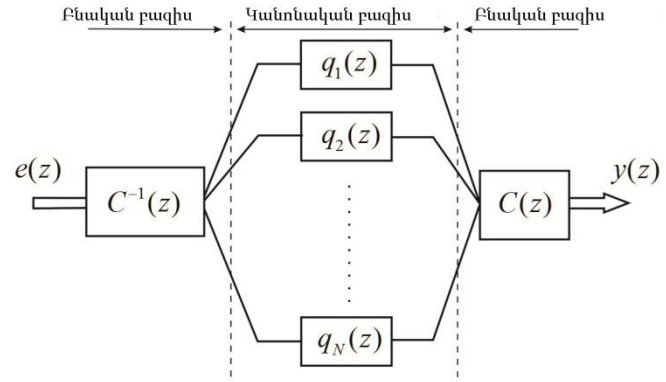
$$\Phi_i(z)=\frac{q_i(z)}{1+q_i(z)}\,,\qquad \Phi_{ei}(z)=\frac{1}{1+q_i(z)}\,,\quad i=1,2,\dots,N,, \qquad (3.1.13)$$

կապված են բաց դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի $q_i(z)$ ԲՓՖ-երի հետ նույն կախվածությամբ, ինչ սովորական z- ձևափոխության ֆունկցիաները փակ և բաց մեկ մուտքով և մեկ ելքով դիսկրետ համակարգերի դեպքում:

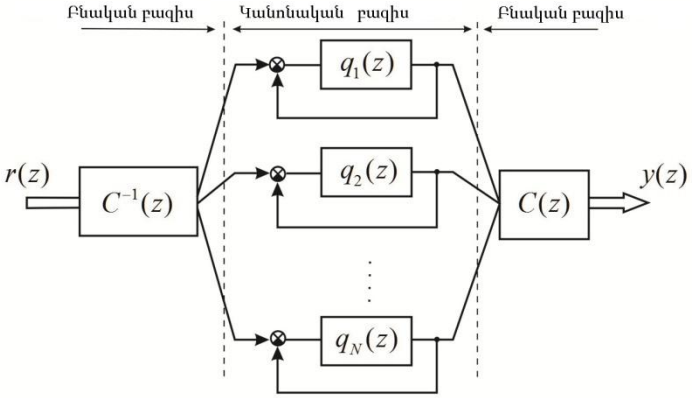
(3.1.10)-(3.1.13) արտահայտություններից երևում է, որ ինչպես միավոր հետադարձ կապով անընդհատ ԲԱԿՀ-երի դեպքում, $C(z)$ մոդալ մատրիցը և փակ ու բաց ԲԱԿՀ-երի կանոնական բազիսները համընկնում են:

Ակնհայտ է, որ անընդհատ ԲԱԿՀ-երի երկրաչափական կառուցվածքը համապատասխանում է դիսկրետ ԲԱԿՀ-երին: Այսինքն, $q_i(z)$, $\Phi_i(z)$ և $\Phi_{ei}(z)$ ԲՓՖ-երը կարելի է համարել որոշ միաչափ բնութագրիչ համակարգերի փոխանցման ֆունկցիաներ, որոնցից յուրաքանչյուրը գործում է N-չափանի C^N կոմպլեքս տարածությունում կանոնական բազիսի $c_i(z)$ առանցքի ուղղությամբ: Այլ կերպ ասած, դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կանոնական բազիսի առանցքները որոշում են C^N տարածության

այն N ուղղությունները, որոնց ուղղությամբ ԲԱԿՀ-երը գործում են որպես որոշակի ենթադրյալ միաչափ համակարգեր: Վերջինս սխեմատիկորեն մեկնաբանվում է նկ. 3.1.4-ում և 3.1.5-ում պատկերված կառուցվածքային սխեմաների միջոցով:



Նկ. 3.1.4. Բաց դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի կանոնական ներկայացումը նմանության ձևափոխության միջոցով



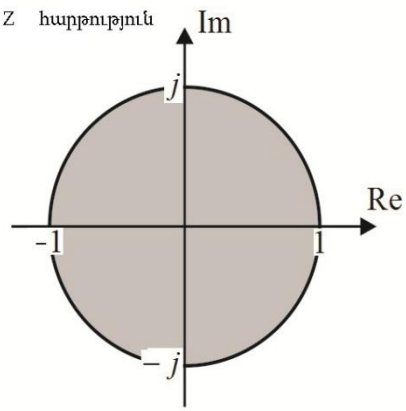
Նկ. 3.1.5. Փակ դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի կանոնական ներկայացումը նմանության ձևափոխության միջոցով

3.1.2. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծությունը

Նկ. 3.1.1-ի փակ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ բնութագրիչ հավասարման արմատները՝

$$\det[I + W(z)] = 0 \tag{3.1.14}$$

ընկած լինեն z կոմպլեքս հարթության միավոր շրջանագծի ներսում (Նկ. 3.1.6) [62,108]:



Նկ. 3.1.6. Դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի կայունության տիրույթը

Օգտվելով բաց դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի $W(z)$ փոխանցման մատրիցի կանոնական ներկայացումից, (3.1.10) նմանության ձևափոխության օգնությամբ (3.1.14) հավասարումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\det[I + W(z)] = \prod_{i=1}^{N}[1 + q_i(z)] = 0: \qquad (3.1.15)$$

(3.1.15) արտահայտությունից երևում է, որ N-չափանի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի բնութագրիչ հավասարումը տարածվում է միաչափ բնութագիչ համակարգերի N-համապատասխան հավասարումների վրա՝

$$1 + q_i(z) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., N \qquad (3.1.16)$$

Ուստի նկ.3.1.1-ի դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի կայունության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ կայուն լինեն փակ համակարգի բոլոր բնութագրիչ համակարգերը: Այսպիսով, ԲՓՖ-ի մեթոդը հնարավորություն է տալիս N-չափանի դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի կայունության հետազոտումը բերել N հատ միաչափ բնութագրիչ հավասարումների կայունության ուսումնասիրմանը, այսինքն՝ N-չափանի խնդիրը բերվում է N հատ միաչափ խնդիրների [13,49,110,112,123]:

Բնութագրիչ համակարգերի կայունության վերլուծության համար կարելի է կիրառել մեկ մուտքով և ելքով կառավարման դիսկրետ համակարգերի կայունության հաճախականային հայտնի չափանիշներից ցանկացածը: Այնուամենայնիվ, գործնականում օգտագործման համար, ամենահարմարը Նայքվիստի չափանիշն է (միաչափ դիսկրետ համակարգերի նկարագրությունը ներկայացված է գլուխ 1.1-ում): Կառուցենք բաց դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի $q_i(z)$ $(i = 1, 2, ..., N)$ ԲՓՖ-ի Նայքվիստի

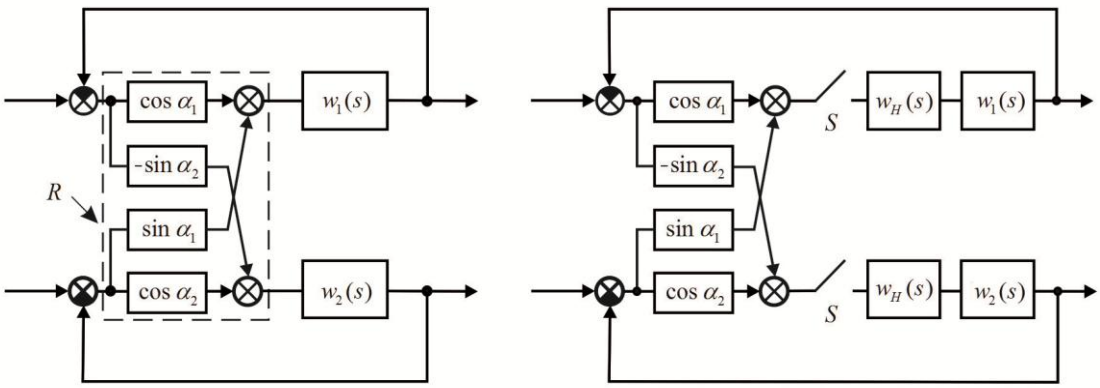
հետագծերը կոմպլեքս հարթությունում՝ ω հաճախության 0-ից ω_S փոփոխման դեպքում (երբ z-ը շարժվում է z-հարթության միավոր շրջանագծի երկայնքով): Այդ դեպքում, եթե բաց դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի բնութագրիչ հավասարումը ունի p հատ բևեռ շրջանագծից դուրս, ապա փակ ԲԱԿՀ-ի կայունության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ $q_i(z)$ հետագծերի անցումների թիվը $(-1, j0)$ կրիտիկական կետի նկատմամբ ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ հավասար լինի p-ի: Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի կայունության GM և PM պաշարները, ինչպես և անընդհատ համակարգերի դեպքում, որոշվում են միաչափ բնութագրիչ համակարգերի ըստ GM_i մոդուլի և ըստ PM_i փուլի ամենափոքր կայունության պաշարով՝ $GM = \min\{GM_i\}$, $PM = \min\{PM_i\}$ [36,47,48,56,57,109,110]:

Օրիանակ 3.1. Դիտարկենք անընդհատ երկչափ համակարգ (նկ. 3.1.5), ենթադրելով, որ բոլոր կապուղիներում իմպուլսային տարրերը աշխատում են սինքրոն, որտեղ $w_1(s)$ և $w_2(s)$ փոխանցման ֆունկցիաները ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$w_1(s) = \frac{50\,(s+3)}{s\,(s+5)(s+10)}, \qquad w_2(s) = \frac{100}{s\,(s+2)(s+4)(s+8)}, \tag{3.1.17}$$

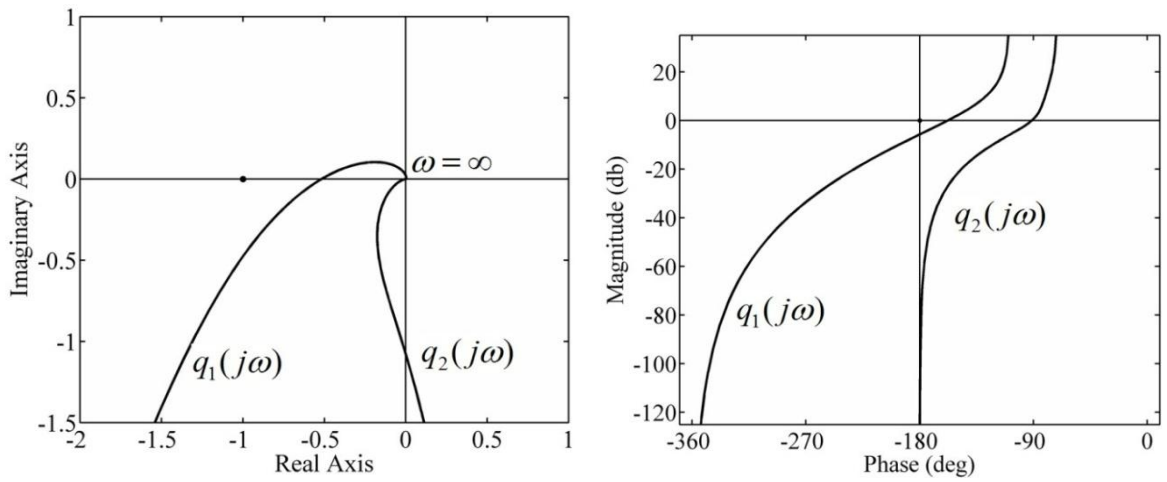
իսկ α_1 և α_2 անկյունները հավասար են՝ $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 20^\circ$: Կապուղիների միջև կոշտ փոխադարձ կապերի R մատրիցը հավասար է՝

$$R = \begin{pmatrix} 0.866 & 0.50 \\ -0.342 & 0.94 \end{pmatrix}: \tag{3.1.18}$$



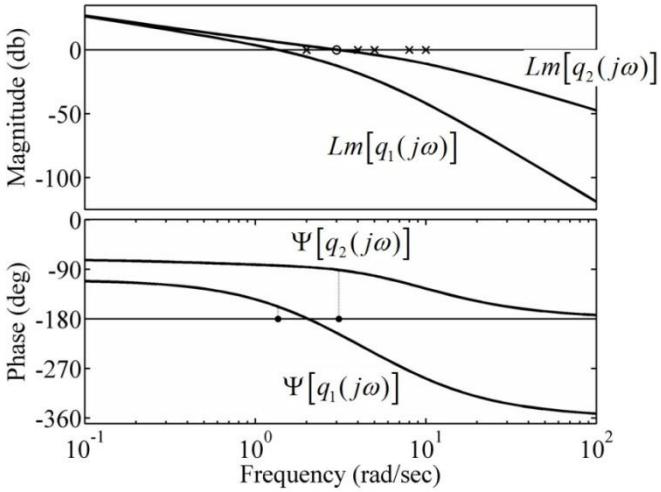
ա) անընդհատ համակարգ բ) դիսկրետ համակարգ

Նկ. 3.1.7. Կարգավորման երկչափ համակարգ

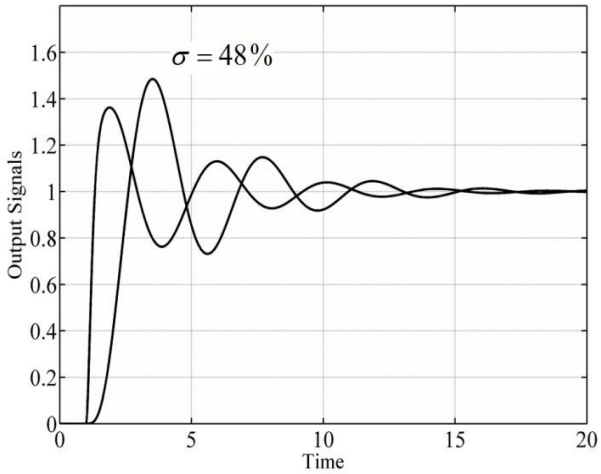


ա) Նայքվիստի հետագծեր բ) Նիքոլսի հետագծեր

Նկ. 3.1.8. Անընդհատ համակարգի կայունության վերլուծությունը



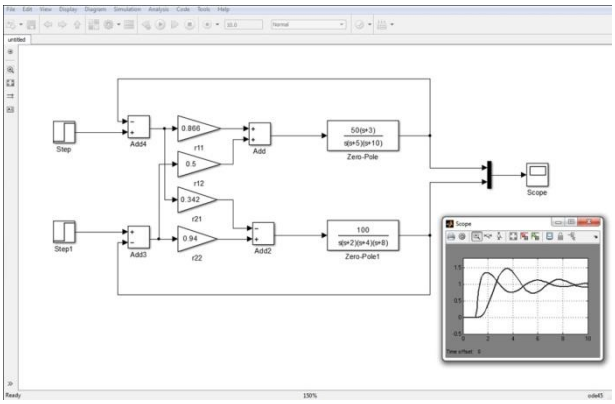
Նկ. 3.1.9. Անընդհատ համակարգի Բոդեի դիագրամները



Նկ. 3.1.10. Անընդհատ համակարգի արձագանքը միավոր թռիչքաձև ազդանշանների դեպքում

Քանի որ առանձին կապուղիների հաճախականային $w_1(s)$ և $w_2(s)$ ֆունկցիաները (3.1.17) տարբեր են, ուստի տվյալ անընդհատ համակարգը վերաբերում է ընդհանուր տեսքի ԲԱԿՀ-երին: Նկ. 3.1.8 և 3.1.9-ում բերված են Նայքվիստի և Նիքոլսի հետագծերը, ինչպես նաև բաց համակարգի $q_i(j\omega)$ $(i = 1, 2)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիայի Բոդեի դիագրամը, որտեղից երևում է, որ փակ համակարգը կայուն է և պաշարները հավասար են՝ $GM = 5.7$ և $PM = 22.17°$: Տվյալ դեպքում այս պաշարները հավասար են առաջին բնութագրիչ համակարգի համապատասխան պաշարներին: Երկչափ համակարգի արձագանքը մուտքային միավոր ազդանշանի դեպքում, երբ $t = 1.0$ վրկ, ներկայացված է նկ.3.1.10-ում: Համակարգի գերկարգավորումը, որն

առանձին կապուղիների գերկարգավորմներից առավելագույնն է, հավասար է $\sigma = 48\%$: Անցումային գործընթացները (Նկ.3.2.8) ստացվել են նկ.3.2.9-ում բերված դինամիկ մոդելի օգնությամբ, *Simulink* փաթեթի միջավայրում [123]:

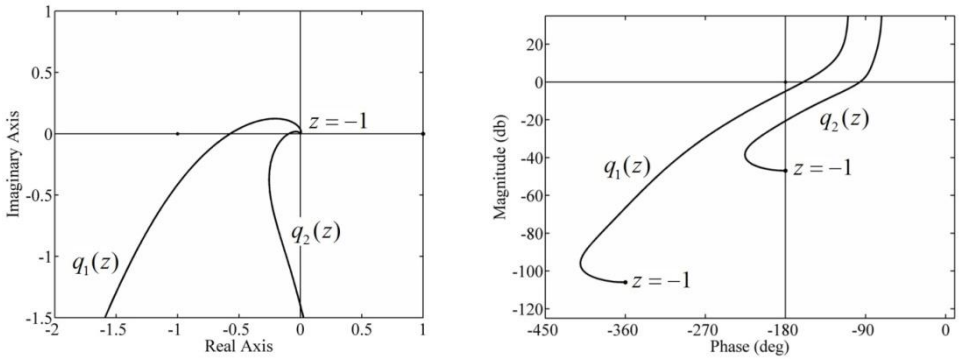


Նկ.3.1.11. Երկչափ անընդհատ համակարգի մոդելը
Simulink փաթեթի միջավայրում

Ենթադրենք, որ երկչափ համակարգի առանձին կապուղիներում ներմուծված են սինքրոն իմպուլսային տարրեր ընդհատման $T_S = 0.06$վրկ պարբերությամբ և զրոյական կարգի $w_H(s)$ (3.1.1) էքստրապոլյատոր: $W_1(s) = w_1(s)w_H(s)$ և $W_2(s) = w_2(s)w_H(s)$ փոխանցման ֆունկցիաների z-ձևափոխություններն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$W_1(z) = \frac{0.071514(z-0.8353)(z+0.7868)}{(z-1)(z-0.7408)(z-0.5488)}$$
$$W_2(z) = \frac{0.00004577(z+8.409)(z+0.8455)(z+0.08497)}{(z-1)(z-0.8869)(z-0.7866)(z-0.6188)} \quad : \qquad (3.1.19)$$

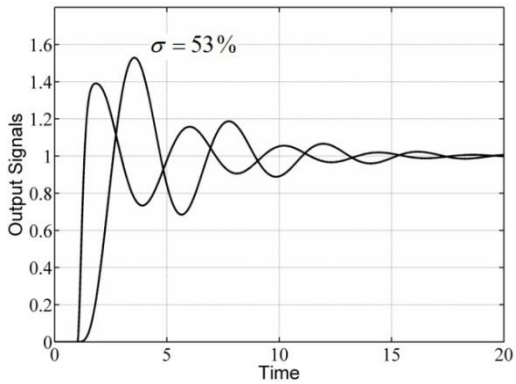
Բաց դիսկրետ համակարգի Նայքվիստի և Նիքոլսի հետագծերը բերված են նկ.3.1.12-ում:



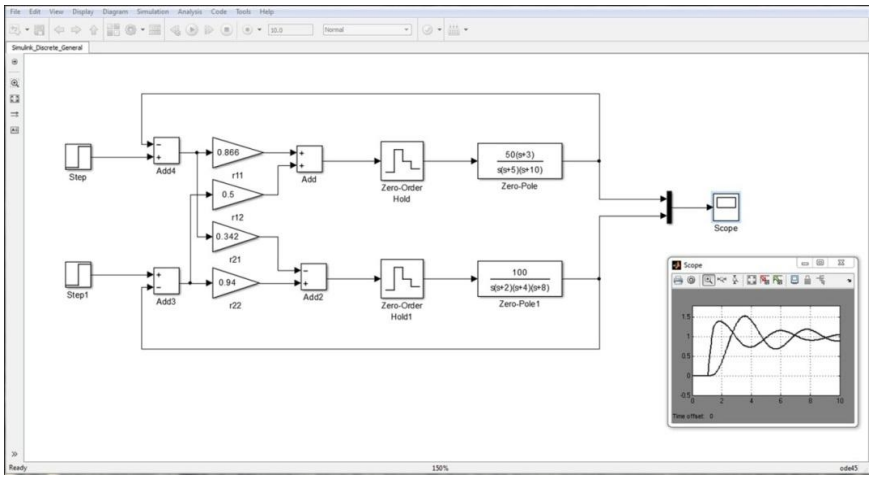
ա) Նայքվիստի հետագծերը բ) Նիքոլսի հետագծերը

Նկ. 3.1.12. Դիսկրետ համակարգի կայունության
վերլուծությունը $T_S = 0.06$ վ դեպքում

Նշենք, որ նկար 3.2.11-ում Բոդեի դիգրամները կառուցված են հաճախության զրոյական արժեքից՝ $\omega = 0$ ($z = 1$) մինչև Նայքվիստի հաճախություն՝ $\omega = \omega_S / 2 = \pi / T_S$ ($z = -1$): ω-ի հետագա մեծացումների դեպքում $Lm[q_i(z)]$ և $\Psi[q_i(z)] = \arg\{q_i(z)\}$ կորերը, որտեղ $z = \exp(j\omega T_S)$, կրկնվում են ω_S պարբերությամբ: Նկ.3.1.13 և նկ.3.1.14 կորերի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ փակ համակարգը կայուն է և ունի $GM = 4.87$ դբ և $PM = 19.84^\circ$ կայունության պաշարներ: Այդ պաշարներն ավելի փոքր են (մոտավորապես 10-15%), քան անընդհատ համակարգի համապատասխան կայունության պաշարները:



Նկ. 3.1.13. Դիսկրետ համակարգի արձագանքը միավոր թռիչքաձև ազդանշանի դեպքում $T_S = 0.06$ վ դեպքում



Նկ. 3.1.14 Երկչափ դիսկրետ համակարգի մոդելը

Դիսկրետ համակարգի արձագանքը միավոր թռիչքաձև ազդանշանի դեպքում բերված է նկ.3.1.13-ում, իսկ դինամիկ մոդելը՝ 3.1.14-ում, որտեղ *Zero-Order Hold* տարրերը մոդելավորում են կատարյալ իմպուլսային տարրեր (բանալիներ) և զրոյական կարգի էքստրապոլյատորներ [50,90,113,115]: Դիսկրետ համակարգում

գերկարգավորումը $T_S = 0.06\,վ$ $(\sigma = 53\%)$ դեպքում ավելի մեծ է, քան անընհատ համակարգերի մոտ, որը ևս բացատրվում է իմպուլսային տարրերի առկայությամբ:

3.1.3. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի տատանողականության ցուցանիշը

Այս ենթագլխում տատանողականության ցուցանիշի հասկացությունը տարածվում է ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի վրա [3,47,85,117,123]: Ինչպես անընդհատի դեպքում, դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշը կարող է որոշվել թե ելքի նկատմամբ, թե՝ սխալի: Ստորև հիմնականում կդիտարկվի վերջին տարբերակը, քանի որ այն տեղեկություն է տալիս ոչ միայն կայունության պաշարի, այլ նաև մուտքային հարմոնիկ ազդեցություններով դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի ճշգրտության մասին:

Դիցուք N-չափանի ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի մուտքի առանձին կապուղիներում (նկ.3.1.1) տրվում են $r_i(t) = r_{Ai}\cos(\omega t + \psi_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ ω նույն հաճախականությամբ հարմոնիկ ազդեցություններ, որտեղ r_{Ai}-ն ըստ փուլի ամպլիտուդն է, իսկ ψ_i -ն՝ սկզբնական տեղաշարժը i-րդ կապուղում: Այդ դեպքում, $e(t)$ սխալի վեկտորը կայունացած վիճակում կունենա նույն ω հաճախականության հարմոնիկ $e_i(t) = e_{Ai}\cos(\omega t + \gamma_i)$ բաղադրիչներ, բայց ուրիշ e_{Ai} ամպլիտուդով և γ_i ըստ փուլի տեղաշարժով: Նկ.3.1.1 –ի դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի z-ձևափոխությունը ներկայացված է նկ.3.1.1-ում, որտեղից էլ $e(z)$ սխալի վեկտորը կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$e(z) = \Phi_e(z)r(z) = [I + W(z)]^{-1}r(z): \tag{3.1.20}$$

(3.1.20) վեկտորական հավասարումը իրար է կապում $e(t)$ և $r(t)$ վեկտորների հաջորդականությունները ժամանակի $t = kT_S$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ դիսկրետ պահին: Հարմոնիկ մուտքային ազդեցությունների դեպքում վերոնշյալ $e(t)$ և $r(t)$ վեկտորական բաղադրիչները ժամանակի $t = kT_S$ դեպքում կայունացած վիճակում կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{gathered} r_i(kT_S) = r_{Ai}\cos(\omega kT_S + \psi_i), \quad e_i(kT_S) = e_{Ai}\cos(\omega kT_S + \gamma_i) \\ i = 1, 2, \ldots, N, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{3.1.21}$$

Եթե դիտարկենք $e_{Ai}\exp\{j\gamma_i\}$ և $r_{Ai}\exp\{j\psi_i\}$ կոմպլեքս ամպլիտուդներից կազմված e_o և r_o վեկտորները, որոնք շրջանցում են սխալների և դիսկրետ ԲԱԿՀ –երի յուրաքանչյուր կապուղու մուտքային ազդեցությունների (3.2.19) իմպուլսները, ապա (3.1.4) և (3.1.7) հիման վրա կարելի է գրել՝

$$e_o = \Phi_e(z)\big|_{z=\exp(j\omega T_S)} r_o = \left[I + W(z)\big|_{z=\exp(j\omega T_S)}\right]^{-1} r_o \qquad (3.1.22)$$

կամ այլ տեսքով՝

$$e_o = \Phi_e[\exp(j\omega T_S)]r_o = \left\{I + W[\exp(j\omega T_S)]\right\}^{-1} r_o \ : \qquad (3.1.23)$$

Հետագայում, e_o և r_o կոմպլեքս ամպլիտուդների վեկտորները կանվանենք սխալի և դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի մուտքային հարմոնիկ ազդեցությունների վեկտորներ:

Օգտվելով դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումից՝ դիադային տեսքով (3.1.12), (3.1.22)-ի փոխարեն կարելի է գրել՝

$$e_o = \sum_{i=1}^{N} c_i[\exp(j\omega T_S)]\left\{\frac{<c_i^+[\exp(j\omega T_S)], r_o>}{1 + q_i[\exp(j\omega T_S)]}\right\} : \qquad (3.1.24)$$

(3.1.23) և (3.1.24) հավասարումների դիտարկումը հնարավորություն է տալիս կատարել հետևյալ հետևությունները՝ հարմոնիկ $\omega = const$ հաճախականությամբ ազդեցությունների ժամանակ յուրաքանչյուր r_o մուտքային վեկտորի ուղղությանը N-չափանի C^N կոմպլեքս տարածությունում համապատասխանում է դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի գծայնության ուժի մեկ խիստ (կոնկրետ) որոշված e_o սխալի վեկտորի ուղղություն, որը կախված չէ r_o վեկտորի «երկարությունից» (Էվկլիդյան նորմ): e_o վեկտորը ներկայացվում է դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի «արձագանքների» գծային կոմբինացիաների տեսքով, նրա կանոնական բազիսի առանցքների ուղղությամբ, ընդ որում $\omega = const$ ֆիքսված հաճախականության դեպքում այդ բազիսը հաստատուն է և ամբողջովին որոշվում է $W(z)$ փոխանցման մատրիցի օգնությամբ: Ընդհանուր դեպքում, r_o մուտքային վեկտորի կամայական ուղղության ժամանակ e_o սխալի վեկտորի ձևավորման մեջ կարող են մասնակցել բոլոր N բնութագրիչ համակարգերը:

Դիսկրետ ԲԱԿՀ–երի ըստ սխալի ընդհանրացված ԱՀԲ-երի *մաժորանտ* ենք անվանում $A^e_{\sup}(\omega)$ ֆունկցիան, որը ω հաճախականության ցանկացած արժեքի համար

հավասար է C^N տարածության $U_r = \{r_o : |r_o| = 1\}$ միավոր գնդի վրա որոշված e_o սխալի վեկտորի մոդուլի վերին ճշգրիտ սահմանին՝

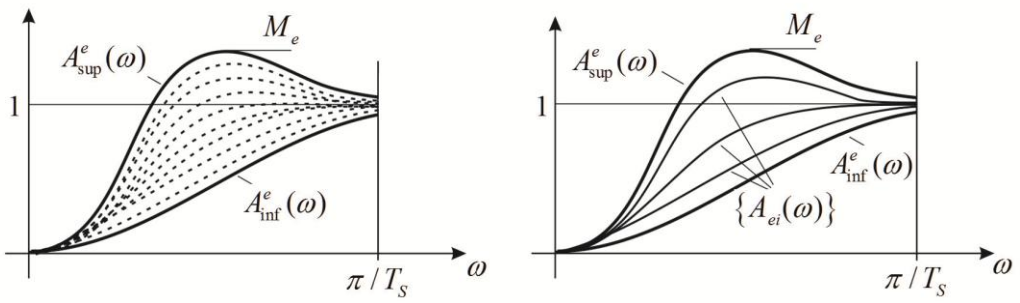
$$A^e_{\sup}(\omega) = \sup_{|r_O|=1} |e_o| = \sup_{|r_O|=1} |\Phi_e[\exp(j\omega T_S)]r_o| \ : \qquad (3.1.25)$$

Անհրաժեշտ է նշել, որ ըստ $A^e_{\sup}(\omega)$ սահմանման (3.1.25), մաժորանտը հավասար է $\Phi_e[\exp(j\omega T_S)]$ մատրիցային օպերատորի *սպեկտրալ նորմին*, այսինքն՝ $A^e_{\sup}(\omega) = \|\Phi_e[\exp(j\omega T_S)]\|$ [34,64,65,69,96]:

Նման ձևով սահմանենք նաև ընդհանրացված ԱՀԲ-երի ըստ սխալի $A^e_{\inf}(\omega)$ *մինորանտը*, որը ω ցանկացած հաճախականության դեպքում հավասար է U_r միավոր գնդի e_o վեկտորի մոդուլի *ճշգրիտ ստորին սահմանին*՝

$$A^e_{\inf}(\omega) = \inf_{|r_O|=1} |e_o| = \inf_{|r_O|=1} |\Phi_e[\exp(j\omega T_S)]r_o| . \qquad (3.1.26)$$

Ըստ էության, $A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտը և $A^e_{\inf}(\omega)$ մինորանտը իրենցից ներկայացնում են երկու *սահմանային կորեր*, որոնք, ինչպես անընդհատ ԲԱԿՀ-երի դեպքում, վերևից և ներքևից ընդգրկում են բոլոր ԱՀԲ-երը r_o մուտքի վեկտորի ցանկացած ուղղության համար, և բնութագրում են հարմոնիկ ազդեցությունների ժամանակ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի առավելագույն և նվազագույն հնարավոր սխալները (Նկ.3.1.14ա):



ա) բ)

Նկ.3.1.15. Դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի ընդհանրացված ԱՀԲ-երը

ա) r_o մուտքային վեկտորի կամայական ուղղությունների համար

բ) $c_i[\exp(j\omega T_S)]$ առանցքների ուղղությունների համար

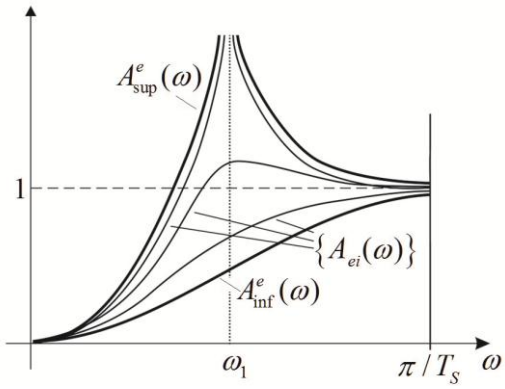
$A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտի և $A^e_{\inf}(\omega)$ մինորանտի հաշվման համար $\omega = const$ դեպքում, անհրաժեշտ է գտնել դրական որոշված Հերմիտյան մատրից՝

$$H(\omega) = \Phi_e[\exp(j\omega T_S)]\{\Phi_e[\exp(j\omega T_S)]\}^* : \qquad (3.1.27)$$

Այդ դեպքում $A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտը և $A^e_{\inf}(\omega)$ մինորանտը հավասար կլինեն $H(\omega)$ մատրիցի նվազագույն ու առավելագույն սեփական արժեքների քառակուսի արմատներին: Եթե մուտքային ազդեցությունների r_o ($|r_o|=1$) միավոր վեկտորը ուղղված է դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի $c_i[\exp(j\omega T_S)]$ կանոնական բազիսի i-րդ առանցքով, ապա (3.1.24)-ից հետևում է, որ ԲԱԿՀ-ում արձագանքում է միայն i-րդ բնութագրիչ համակարգը և e_o սխալի վեկտորը ևս ուղղված է $c_i[\exp(j\omega T_S)]$ առանցքով: Հիմնվելով դրա վրա, կարելի է ներմուծել $A_{ei}(\omega)$ *ընդհանրացված ԱՀԲ-երի հասկացությունը դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կանոնական բազիսի N առանցքների ուղղությամբ*: Այդ բնութագրերը որոշվում են հետևյալ ձևով՝

$$A_{ei}(\omega)=\frac{|e_o|}{|r_o|}=|\Phi_{ei}[\exp(j\omega T_S)]|=\frac{1}{|1+q_i[\exp(j\omega T_S)]|}, \qquad (3.1.28)$$
$$i=1,2,\dots,N$$

որտեղ $r_o=c_i[\exp(j\omega T_S)]$ համընկնում են փակ բնութագրիչ համակարգերի ԱՀԲ-երի հետ: Ակնհայտ է, որ բոլոր $A_{ei}(\omega)$ -երը (3.1.28) վերևից և ներքևից սահմանափակված են $A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտով և $A^e_{\inf}(\omega)$ մինորանտով: Այդ իսկ $A_{ei}(\omega)$ ֆունկցիայի սահմանափակումը $A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտով թույլ է տալիս գնահատել ոչ միայն հարմոնիկ ազդեցությունների ժամանակ ճշգրտությունը, այլ նաև դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության պաշարները: 3.1.2-ում ցույց է տրված, որ եթե ԲԱԿՀ-երը գտնվում են կայունության սահմանին, այսինքն՝ z հարթության մեջ ունեն որոշակի $p=\exp(j\omega_1 T_S)$ արմատ միավոր շրջանագծի վրա, ապա բնութագրիչ համակարգերից որևէ մեկը ևս գտնվում է կայունության սահմանին և ունի նույն p արմատը: Ընդ որում, տեղի ունի $q_i[\exp(j\omega_1 T_S)]=-1$ պայմանը: Այդ պատճառով, $\omega=\omega_1$ -ի դեպքում $A_{ei}(\omega)$ համապատասխան բնութագիրը, և դրա հետ միասին $A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտը, ձգտում են անսահմանության (Նկ. 3.1.16):



Նկ.3.1.16. Դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության սահմանը

Եթե դիսկետ ԲԱԿՀ-ի p արմատը միավոր շրջանագծից տեղափոխվում է ներս, ապա $A^e_{\sup}(\omega)$ ռեզոնանսային արժեքը դառնում է վերջավոր: Հետևաբար, $A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտի ռեզոնանսային արժեքի մեծությունը կարող է ծառայել կայունության պաշարի չափման համար, որն էլ բերում է հետևյալ սահմանմանը՝

դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշ ըստ սխալի վեկտորի կոչվում է e_o վեկտորի մոդուլի ճշգրիտ վերին սահմանը, մուտքային հարմոնիկ ազդեցությունների C^N տարածությունում U_r միավոր շառավղով գնդի վրա, ω հաճախականության 0-ից մինչև $\omega_S/2$ փոփոխման դեպքում:

Կարելի է ասել նաև, որ ըստ սխալի վեկտորի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշ է կոչվում $A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտի ռեզնոնանսային արժեքի մեծությունը՝ ω հաճախականության 0-ից $\omega_S/2$ տատանման ժամանակ: Մաթեմատիկորեն դա արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝

$$M_e = \sup_{0 \le \omega \le \frac{\omega_S}{2}} \{\sup_{|r_O|=1} |\Phi_e[\exp(j\omega T_S)]r_o|\} = \sup_{0 \le \omega \le \frac{\omega_S}{2}} \|\Phi_e[\exp(j\omega T_S)]\| : \qquad (3.1.29)$$

Դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի նախագծման ժամանակ գործնականում խորհուրդ է տրվում M_e մեծությունը վերցնել $1.3 \le M_e \le 2.5 \div 3$ սահմաններում, չնայած երբեմն վերցնում են նաև ավելի մեծ արժեքներ:

Հիմք ընդունելով (3.1.28) արտահայտությունը կարելի է խոսել դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի i-րդ բնութագրիչ հավասարման M_{ei} տատանողականության ցուցանիշի մասին, այսինքն՝

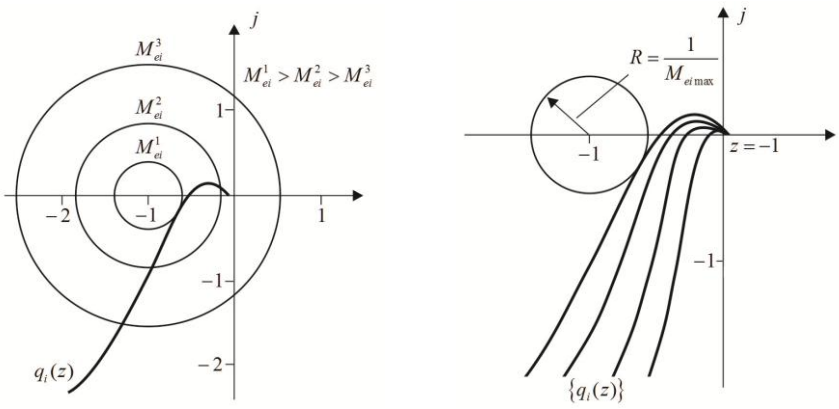
$$M_{ei} = \sup_{0 \le \omega \le \frac{\omega_S}{2}} |\Phi_{ei}[\exp(j\omega T_S)]| = \sup_{0 \le \omega \le \frac{\omega_S}{2}} \frac{1}{|1 + q_i[\exp(j\omega T_S)]|} \quad : \qquad (3.1.30)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

M_{ei} մեծությունը կարելի է անմիջապես գտնել ըստ բաց բնութագրիչ համակարգի $q_i(z) = q_i[\exp(j\omega T_S)]$ Նայքվիստի հետագծի, չկառուցելով $A_{ei}(\omega)$ (3.1.31) ընդհանրացված ԱՀԲ-ն $0 \le \omega \le \omega_S / 2$ հաճախականությունների ամբողջ տիրույթում: Դրա համար անհրաժեշտ են $q_i(z)$ հետագծի կոմպլեքս հարթության վրա $M_{ei} = const$ հաստատուն արժեքին համապատասխանող գծեր: Գրելով $M_{ei} = 1/|1 + q_i(z)|$ և կատարելով ստանդարտ գործողություններ կստանանք՝

$$\left[1 + \mathrm{Re}\{q_i(z)\}\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\{q_i(z)\}\right]^2 = \frac{1}{M_{ei}^2} \ , \qquad (3.1.31)$$

որն իրենից ներկայացնում է $q_i(z)$ կոմպլեքս հարթության վրա $(-1, j0)$ կենտրոնով և $1/M_{ei}$ շառավղով շրջանագծի հավասարումը (նկ.3.1.15ա): Տարբեր $M_{ei} = const$ համար ստացվում են համակենտրոն շրջանագծերի համախումբ, որը ձգտում է $(-1, j0)$ կետին, երբ $M_{ei} \to \infty$, և տարածվում է ամբողջ կոմպլեքս հարթության մեջ՝ $M_{ei} \to 0$ դեպքում: M_{ei} տատանողականության ցուցանիշի մեծությունը հավասար է այն շրջանի շառավղի հակադիր մեծությանը, որը վերաբերում է $q_i(z)$ բնութագրիչ հետագծին (շրջակայքի հատման կետը $q_i(z)$ հետագծի հետ տալիս է ԱՀԲ-ի $A_{ei}(\omega)$ ռեզոնանսային արժեքի ω_{Mi} հաճախականությունը):



ա) բ)

Նկ.3.1.17. Բնութագրիչ համակարգերի M_{ei} տատանողականության ցուցանիշների որոշումը

Կոմպլեքս հարթության վրա կառուցելով բաց ԲԱԿՀ-երի $\{q_i(z)\}$ Նայքվիստի հետագծերի ընտրանքը, կարելի է գտնել բոլոր M_{ei} ($i = 1, 2, \dots, N$): Դրանցից շատերը, $M_{ei\max} = \max_i (M_{ei})$, ակնհայտ է, որ բնութագրում են դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի միտումը դեպի տատանումները և կարող են ծառայել որպես նրա կայունության պաշարների չափ:

Նշենք, որ M_{ei} մեծությունը կարելի է հաշվել լոգարիթմական բնութագրերի հարթության վրա շրջանագծերի արտապատկերման օգնությամբ (Բոդեի դիագրամ) (այսպես կոչված μ*-կորեր*): Ընդ որում յուրաքանչյուր i ($i = 1, 2, \dots, N$) համար գոյություն ունի իր μ-կորը ֆազա-հաճախականային բնութագրերի (ՖՀԲ) $\arg q_i(z)$ հարթության վրա: Յուրաքանչյուր ω հաճախականության համար այդ կորերը որոշվում են $|q_i(z))|$ մոդուլի օգնությամբ հետևյալ արտահայտությամբ՝

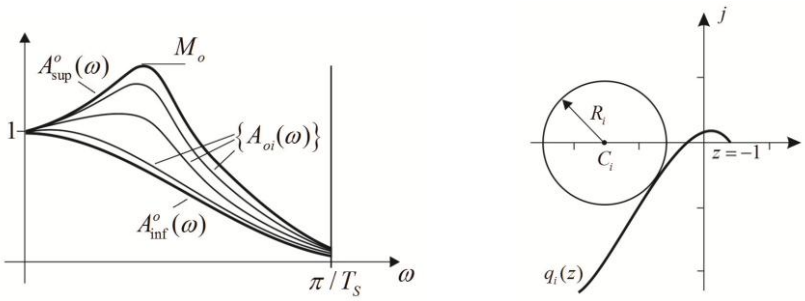
$$\mu_i = -180^\circ + \arccos\left(\frac{1 + |q_i(z)|^2 - 1/M_{ei}^2}{2|q_i(z)|}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \qquad (3.1.31)$$

և կառուցվում են $|q_i(z)|$ մոդուլի փոփոխությունը հետևյալ տիրույթում՝

$$\frac{M_{ei} - 1}{M_{ei}} \le |q_i(z)| \le \frac{M_{ei} + 1}{M_{ei}}:$$

Պահանջվող $M_{ei\max}$ մեծությունը կլինի ապահով, եթե $\Psi[q_i(z)] = \arg q_i(z)$ ՖՀԲ-երից ոչ մեկը չմտնի իր արգելված գոտի, որը որոշվում է (3.1.31) արտահայտությամբ: Վերջապես, Նշենք, որ $M_{ei} = const$ հավասար արժեքներով շրջանագծերը կարելի է ներկայացնել նաև Նիքոլսի դիագրամների հարթության վրա [46,101]:

Վերևում սահմանվեց փոխանցման մատրիցի տատանողականության ցուցանիշը ըստ սխալի $\Phi_e(z)$: Այնուամենայնիվ, դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի շատ դեպքերում կարող է նաև պահանջվել տվյալ գործակցի (նշանակենք M_o) որոշումը ըստ ելքի $\Phi(z)$ փոխանցման մատրիցի: Այդ խնդիրը լուծվում է նույն կերպ, բայց կան մի քանի տարբերություններ, որոնք պետք է հաշվի առնել: Աստատիկ ԲԱԿՀ-երի համար, որոնց մոտ բոլոր $q_i(z)$ ԱՀԲ-երը մոդուլով ձգտում են անվերջության, երբ $\omega \to 0$ (երբ $z \to 1$), $A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտը և $A^e_{\inf}(\omega)$ մինորանտը ω ցածր հաճախականությունների դեպքում մոտ են 0-ին:



ա) բ)

Նկ. 3.1.18. Դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի M_o տատանողականության ցուցանիշի որոշումը

Եթե տատանողականության ցուցանիշը որոշվում է աստատիկ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի ըստ ելքի ազդանշանի, ապա ցածր հաճախականությունների ժամանակ $A^o_{\sup}(\omega)$ մաժորանտը և $A^o_{\inf}(\omega)$ մինորանտը սկսվում են մեկից և ձգտում են որևէ (փոքր) հաստատուն արժեքի, երբ $\omega \to \omega_S / 2$: Երկու դեպքում էլ ունենք $A^e_{\sup}(\omega)$ և $A^o_{\sup}(\omega)$ մաժորանտների ռեզոնանսային արժեքներ, ընդ որում այդ արժեքներն ու համապատասխան ω_M հաճախականությունները ընդհանուր դեպքում չեն համընկնում: Այնուամենայնիվ, այստեղ ընդհանուր է համարվում այն, որ դիսկրետ ԲԱԿՀ-ը կայունության սահմանին մոտենալիս, ելքի և սխալի տատանողականության ցուցանիշները ձգտում են անսահմանության:

Բնութագրիչ համակարգերի M_{oi} տատանողականության ցուցանիշները որոշվում են հետևյալ հավասարություններով՝

$$M_{oi} = \sup_{0 \le \omega \le \frac{\omega_S}{2}} |\Phi_i[\exp(j\omega T_S)]| = \sup_{0 \le \omega \le \frac{\omega_S}{2}} \left| \frac{q_i[\exp(j\omega T_S)]}{1 + q_i[\exp(j\omega T_S)]} \right| \tag{3.1.32}$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

իսկ Նայքվիստի $q_i(z)$ հետագծի վրա $M_{oi} = const$ հաստատուն արժեքների գծերը նկարագրվում են հետևյալ արտահայտություններով՝

$$\left[\mathrm{Re}\{q_i(z)\} + \frac{M_{oi}^2}{M_{oi}^2 - 1} \right]^2 + [\mathrm{Im}\{q_i(z)\}]^2 = \left[\frac{M_{oi}}{M_{oi}^2 - 1} \right]^2, \tag{3.1.33}$$

որոնք բնութագրում են C_i կենտրոնով և R_i շառավղով շրջանագծեր, որտեղ՝

$$C_i = -\frac{M_{oi}^2}{M_{oi}^2 - 1}, \qquad R_i = \frac{M_{oi}}{M_{oi}^2 - 1}. \tag{3.1.34}$$

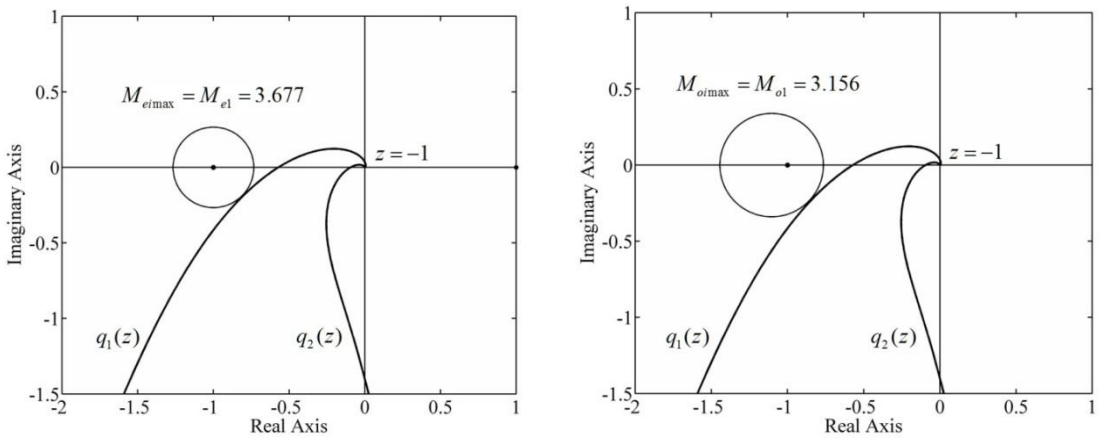
Համապատասխանաբար, $\Psi[q_i(z)] = \arg q_i(z)$ ԱՀԲ-ի համար արգելված գոտիները կառուցվում են հետևյալ արտահայտություններով՝

$$\mu_i = -180^\circ + \arccos\left(\frac{C_i + |q_i(z)|^2}{2|q_i(z)|C_i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N \ , \tag{3.1.35}$$

$|q_i(z)|$-ը փոփոխվում է հետևյալ տիրույթում՝

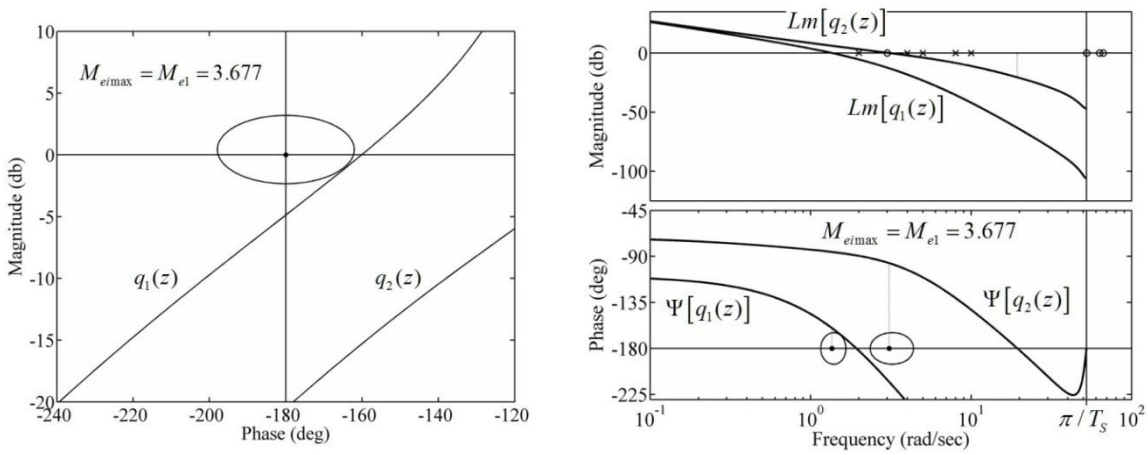
$$\frac{M_{oi}}{M_{oi}+1} \le |q_i(z)| \le \frac{M_{oi}}{M_{oi}-1}:$$

Օրինակ 3.2. Կիրառենք դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշը որոշելու մեթոդը 3.1 օրինակի երկչափ դիսկրետ համակարգի վրա: Այն ունի $w_1(s)$ և $w_2(s)$ անընդհատ մասի փոխանցման ֆունկցիաներ, փոխադարձ կապերի R մատրից և $T_S = 0.06$ *վ.* ընդհատման պարբերություն: Նկ.3.1.19-ում ներկայացված են $q_1(z)$ և $q_2(z)$ Նայքվիստի հետագծերի օգնությամբ միաչափ բնութագրիչ համակարգերի $M_{ei\max}$ և $M_{oi\max}$ առավելագույն տատանողականության ցուցանիշները: Երկու դեպքում տատանման ավելի մեծ գործակիցներ ունի առաջին բնութագրիչ համակարգը, որտեղ $M_{ei\max} = M_{e1} = 3.677$ և $M_{oi\max} = M_{o1} = 3.156$.



ա) բ)

Նկ. 3.1.19. $M_{ei\max}$ (ա) և $M_{oi\max}$ (բ) տատանողականության ցուցանիշների որոշումը Նայքվիստի հետագծերի հարթության վրա



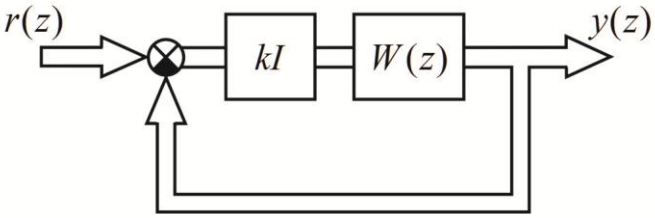
ա) բ)

Նկ. 3.1.20. Բնութագրիչ համակարգերի առավելագույն տատանողականության ցուցանիշների որոշումը ըստ սխալի ա) Նիկոլսի և բ) Բոդեի դիագրամների օգնությամբ

3.1.4 Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը z հարթությանում

Ստորև արմատային հետագծի մեթոդը ընհանրացվում է ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի վրա:

Նկ.3.1.21-ում ներկայացված է N-չափանի ընդհանուր տեսքի ԲԱԿՀ-ի կառուցվածքային սխեման, որը կօգտագործվի բազմաչափ արմատային հետագծերի հետազոտման ժամանակ, որտեղ $W(z)$ - ը բաց համակարգի փոխանցման մատրից է, I - ն՝ միավոր մատրից , k - ն՝ իրական սկալյար արտադրիչ:



Նկ. 3.1.21. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի կառուցվածքը

Խնդիր է դրված կառուցել փակ ԲԱԿՀ-ի արմատների հետագծեր նկ.3.1.21-ի համար այն դեպքում, երբ ընդհանուր k «ուժեղացման գործակիցը» փոխում է իր արժեքը 0-ից անսահմանություն (պարզության համար սահմանապակվենք միայն դրական արժեքներով): Փակ ԲԱԿՀ-ի բնութագրիչ հավասարումը կարող է ներկայացվել հետևյալ տեսքով՝

$$\det[I + kW(z)] = \prod_{i=1}^{N}[1 + kq_i(z)] = 0 \ , \qquad (3.1.36)$$

որտեղ մատրիցը սկալյարով բազմապատկելու դեպքում նրա սեփական արժեքները բազմապատկվում են այդ նույն սկալյարով: Ակնհայտ է, որ (3.1.36) հավասարումը համարժեք է հետևյալ N հատ հավասարումների համակարգին՝

$$1 + kq_i(z) = 0 \quad \text{կամ} \quad kq_i(z) = -1 \qquad (3.1.37)$$
$$i = 1, 2, ..., N \ ,$$

որտեղից էլ երևում է, որ ցանկացած $k = const$ դեպքում, փակ ԲԱԿՀ-ի արմատները կարող են լինել z կոմպլեքս փոփոխականի միայն այն արժեքները, որոնք որոշակի i-ի դեպքում բավարարում են հետևյալ երկու պայմաններին ՝

$$|kq_i(z)| = 1, \qquad \arg q_i(z) = \pm(2r+1)180^\circ \ , \qquad r = 0, 1, 2, ... \ : \qquad (3.1.38)$$

Այլ կերպ ասած, փակ ԲԱԿՀ-ի արմատներ կարող են լինել z-ի միայն այն արժեքները, որոնց դեպքում որոշ $kq_i(z)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաները համարվում են իրական բացասական արժեքներ:

$W(z)$ բաց ԲԱԿՀ-երի փոխանցման մատրիցի կանոնական ներկայացման հիման վրա z- ձևափոխության օգնությամբ կարելի է ստանալ՝

$$\det kW(z) = \det\left[C(z)\,diag\{kq_i(z)\}C^{-1}(z)\right] = k^N \prod_{i=1}^{N} q_i(z) = \frac{Z(z)}{P(z)}, \qquad (3.1.39)$$

որտեղ $Z(z)$ և $P(z)$ -ն կոչվում են զրոների բազմանդամներ և բաց դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի բևեռներ: (3.2.38)-ից երևում է, որ զրոների և բևեռների հավաքածուն, այսինքն՝ $Z(z) = 0$ և $P(z) = 0$, համընկնում է բոլոր $kq_i(z)$ ԲՓՖ-երի զրոների և բևեռների համախմբության հետ: Այնուամենայնիվ, ընդհանուր դեպքում, որևէ տեղեկություն չկա առանձին ԲՓՖ-երի համախմբությունների միջև բաշխման մասին կամ, ավելի ճշգրիտ, ինչպես են այդ համախմբությունները մասնակցում ռիմանյան մակերևույթի առանձին թերթերի վրա դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի ձևավորմանը [52,119]: Դրա հետ մեկտեղ (3.1.36)–(3.2.39) հավասարումների հիման վրա կարելի է կատարել որոշակի հետևություններ և ձևավորել կանոնների շարք, որոնց կենթարկվեն դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը: Ներքևում կթվարկվեն համապատասխան կանոնները [61,78,89,99,116,123]:

Կանոն 1. *ԲԱԿՀ-երի արմատների հետագծերի թիվը*: Արմատների հետագծերի թիվը հավասար է բաց համակարգի n հատ բևեռների ընդհանուր թվին, այսինքն՝ $P(z)$-ի բևեռների բազմանդամի n աստիճանին, ընդ որում այդ հետագծերը միաչափ բնութագրիչ համակարգերի հետագծերի բազմություն են:

Կանոն 2. *ԲԱԿՀ-ի արմատների հետագծերը անընդհատ կորեր են:* Արմատների հետագծերը անընդհատ են, քանի որ (3.2.36) հավասարման արմատներն իրենցից ներկայացնում են k անընդհատ ֆունկցիաներ, այսինքն՝ k չնչին փոփոխությունները բերում են այս հավասարումների արմատներից ցանկացածի չնչին տեղափոխությանը:

Կանոն 3. *ԲԱԿՀ-երի արմատների հետագծերի սկիզբն ու վերջը:* Հետագծերը սկսվում են այն կետերում, որոնք համապատասխանում են $kq_i(z)$ $(k=0)$ ԲՓՖ-երի համապատասխան բևեռներին և ավարտվում են $kq_i(z)$ $(k=\infty)$ զրոներին համապատասխանող կետերում: $k=0$ պայմանը ֆիզիկապես նշանակում է դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հետադարձ կապի կոնտուրի բացումը, այսինքն՝ ԲԱԿՀ-երի արմատները պետք է համընկնեն բաց համակարգի բևեռների և, ելնելով (3.1.39)-ից, $kq_i(z)$ $(i=1,2,...,N)$ ԲՓՖ-ի բոլոր բևեռների բազմության հետ: Եթե k-ն անսահմանափակորեն աճում է, ապա, որպեսզի $kq_i(z)=-1$ հավասարությունը չխախտվի, $kq_i(z)$ ԲՓՖ-ն պետք է ձգտի 0-ի, այսինքն՝ z կոմպլեքս փոփոխականը պետք է ձգտի $kq_i(z)$ ֆունկցայի զրոներին:

Կանոն 4. *Անսահմանությանը ձգտող հետագծերի թիվը:* Եթե i-րդ $kq_i(z)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիան ունի np_i հատ բևեռ և nz_i հատ զրոներ և բացակայում են ճյուղավորման կետերը, ապա $k\to\infty$ դեպքում տվյալ ԲՓՖ-երի այն np_i հետագծերը, որոնք չեն ձգտում վերջավոր nz_i-ի զրոներին, պետք է ձգտեն անսահմանության չխախտելու համար (3.1.37) հավասարությունը: Դա նշանակում է, որ յուրաքանչյուր $kq_i(z)$ ԲՓՖ-ի համար գոյություն ունեն $e_i=np_i-nz_i$ անսահմանությանը ձգտող հետագծեր, իսկ դրանց քանակը կլինի $e=n-m$, որտեղ n և m-ը $P(z)$ բևեռների և $Z(z)$ զրոների բազմանդամների աստիճաներն են (3.1.39)-ում:

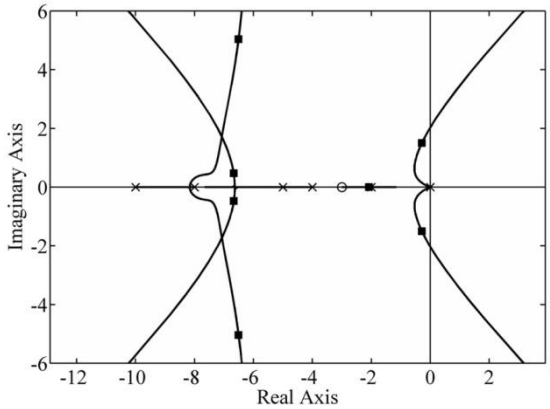
Կանոն 5. *ԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերին պատկանող իրական առանցքի հատվածները:* Միաչափի դեպքում արմատների հետագծերը գտնելը բավականին հեշտ է, երբ նրանք համընկնում են իրական առանցքի որոշ տիրույթների հետ: Դա այն հատվածներն են, որոնք տեղակայված են բաց համակարգի փոխանցման ֆունկցիայի իրական հատուկ կետերից ձախ: Հատուկ կետ ասելով հասկանում ենք զրոները ու բևեռները:

Կանոն 6. *Անկյուններ, որոնցով ԲԱԿՀ-երի արմատների հետագծերը բևեռներից անցնում են զրոների:* Այստեղ Նշենք, որ տեխնիկական գրականության մեջ ունեցած արդյունքները դժվար են գործնականում կիրառման համար, իսկ ԲԱԿՀ-երի արմատների հետագծերի թվային որոշման ծրագրերի առկայության ժամանակ անկյունները ոչ մի դեր չեն խաղում, քանի որ հետագծերի մուտքի և ելքի անկյունները անմիջապես երևում են կառուցված հետագծերի ընդհանուր պատկերից:

Կանոն 7. *z- հարթության վրա արմատային հետագծերի հատումը միավոր շրջանագծի հետ:* Ինչպես միաչափի դեպքում (1.1.5-ում), միավոր շրջանագծով դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատման կետերը կարող են գտնվել Նայքվիստի, Բոդեի կամ Նիքոլսի հաճախականային դիագրամների վրա: Օրինակ, եթե կառուցված է բաց ԲԱԿՀ-ի $kq_i(z)$ $(i=1,2,...,N)$ Նայքվիստի հետագծերը և որոշակի $k=k_{cr}$ և $i=r$ դեպքում $kq_r(z)$ հետագիծը անցնում է $(-1, j0)$ կրիտիկական կետով, ապա $kq_r(z)$-ի վրա $z=z_{cr}$ արժեքը այդ կետում որոշում է միավոր շրջանագծով արմատային հետագծերի համապատասխան ճյուղերի հատման կետերը: Դա հետևում է նրանից, որ $k=k_{cr}$ դեպքում դիսկրետ ԲԱԿՀ-ն գտնվում է կայունության սահմանի վրա:

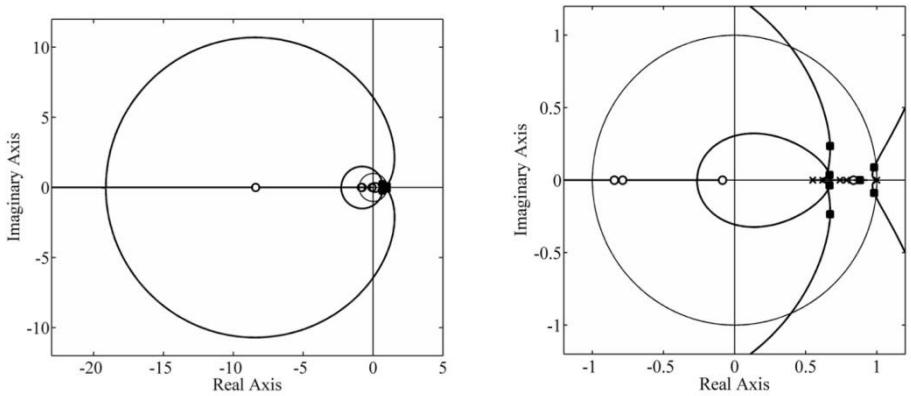
Օրինակ 3.3. Դիտարկենք 3.1 օրինակից երկչափ կառավարման համակարգի արմատային հետագծերը: Նկ. 3.2.20-ում բերված են անընդհատ համակարգի արմատային հետագծերը, որտեղ խաչերով և շրջանակներով նշված են բևեռներն ու բաց համակարգի զրոները, իսկ քառակուսիներով՝ $k=1$ արժեքին համապատասխան փակ համակարգի արմատները:

Դիսկրետ համակարգի արմատային հետագծերի ընդհանուր տեսքը $T_S = 0.06$ վ դեպքում, ինչպես նաև միավոր շրջանագծի տիրույթում ներկայացված է նկ.3.1.22-ում:



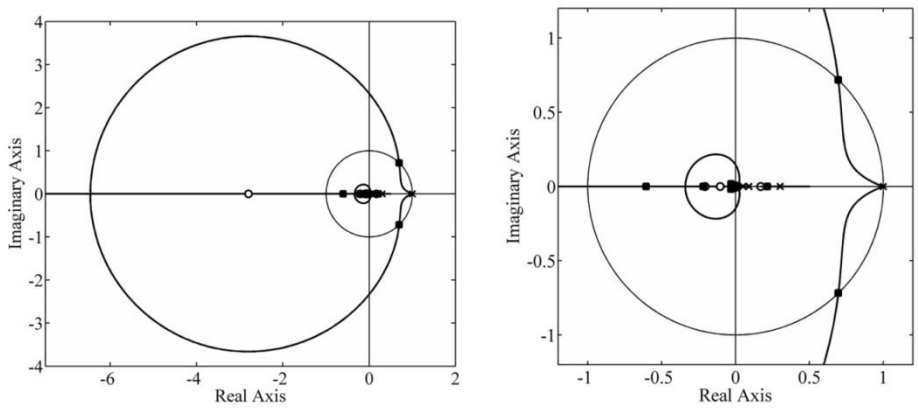
Նկ. 3.1.22 Երկչափ անընդհատ համակարգի արմատային հետագծերը

Նկ.3.1.23-ում ցուցադրված է դիսկրետ համակարգի ընդհանուր տեսքի արմատային հետագծերը $T_S = 0.6$ վ դեպքում, նաև հետագծերի տեսքը միավոր շրջանագծի տիրույթում: $T_S = 0.6$ վ դեպքում դիսկրետ համակարգի հետազոտումը օրինակ 2.1-ում ցույց տվեց, որ այն գտնվում է կայունության սահմանին: Դա բացատրվում է նկ.3.1.23-ի արմատային հետագծերից, որտեղից երևում է, որ փակ համակարգն ունի $p_{1,2} = 0.69508 \pm j0.71894$ կոմպլեքս-փոխկապակցված արմատներ միավոր շառավղով տիրույթում:



ա) ընդհանուր տեսքը բ) տեսքը միավոր շրջակայքում

Նկ. 3.1.23. Դիսկրետ համակարգի արմատային հետագծերը $T_S = 0.06$ վ դեպքում



ա) ընդհանուր տեսքը բ) տեսքը միավոր շրջակայքում

Նկ. 3.1.23. Դիսկրետ համակարգի արմատային հետագծերը $T_S = 0.6$ վ դեպքում:

3.2. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հետազոտումը երկգծային ձևափոխությունների հիման վրա

3.2.1. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կանոնական նկարագրությունը

Ինչպես նշվում էր 1.1.4-ում, (ձևափոխված) երկգծային ձևափոխությունը՝

$$z = \frac{1+(T_S/2)\varpi}{1-(T_S/2)\varpi} \; : \qquad (3.2.1)$$

արտահայտում է միավոր շրջանագծի ներքին մասը z հարթության վրա $\varpi = u + j\nu$ կոմպլեքս հարթության ձախ կիսահարթությունը, իսկ միավոր շրջանագիծը՝ ϖ հարթության կեղծ առանցքը (տես նկ 1.1.16): Հակադարձ անցումը ϖ հարթությունից z հարթություն իրականացվում է (1.1.34) արտահայտության միջոցով՝

$$\varpi = \frac{2}{T_S}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})} : \qquad (3.3.2)$$

$s = j\omega$ դեպքում (այսինքն $z = \exp(j\omega T_S)$) (3.2.2) արտահատությունը կեղծ մեծություն է և ընդունում է $\varpi = j\nu$ տեսքը, որտեղ

$$\nu = \frac{2}{T_S}\,\mathrm{tg}\frac{\omega T_S}{2} \qquad (3.2.3)$$

փոփոխականը ֆիկտիվ հաճախություն է կամ կեղծ հաճախություն: Եթե ω իրական հաճախությունը մեծանում է 0-ից մինչև $\omega_S/2$, ν ֆիկտիվ հաճախությունը փոփոխվում է 0 –ից ∞:

Երկգծային ձևափոխության օգտագործման ժամանակ $w(z)$ ռացիոնալ (խիստ ռացիոնալ) փոխանցման ֆունկցիաները (3.2.1) անցնում են $w(\varpi)$ ռացիոնալ ֆունկցիաների: Դիսկրետ համակարգը կայուն է, եթե $w(\varpi)$-ի բոլոր բևեռները գտնվում են ϖ կոմպլեքս հարթության ձախ կիսահարթությունում: Առաջին հերթին դա վերաբերում է լոգարիթմական հաճախականային բնութագրերին, որի հիման վրա մշակվել են մեկ մուտքով և մեկ ելքով դիսկրետ համակարգերի նախագծման արդյունավետ ինժեներական մեթոդներ: Այս ենթագլխում առաջարկվել է դիսկրետ համակարգերի ուսումնասիրման հաճախականային մեթոդները երկգծային ձևափոխության միջոցով տարածել դիսկրետ ընդհանուր տեսքի ԲԱԿՀ-երի վրա:

Ենթադրենք, որ նկ.3.2.1-ի ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի $W(z)$ փոխանցման մատրիցի տարրերն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$w_{rk}(z)=\frac{K_{rk}\prod_{i=1}^{m_{rk}}\left(z-z_{rk}^{i}\right)}{\prod_{i=1}^{n_{rk}}\left(z-p_{rk}^{i}\right)},\quad r,k=1,2,...,N, \tag{3.2.4}$$

որտեղ m_{rk} և n_{rk} -ն նշանակում են $w_{rk}(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի z_{rk}^{i} զրոների և p_{rk}^{i} բևեռների թիվը:

Այդ դեպքում $w_{rk}(z)$-ին կիրառելով երկգծային ձևափոխությունը (3.2.1)՝ կստատանք $W(\varpi)$ փոխանցման մատրիցը, որի $w_{rk}(\varpi)$ տարրերը ստացվում են հետևյալ արտահայտություններից՝

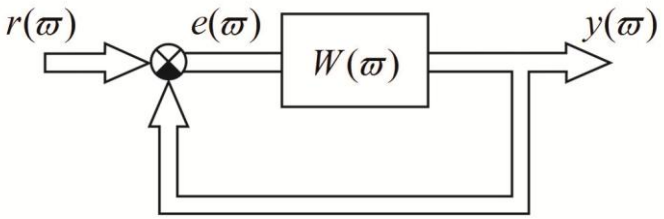
$$w_{rk}(\varpi)=\frac{K_{rk}^{\varpi}\left(-\frac{T_S}{2}\varpi+1\right)^{(n_{rk}-m_{rk})}\prod_{i=1}^{m_{rk}}\left(\varpi-z_{\varpi rk}^{i}\right)}{\prod_{i=1}^{n_{rk}}\left(\varpi-p_{\varpi rk}^{i}\right)},\quad r,k=1,2,...,N, \tag{3.2.5}$$

որտեղ՝

$$K_{rk}^{\varpi}=\frac{(-1)^{n_{rk}-m_{rk}}K_{rk}\prod_{i=1}^{m_{rk}}\left(1+z_{rk}^{i}\right)}{\prod_{i=1}^{n_{rk}}\left(1+p_{rk}^{i}\right)},\quad z_{\varpi rk}^{i}=-\frac{2}{T_S}\frac{\left(1-z_{rk}^{i}\right)}{\left(1+z_{rk}^{i}\right)},\quad p_{\varpi rk}^{i}=-\frac{2}{T_S}\frac{\left(1-p_{rk}^{i}\right)}{\left(1+p_{rk}^{i}\right)}: \tag{3.2.6}$$

Այդ դեպքում նկ.3.2.1-ի ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի մատրիցային կառուցվածքային սխեման ընդունում է նկ.3.2.1-ում պատկերված տեսքը: Նշենք, որ ի տարբերություն նկ.3.2.1-ի $r(z), y(z)$ և $e(z)$ ազդակների, որոնք բնութագրում են իրական $r(t)$ մուտքի, $y(t)$ ելքի և $e(t)$ սխալի վեկտորները $t=kT_S$ $(k=0,1,2,...)$

ժամանակի դիսկրետ պահին, նկ. 3.2.1-ի $r(\varpi), y(\varpi)$ և $e(\varpi)$ ազդակները ֆիզիկական իմաստ չունեն:



Նկ. 3.2.1. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կառուցվածքային սխեման ϖ -տիրույթում

$w_{rk}(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիաներն ունեն մի շարք առանձնահատկություններ, որոնք բերում են $W(\varpi)$ փոխանցման մատրիցի համապատասխան հատկություններին: Այսպես, յուրաքանչյուր $w_{rk}(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի (3.2.5) զրոների և բևեռների քանակը նույնն է անկախ համապատասխան $w_{rk}(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի (3.2.4) զրոների և բևեռների քանակից: Հետևաբար, $\varpi = j\infty$ դեպքում $w_{rk}(\varpi)$ մեծությունն իրական է և վերջավոր: Երբ $n_{rk} > m_{rk}$, $w_{rk}(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիան համարվում է ոչ մինիմալ փուլային, քանի որ ունի $n_{rk} - m_{rk}$ դրական իրական զրոներ $\varpi = 2/T_S$ կետում: (3.2.6)-ում K_{rk}^{ϖ} գործակիցը կախված $w_{rk}(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի $n_{rk} - m_{rk}$ տարբերության նշանից և p_{rk}^{i} բևեռների ու z_{rk}^{i} զրոների դիրքից՝ կարող է լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական թիվ:

Նկ.3.2.1-ի ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի փոխանցման մատրիցները ըստ ելքի և սխալի ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\Phi(\varpi) = \left[I + W(\varpi)\right]^{-1} W(\varpi) = W(\varpi)\left[I + W(\varpi)\right]^{-1}, \tag{3.2.7}$$

$$\Phi_e(\varpi) = \left[I + W(\varpi)\right]^{-1}: \tag{3.2.8}$$

ԲՓՖ-ների մեթոդի հիման վրա $W(\varpi)$, $\Phi(\varpi)$ և $\Phi_e(\varpi)$ փոխանցման մատրիցները կարելի է ներկայացնել հետևյալ կանոնական տեսքով՝

$$W(\varpi) = C(\varpi)\,diag\{q_i(\varpi)\}C^{-1}(\varpi) = \sum_{i=1}^{N} c_i(\varpi) > q_i(\varpi) < c_i^{+}(\varpi), \tag{3.2.9}$$

$$\Phi(\varpi) = C(\varpi)\,diag\left\{\frac{q_i(\varpi)}{1+q_i(\varpi)}\right\}C^{-1}(\varpi) = \sum_{i=1}^{N} c_i(\varpi) > \frac{q_i(\varpi)}{1+q_i(\varpi)} < c_i^{+}(\varpi), \tag{3.2.10}$$

$$\Phi_e(\varpi) = C(\varpi)\, diag\left\{\frac{1}{1+q_i(\varpi)}\right\} C^{-1}(\varpi) = \sum_{i=1}^{N} c_i(\varpi) > \frac{1}{1+q_i(\varpi)} < c_i^{+}(\varpi)\,, \qquad (3.2.11)$$

որտեղ պարզության համար ենթադրվում է, որ բոլոր $q_i(\varpi)$ ԲԹՖ-ները տարբեր են, իսկ $C(\varpi) = [c_1(\varpi)\ c_2(\varpi)\ \ldots\ c_N(\varpi)]$ մոդալ մատրիցը կազմված է $W(\varpi)$ փոխանցման մատրիցի գծայնորեն անկախ $c_i(\varpi)$ սեփական վեկտորներից:

3.2.2. Երկգծային ձևափոխությունների հիման վրա ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծության հաճախականային մեթոդները

Նկ. 3.2.1-ի փակ դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի կայունության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\det[I + W(\varpi)] = 0 \qquad (3.2.12)$$

բնութագրիչ հավասարան արմատները ընկած լինեն ϖ կոմպլեքս հարթության ձախ կիսահարթությունում:

ԲԱԿՀ-ի $W(\varpi)$ փոխանցման մատրիցի կանոնական ներկայացման հիման վրա (3.2.9) ձևափոխության օգնությամբ (3.2.12) հավասարումը բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$\det[I + W(\varpi)] = \prod_{i=1}^{N} [1 + q_i(\varpi)] = 0\,, \qquad (3.2.13)$$

որտեղից երևում է, որ դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի *N*-չափանի բնութագրիչ հավասարումը տրոհվում է *N* հատ հավասարումների

$$1 + q_i(\varpi) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (3.2.14)$$

այսինքն՝ դիսկրետ փոխկապակցված ընդհանուր տեսքի ԲԱԿՀ-երի (նկ.3.2.1) կայունության հետազոտումը բերվում է բաց վիճակում $q_i(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիաներով N հատ անկախ միաչափ բնութագրիչ համակարգերի հետազոտմանը:

Ինչպես անընդհատ ԲԱԿՀ-երի դեպքում, (3.2.14) հավասարումների հիման վրա, դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծության համար կարելի է օգտագործել մեկ մուտքով և ելքով կառավարման անընդհատ համակարգերի դասական հաճախականային չափանիշները: Գործնականում, կիրառման տեսանկյունից առավել հարմար են Նայքվիստի չափանիշները, որոնք կարելի է կիրառել $q_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ի

Նայքվիստի, Նիկոլսի հետագծերի և Բոդեի դիագրամների նկատմամբ: Այնուամենայնիվ, $w_{rk}(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի վերևում նշված հատկությունները տարածվում են $W(\varpi)$ փոխանցման մատրիցի լոգարիթմական և այլ հաճախականային բնութագրերի վրա:

$W(\varpi)$ փոխանցման մատրիցի դետերմինանտը որոշվում է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$\det W(\varpi) = \det\left[C(\varpi)\,diag\{q_i(\varpi)\}C^{-1}(\varpi)\right] = \prod_{i=1}^{N} q_i(\varpi) = \frac{Z(\varpi)}{P(\varpi)}\ , \qquad (3.2.15)$$

որտեղ $Z(\varpi)$ և $P(\varpi)$-ը բաց դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի զրոների և բևեռների բազմանդամներն են: Քանի որ բոլոր ոչ զրոյական $w_{rk}(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիաներն ունեն բևեռների և զրոների նույն քանակությունը, ապա, ըստ մատրիցների դետերմինանտների որոշման հայտնի կանոնների, հետևում է, որ $Z(\varpi)$ զրոների և $P(\varpi)$ բևեռների բազմանդամները (3.2.15)-ում ունեն նույն աստիճանը: Դա նշանակում է, որ $q_i(\varpi)$ բնութագրիչ փախանցման ֆունկցիաների զրոների և բևեռների ընդհանուր քանակը նույնն է: Բացի դրանից, քանի որ բոլոր $w_{rk}(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիաները $\varpi = j\nu$ և $\nu = \infty$ դեպքում իրական վերջավոր թվեր են, ապա $W(j\nu)$ մատրիցը $\nu = \infty$ դեպքում կազմված է իրական վերջավոր թվերից: Այդ պատճառով, $W(j\nu)$ մատրիցի դետերմինանտը $\nu = \infty$ դեպքում ևս կլինի վերջավոր իրական թիվ և (3.2.15)-ից բխում է, որ բոլոր $q_i(j\infty)$-երը պետք է լինեն վերջավոր թվեր: Այստեղից պարզ է, որ $q_i(\varpi)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիան միշտ ունի զրոների և բևեռների նույն քանակություն:

Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության պաշարները ըստ մոդուլի և փուլի, ինչպես անընդհատի դեպքում, կարելի է որոշել Նայքվիստի, Նիկոլսի հետագծերի և Բոդեի դիագրամի $q_i(\varpi)$ ($i = 1, 2, ..., N$) ԲՓՖ-ի միջոցով, որպես միաչափ բնութագրիչ համակարգերի ամենափոքր կայունության պաշար ըստ GM_i մոդուլի և PM_i փուլի [29,57,109]: Նույնը վերաբերում է նաև ϖ հարթության մեջ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի տատանման գործակցի որոշմանը:

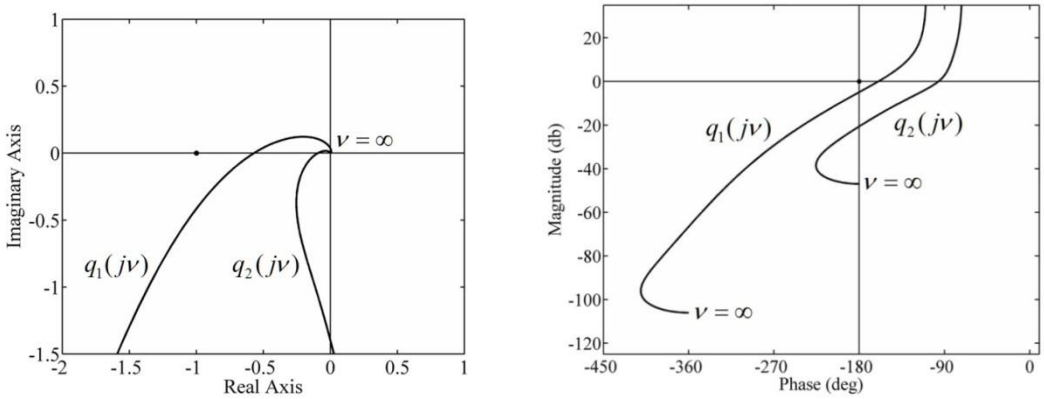
Օրինակ 3.4. Դիտարկենք կարգավորման երկչափ համակարգ (օրինակ 3.1), երբ $T_S = 0.06$ վ–ի և (3.2.1) երկգծային ձևափոխության կիրառման դեպքում ϖ հարթությունում ստացվում են հետևյալ փոխանցման ֆունկցիաները՝

$$W_1(\varpi) = \frac{-0.0051892(\varpi - 33.33)(\varpi + 2.992)(\varpi + 279.4)}{\varpi(\varpi + 4.963)(\varpi + 9.71)} \qquad (3.2.16)$$

$$W_2(\varpi) = \frac{0.000004393(\varpi - 33.33)(\varpi - 42.33)(\varpi + 39.52)(\varpi + 398.1)}{\varpi(\varpi + 1.998)(\varpi + 3.981)(\varpi + 7.85)} : \qquad (3.2.17)$$

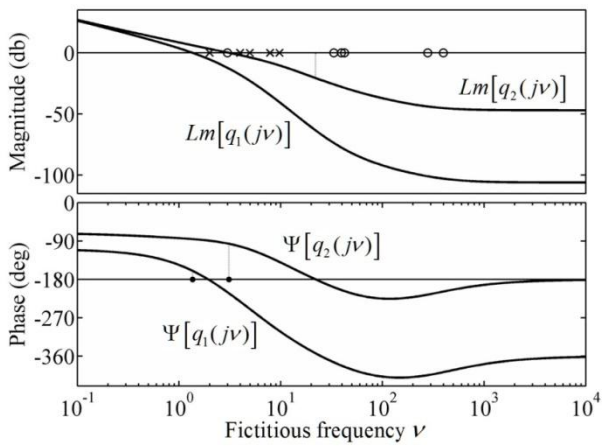
Ինչպես երևում է (3.2.16) և (3.2.17)-ից, $W_1(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիան ունի ուժեղացման բացասական գործակից և $W_1(\varpi)$ և $W_2(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիաները ոչ մինիմալ-փուլային են և $\varpi = 2/T_s = 33.33$ կետում ունեն իրական դրական զրո ($W_2(\varpi)$ -ը ունի ևս մեկ իրական դրական զրո աջ կիսահարթությունում, $\varpi = 42.33$ կետում):

Նկ.3.2.3-ում ներկայացված են $q_1(j\nu)$ և $q_2(j\nu)$ ԲՓՖ-երի Նայքվիստի և Նիկոլսի հետագծերը: Այդ կորերն իրենց տեսքով ամբողջովին համընկնում են $q_1(z)$ և $q_2(z)$-ի համապատասխան հետագծերի հետ (նկ.3.2.10): նկ. 3.2.10-ում $z = -1$ արժեքին համապատասխանում է նկ.3.2.2-ի $\nu = \infty$ արժեքը: $q_1(j\nu)$ և $q_2(j\nu)$ ԲՓՖ-երի Բոդեի դիագրամները բերված են նկ.3.2.3-ում:



ա) Նայքվիստի հետագծերը բ) Նիկոլսի հետագծերը

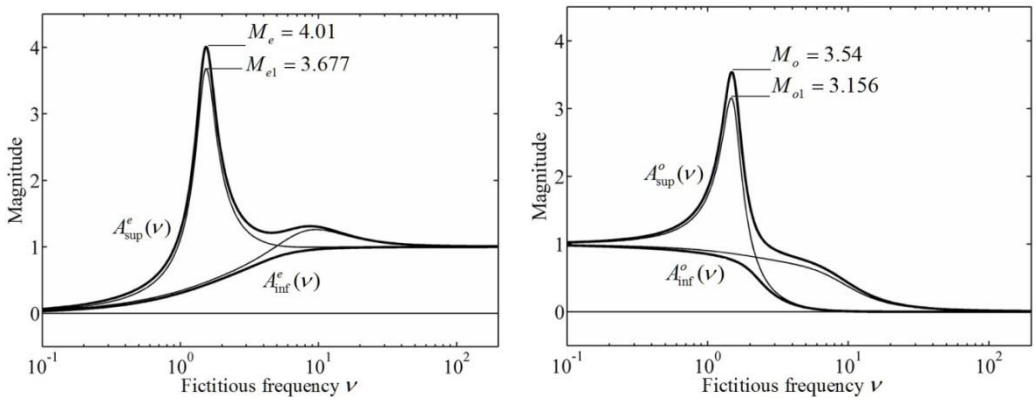
Նկ.3.2.2 Դիսկրետ համակարգի կայունության վերլուծությունը ϖ հարթությունում $T_S = 0.06$ վ դեպքում



Նկ.3.2.3. Դիսկրետ համակարգի Բոդեի դիագրամը
ϖ հարթությունում $T_S = 0.06$ վ դեպքում

Ինչպես երևում է նկ.3.2.3-ից, ϖ հարթությունում Բոդեի դիագրամի բնույթը համընկնում է անընդհատ համակարգերի Բոդեի դիագրամի բնույթին, ԲՓՖ–ները ունեն զրոների և բևեռների հավասար քանակություն:

Դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի ընդանրացված ԱՀԲ-երը ϖ հարթությունում $T_S = 0.06$ վ դեպքում բերված են նկ. 3.2.4-ում:



ա) ըստ սխալի բ) ըստ ելքի

Նկ.3.2.4. Դիսկրետ երկչափ համակարգի ընդանրացված հաճախականային բնութագրերը ϖ հարթությունում $T_S = 0.06$ վ – ի դեպքում

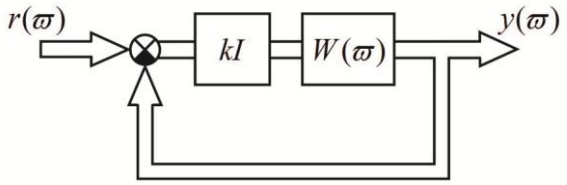
Այդ պատճառով, դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի տատանման գործակիցները $T_S = 0.06$ վ – ի դեպքում z և ϖ հարթություններում համընկնում են:

3.2.3. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը ϖ հարթությունում

3.2.2-ում ուսումնասիրված էր z – հարթությունում ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի կառուցումը: Այս ենթագլխում կուսումնասիրվի

նույն խնդիրը ϖ հարթությունում, այսինքն՝ այն դեպքում, երբ դիսկրետ ԲԱԿՀ-ը նկարագրված է (3.2.1) երկգծային ձևափոխության միջոցով:

Ընդհանուր տեսքի N-չափանի դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի մատրիցային կառուցվածքային սխեման պատկերված է նկ.3.2.5-ում, որտեղ $W(\varpi)$-ն համակարգի փոխանցման մատրիցն է, I - ն՝ միավոր մատրիցը, k -ն՝ դրական սկալյար արտադրիչը:



Նկ. 3.2.5. Ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի կառուցվածքային սխեման ϖ - տիրույթում

Նկ.3.2.5-ի բաց ԲԱԿՀ-երի փոխանցման մատրիցի կանոնական ներկայացումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$kW(\varpi) = C(\varpi)\,diag\{kq_i(\varpi)\}C^{-1}(\varpi)\,, \tag{3.2.18}$$

իսկ վերջինիս դետերմինանտը՝

$$\det kW(\varpi) = \det\left[C(\varpi)\,diag\{kq_i(\varpi)\}C^{-1}(\varpi)\right] = k^N\prod_{i=1}^{N} q_i(\varpi) = k^N\,\frac{Z(\varpi)}{P(\varpi)}\,, \tag{3.2.19}$$

որտեղ $Z(\varpi)$ և $P(\varpi)$-ը ϖ հարթությունում բաց դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի զրոների և բևեռների բազմանդամներն են: Ինչպես ցույց է տրված 3.2.2-ում, $Z(\varpi)$ և $P(\varpi)$ բազմանդամներն ունեն միևնույն աստիճանը, և բացի դա, յուրաքանչյուր $kq_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ի զրոների և բևեռների քանակը նույնպես նույնն են:

Հաշվի առնելով (3.2.18)-ը, նկ.3.2.5-ի փակ ԲԱԿՀ-ի բնութագրիչ հավասարումը կարելի է գրել՝

$$\det[I + kW(\varpi)] \;=\; \prod_{i=1}^{N}[1 + kq_i(\varpi)] = 0\,: \tag{3.2.20}$$

որտեղից բխում է, որ ϖ հարթությունում դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատների հետագծերն իրենցից ներկայացնում են $kq_i(\varpi)$ բնութագրիչ ֆունկցիաների հետ N հատ միաչափ բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերի համախմբություն: i-րդ փակ բնութագրիչ համակարգի ձևավորման պայմանը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$kq_i(\varpi) = -1, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{3.2.21}$$

և, ակնյատ է, որ, համարժեք է հետևյալ պայմանին.

$$|kq_i(\varpi)| = 1 \tag{3.2.22}$$

$$\arg q_i(\varpi) = \pm(2r+1)180^\circ, \quad r = 0, 1, 2, ..., \tag{3.2.23}$$

(3.2.21)-(3.2.23) պայմանները ցույց են տալիս, որ i-րդ բնութագրիչ համակարգի արմատները կարող են լինել ϖ կոմպլեքս փոփոխականի միայն այն արժեքները, որոնց ժամանակ $kq_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ն իրական բացասական թիվ է: Այդ պայմանները համարժեք են ընդհանուր տեսքի անընդհատ ԲԱԿՀ-ի արմատների ձևավորման պայմաններին: Այդ պատճառով, ϖ հարթությունում դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատկությունները շատ դեպքերում համընկնում են s-հարթությունում անընդհատ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատկությունների հետ: Ստորև կներկայացվեն $kq_i(\varpi)$ ԲՓՖ-երի ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերի որոշ առանձնահատկություններ:

Կանոն 1. *Արմատային հետագծերի սկիզբն ու վերջը:* Յուրաքանչուր i-ի համար բոլոր արմատային հետագծերը $k = 0$ - ի դեպքում սկսում են այն կետերում, որոնք համապատասխանում են $kq_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ի np_i բևեռներին, և $k = \infty$ դեպքում ավարտվում են $kq_i(\varpi)$ ֆունկցիայի $nz_i = np_i$ համապատասխան զրոներում:

Կանոն 2. ϖ հարթությունում դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը չունեն անսահմանությանը ձգտող ճյուղեր: Քանի որ $kq_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ի np_i բևեռների թիվը հավասար է nz_i զրոների թվին, ուստի i-րդ բնութագրիչ համակարգի բոլոր արմատային հետագծերն ավարտվում են $kq_i(\varpi)$ - համապատասխան զրոներում: Որպես հետևանք, ϖ հարթությունում դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի բոլոր արմատային հետագծերը ավարտվում են (վերջավոր) զրոներում: Այլ խոսքով, ϖ հարթությունում բացակայում են արմատային հետագծերի անսահմանությանը ձգտող ճյուղեր: Դրանում է կայանում ϖ հարթությունում դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի և z հարթությունում դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի միջև սկզբունքային տարբերությունը:

Կանոն 3. ϖ <u>*հարթության կեղծ առանցքի հատումը արմատային հետագծերի հետ:*</u> Դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի և ϖ հարթության կեղծ առանցքի հատման կետերը կարելի է գտնել անընդհատի դեպքում, կիրառելով Նայքվիստի հետագծը, Նիկոլսի կամ Բոդեի դիագրամները: Օրինակ, եթե կառուցված են բաց ԲԱԿՀ-ի $kq_i(j\nu)$ $(i=1,2,...,N)$ Նայքվիստի հետագծերը և որոշ $k=k_{cr}$ և $i=r$ դեպքում $kq_r(j\nu)$ հետագիծն անցնում է $-1, j0$ կրիտիկական կետով, ապա $kq_r(j\nu)$- ի վրա $\nu=\nu_{cr}$ կեղծ հաճախության արժեքի դեպքում, այդ կետում կորոշվեն ϖ հարթության կեղծ առանցքի արմատային հետագծերի համապատասխան հատման կետերը:

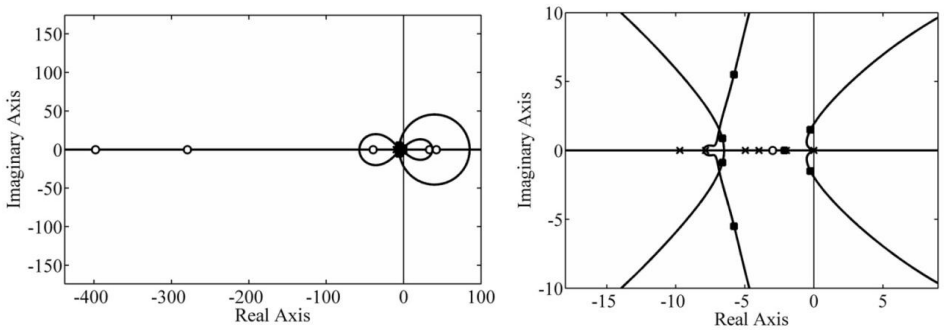
Այսպիսով, դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հիմնական տարբերությունն անսահմանությանը ձգտող ճյուղերի բացակայությունն է և, համապատասխանաբար, ասիմպտոտների բացակայությունը:

Դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի ϖ հարթությունում արմատային հետագծերի ևս մեկ տարբերությունը պայմանավորված է փոխանցման ֆունկցիաների հատկություններով, որը հիմնված է երկգծային ձևափոխությունների վրա: Ինչպես նշված էր 3.2.2-ում, $w_{rk}(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի K_{rk}^{ϖ} գործակիցը կախված $n_{rk}-m_{rk}$ տարբերության նշանից կարող է լինել ինչպես բացասական, այնպես էլ դրական թիվ: $r=k$ և $K_{rr}^{\varpi}<0$ դեպքում (այսինքն $W(\varpi)$ փոխանցման մատրիցի գլխավոր անկյունագծի $w_{rr}(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիան բացասական է) դա նշանակում է, որ դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի r-րդ կապուղում հակադարձ կապը նկ.3.2.12-ում դառնում է դրական:

$W(\varpi)$ մատրիցի անկյունագծային տարրերի բացասական նշանը իր հետ բերում է որոշ $kq_i(\varpi)$ ԲՓՖ-երի բացասական նշաններ, այսինքն՝ որոշ բնութագրիչ համակարգերի մոտ հակադարձը դառնում է դրական: Համապատասխան արմատային հետագծերը ($k<0$ դեպքում) կոչվում են լրացուցիչ:

Օրինակ 3.5. Դիտարկենք 2.1 օրինակից երկչափ դիսկրետ համակարգ, ենթադրելով, որ առանձին կապուղիներում իմպուլսային տարրերն աշխատում են սինքրոն: Նկ.3.2.6-ում պատկերված են ϖ հարթությունում համակարգի արմատային հետագծերը, որտեղից երևում է, որ իրական առանցքի հետագծերի ճյուղերից մեկը

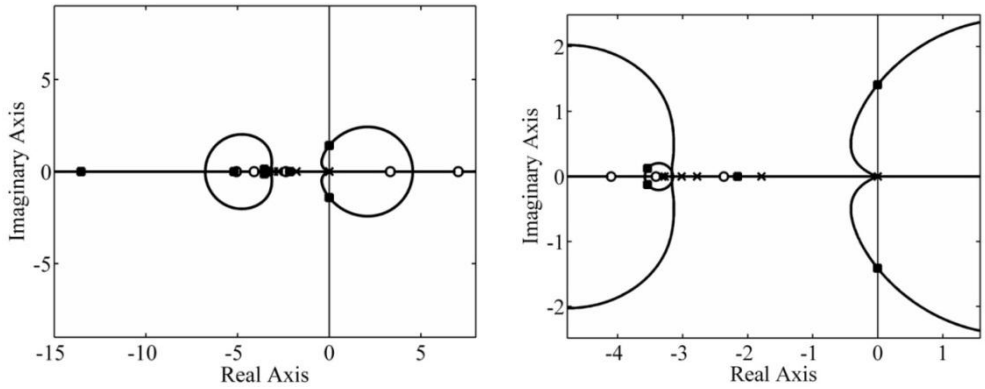
ձգտում է անսահմանության և այնտեղից վերադառնում է k գործակցի վերջավոր արժեքի դեպքում:



ա) ընդհանուր դեպք բ) կոորդինատների սկզբնակետերի շրջակայքում

Նկ. 3.2.6. Դիսկրետ համակարգի արմատային հետագծերը ϖ հարթությունում $T_S = 0.06$ վ դեպքում

Նկ.3.2.7-ում ներկայացված է ϖ հարթությունում $T_S = 0.6$վ ընդհատման պարբերության ժամանակ դիսկրետ համակարգի արմատային հետագծերը, և փակ համակարգը գտնվում են կայունության սահմանին: Այստեղ նույնպես իրական առանցքի վրա առկա են ճյուղավորումներ, որոնք անցնում են անսահմանություն k գործակցի որոշակի վերջավոր արժեքի դեպքում:



ա) ընդհանուր դեպք բ) կոորդինատների սկզբնակետոր շրջակայք

Նկ. 3.2.7. Դիսկրետ համակարգի արմատային հետագծերը ϖ հարթությունում $T_S = 0.6$վ դեպքում

Եզրակացություններ 3-րդ գլխի վերաբերյալ

Գլուխ 3-ը նվիրված է ԲՓՖ-ի մեթոդի տարածմանը ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի վրա: Ստորև կներկայացվեն գլուխ 3-ում ստացված հիմնական արդյունքները:

1. z և ϖ երկգծային ձևափոխությունների հիման վրա ստացված են ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումները, ենթադրելով, որ առանձին կապուղիներում իմպուլսային տարրերն աշխատում են սինքրոն: Ցույց է տրված, որ ϖ հարթությունում ԲԱԿՀ-ի $q_i(\varpi)$ ԲՓՖ-երը կամայական i-ի դեպքում ունենք միևնույն թվով բևեռներ և զրոներ՝ անկախ z հարթության մեջ $q_i(z)$ ԲՓՖ-ի զրոների և բևեռների թվից:

2. Ցույց է տրված, որ ԲՓՖ-ի կիրառումը թույլ է տալիս կառավարման դիսկրետ համակարգերի տեսության դասական մեթոդների հիման վրա N-չափանի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծությունը բերել N հատ անկախ միաչափ բնութագրիչ համակարգերի կայունության վերլուծության: z հարթության մեջ դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի նկարագրման ժամանակ պահանջվում է, որ բնութագրիչ հավասարման բոլոր արմատները ընկած լինեն z հարթության միավոր շրջանագծում, իսկ երկգծային ձևափոխության օգտագործման ժամանակ բնութագրիչ հավասարման արմատները պետք է գտնվեն ϖ կոմպլեքս հարթության ձախ կիսահարթությունում:

3. Դիտարկված են z և ϖ հարթություններում ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության հետազոտման հաճախականային մեթոդները և տարածված է դիսկրետ դեպքի համար անընդհատ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշ հասկացությունը:

4. Դիտարկված են z և ϖ հարթություններում ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատկությունները: Ցույց է տրված, որ ϖ հարթությունում արմատային հետագծերը չունեն անսահմանությանը ձգտող ճյուղեր, երբ $k \to \infty$՝ անկախ բաց ԲԱԿՀ-ի $W(z)$ փոխանցման մատրիցի $w_{kr}(z)$ տարրերի տեսքից: Բացի դրանից, որոշակի պայմանների դեպքում, ϖ հարթությունում արմատային հետագծերը կարող են ձգտել անսահմանության և հետ գալ այնտեղից k ուժեղացման գործակցի որոշակի վերջավոր արժեքի դեպքում:

5. Գլուխ 3-ում ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի բոլոր թվային հաշվարկներն իրականացված են MATLAB ծրագրային փաթեթի օգնությամբ:

ԳԼՈՒԽ 4.

ԴԻՍԿՐԵՏ ՄԻԱՏԻՊ ԲԱԿՀ-ԵՐ

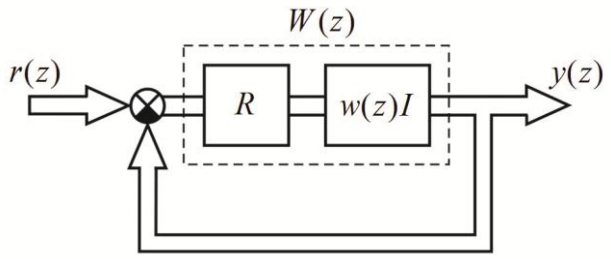
4.1. Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի ուսումնասիրումը z - տիրույթում

4.1.1.Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումն ու կայունության վերլուծությունը

N -չափանի դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի մատրիցային կառուցվածքային սխեման z -հարթությունում բերված է նկ. 4.1.1-ում, որտեղ

$$w(z) = \frac{M(z)}{D(z)} \tag{4.1.1}$$

$w(z)$ - ն առանձին կապուղիների միևնույն փոխանցման ֆունկցիան է, որը z կոմպլեքս փոփոխականից կոտորակա-ռացիոնալ ֆունկցիա է, իսկ R-ը՝ կոշտ փոխկապակցված կապերի $N \times N$ չափանի թվային մատրիցը՝



Նկ. 4.1.1. Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կառուցվածքային սխեման z- ձևափոխության տիրույթում

Միատիպ ԲԱԿՀ-երի բերված անընդհատ մասի առանձին կապուղիների $w(s)$ փոխանցման ֆունկցիաների վրա կիրառելով z -ձևափոխությունը՝ ստացվում է $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիան (4.1.1) :

$$w(s) = w_P(s) w_H(s)\,, \tag{4.1.2}$$

որտեղ $w_P(s)$-ն առաձին կապուղիներում կառավարման անընդհատ օբյեկտի փոխանցման ֆունկցիան է, $w_H(s)$-ը՝ զրոական կարգի էքստրապոլյատորի փոխանցման ֆունկցիան (1.1.2):

Բաց դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի $W(z)$ փոխանցման մատրիցը (նկ.4.1.1) հավասար է

$$W(z) = w(z)R \tag{4.1.3}$$

որը համընկնում է $w(z)$ սկալյար արտադրիչով R փոխադարձ կապերի թվային մատրիցի հետ [15,16,19,88,105,123]: Հետևաբար, եթե λ_i $(i=1,2,...,N)$-ով նշանակենք R մատրիցի սեփական արժեքները, և ընդունենք, որ իրարից տարբեր են, իսկ C-ով՝ մոդալ մատրիցը, որը կազմված է R մատրիցի c_i գծորեն անկախ վեկտորներից, ապա $W(z)$ փոխանցան մատրիցի կանոնական ներկայացումը $W(z)$ նմանության ձևափոխության և դիադային նշանակումների միջոցով կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$W(z) = C\,diag\{\lambda_i w(z)\}C^{-1} = \sum_{i=1}^{N} c_i > \lambda_i w(z) < c_i^+ , \qquad (4.1.4)$$

որտեղ c_i^+-ը c_i-ի նկատմամբ երկակի վեկտոր է, իսկ R մատրիցի λ_i սեփական արժեքները կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես էլ կոմպեքս-համալուծ թվեր:

(4.1.4)-ից երևում է, որ անընդհատ միատիպ ԲԱԿՀ-երի դեպքում, դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կանոնական բազիսը կախված չէ z կոմպլեքս փոփոխականից և լիովին որոշվում է փոխադարձ կապերի R մատրիցով: Բացի դրանից, բոլոր ԱՀԲ-երը

$$q_i(z) = \lambda_i w(z) = \lambda_i \frac{M(z)}{D(z)}, \qquad i = 1,2,...,N \qquad (4.1.5)$$

համընկնում են λ_i գործակցով $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի հետ:

Դիսկրետ փակ միատիպ ԲԱԿՀ-երի ըստ ելքի և սխալի կանոնական ներկայացման համար հաշվի առնելով (4.1.5) - ը, կստանանք՝

$$\Phi(z) = C\,diag\left\{\frac{\lambda_i w(z)}{1+\lambda_i w(z)}\right\}C^{-1} = \sum_{i=1}^{N} c_i > \frac{\lambda_i w(z)}{1+\lambda_i w(z)} < c_i^+ , \qquad (4.1.6)$$

$$\Phi_e(z) = C\,diag\left\{\frac{1}{1+\lambda_i w(z)}\right\}C^{-1} = \sum_{i=1}^{N} c_i > \frac{1}{1+\lambda_i w(z)} < c_i^+ \quad : \qquad (4.1.7)$$

<u>Միատիպ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծությունը և տատանողականության գործակիցը:</u> Փակ դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կայունությունը գնահատվում է հետևյալ բնութագրիչ հավասարման արմատների դասավորվածությամբ՝

$$\det\left[1 + w(z)R\right] = \prod_{i=1}^{N}[1+\lambda_i w(z)] = 0 , \qquad (4.1.8)$$

որը համարժեք է N հատ հավասարումների համակարգին՝

$$1 + \lambda_i w(z) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., N, \qquad (4.1.9)$$

կամ, հաշվի առնելով (4.1.1) – ը՝

$$D(z) + \lambda_i M(z) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, N, \tag{4.1.10}$$

հավասարումները համընկնում են փակ համակարգերի բնութագրիչ հավասարումների հետ:

Քանի որ, բաց բնութագրիչ համակարգերի $q_i(z)$ փոխանցման ֆունկցիաները առանձին կապուղիներում տարբերվում են $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիայից միայն λ_i թվային գործակցով, ուստի միատիպ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծությունն ավելի պարզ է դառնում, քան ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծությունը: Ինչպես անընդհատի դեպքում, այստեղ հնարավոր են Նայքվիստի ընդանրացված չափանիշի 2 տարբեր գրաֆիկական պատկերներ [118,120,125]:

Առաջինը համընկնում է 2.2.2-ում բերված ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի համար բերված չափանիշի հետ, միայն այն տարբերությամբ, որ փակ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կայունության համար անհրաժեշտ է, որ $(-1, j0)$ կրիտիկական կետի նկատմամբ ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ պտույտների թիվը ω հաճախության 0-ից $\omega_S = 2\pi / T_S$ փոփոխման ժամանակ հավասար լինի k_0, որտեղ k_0-ն z հարթությունում միավոր շրջանից դուրս տեղակայված $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի բևեռների թիվն է: Ըստ այս ձևակերպման, կոմպլեքս հարթությունում տեղակայվում են $\lambda_i w(z)$ հետագծերի N համախումբը, որտեղ հետագծերից յուրաքանչյուրը ստացվում է $w(z)$ հետագծից $|\lambda_i|$ մոդուլի փոփոխությամբ:

Այս ամենին համաձայն (4.1.9) – ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$w(z) = -\frac{1}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad : \tag{4.1.11}$$

Ընդ որում, կոմպլեքս հարթությունում կառուցվում է առանձին դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի մի հետագիծը և հանվում են N հատ $-1/\lambda_i$ կրիտիկական կետեր: Այդ դեպքում, փակ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կայունության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ $w(z)$ հետագիծը ընդգրկի N հատ $-1/\lambda_i$ կետեր դրական ուղղությամբ, k_0 անգամ:

Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշի որոշումը ըստ M_e սխալի և M_o ելքի, ընդհանրացված ԱԲՀ-երի $A^e_{\sup}(\omega)$ և $A^o_{\sup}(\omega)$ մաժորանտների, ինչպես նաև ըստ բնութագրիչ համակարգերի M_{ei} և M_{oi} տատանողականության ցուցանիշների, տեղի է ունենում այնպես, ինչպես ընդհանուր տեսքի ԲԱԿՀ-երի դեպքում (տես 2.2.3-ում): Այնուամենայնիվ, Նայքվիստի չափանիշների հակադարձ ձևակերպումը հնարավորություն է տալիս ավելի մոտ որոշել M_{ei} և M_{oi} տատանողականության ցուցանիշները [13,62]: Մասնավորապես, այդ ցուցանիշները կարող են որոշվել դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի առանձին կապուղիների $w(z)$ հաճախականային բնութագրերով: Այդ պատճառով (2.2.29) արտահայտությունը, (4.1.5)-ը հաշվի առնելով, կարելի է գրել՝

$$M_{ei} = \sup_{0 \le \omega \le \frac{\omega_S}{2}} \frac{1}{|1+\lambda_i w[\exp(j\omega T_S)]|} = \sup_{0 \le \omega \le \frac{\omega_S}{2}} \frac{1/\lambda_i}{|1/\lambda_i + w[\exp(j\omega T_S)]|} \qquad (4.1.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, N:$$

(4.1.12)-ում պարզ հանրահաշվական գործողություններ կատարելուց հետո, $M_{ei} = const$ դեպքում կոմպլեքս հարթությունում $w(z)$ հետագծը կարելի է ստանալ հետևյալ հավասարմամբ՝

$$\left[\mathrm{Re}\{w(z)\} + \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\lambda_i}\right\}\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\{w(z)\} + \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\lambda_i}\right\}\right]^2 = \frac{1}{\left(|\lambda_i| M_{ei}\right)^2} \qquad (4.1.13)$$

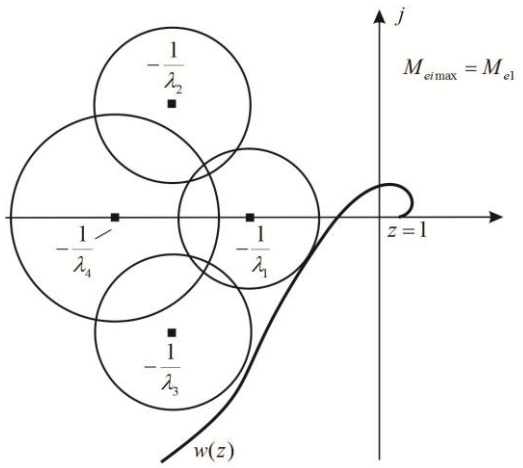
$$i = 1, 2, \dots, N:$$

Այս հավասարումները բնութագրում են $1/\left(|\lambda_i| M_i\right)$ շառավղերով և $-1/\lambda_i$ կրիտիկական կետում դիրքավորված կենտրոններով N հատ շրջագծերի ընտանիք (նկ. 4.1.2): Ունենալով $-1/\lambda_i$ կետերի դիրքը, հեշտությամբ կարելի է յուրաքանչյուր i-ի համար գտնել M_{ei} մեծությունը՝ կառուցելով համապատասխան $-1/\lambda_i$ կենտրոնով $w(z)$ հետագծին հարող շրջագիծ, դրանից հետո հաշվել $M_{ei\max} = \max_i (M_{ei})$ մեծությունը:

Նշենք, որ դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կանոնական բազիսի z կոմպլեքս փոփոխականից անկախ լինելու շնորհիվ M_e սահմանային արժեքները բնութագրող (2.2.36) անհավասարությունը ընդունում է ավելի պարզ տեսք՝

$$M_{ei\max} \le M_e \le \Upsilon(C) M_{ei\max}, \qquad (4.1.14)$$

որտեղ՝ $\Upsilon(C)$ -ն պայմանավորվածության թիվն է: Դա թույլ է տալիս հեշտությամբ գնահատական տալ M տատանողականության ցուցանիշի մասին, ունենալով $M_{i\max}$:



Նկ. 4.1.2. $M_{ei} = const$ շրջագծերը $w(z)$ հարթությունում ($N=4$)

Օրինակ 4.1. Դիտարկենք անընդհատ եռաչափ միատիպ ԲԱԿՀ-ի առանձին կապուղիներով հետևյալ փոխանցման ֆունկցիան՝

$$w_P(s) = \frac{75000000}{s(s+25)(s+400)(s+500)} \tag{4.1.15}$$

Վերջինս ունի նաև կապուղիների միջև կոշտ փոխադարձ կապերի հետևյալ թվային մատրիցը՝

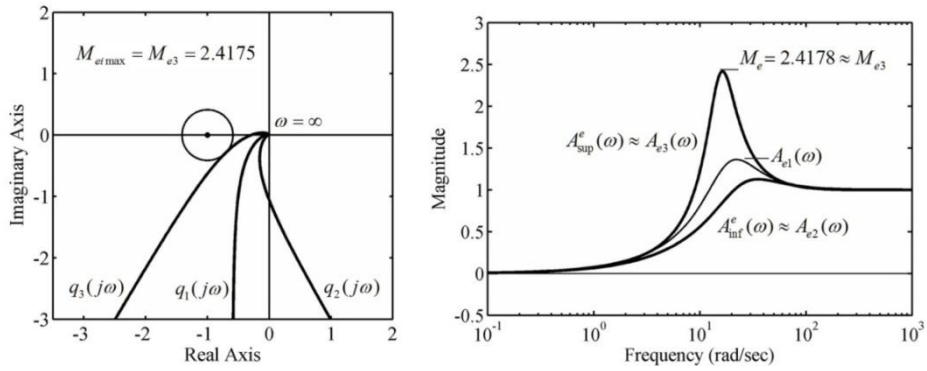
$$R = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.03 & -0.01 \\ -0.05 & 0.866 & 0.5 \\ 0.02 & -0.5 & 0.866 \end{pmatrix} \tag{4.1.16}$$

R մատրիցի սեփական արժեքները կլինեն՝

$$\lambda_1 = 0.899969, \quad \lambda_2 = 0.86604 + j0.5017, \quad \lambda_3 = 0.86604 - j0.5017, \tag{4.1.17}$$

այսինքն՝ գոյություն ունեն մի λ_1 իրական և երկու կամպլեքս-փոխկապակցված $\lambda_3 = \tilde{\lambda}_2$ արժեքներ: Ցույց տանք, որ R մատրիցը բավական մոտ է օրթոգոնալ մատրիցին: Մասնավորապես, դրա դետերմինանտը կլինի՝ $\det(R) = 0.9015$, C մոդալ մատրիցի պայմանավորվածության թիվը՝ $\Upsilon(C) = 1.045$, իսկ λ_i սեփական արժեքների մոդուլները ստորակետից հետո մինչև 3-րդ թվի ճշտությամբ հավասար են 1-ի: Նկ.4.1.3-ում պատկերված են անընդհատ միատիպ ԲԱԿՀ-ի $q_i(j\omega) = \lambda_i w_P(j\omega)$ ՖՀԲ-ի Նայքվիստի հետագծերը և ցույց է տրված $q_3(j\omega)$ հետագծին շոշափող $(-1, j0)$ կենտրոնով

շրջանագիծ: Մեծությունը, որը հակադիր է այդ շրջանի շառավղին, հավասար է բնութագրիչ համակարգերի տատանողականության ցուցանիշներից ամենամեծին՝ $M_{e3} = M_{ei\max} = 2.4175$: Համակարգի ընհանրացված ԱՀԲ-երը պատկերված են նկ.4.1.3բ-ում, որտեղ $A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտը և $A^e_{\inf}(\omega)$ մինորանտը գործնականում համընկնում են 3-րդ և 2-րդ բնութագրիչ համակարգերի հետ՝ $\lambda_3 = \tilde{\lambda}_2$-ով: Անընդհատ միատիպ ԲԱԿՀ-երի M_e տատանողականության գործակիցը, որը որոշվում է $A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտի ռեզոնանսային արժեքով, հավասար է 2.4178, այսինքն՝ փաստացի համընկնում է 3-րդ բնութագրիչ համակարգի տատանողականության ցուցանիշի հետ՝ $M_{e3} = 2.4175$:



ա) բ)

Նկ. 4.1.3. Անընդհատ միատիպ ԲԱԿՀ-երի հաճախականային բնութագրերը: (ա) բաց համակարգի $q_i(j\omega)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիայի Նայքվիստի հետագիծը, (բ) փակ համակարգի ընդանրացված ԱՀԲ-ն ըստ սխալի վեկտորի

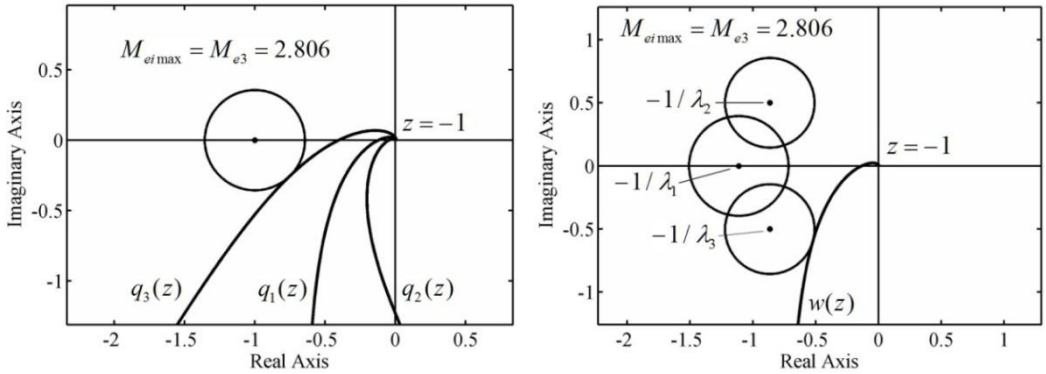
Անընդհատ միատիպ ԲԱԿՀ-երի առանձին կապուղիներում ներմուծենք սինխրոն իմպուլսային տարրեր $T_S = 0.01$վ ընդհատման պարբերությամբ և զրոյական կարգի $w_H(s)$ էքստրապոլյատորներով (2.1.1): Նկատենք, որ ընտրված $T_S = 0.01$վ ընդհատման պարբերությունը 5 անգամ գերազանցում է $w_P(s)$ փոխանցման ֆունկցիայի (4.1.16) $T_{\min} = 0.002$ վ նվազագույն ժամանակահատվածին: Դիսկրետ համակարգից ստացված $q_i(z)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$q_1(z) = \lambda_1 w(z), \quad q_2(z) = \lambda_2 w(z), \quad q_3(z) = \lambda_3 w(z), \tag{4.1.18}$$

որտեղ՝

$$w(z) = \frac{0.069794(z+2.898)(z+0.1797)(z+0.007994)}{(z-1)(z-0.7788)(z-0.01832)(z-0.006738)} : \tag{4.1.19}$$

Նկ.4.1.4 ա)-ից դ)-ում ներկայացված է բնութագրիչ համակարգերի $M_{ei\max}$ առավելագույն տատանողականության ցուցանիշի որոշումը Նայքվիստի դիագրամի միջոցով, որտեղ կառուցումները տրված են Նայքվիստի կայունության ուղիղ և հակադարձ չափանիշների ձևակերպման համար:

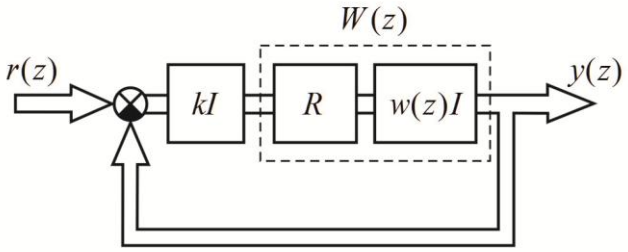


ա) ուղիղ ձևակերպում բ) հակադարձ ձևակերպում

Նկ. 4.1.4. Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշի որոշումը

4.1.2.Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը z - տիրույթում

Նկ.4.1.5-ում պատկերված է N_ չափանի դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի մատրիցային կառուցվածքային սխեման, որտեղ $w(z)$-ն առանձին կապուղիների փոխանցման ֆունկցիաներն են, R- ը՝ կոշտ փոխադարձ կապերի մատրիցը, I- ն՝ միավոր մատրիցը, $k > 0$ - ն դրական իրական սկալյար:



Նկ. 4.1.5. Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-ի կառուցվածքը

Ինչպես նշված էր 4.1.1-ում, դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի $q_i(z)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաները նկ.4.1.1-ում համընկնում են $w(z) = M(z)/D(z)$ առանձին կապուղիների փոխանցման ֆունկցիաների հետ λ_i հաստատունով, որտեղ λ_i-երը R մատրիցի սեփական արժեքներն են, որոնք կարող են լինել կամ իրական թվեր, կամ կոմպլեքս-համալուծ:

Հաշվի առնելով վերը նշվածը և նկ.4.1.5-ի դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-ի կառուցվածքային սխեման, (2.41) հավասարումը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$1 + k\lambda_i w(z) = D(z) + k\lambda_i M(z) = 0 \qquad \text{կամ} \qquad k\lambda_i w(z) = k\lambda_i \frac{M(z)}{D(z)} = -1 \qquad (4.1.20)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N:$$

Այս հավասարումներից վերջինը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$k\,w(z) = -\frac{1}{\lambda_i} = -\frac{1}{|\lambda_i|}\exp\{-j\arg\lambda_i\}, \qquad (4.1.21)$$

որտեղից էլ բխում են դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի ձևավորման այլ պայմաններ՝

$$|k\,w(z)| = \frac{1}{|\lambda_i|}, \quad \arg w(z) = \pm(2r+1)180^\circ - \arg\lambda_i, \quad r = 0, 1, 2, \ldots. : \qquad (4.1.22)$$

(4.1.20) - (4.1.22) հավասարումներից բխում են հետևյալ լրացուցիչ կաննոնները, որոնք նկարագրում են z-հարթությունում դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատկությունները [14,17]:

Կանոն 1. *Արմատային հետագծերի թիվը:* N-չափանի դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի թիվը հավասար է $N \cdot n$, որտեղ n-ը $w(z)$ առանձին կապուղիների փոխանցման ֆունկցիաների բևեռների թիվն է:

Կանոն 2. *Արմատային հետագծերի սկիզբը և վերջը:* $k = 0$ դեպքում հետագծերը սկսվում են $D(z) = 0$ հավասարման արմատներից, այսինքն՝ $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի բևեռներից և ավարտվում են $M(z) = 0$ հավասարման արմատներում, այսինքն՝ $w(z)$-ի զրոներում: $w(z)$-ի յուրաքանչյուր բևեռից, հաշվի առնելով նրա պատիկությունը, դուրս է գալիս ուղիղ N հատ արմատ և $w(z)$-ի յուրաքանչյուր զրոյում ավարտվում է, հաշվի առնելով նրա պատիկությունը, ուղիղ N հատ հետագծեր:

Կանոն 3. *Անսահմանությանը ձգտող հետագծերի թիվը:* Անսահմանությանը ձգտող յուրաքանչյուր բնութագրիչ համակարգերի հետագծերի թիվը հավասար է $e_s = n - m$ k-ի անսահմանափակ մեծացման դեպքում, որտեղ m-ը $w(z)$-ի զրոների թիվն է: Համապատասխանաբար, դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի անսահմանությանը ձգտող արմատների հետագծերի ընդհանուր թիվը կլինի՝ $N \cdot e_s$:

Կանոն 4. *Արմատային հետագծերի ասիմպտոտների թեքությունը:* Կարելի է ցույց տալ, որ i-րդ բնութագրիչ համակարգի e_s անսահմանությանը ձգտող արմատային հետագծերը մոտենում են e_s- Բատտերվորտի ճառագայթային ուրվագծին, որի ճառագայթները (հետագծերի ասիմպտոտները) կազմում են իրական առանցքով դրական ուղղությամբ անկյուններ՝

$$\gamma_r = \frac{(2r+1)180^\circ - \arg\lambda_i}{e_s}, \quad r = 0, 1, \dots, e_s - 1: \tag{4.1.23}$$

Ինչպես երևում է (4.1.23)-ից, λ_i սեփական արժեքներով բնութագրիչ համակարգերի հետագծերի ասիմպտոտների թեքությունները, այսինքն $\arg\lambda_i = 0$-ով, հավասար են $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիայով միատիպ դիսկրետ համակարգի ասիմպտոտի թեքություններին: Հետո, λ_i կոմպլեքսին համապատասխանող Բատտերվորտի յուրաքանչյուր ուրվագիծ սիմետրիկ չէ իրական առանցքի նկատմամբ: Այնուամենայնիվ, հաշվի առնելով կոմպլեքս սեփական արժեքների զույգերով կոմպլեքս փոխկապակցվածությունը, յուրաքաչյուր ասիմպտոտ ունի իր «կոմպլեքս-համալուծը», որը ստացվում է իրական առանցքի նկատմամբ առաջին հայելային արտապատկերմամբ [13,59]:

Կանոն 5. *Արմատային հետագծերի ասիմպտոտների կենտրոնները:* Կարելի է նաև ցույց տալ, որ բոլոր բնութագրիչ համակարգերի ասիմպտոտների կենտրոնները տեղակայված են իրական առանցքի մի կետի վրա և համընկնում են միատիպ ԲԱԿՀ-երի մեկուսացված կապուղիների A_c ասիմպտոտների կենտրոնի հետ ՝

$$A_c = \frac{\sum_{r=1}^{n} p_r - \sum_{r=1}^{m} z_r}{n - m}, \tag{4.1.24}$$

որտեղ p_r-ով և z_r-ով նշանակված են $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի բևեռներն ու զրոները:

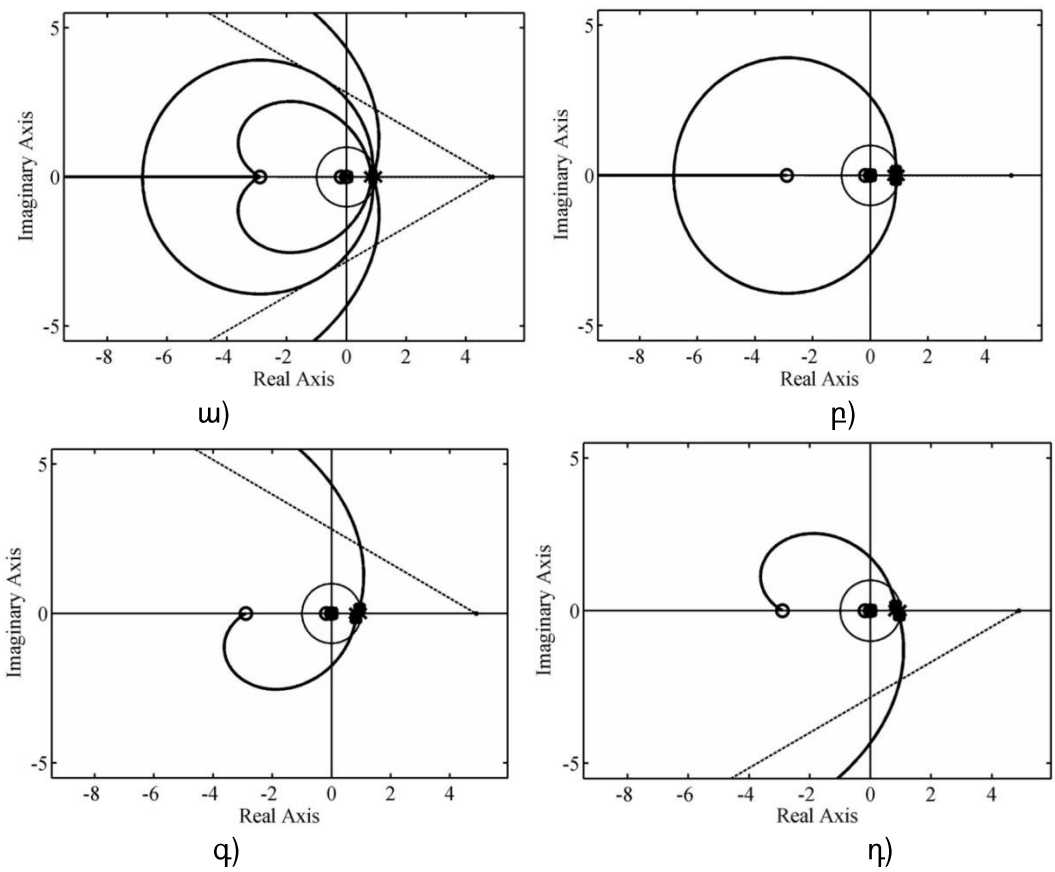
Կանոն 6. *Կոմպլեքս փոխկապակցված և համընկնող արմատային ոչ սիմետրիկ հետագծեր:* Կոմպլեքս փոխկապակցված λ_i սեփական արժեքներով բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերը ոչ սիմետրիկ են իրական առանցքի

նկատմամբ: Բոլոր այս տիպի հետագծերը ստացվում են իրական առանցքի նկատմամբ հայելային արտապատկերմամբ: Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային բոլոր հետագծերը, որոնք համապատասխանում են λ_i-ին միևնույն $\arg\lambda_i$-ով, բայց հնարավոր է տարբեր $|\lambda_i|$-ով, համընկնում են իրար հետ: Տվյալ կանոնը նախորդների տրամաբանական շարունակությունն է և բխում է (4.1.24)-ից:

Կանոն 7. *Արմատային հետագծերին պատկանող իրական առանցքի հատվածներ:* Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-ը կարող են ունենալ այնպիսի արմատային հետագծեր, որոնք համընկնում են z հարթության իրական առանցքի վերջավոր ինտերվալների հետ միայն λ_i սեփական արժեքների առկայության դեպքում: Այդ դեպքում, այդպիսի ինտերվալներ կարող են լինել այն հատվածներում, որոնք տեղակայված են $w(z)$-ի հատուկ կետերից ձախ: Այս կանոնը ևս բխում է նախորդներից:

Ինչ վերաբերում է կոմպլեքս λ_i-ով բնութագրիչ համակարգերին, ապա այդ համակարգերը չեն կարող իրական առանցքի վրա ունենալ հետագծերի հատվածներ:

Օրինակ 4.2. Նկ.4.1.6-ում պատկերված են եռաչափ դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը 4.1 օրինակից, որտեղ նկ.4.1.6 ա)-ում պատկերված է միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի ընհանուր տեսքը, իսկ նկ 4.1.6 բ-դ-ում՝ բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերը, որտեղ կետագծերով տրված են արմատային հետագծերի ասիմպտոտները: Նկ.4.1.6 ա)-ում դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերն իրենցից ներկայացնում են նկ.4.1.6 բ-դ-ի 3 առանձին բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերի վերադրում: Նշենք, որ նկ.4.1.6 բ-ում պատկերված առաջին բնութագրիչ համակարգի հետագծերը, որոնք համապատասխանում են $\lambda_1 = 0.899969$ սեփական արժեքին, սիմետրիկ են իրական առացքի նկատմամբ: Մնացած 2 բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերը կոմպլեքս-փոխկապակցված են $\lambda_{2,3} = 0.86604 \pm j0.5017$-ով և սիմետրիկ չեն իրական առանցքի նկատմամբ, բայց հանդիսանում են միմյանց հայելային արտապատկերումը իրական առանցքի նկատմամբ:



Նկ. 4.1.6. Եռաչափ դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-ի Արմատային հոդոգրաֆները
ա) ընդհանուր տեսքը, բ) առաջին բնութագրիչ համակարգի հոդոգրաֆները,
գ) երկրորդ բնութագրիչ համակարգի հոդոգրաֆները, դ) երրորդ բնութագրիչ համակարգի հոդոգրաֆները

4.2. Երկգծային ձևափոխության հիման վրա դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի հետազոտումը

Երկգծային ձևափոխության հիման վրա ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հետազոտմանը նվիրված էր 3.3-ը: Տվյալ բաժնում կրճատ կդիտարկվեն դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի հետազոտման համար երկգծային ձևափոխության կիրառման հատկությունները:

4.2.1. Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումը

(3.2.1) երկգծային ձևափոխության օգտագործման դեպքում, դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի մատրիցային կառուցվածքային սխեման ներկայացված է նկ.4.2.1-ում, որտեղ z հարթության մեջ միատիպ ԲԱԿՀ-երի մեկուսացված կապուղիների՝

$$w(z)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}\ , \tag{4.2.1}$$

փոխանցման ֆունկցիային համապատասխանող $w(\varpi)$ ներկայացումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$w(\varpi)=\frac{K_{\varpi}\left(-\frac{T_S}{2}\varpi+1\right)^{(n-m)}\prod_{i=1}^{m}\left(\varpi-z_i^{\varpi}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(\varpi-p_i^{\varpi}\right)}=\frac{K_{\varpi}M(\varpi)}{D(\varpi)}, \tag{4.2.2}$$

որտեղ՝

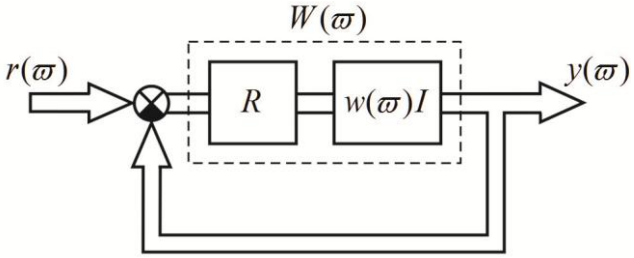
$$K_{\varpi}=\frac{(-1)^{n-m}K\prod_{i=1}^{m}(1+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1+p_i)},\quad z_i^{\varpi}=-\frac{2}{T_S}\frac{(1-z_i)}{(1+z_i)},\quad p_i^{\varpi}=-\frac{2}{T_S}\frac{(1-p_i)}{(1+p_i)}, \tag{4.2.3}$$

իսկ

$$M(\varpi)=m_n\varpi^n+m_{n-1}\varpi^{n-1}+...+m_1\varpi+m_0 \tag{4.2.4}$$

$$D(\varpi)=d_n\varpi^n+d_{n-1}\varpi^{n-1}+...+d_1\varpi+d_0 \tag{4.2.5}$$

n աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամներ են:



Նկ. 4.2.1. Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի մատրիցային կառուցվածքային սխեման ϖ հարթությունում

Ինչպես նշվեց 2.3-ում և 1.1.4-ում, $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիան կանոնավոր է, այսինքն՝ ունի նույն քանակությամբ բևեռներ ու զրոներ, հավասար է $w(z)$ (4.2.1) փոխանցման ֆունկցիայի n բևեռների քանակին: Դա նշանակում է, որ $\varpi=j\infty$ դեպքում $w(\varpi)$ մեծությունը իրական է և վերջավոր: Բացի դրանից, $n>m$ դեպքում, որտեղ m-ը $w(z)$-զրոների թիվն է, $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիան ոչ մինիմալ փուլային է, քանի որ ունի $n-m$ հատ դրական իրական զրոներ $\varpi=2/T_S$ կետում:

Վերջապես, K_{ϖ} (4.2.3) գործակիցը կարող է լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական թիվ՝ կախված $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի $n-m$ տարբերության նշանից և p_i ու z_i բևեռների և զրոների բաշխումից:

Նկ.4.2.1-ի վրա դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի փոխանցման մատրիցը ելքի և սխալի նկատմամբ ունի հետևյալ տեսքը.

$$\Phi(\varpi) = \left[I + W(\varpi)\right]^{-1} W(\varpi) = W(\varpi)\left[I + W(\varpi)\right]^{-1}, \tag{4.2.6}$$

$$\Phi_e(\varpi) = \left[I + W(\varpi)\right]^{-1}, \tag{4.2.7}$$

որտեղ բաց համակարգի փոխանցման մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$W(\varpi) = w(\varpi)R: \tag{4.2.8}$$

Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-ի $W(\varpi)$, $\Phi(\varpi)$ և $\Phi_e(\varpi)$ փոխանցման մատրիցները ԲՓՖ-երի մեթոդի հիման վրա կարելի է արտահայտել հետևյալ կանոնական ներկայացմամբ՝

$$W(\varpi) = C\,diag\{q_i(\varpi)\}C^{-1} = \sum_{i=1}^{N} c_i > q_i(\varpi) < c_i^{+} \quad , \tag{4.2.9}$$

$$\Phi(\varpi) = C\,diag\left\{\frac{q_i(\varpi)}{1+q_i(\varpi)}\right\}C^{-1} = \sum_{i=1}^{N} c_i > \frac{q_i(\varpi)}{1+q_i(\varpi)} < c_i^{+} \quad , \tag{4.2.10}$$

$$\Phi_e(\varpi) = C\,diag\left\{\frac{1}{1+q_i(\varpi)}\right\}C^{-1} = \sum_{i=1}^{N} c_i > \frac{1}{1+q_i(\varpi)} < c_i^{+} \, , \tag{4.2.11}$$

որտեղ՝

$$q_i(\varpi) = \lambda_i w(\varpi), \quad i = 1, 2, ..., N \tag{4.2.12}$$

դիսկրետ միատիպ բաց ԲԱԿՀ-ի բնութագրիչ փոխանցման ֆոնկցիան է և ենթադրվում է, որ փոխադարձ կապերի R մատրիցի բոլոր λ_i սեփական արժեքները տարբեր են, իսկ $C = [c_1\ c_2\ ...\ c_N]$ մոդալ մատրիցը կազմված է R մատրիցի c_i նորմավորված գծորեն անկախ սեփական վեկտորներից:

<u>Միատիպ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծությունն ու տատանողականության գործակիցը</u>

Նկ.4.2.1-ում դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-ի կայունությունը գնահատվում է հետևյալ բնութագրիչ հավասարման արմատներով՝

$$\det\left[1 + w(\varpi)R\right] = \prod_{i=1}^{N}[1 + \lambda_i w(\omega)] = 0\,, \tag{4.2.13}$$

որը համարժեք է հետևյալ N հատ հավասարումների համակարգին

$$1+\lambda_i w(\varpi)=0, \quad i=1,2,\dots,N, \tag{4.2.14}$$

կամ, հաշվի առնելով (4.2.2)-ը, կստացվի՝

$$D(\varpi)+\lambda_i K_\varpi M(\varpi)=0, \quad i=1,2,\dots,N \quad : \tag{4.2.15}$$

Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծության համար ըստ (4.2.14) և (4.2.15) հավասարումների կարելի է օգտագործել Նայքվիստի ընդանրացված չափանիշների 2 գրաֆիկական պատկերները, որոնք դիտարկվում են 4.1.1-ում z-ձևափոխության օգնությամբ միատիպ ԲԱԿՀ-երի նկարագրման համար: Կայունության վերլուծությունը ամբողջական է և նկարագրված է ստորև նշված օրինակում: Նույնը վերաբերում է նաև M_e և M_o տատանողականության գործակիցների որոշմանը ըստ ընդանրացված ԱՀԲ-երի $A^e_{\sup}(\nu)$ և $A^o_{\sup}(\nu)$ մաժորանտների, ինչպես նաև բնութագրիչ համակարգերի M_{ei} և M_{oi} տատանողականության գործակիցների որոշմանը:

Օրինակ, M_{ei} մեծությունը սահմանվում է հետևյալ ձևով՝

$$M_{ei}=\sup_{0\le\nu\le\infty}\frac{1}{|1+\lambda_i w(j\nu)|}=\sup_{0\le\nu\le\infty}\frac{1/\lambda_i}{|1/\lambda_i+w(j\nu)|}, \qquad i=1,2,\dots,N \ , \tag{4.2.16}$$

Սկզբունքային տարբերությունն այստեղ այն է, որ K_ϖ գործակիցը (4.23)-ում կարող է լինել ոչ միայն դրական, այլ նաև բացասական թիվ: Վերջին դեպքում, նկ.4.2.1-ի դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-ի ընդհանուր բացասական հետադարձ կապի դեպքում բոլոր բնութագրիչ համակարգերում հետադարձ կապը դառնում է դրական:

Օրինակ 4.3. Երկգծային ձևափոխության հիման վրա դիտարկենք 4.1. օրինակի եռաչափ դիսկրետ ԲԱԿՀ-ն, որտեղ $w(z)$-ի անընդհատ մասի բնութագրիչ ֆունկցիան $T_S=0.01$ վ դեպքում նկարագրվում է (4.1.20) արտահայտությամբ: Այդ ֆունկցիայի (4.3.1) երկգծային ձևափոխությունը կլինի՝

$$w(\varpi)=\frac{0.0029556\ (\varpi-410.7)\,(\varpi-200)\,(\varpi+203.2)\,(\varpi+287.6)}{\varpi\,(\varpi+24.87)\,(\varpi+192.8)\,(\varpi+197.3)}: \tag{4.2.17}$$

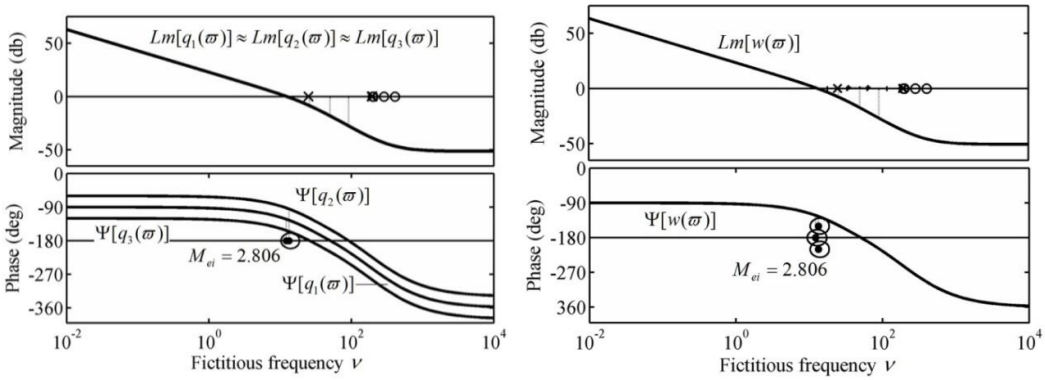
Տվյալ փոխանցման ֆունկցիան ունի դրական ուժեղացման K_ϖ գործակից և աջ կիսահարթությունում երկու զրո, որոնցից մեկը ($z_1^\varpi=200=2/T_S$ կետում)

պայմանավորված է $w(z)$ (3.1.20) փոխանցման ֆունկցիայի բևեռների և զրոների թվի $n-m=1$ տարբերությամբ:

Դիտարկվող համակարգի $q_i(\varpi)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիայի Նայքվիստի և Նիկոլսի հետագծերն իրենց տեսքով լիովին համընկնում են $q_i(z)$ ԲՓՖ-ի նկ.4.1.4 ա,բ,գ,դ-ի հետագծերի հետ, (տարբերվում են միայն այդ հետագծերի երկայնքով ω և ν հաճախությունների նշանով) այդ իսկ պատճառով այստեղ չեն դիտարկվում:

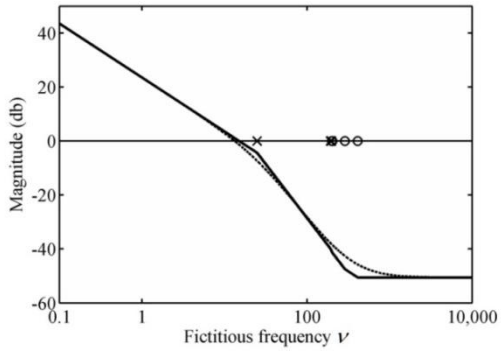
Նկ.4.2.2-ում պատկերված է համակարգի Բոդեի դիագրամը Նայքվիստի չափանիշների 2 ձևակերպումների համար (ուղիղ և հակադարձ): Ինչպես երևում է կորից, $q_i(\varpi)$-ի ԱՀԲ-երը ν կեղծ հաճախության մեծ արժեքների դեպքում հորիզոնական են, այսինքն՝ ունեն զրոյական թեքություն:

Նկ.4.2.3-ում պատկերված են $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի ասիմպտոտիկ և ճշգրիտ լոգարիթմական ԱՀԲ-երը (4.2.17):



ա) ուղիղ ձև բ) հակադարձ ձև

Նկ.4.2.2. Եռաչափ միատիպ ԲԱԿՀ-ի Բոդեի դիագրամները $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայով



Նկ 4.2.3. $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի (4.2.17) ասիմպտոտական և ճշգրիտ լոգարիթմական ԱՀԲ-երը

4.2.2. Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը ϖ հարթությունում

ϖ հարթությունում դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատկությունների դիտարկման ժամանակ կհիմնվեմ նկ.4.1.6-ում ներկայացված մատրիցային կառուցվածքային սխեմայի վրա, որտեղ $w(z)$ -ը պետք է փոխարինել $w(\varpi)$-ով: Արմատային հետագծերի հատկությունների ուսումնասիրման համար $w(\varpi)$ (4.2.2) փոխանցման ֆունկցիան արտահայտենք ավելի հարմար տեսքով՝

$$w(\varpi) = K_{\varpi} w_0(\varpi), \tag{4.2.18}$$

որտեղ՝

$$w_0(\varpi) = \frac{M(\varpi)}{D(\varpi)}, \tag{4.2.19}$$

իսկ $M(\varpi)$ և $D(\varpi)$ բազմանդամներն ունեն միևնույն n աստիճան (n- ը $w(z)$ և $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիաների բևեռների թիվն է) և նկարագրվում են (4.2.4) և (4.2.5) արտահայտություններով: (4.1.21) հավասարումը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$1 + k\lambda_i K_{\varpi} w_0(\varpi) = D(\varpi) + k\lambda_i K_{\varpi} M(\varpi) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N \tag{4.2.20}$$

կամ՝

$$k\lambda_i K_{\varpi} w_0(\varpi) = k\lambda_i \frac{K_{\varpi} M(\varpi)}{D(\varpi)} = -1, \quad i = 1, 2, ..., N: \tag{4.2.21}$$

որտեղ վերջինը կարելի է գրել համարժեք տեսքով՝

$$k K_{\varpi} w_0(\varpi) = -\frac{1}{\lambda_i} = -\frac{1}{|\lambda_i|} \exp\{-j \arg \lambda_i\}, \quad i = 1, 2, ..., N: \tag{4.2.22}$$

Այն պայմանը, որ K_{ϖ} գործակիցը (4.2.20)-(4.2.21)-ում կարող է լինել և' դրական և' բացասական, կախված բևեռների տարբերության թվի նշանից և $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի զրոների և բևեռների z-հարթությունում նրանց բաշխվածությունից, բերում է ϖ հարթությունում միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի նշանակալի յուրահատկությունների: Իրոք, (4.2.22)-ի հիման վրա դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի ձևավորման պայմանը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$k\,|K_{\varpi} w(\varpi)| = \frac{1}{|\lambda_i|}, \tag{4.2.23}$$

$$\arg w_0(\varpi) = -\arg K_{\varpi} - \arg \lambda_i \pm (2r+1)180^{\circ}, \quad r = 0, 1, 2, ..., \tag{4.2.24}$$

որտեղ նշված է, որ $k > 0$ և $\arg k = 0$: Այդ պայմանները համընկնում են z-հարթությունում միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի մոդուլների և

արգումենտների պահպանման պայմանին $K_{\varpi} > 0$ դեպքում (երբ $\arg K_{\varpi} = 0$) (4.1.23): Այդ պատճառով, դրական և բացասական K_{ϖ} գործակիցների դեպքերը դիտարկվում են առանձին:

$K_{\varpi} > 0$ դեպքում ϖ հարթությունում միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատկությունները չնչին ձևով տարբերվում են z-հարթությունում արմատների հետագծերի հատկություններից: Այդ տարբերություններն առաջին հերթին հիմնվում են այն բանի վրա, որ $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիաները ունեն նույն քանակությամբ բևեռներ ու զրոներ: Նշենք, որ միատիպ ԲԱԿՀ-երի ԱՀԲ-երը նկ.4.1.6-ի վրա ունեն պարզ տեսք՝ $q_i(\varpi) = k\lambda_i w(\varpi)$ (այսինքն կանոնավոր են): Այդ պատճառով, ինչպես ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի դեպքում, ϖ հարթությունում միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը $K_{\varpi} > 0$ դեպքում չունեն անսահմանությանը ձգտող ճյուղեր և արմատների բոլոր հետագծերը ավարտվում են բաց համակարգի վերջավոր զրոներում: Հիշեցնեմ, որ միատիպ ԲԱԿՀ-ի բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաները նկ.4.1.6-ի վրա ունեն պարզ տեսք՝ $q_i(\varpi) = k\lambda_i w(\varpi)$, որտեղ $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիան արտահայտվում է $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի (4.2.3) անալիտիկ արտահայտությունների m զրոների և n բևեռների միջոցով և ունեն $e_S = n - m$ հատ դրական զրոներ $\varpi = 2/T_S$ կետում: Այստեղից, 4.1.2-ի կանոն 3-ը հիշելով, կարելի է եզրակացնել, որ $N \cdot e_S$ դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի ճյուղերը ϖ հարթությունում ավարտվում են $k \to \infty$ դեպքում $\varpi = 2/T_S$ կետում: z հարթությունում միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի վարքի մնացած կանոնները, որոնք չեն վերաբերում ասիմպտոտներին (տես ենթագլուխ.4.1.2), ճիշտ են նաև ϖ հարթության արմատային հետագծերի դեպքում:

Բացասական $K_{\varpi} < 0$ դեպքը ավելի բարդ է: Ինչպես նշվում էր, նկ.4.2.1-ից դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-ի ընդհանուր բացասական հետադարձ կապի դեպքում, բոլոր բնութագրիչ համակարգերում հետադարձ կապը $K_{\varpi} < 0$ դեպքում դրական է դառնում: Ընդ որում, (4.2.24) արգումենտների պայմանը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\arg w_0(\varpi) = -\arg \lambda_i \pm 360^\circ r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots : \qquad (4.2.25)$$

Հայտնի է, որ եթե մեկ մուտքով և ելքով բացասական հետադարձ կապի դեպքում արմատային հետագծերին կարող են պատկանել տվյալ առանցքի վրա կենտ թվից ձախ տեղակայված իրական առանքի վերջավոր կամ կիսաանվերջ ինտերվալները, ապա դրական հետադարձ կապի դեպքում այդպիսի ինտերվալներ կարող են լինել միայն այնպիսիններ, որոնք տեղակայված են կենտ թվից աջ:

Դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը ընդհանուր դեպքում իրենցից ներկայացնում են միատիպ բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերի բազմություն: Ընդ որում, բնութագրիչ համակարգերը կարող են ունենալ այնպիսի արմատային հետագծեր, որոնք λ_i սեփական արժեքների առկայության դեպքում համընկնում են իրական առանցքի վրայի հատվածների հետ [12,60,75,116,103,123]: Ուստի, հետագայում կդիտարկեն միայն $K_\varpi < 0$ դեպքը և $q_i(\varpi) = \lambda_i K_\varpi w_0(\varpi)$ բնութագրիչ համակարգերը $\lambda_i > 0$ սեփական արժեքների դեպքում: Այդպիսի բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերն ունեն առանձնահատուկ յուրահատկություն, որը կայանում է նրանում, որ միշտ գոյություն ունի $k = k_{cr}$ գործակցի վերջավոր արժեք, ընդ որում բնութագրիչ հավասարումների որոշ արմատները՝

$$D(\varpi) + k\lambda_i K_\varpi M(\varpi) = 0 \qquad (4.2.26)$$

ձգտում են անսահմանության $k \to k_{cr}$ դեպքում և վերադառնում են այնտեղից, երբ $k > k_{cr}$:

Այս բացառության մանրամասն ուսումնասիրությունը սովորական միատիպ համակարգերի համար տրված է [A.M. Eydgahi]-ում և տարածված է անընդհատ միատիպ ԲԱԿՀ-երի վրա [Гаспарян Эйдгахи] : Ստորև բերվում է դրա ընդհանրացումը դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի ϖ հարթությունում: Արտահայտենք (4.2.26) հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$k\lambda_i K_\varpi \frac{M(\varpi)}{D(\varpi)} = -1, \quad \text{կամ} \quad k\lambda_i |K_\varpi| \frac{M(\varpi)}{D(\varpi)} = 1, \qquad (4.2.27)$$

հաշվի առնելով (4.2.4) և (4.2.5)-ը կունենանք՝

$$k\lambda_i |K_\varpi| \frac{m_n\varpi^n + m_{n-1}\varpi^{n-1} + \ldots + m_1\varpi + m_0}{d_n\varpi^n + d_{n-1}\varpi^{n-1} + \ldots + d_1\varpi + d_0\varpi} = 1, \qquad (4.2.28)$$

կամ

$$k = \frac{d_n\varpi^n + d_{n-1}\varpi^{n-1} + ... + d_1\varpi + d_0}{\lambda_i |K_\varpi| \left(m_n\varpi^n + m_{n-1}\varpi^{n-1} + ... + m_1\varpi + m_0\right)}: \qquad (4.2.29)$$

(4.2.29) դժվար չէ տեսնել, որ

$$k_{cr} = \lim_{\varpi\to\infty} k = \lim_{\varpi\to\infty} \frac{d_n\varpi^n + d_{n-1}\varpi^{n-1} + ... + d_1\varpi + d_0}{\lambda_i |K_\varpi| \left(m_n\varpi^n + m_{n-1}\varpi^{n-1} + ... + m_1\varpi + m_0\right)} = \frac{d_n}{\lambda_i |K_\varpi| m_n} \qquad (4.2.30)$$

վերջավոր արժեքը $\varpi = \infty$ դեպքում բավարարում է (4.2.26) հավասարմանը:

Ուշադրություն դարձնելով այն բանին, որ ϖ հարթությունում դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի բոլոր ճյուղերը պետք է սկսվեն $k = 0$ դեպքում $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի բևեռներում և ավարտվեն $k \to \infty$ դեպքում նրա վերջավոր զրոներում, գալիս ենք այն եզրահանգմանը, որ $k = k_{cr}$ դեպքում արմատային հետագծերի որոշ ճյուղեր անցնում են անսահմանության միջով:

$q_i(\varpi)$ i-րդ ԲՓՖ-ի հատկությունները $K_\varpi < 0$ և $\lambda_i > 0$ դեպքում ձևակերպված են ստորև բերված կանոններում:

Կանոն 1. *Անվերջությունում արմատների համար ուժեղացման գործակից:* Արմատային հետագծերը միշտ անցնում են անվերջության միջով $k = k_{cr} = d_n / \lambda_i |K_\varpi| m_n$ գործակցի վերջավոր արժեքի դեպքում:

Կանոն 2. *Արմատային հետագծերն իրական առանցքի վրա:* Իրական առանցքի երկու ծայրերն էլ պատկանում են արմատային հետագծերին:

Կանոն 3. *Անվերջությունով անցնող հետագծերի ճյուղերի թիվը:* Անվերջությունով անցնող արմատային հետագծերի ճյուղերի թիվը կախված է ϖ-ի տարբեր աստիճանների դեպքում համապատասխան գործակիցների արժեքներից և հավասար են r ամենամեծ արժեքին հետևյալ հարաբերությունների հաջորդականությամբ՝

$$r_{cr} = \left(\frac{d_n}{\lambda_i |K_\varpi| m_n}\right)_1 = \left(\frac{d_{n-1}}{\lambda_i |K_\varpi| m_{n-1}}\right)_2 = \left(\frac{d_{n-2}}{\lambda_i |K_\varpi| m_{n-2}}\right)_3 = ... = \left(\frac{d_{n-r+1}}{\lambda_i |K_\varpi| m_{n-r+1}}\right)_r : \qquad (4.2.31)$$

Կանոն 4. *Անվերջությունով անցնող ճյուղերի ասիմպտոտները:* Եթե անվերջությունում անցնող ճյուղերի թիվը հավասար է r-ի, ապա $q_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ի արմատային հետագծերը ունեն $2r$ հատ ասիմպտոտ, r ասիմպտոտներ

անվերջությանը ձգտող ճյուղերի համար և r ասիմպտոտներ՝ անվերջությունից եկող ճյուղերի համար: Այս ասիմպտոտները ունեն իրական առանցքի վրա կենտրոն, որը գտնվում է հետևյալ կետում՝

$$\sigma_c = \frac{1}{r}\left(\frac{m_{n-r-1}k_{cr} - d_{n-r-1}}{m_{n-r}k_{cr} - d_{n-r}} - \frac{m_{n-1}k_{cr}}{d_n}\right): \qquad (4.2.32)$$

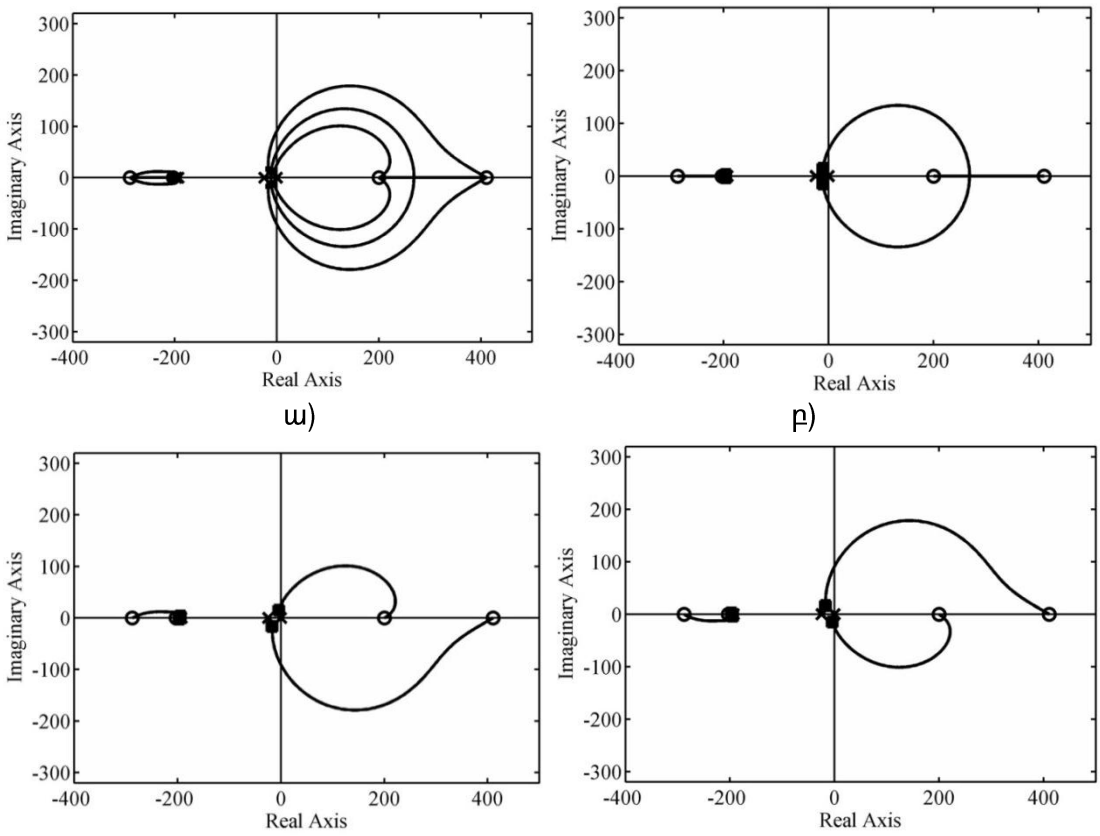
Անվերջություն գնացող ճյուղերի իրական առանցքի նկատմամբ ասիմպտոտների անկյունը կլինի՝

$$\theta_k = 360^\circ \frac{p}{r}, \qquad p = 0,1,2,...,r-1: \qquad (4.2.33)$$

Անվերջությունից եկող ասիմպտետների ճյուղերի անկյունը կլինի՝

$$\theta_k = 180^\circ \frac{(2p+1)}{r}, \qquad p = 0,1,2,...,r-1: \qquad (4.2.34)$$

Օրինակ 4.4. Դիտարկենք եռաչափ դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերը 4.3 օրինակից:



ա) բ)

գ) դ)

Նկ. 4.2.4. $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայով (4.2.17) եռաչափ միատիպ ԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերը ա) ընդհանուր տեսքը, բ) առաջին բնութագրիչ համակարգի հոդոգրաֆները, գ), դ) երկրորդ և երրորդ բնութագրիչ համակարգերի հոդոգրաֆները

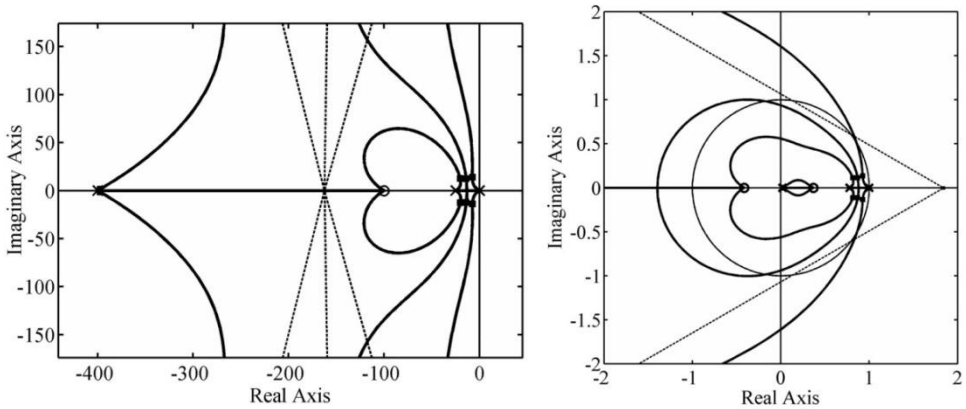
Առանձին կապուղների $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիան տրվում է (4.2.17) բանաձևից, իսկ R փոխադարձ կապերի (4.1.17) λ_i սեփական արժեքներն ունեն (4.1.18) տեսքը: Քանի որ $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի $K_{\varpi} = 0.0029556$ ուժեղացման գործակիցը դրական է, ուստի ϖ հարթությունում արմատային հետագծերը չունեն անվերջությունով անցնող ճյուղեր: Միատիպ ԲԱԿՀ-երի ամտատային հետագծերի ընդհանուր տեսքը բերված է նկ.4.2.4 ա-ում, իսկ նկ.4.2.4 բ-դ-ում տրված են բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերը:

Օրինակ 4.6. Ենթադրենք, որ օրինակ 4.1-ի անընդհատ միատիպ ԲԱԿՀ-երի առանձին կապուղիների փոխանցման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$w_P(s) = \frac{1.5 \cdot 10^3 (s+100)}{s(s+25)(s+400)}: \qquad (4.2.35)$$

Բերենք համակարգի առանձին կապուղիներում սինքրոն իմպուլսային տարրեր նույն $T_S = 0.01$վ ընդհատման պարբերությամբ և զրոյական կարգի $w_H(s)$ էքստապոլյատորով: Այդ դեպքում, իրականացնելով z ձևափոխությունը բերված անընդհատ մասի փոխանցման ֆունկցիայի համար՝ $w(s) = w_P(s) w_H(s)$, կստանանք՝

$$w(z) = \frac{0.036462\,(z-0.3678)(z+0.413)}{(z-1)(z-0.7788)(z-0.01832)}: \qquad (4.2.36)$$



ա) բ)

Նկ.4.2.5. ա), $w_P(s)$ (4.2.35) փոխանցման ֆունկցիայով եռաչափ միատիպ ԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերը բ) $w(z)$ (4.2.36) փոխանցման ֆունկցիայով դիսկրետ համակարգերը

Նկ.4.2.5-ում ներկայացված են անընդհատ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը $w_P(s)$ (4.2.35) փոխանցման ֆունկցիայով (նկ.4.2.5ա), ինչպես նաև z հարթությունում դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ $w(z)$ (4.2.36) փոխանցման ֆունկցիայով (նկ.4.2.5բ)՝ $w(z)$ (4.2.36) փոխանցման ֆունկցիայի երկգծային ձևափոխությունից ստացվում է՝

$$w(\varpi)=\frac{-0.0080804\ (\varpi+92.44)\ (\varpi-200)\ (\varpi+481.5)}{\varpi\,(\varpi+24.87)\ (\varpi+192.8)}= \\ =-\frac{0.0080804\ (\varpi^3+373.94\varpi^2-70278\varpi-8901972)}{\varpi^3+217.67\varpi^2+4794.9\varpi}\ : \qquad (4.2.37)$$

Այս փոխանցման ֆունկցիայի $K_\varpi=-0.0080804$ գործակիցը բացասական թիվ է: Այդ պատճառով առաջին բնութագրիչ համակարգի արմատային հետագծերը $\lambda_1=0.899969$ սեփական արժեքով ձգտում են անսահմանության k-ի վերջավոր արժեքի դեպքում, որն էլ հավասար է՝

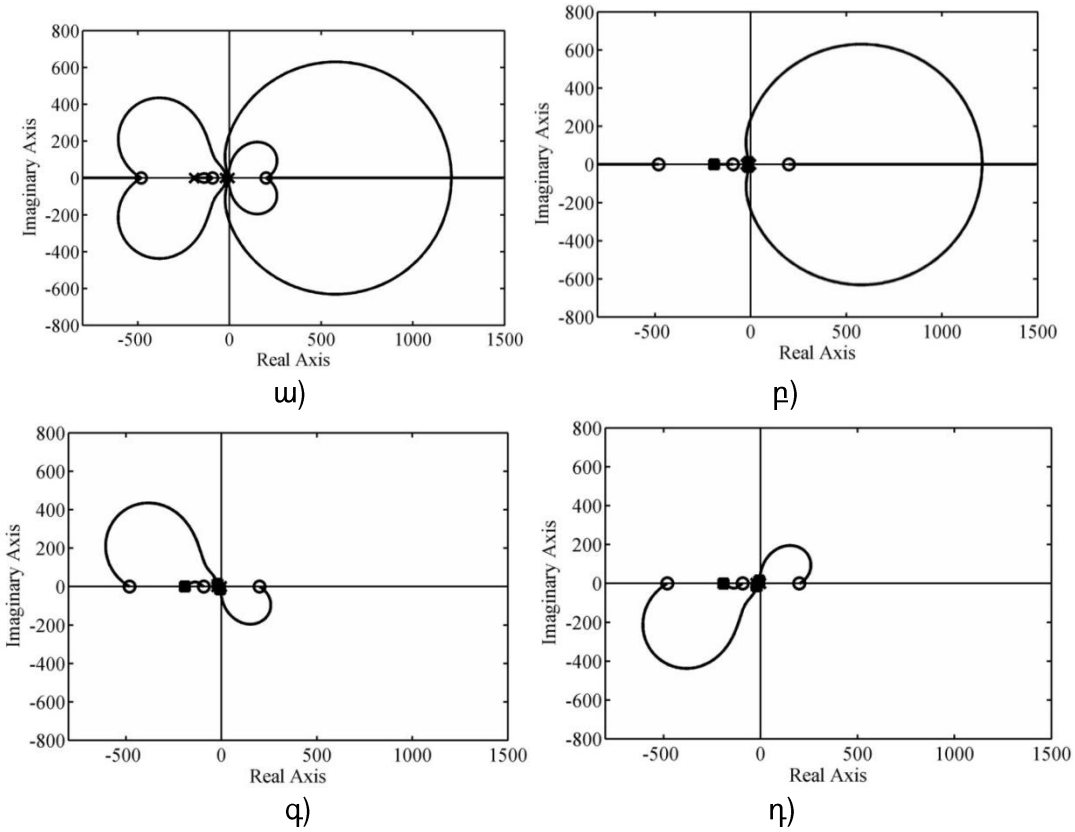
$$k_{cr}=\frac{d_3}{\lambda_i\,|\,K_\varpi\,|\,m_3}=137.5117\,: \qquad (4.2.38)$$

(4.2.31) արտահայտությունից և $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայից երևում է, որ միշտ գոյություն ունի արմատային հետագծերի մի ճյուղ, որը ձգտում է անսահմանության $k_{cr}=137.5117$ դեպքում, ընդ որում վերը նշված կանոն 2-ի համաձայն, այն պատկանում է իրական առանցքին:

Դիտարկվող դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերը ϖ հարթությունում պատկերված են նկ.4.2.6-ում:

Ինչպես երևում է նկ.4.2.6 բ-ից, առաջին բնութագրիչ համակարգի արմատային հետագծերի ճյուղերը սկսվում են $w(\varpi)$ (4.2.37) փոխանցման ֆունկցիայի $p_1^\varpi=0$ և $p_2^\varpi=-24.87$ բևեռներից, հանդիպում են ϖ հարթությունում իրական առանցքի վրա $\varpi=12.78$ կետում և անցնում են աջ կիսահարթություն: Այդ ճյուղերն առաջին կիսահարթության մեջ հանդիպում են իրական առանցքի վրա ϖ=1210 կետում և բաժանվում են այդ կետից երկու հակառակ ուղղություններով՝ ձևավորելով երկու իրական ճյուղեր: Այդ ճյուղերից մեկը աջից ձգտում է 0-ի՝ $z_1^\varpi=+200$, իսկ երկրորդը՝

անսահմանափակ ձգտում է աջ: $k = k_{cr} = 137.5117$ դեպքում առաջին ճյուղը ձգտում է $+\infty$ և վերադառնում է $-\infty$-ից ձգտելով 0-ի $z_2^{\varpi} = -481.5$ [41]:



Նկ.4.2.6. $w(\varpi)$ (4.2.37) փոխանցման ֆունկցիայով եռաչափ ԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերը. ա) ընդհանուր տեսքը, բ) առաջին բնութագրիչ համակարգի հետագծերը, գ), դ) երկրորդ և երրորդ բնութագրիչ համակարգերի հետագծերը

Եզրակացություններ IV գլխի վերաբերյալ

Գլուխ 4-ում ԲՓՖ-երի մեթոդը տարածվում է դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի վրա, այսինքն՝ R թվային մատրիցով նկարագրվող առանձին կապուղիների և կոշտ փոխադարձ կապերով միևնույն $w(z)$ [կամ $w(\varpi)$] փոխանցման ֆունկցիաներով բազմաչափ դիսկրետ համակարգերի վրա: Ստորև բերված են այս գլխում ստացված հիմնական արդյունքները:

1. Դիտարկված են z- և ϖ ձևափոխությունների հիման վրա դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացման հատկությունները: Ցույց է տված, որ միատիպ ԲԱԿՀ-երի առանձին կապուղիներում, երբ իմպուլսային տարրերն աշխատում են սինքրոն, իրենց կանոնական բազիսը կախված չէ z (կամ ϖ)-ից և ամբողջովին

որոշվում է R մատրիցի սեփական վեկտորներով, իսկ $q_i(z)$ և $q_i(\varpi)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաները տարբերվում են նույնական $w(z)$ և $w(\varpi)$ առանձին կապուղիների փոխանցման ֆունկցիաներից միայն R մատրիցի λ_i սեփական արժեքներով:

2. Տրված են Նայքվիստի հետագծերի ուղիղ և հակադարձ ձևակերպումները և նշված են Նայքվիստի, Բոդեի և Նիկոլսի դիագրամների հիման վրա դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծության յուրահատկությունները:

3. Հետազոտված են z- և ϖ հարթություններում դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատկությունները: Ցույց է տրված, որ z- հարթության վրա դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի ասիմպտոտների կենտրոնները տեղակայված են իրական առանցքի մեկ կետում: Նաև ցույց է տրված, որ ϖ հարթությունում արմատային հետագծերը չունեն անսահմանությանը ձգտող ճյուղեր, երբ $k \to \infty$:

4. Ցույց է տրված, որ որոշակի պայմանների դեպքում, $w(\varpi)$ փոխանցման ֆունկցիայի K_ϖ փոխանցման գործակիցը չունի բացասական նշան: Ընդ որում, ϖ հարթությունում արմատային հետագծերը միշտ ունեն ճյուղեր, որոնք ձգտում են անսահմանության (այսինքն՝ անսահմանությանը ձգտող և այնտեղից վերադարձող) k ուժեղացման գործակցի որոշակի վերջավոր արժեքի դեպքում:

5. Բերված են դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի z- և ϖ հարթություններում հաճախականային բնութագրերի և արմատային հետագծերի թվային հաշվարկներ: Բոլոր հաշվարկներն իրականացված են MATLAB ծրագրային փաթեթի օգնությամբ:

ԳԼՈՒԽ 5.

ԴԻՍԿՐԵՏ ՆՈՐՄԱԼ ԲԱԿՀ-ԵՐ

5.1. Դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի ուսումնասիրությունը z - տիրույթում

Ինչպես անընդհատ նորմալ ԲԱԿՀ-երի դեպքում, դիսկրետ ԲԱԿՀ-ն կոչվում է նորմալ, եթե վերջիններիս փոխանցման մատրիցները տեղափոխելի են իրենց համալուծ մատրիցների հետ: Մասնավորապես, եթե դիսկրետ ԲԱԿՀ-ի նկարագրման համար օգտագործվում է z-ձևափոխությունը, ապա համակարգի նորմալության պայմանը կարելի է գրել հետևյալ 3 համարժեք հավասարումներով՝

$$W(z)W^*(z) = W^*(z)W(z), \tag{5.1.1}$$

$$\Phi(z)\Phi^*(z) = \Phi^*(z)\Phi(z), \tag{5.1.2}$$

$$\Phi_e(z)\Phi_e^*(z) = \Phi_e^*(z)\Phi_e(z): \tag{5.1.3}$$

Երկգծային ձևափոխությունների օգտագործման դեպքում նորմալության պայմանն ունի նույն (5.1.1)-(5.1.3) տեսքը, եթե այդ պայմաններում $W(z)$-ը փոխենք $W(\varpi)$-ով, $\Phi(z)$-ը՝ $\Phi(\varpi)$-ով, $\Phi_e(z)$-ը՝ $\Phi_e(\varpi)$-ով:

Դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի սկզբունքային տարբերությունը իր կանոնական բազիսի օրթոգոնալությունն է, որը կազմված է $W(z)$ մատրիցի $c_i(z)$ վեկտորներից: Բացի դրանից, երկակի բազիսն այս դեպքում համընկում է կանոնական բազիսի հետ (այսինքն՝ $c_i^+(z) = c_i(z)$): Համապատասխանաբար, դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի $C(z)$ մոդալ մատրիցը պատկանում է ունիտար մատրիցների դասին, որոնց համար $C^{-1}(z) = C^*(z)$, իսկ $\Upsilon[C(z)]$ պայմնավորվածության թիվը հավասար է մեկի, այսինքն՝

$$\Upsilon[C(z)] = \| C(z) \| \cdot \| C^{-1}(z) \| = 1: \tag{5.1.4}$$

Այդ իսկ պատճառով դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի փոխանցման մատրիցների կանոնական ներկայացումները նմանության ձևափոխությունների օգնությամբ ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$W(z) = C(z)\,diag\{q_i(z)\}C^*(z) = \sum_{i=1}^{N} c_i(z) > q_i(z) < c_i(z), \tag{5.1.5}$$

$$\Phi(z) = C(z)\, diag\left\{\frac{q_i(z)}{1+q_i(z)}\right\} C^*(z) = \sum_{i=1}^{N} c_i(z) > \frac{q_i(z)}{1+q_i(z)} < c_i(z), \qquad (5.1.6)$$

$$\Phi_e(z) = C(z)\, diag\left\{\frac{1}{1+q_i(z)}\right\} C^*(z) = \sum_{i=1}^{N} c_i(z) > \frac{1}{1+q_i(z)} < c_i(z): \qquad (5.1.7)$$

Դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի հիմնական տեսակներին պատկանում են ցիրկուլյանտ, հակացիրկուլյանտ և պարզ սիմետրիկ փոխանցման մատրիցներով դիսկրետ համակարգերը [42,54,55,59,61,67,71,73,79,83,107,122]:

5.2.1 Դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծությունը

<u>Դիսկրետ ցիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-եր:</u> Դիսկրետ ցիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-երի առանձնահատկությունը $W(z)$, $\Phi(z)$ և $\Phi_e(z)$ փոխանցման մատրիցների ցիրկուլյանտությունն է: Այսպես, $W(z)$ ցիրկուլյանտ փոխանցման մատրիցը լիովին սահմանվում է իր առաջին տողի $w_i(z) = M_i^w(z)/D_i^w(z)$ $(i = 0, 2, \dots, N-1)$ տարրերով և ունի հետևյալ տեսքը՝

$$W(z) = \begin{pmatrix} w_0(z) & w_1(z) & w_2(z) & \dots\dots & w_{N-1}(z) \\ w_{N-1}(z) & w_0(z) & w_1(z) & \dots\dots & w_{N-2}(z) \\ w_{N-2}(z) & w_{N-1}(z) & w_0(z) & \dots\dots & w_{N-3}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1(z) & w_2(z) & w_3(z) & \dots\dots & w_0(z) \end{pmatrix}: \qquad (5.2.1)$$

Վերջինս կարելի է արտահայտել նաև հետևյալ մատրիցային բազմանդամի տեսքով՝

$$W(s) = w_0(s)I + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(s)U^k, \qquad (5.2.2)$$

որտեղ U -ն (1.2.37) տեղափոխությունների օրթոգոնալ մատրիցն է:

$W(z)$ ցիրկուլյանտ փոխանցման մատրիցի $q_i(z)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիան N կապուղիների կամայական քանակության դեպքում կարող է ներկայացվել հետևյալ տեսքով՝

$$q_i(z) = w_0(z) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(z) \exp\left\{ j\frac{2\pi(i-1)}{N}k \right\} \qquad (5.2.3)$$
$$i = 1, 2, \dots, N,$$

իսկ $W(z)$ մատրիցի կանոնական բազիսը, այսինքն՝ դիսկրետ ցիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-երի կանոնական բազիսը, դրա հետ մեկտեղ նաև C մոդալ մատրիցը բխում են տեղափոխությունների U մատրիցից (2.37):

Ընդգծենք, որ ինչպես անընդհատ ՑԲԱԿՀ-երի դեպքում, դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի կանոնական բազիսները կախված չեն z կոմպլեքս փոփոխականից և համընկնում են իրար հետ N միևնույն չափողականություն ունեցող բոլոր համակարգերի համար՝ անկախ $w_0(z)$ ուղիղ կապուղիների և $w_k(z)$ $(k=1,2,\dots,N-1)$ փոխադարձ կապերի փոխանցման ֆունկցիայի հստակ տեսքից:

<u>Պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-եր:</u> Ինչպես նշվեց 2.2.3-ում, ցիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-ում կարևոր տեղ ունեն պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-երը, որոնց բոլոր փոխադարձ կապերի փոխանցման ֆունկցիաները համընկնում են իրար հետ [1,2,4,22,24,83,84,85,100]: Դիսկրետ պարզ սիմետրիկ համակարգերի համար դա նշանակում է, որ

$$w_k(z) = w_1(z), \qquad k = 2,\dots,N-1: \tag{5.2.4}$$

Անկախ N առանձին կապուղիներից, պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-երն ունեն միայն երկու տաբեր ԲՓՖ-եր, որոնք դիսկրետ համակարգի համար ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$q_1(z) = w_0(z) + (N-1)w_1(z), \tag{5.2.5}$$

$$q_2(z) = q_3(z) = \dots\dots = q_N(z) = w_0(z) - w_1(z), \tag{5.2.6}$$

որտեղ $q_1(z)$ (5.2.5) ԲՓՖ-ն կոչվում է միջինացված շարժման փոխանցման ֆունկցիա, իսկ մնացած ԲՓՖ-ները (5.2.6)՝ հարաբերական շարժման փոխանցման ֆունկցիաներ [12,24,48,76,91,93,94]:

<u>Դիսկրետ հակացիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-եր:</u> Դիսկրետ հակացիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-երին պատկանում են $W(z)$, $\Phi(z)$ և $\Phi_e(z)$ հակացիրկուլյանտ փոխանցման ֆունկցիաներով ԲԱԿՀ-երը: $W(z)$ հակացիրկուլյանտ փոխանցման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$W(z) = \begin{pmatrix} w_0(z) & w_1(z) & w_2(z) & \dots\dots & w_{N-1}(z) \\ -w_{N-1}(z) & w_0(z) & w_1(z) & \dots\dots & w_{N-2}(z) \\ -w_{N-2}(z) & -w_{N-1}(z) & w_0(z) & \dots\dots & w_{N-3}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -w_1(z) & -w_2(z) & -w_3(z) & \dots\dots & w_0(z) \end{pmatrix}, \tag{5.2.7}$$

և կարող է ներկայացվել $w_0(z)$, $w_i(z)$, $(i=1,2,\dots,N-1)$ առաջին տողի տարրերով, որպես $(N-1)$-րդ կարգի բազմանդամ տեղափոխությունների մատրիցի նկատմամբ, U_- (2.2.46) վերջին տարրի նշանի փոփոխությամբ՝

$$W(s) = w_0(s)I + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(s)U_-^k : \qquad (5.2.8)$$

Դիսկրետ հակացիրկուլյանտ $q_i(z)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաները ներկայացվում են N համակարգի չափի ցանկացած փոփոխության ժամանակ՝

$$q_i(z) = w_0(z) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(z)\exp\left\{ j\frac{[2(i-1)+1]\pi}{N}k \right\} \qquad (5.2.9)$$

$$i=1,2,\dots,N,$$

իսկ հակացիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-ի կանոնական բազիսը կախված չէ z կոմպլեքս փոփոխականից և համընկնում է U_- տեղափոխության մատրիցի կանոնական բազիսի հետ:

Գործնականում, հակասիմետրիկ փոխադարձ կապերով երկչափ դիսկրետ համակարգերի դեպքում (5.2.9) արտահայտությունից ստացվում է հետևյալ հայտնի արտահայտությունը՝

$$q_{1,2}(z) = w_0(z) \pm j\,w_1(z) : \qquad (5.2.10)$$

<u>Դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծությունը:</u> Դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի կայունությունը որոշվում է բնութագրիչ հավասարման արմատների բաշխմամբ հետյևալ հավասարմամբ՝

$$\det\left[1 + W(z)\right] = \prod_{i=1}^{N}[1 + q_i(z)] = 0\,, \qquad (5.2.11)$$

որն իր հերթին համարժեք է հետևյալ N բնութագրիչ հավասարումներին՝

$$1 + q_i(z) = 0, \quad i=1,2,\dots,N \ : \qquad (5.2.12)$$

Այս դեպքում, դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծության մեթոդները ոչնչով չեն տարբերվում ընդհանուր տեսքի ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծության մեթոդներից: Պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-երը կարող են հետազոտվել նաև $q_i(z)$ ԲՓՖ-ի

հիման վրա, կիրառելով դիսկրետ միաչափ համակարգերի հետազոտման ստանդարտ փաթեթները, օրինակ՝ *SISODesignTool* փաթեթը MATLAB համակարգում [124]:

<u>Դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի ընդհանրացված հաճախականայի բնութագրերը և տատանողականության ցուցանիշը:</u> Ինչպես ցույց է տրված ենթագլուխ 3.2.3-ում, դիսկրետ ԲԱՀԿ-երի ընդհանրացված հաճախականային բնութագրերը կամայական մուտքային հարմոնիկ ազդանշանների համար վերևից և ներքևից սահմանափակված են երկու կորերով, որոնք համապատասխանաբար կոչվում են $A^e_{\sup}(\omega)$ (3.2.23) մաժորանտ և $A^e_{\inf}(\omega)$ (3.2.24) մինորանտ և բնութագրում են հարմոնիկ ազդեցությունների ժամանակ դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի մաքսիմալ և մինիմալ հնարավոր սխալները (տես նկ.3.2.17ա): $A^e_{\sup}(\omega)$ մաժորանտը և $A^e_{\inf}(\omega)$ մինորանտը $\omega = const$ դեպքում հաշվելու համար անհրաժեշտ է. գտնել դրական որոշված Հերմիտյան մատրիցը՝ $H(\omega)$ (3.2.26) [6,7,34,96]: Այս դեպքում, մատրիցի առավելագույն և նվազագույն սեփական արժեքների քառակուսի արմատներից ստացվում են համապատասխանաբար $A^e_{\sup}(\omega)$ և $A^e_{\inf}(\omega)$ արժեքները ϖ հաճախականության դեպքում: Դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի M_e տատանողականության ցուցանիշը ըստ սխալի վեկտորի սահմանվում է որպես $A^e_{\sup}(\omega)$ (3.2.23) մաժորանտի ռեզոնանսային արժեք ω հաճախականությունը 0-ից $\omega_S / 2$ փոփոխելու դեպքում (տես (3.2.28)):

Նշված բնութագրերը առավել հեշտ են ստացվում դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի համար, որոնց համար $C(z)$ մոդալ մատրիցը ունիտար է և բավարարում է $C^{-1}(z) = C^*(z)$ պայմանին: Իրոք, $\Phi_e(z)$ փոխանցման մատրիցի կանոնական ներկայացումը (5.1.6) ձևափոխության միջոցով տեղադրելով $H(\omega)$ (3.2.26) մատրիցի մեջ (z-ը նշանակենք $\exp(j\omega T_S)$), կստանանք՝

$$H(z) = \Phi_e(z)\left[\Phi_e(z)\right]^* = C(z)\,diag\left\{\frac{1}{|1+q_i(z)|^2}\right\}C^*(z) \qquad (5.2.13)$$

որտեղ $\tilde{q}_i(z)$-ով նշանակված է $q_i(z)$-ի կոմպլեքս-համալուծը: Ինչպես երևում է (5.2.13)-ից, $H(z)$ մատրիցի սեփական արժեքների քառակուսի արմատները $z = \exp(j\omega T_S)$ դեպքում՝

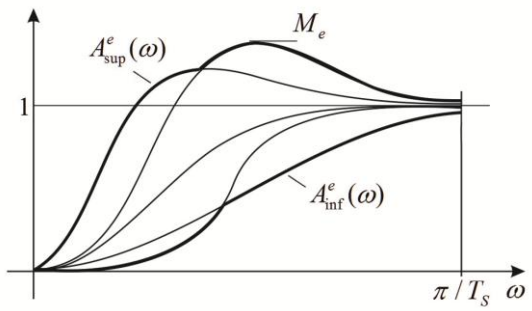
$$\frac{1}{\left|1+q_i\left[\exp(j\omega T_S)\right]\right|}=\left|\Phi_{ei}\left[\exp(j\omega T_S)\right]\right|, \qquad i=1,2,...,N \tag{5.2.14}$$

համընկնում են $A_{ei}(\omega)$ ընդհանրացված ԱՀԲ-ի հետ դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-ի կանոնական բազիսի N առանցքների ուղղություններով, կամ, այլ կերպ ասած, փակ բնութագրիչ համակարգերի ԱՀԲ-ի հետ (տես 3.2.3):

Այստեղից բխում է, որ կամայական ω հաճախականության դեպքում դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-ի ընդհանրացված ԱՀԲ-ի $A_{\sup}(\omega)$ մաժորանտի և $A_{\inf}(\omega)$ մինորանտի արժեքները հավասար են $|\Phi_{ei}[\exp(j\omega T_S)]|$ մոդուլի առավելագույն և նվազագույն արժեքներին, իսկ ընդհանուր դեպքում $A^e_{\sup}(\omega)$ և $A^e_{\inf}(\omega)$-ը սահմանվում են որպես միաչափ բնութագրիչ համակարգերի $A_{ei}(\omega)$ ԱՀԲ-ի N համախմբի պարուրիչներ վերևից և ներքևից (նկ. 5.2.1), այսինքն՝

$$A^e_{\sup}(\omega)=\|\Phi_e[\exp(j\omega T_S)]\|=\max_i\left(\frac{1}{\left|1+q_i[\exp(j\omega T_S)]\right|}\right), \tag{5.2.15}$$

$$A^e_{\inf}(\omega)=\min_i\left(\frac{1}{\left|1+q_i[\exp(j\omega T_S)]\right|}\right): \tag{5.2.16}$$



Նկ. 5.2.1. Դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-ի M_e տատանողականության գործակցի որոշումը

Այս ամենից երևում է, որ դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-ի M_e տատանողականության ցուցանիշը հավասար է միաչափ բնութագրիչ համակարգերի M_{ei} ցուցանիշներից առավելագույնին, այսինքն՝

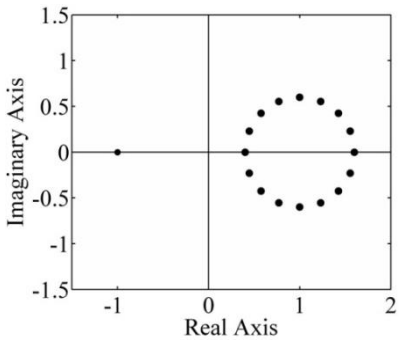
$$M_e=\sup_{0\le\omega\le\frac{\omega_S}{2}}\|\Phi_e[\exp(j\omega T_S)]\|=\max_i\left(\sup_{0\le\omega\le\frac{\omega_S}{2}}\frac{1}{\left|1+q_i[\exp(j\omega T_S)]\right|}\right)=M_{ei\max}: \tag{5.2.17}$$

Ստացված $M_{ei\max} = M_e$ (5.2.17) հավասարությունը վկայում է այն մասին, թե ինչ կարևոր դեր է խաղում կանոնական բազիսի օրթոգոնալության հատկությունը ԲԱԿՀ-երի ճշգրտության տեսանկյունից: Իրականում, այդ հավասարությունից, ինչպես նաև այն փաստից, որ ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի համար իրավացի է $M_{ei\max} \le M_e$ անհավասարությունը, բխում է, որ եթե երկու համակարգեր ունեն նույն $q_i(z)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիան, ընդ որում ԲԱԿՀ-երից մեկը նորմալ է, մյուսը՝ ոչ, ապա առաջինն ավելի ճշգրիտ է:

Օրինակ 5.1. Որպես նորմալ ԲԱԿՀ-ի օրինակ դիտարկենք 16-կապուղիներով դիսկրետ միատիպ համակարգ $w(z)$ բնութագրիչ ֆունկցիայով և փոխադարձ կապերի R ցիրկուլյանտ մատրիցով՝

$$R = I + 0.6U, \tag{5.2.18}$$

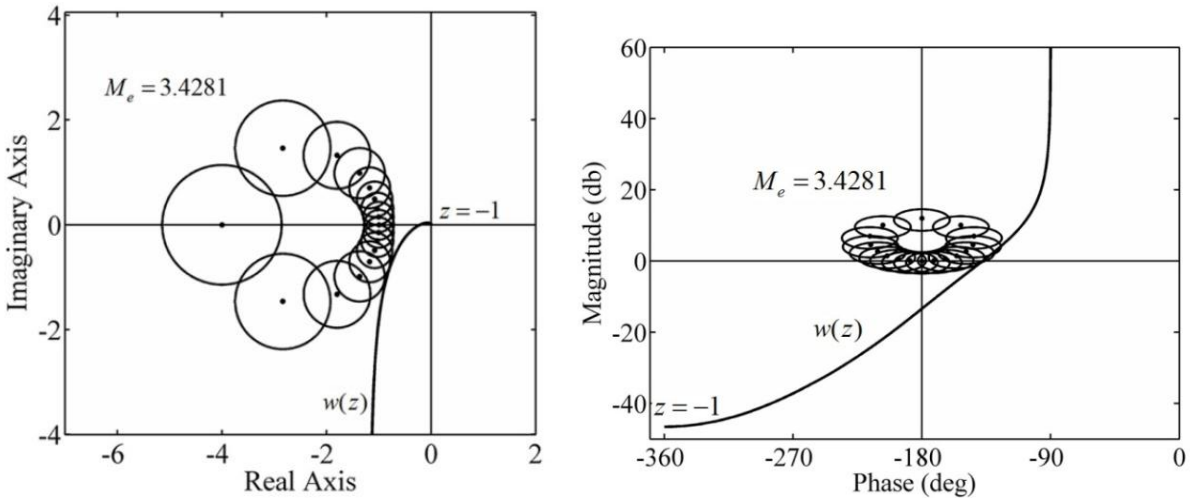
որտեղ՝ I միավոր մատրիցը և U տեղափոխությունների մատրիցը 16×16 չափանի են: Ինչպես նշվեց 2.4-ում, U տեղափոխման մատրիցի β_i (2.37) սեփական արժեքները տեղակայված են կոմպլեքս հարթության վրա N- չափանի կանոնավոր բազմանկյան գագաթներում, ընդ որում առաջին β_1 արմատը միշտ իրական է և հավասար է մեկի: $0.6U$ մատրիցի սեփական արժեքները (5.2.18)-ում հավասար են $0.6\beta_i$, այսինքն տեղակայված են կանոնավոր 16-անկյան գագաթներում, որը ներկառուցված է $r = 0.6$ շառավղով շրջանագծում: R մատրիցի (5.2.18) տեսքից բխում է, որ λ_i սեփական արժեքները ստացվում են $0.6U$ մատրիցի սեփական արժեքներին ավելացնելով +1, այսինքն՝ $\lambda_i = 1 + 0.6\beta_i$ (նկ.5.2.2):



Նկ. 5.2.2. R ցիրկուլյանտ մատրիցի λ_i սեփական արժեքների բաշխումը

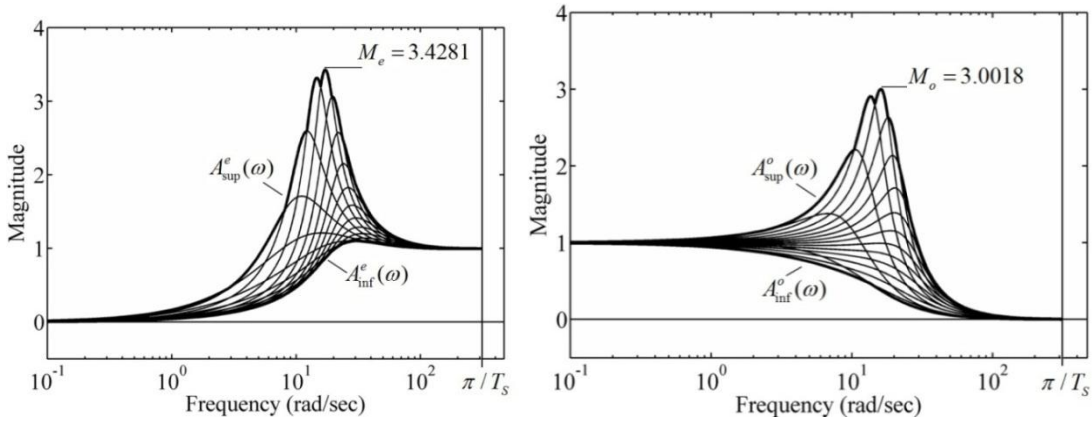
Նկ.5.2.3-ում ներկայացված են $w(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի Նայքվիստի և Նիկոլսի հետագծերը Նայքվիստի չափանիշի հակադարձ ձևակերպման դեպքում և (3.1.13) հավասարումներով կառուցված են արգելված տարածքներ $M_{ei} = 3.4281$ համար: M_{ei} տվյալ արժեքի դեպքում տեղի է ունենում 12-րդ բնութագրիչ համակարգի (այսինքն՝ $i = 12$) հպում $w(z)$ հետագծի հետ:

Քանի որ, դիտարկվող դիսկրետ ԲԱԿՀ-ն նորմալ է, ուստի նրա M_e տատանողականության ցուցանիշը՝ $M_{e12} = 3.4281$: Նկ.5.2.4 ա-ում ներկայացված են ընդհանրացված համակարգերի ԱՀԲ-երը ըստ սխալի, որն էլ հաստատում է տվյալ փաստը: Նկ.5.2.4 բ-ում բերված են համապատասխան ԱՀԲ-երը ըստ ելքի վեկտորի:



ա) Նայքվիստի հետագծերը բ) Նիքոլսի հետագծերը

Նկ. 5.2.3. $w(z)$ (4.1.20) փոխանցման ֆունկցիայի հետագծերը և $M_{ei} = 3.4281$ արժեքի համար արգելված գոտիները



ա) սխալի վեկտորի նկատմամբ բ) ելքի վեկտորի նկատմամբ

Նկ. 5.2.4. Օրինակ 3.2-ի ցիրկոյանտ միատիպ ԲԱԿՀ-երի ընդհանրացված ԱՀԲ-երը

5.2.2 Դիսկրետ ցիրկուլյանտ և հակացիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը z տիրույթում

Դիսկրետ ցիրկուլյանտ և հակացիրկուլյանտ ԲԱԿՀ-երի z հարթությունում արմատային հետագծերի հատկություններն ուսումնասիրելիս կհիմնվենք նկ.3.2.19-ում պատկերված ԲԱԿՀ-երի մատրիցային կառուցվածքային սխեմայի, ընդհանուր պայմանների և փակ ԲԱԿՀ-երի արմատների ձևավորման (3.2.37) հավասարման վրա: Բացի դրանից, քանի որ, դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի և ՀԲԱԿՀ-երի հատկություններն ու կառուցվածքային բնութագրերը համընկնում են, ուստի դրանց արմատային հետագծերի դիտարկման ժամանակ կարելի է սահմանափակվել միայն ՑԲԱԿՀ-ով, նշելով մի քանի առանձնահատկություններ, որոնք հատուկ են ՀԲԱԿՀ-երին [2,4,8,16,23,99]:

Ինչպես միատիպ ԲԱԿՀ-երի դեպքում, ՑԲԱԿՀ-երի կարևոր առանձնահատկությունը Ռիմանի մեկուսացված միաթերթ մակերևույթների վրա դրա արմատային հետագծերի բաշխվածությունն է, այսինքն, այստեղ արմատների հետագծերի կառուցման խնդիրը վերածվում է N անկախ միաչափ խնդիրների:

Ըստ նկ.3.2.27-ի և (5.2.3) արտահայտության, դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-ի $kq_i(z)$ ԲՓՖ-ն կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$kq_i(z) = k\left[w_0(z) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(z)\exp\left\{j\frac{2\pi(i-1)}{N}k\right\}\right] = k\frac{M_i(z)}{D(z)} \qquad (5.2.19)$$
$$i = 1, 2, \dots, N,$$

որտեղ ակնհայտ է, որ բոլոր $kq_i(z)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների համար $D(z)$ բազմանդամը արտահայտվում է $D_i^w(z)$ բազմանդամների միջոցով հետևյալ կերպ՝

$$D(z) = \prod_{i=0}^{N-1} D_i^w(z): \qquad (5.2.20)$$

Այստեղից բխում է, որ բոլոր $kq_i(z)$ (5.2.19) ԲՓՖ-ների միևնույն բևեռները, այսինքն՝ $D(z)$ (5.2.20) բազմանդամի արմատները, հավասար են առաջին $W(z)$ ցիրկուլյանտ փոխանցման մատրիցի բևեռների միավորմանը և սիմետրիկ են բաշխված իրական առանցքի նկատմամբ: Ինչ վերաբերում է ԲՓՖ-ների զրոներին,

ընդհանուր դեպքում այդ զրոների միավորումը տալիս են ՑԲԱԿՀ-ի փոխանցման զրոները, ապա ընդհանուր դեպքում դրանք հանդիսանում են տարբեր $M_i(z)$ բազմանդամների կոմպլեքս գործակիցներով արմատներ: ՈՒստի, յուրաքանչյուր բնութագրիչ համակարգի համար դրանք սիմետրիկ չեն իրական առանքի նկատմամբ: Դրա հետ մեկտող, զրոների մեկ այլ բաշխվածություն համապատասխանում է մեկ այլ բնութագրիչ համակարգի զրոների «կոմպլեքս-համալուծ» բաշխվածությանը: Արդյունքում, դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-ի բոլոր զրոների միավորումը միշտ ձևավորում է սիմետրիկ պատկեր: Պետք է նաև նշել, որ ՑԲԱԿՀ-երի բոլոր $kq_i(z)$ ԲՓՖ-ների զրոների թիվը նույնն է, ինչը բխում է $kq_i(z)$ (5.2.19) ԲՓՖ-ների տեսքից:

(2.2.41), (2.2.42) ընդհանուր պայմանները կարելի է գրել հետևյալ տեսքով, օգտվելով (5.2.19)-ից՝

$$1 + k\,q_i(z) = D(z) + k\,M_i(z) = 0 \qquad (5.2.21)$$

կամ

$$k\,q_i(z) = k\,\frac{M_i(z)}{D(z)} = -1: \qquad (5.2.22)$$

Այս պայմանները հնարավորություն են տալիս ձևակերպել դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի կառուցման որոշ կանոններ, որոնք հաշվի են առնում բազմաչափ համակարգերի տվյալ դասի կառուցվածքային առանձնահատկությունները: Ստորև թվարկված են համապատասխան կանոնները [9,10,12,99]:

Կանոն 1. *<u>Արմատային հետագծերի թիվը:</u>* N-չափանի դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերի թիվը հավասար է $N \cdot np_0$, որտեղ np_0-ը $W(z)$ ցիրկուլյանտ մատրիցի առաջին տողի տարրերի բոլոր բևեռների թիվն է:

Կանոն 2. *<u>Արմատային հետագծերի սկիզբը և վերջը:</u>* $k = 0$ դեպքում յուրաքանչյուր i-րդ բնութագրիչ համակարգի հետագծերը սկսում են $D(z) = 0$ հավասարման արմատներից և ավարտվում են $k = \infty$ դեպքում, $M_i(z) = 0$ հավասարման արմատներում: Եթե nz_0-ով նշանակենք բոլոր $M_i(z)$ $(i = 1, 2, ..., N)$ բազմանդամների միևնույն աստիճանները, ապա դա նշանակում է, որ յուրաքանչյուր բնութագրիչ համակարգի nz_0 արմատների հետագծերը $k \to \infty$ դեպքում ձգտում են $kq_i(z)$ ԲՓՖ-ի

nz_0 վերջավոր զրոներին: Ընդհանուր դեպքում, $D(z)=0$ հավասարման յուրաքանչյուր արմատից բխում են ՑԲԱԿՀ-ի ուղիղ N հատ արմատային հետագծեր:

Կանոն 3. <u>*Անսահմանությանը ձգտող արմատների թիվը:*</u> k-ի անսահմնափակ աճի դեպքում, անսահմանությանը ձգտող յուրաքանչյուր բնութագրիչ համակարգի հետագծերի թիվը նույնն է և հավասար է՝ $e_0 = np_0 - nz_0$: Համապատասխանաբար, անսահմանությանը ձգտող դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի ընդհանուր թիվը կլինի՝ $N \cdot e_0$:

Կանոն 4. <u>*Արմատային հետագծերի ասիմպտոտների թեքությունը:*</u> Ենթադրենք, որ i-րդ $kq_i(z)$ ԲՓՖ-ն ներկայացված է հետևյալ ձևով՝

$$kq_i(z) = k\frac{M_i(z)}{D(z)} = k\frac{K_c^i \prod_{j=1}^{nz_0}(z - z_j^i)}{\prod_{j=1}^{np_0}(z - p_j)}, \qquad (5.2.23)$$

որտեղ p_j-ով նշանակված են բևեռները (բոլոր i–երի համար նույնն են), z_j^i- ով՝ զրոները, իսկ K_c^i-ով՝ i-րդ ընդհանուր դեպքում բնութագրիչ համակարգի կոմպլեքս «ուժեղացման գործակիցը»:

Կարելի է ցույց տալ, որ i-րդ բնութագրիչ համակարգի անսահմանությանը ձգտող e_0 արմատային հետագիծը մոտենում է e_0 ճառագայթային ուրվագծին, որի ճառագայթներն իրական առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում են անկյուններ՝

$$\gamma_r = \frac{(2r+1)180^\circ - \arg K_c^i}{e_0}, \quad r = 0, 1, \ldots, e_0 - 1 : \qquad (5.2.24)$$

Ինչպես երևում է (5.2.24) և (4.1.24) համեմատությունից, միատիպ ԲԱԿՀ-երի դեպքի նման, λ_i սեփական արժեքների դերը այստեղ կատարում են K_c^i գործակիցները, որոնք բավարարում են 4.1.2-ում նշված կանոն 4-ին:

Կանոն 5. <u>*Արմատային հետագծերի ասիմպտոտների կենտրոնները:*</u> i-րդ բնութագրիչ համակարգի ասիմպտոտների կենտրոնը տեղակայված է կոմպլեքս հարթության հետևյալ կետում՝

$$A_{ci} = \frac{\sum_{r=1}^{np_0} p_r - \sum_{r=1}^{nz_0} z_r^i}{np_0 - nz_0}, \qquad (5.2.25)$$

որտեղ՝ նշանակումները նույնն են, ինչ (5.2.23)-ում:

Այստեղ պետք է նշել ՑԲԱԿՀ-երի և միատիպ ԲԱԿՀ-երի միջև ասիմպտոտների կոնտրոնների տարբերությունը: Եթե միատիպ ԲԱԿՀ-երի մոտ բոլոր բնութագրիչ համակարգերի ասիմպտոտների կոնտրոնները ընկած են իրական առանցքի մեկ կետում, ապա ՑԲԱԿՀ-երի դեպքում, այդ կենտրոնները կարող են լինել կոմպլեքս: Դա առաջանում է այն պատճառով, որ (5.2.25)-ում z_j^i կոմպլեքս զրոները այս դեպքում չեն ունենում կոմպլեքս համալուծ զույգեր: Այնուամենայնիվ, յուրաքանչյուր A_{ci} կոմպլեքս կենտրոնին միշտ համապատասխանում է ԲՓՖ-ի համարիչում որոշակի այլ բնութագրիչ համակարգի կոմպլքես-համալուծ կենտրոն: Այդպիսի կոմպլեքս կենտրոնների թիվը N կենտ կարգի ՑԲԱԿՀ-երի դեպքում հավասար է $N-1$, իսկ զույգ կարգի N-ի դեպքում՝ $N-2$:

Վերևում ձևակերպված պարզ կանոնները արտացոլում են դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի կառուցվածքը: Այստեղ կարևոր է այն, որ z հարթությունում դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի ասիմպտոտների կենտրոնները բաշխվում են ոչ միայն իրական առանցքի վրա, այլ նաև կարող են լինել կոմպլեքս-համալուծ:

Օրինակ 5.2. Որպես թվային օրինակ դիտարկենք անընդհատ եռաչափ ՑԲԱԿՀ հետևյալ փոխանցման մատրիցով՝

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{10}{s+10} & \frac{10(s+10)}{(s+5)(s+40)} & \frac{70(s+2)}{(s+40)(s+60)} \\ \frac{70(s+2)}{(s+40)(s+60)} & \frac{10}{s+10} & \frac{10(s+10)}{(s+5)(s+40)} \\ \frac{10(s+10)}{(s+5)(s+40)} & \frac{70(s+2)}{(s+40)(s+60)} & \frac{10}{s+10} \end{pmatrix}: \qquad (5.2.26)$$

Եթե այս համակարգի առանձին կապուղիներում ներմուծենք $T_S = 0.1վ$ ընդհատման պարբերությամբ սինքրոն իմպուլսային տարրեր, ապա $W(z)$ փոխանցման մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը [14,15,41,]՝

$$W(z)=\begin{pmatrix} \dfrac{0.632}{z-0.368} & \dfrac{0.323(z-0.402)}{(z-0.607)(z-0.018)} & \dfrac{0.112(z-0.485)}{(z-0.018)(z-0.002)} \\ \dfrac{0.112(z-0.485)}{(z-0.018)(z-0.002)} & \dfrac{0.632}{z-0.368} & \dfrac{0.323(z-0.402)}{(z-0.607)(z-0.018)} \\ \dfrac{0.323(z-0.402)}{(z-0.607)(z-0.018)} & \dfrac{0.112(z-0.485)}{(z-0.018)(z-0.002)} & \dfrac{0.632}{z-0.368} \end{pmatrix}: \quad (5.2.27)$$

Դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-ի $kq_i(z)$ ԲՓՖ-ն, որը որոշվել է (5.2.19) և (5.2.23) արտահայտություններով, ունի հետևյալ տեսքը՝

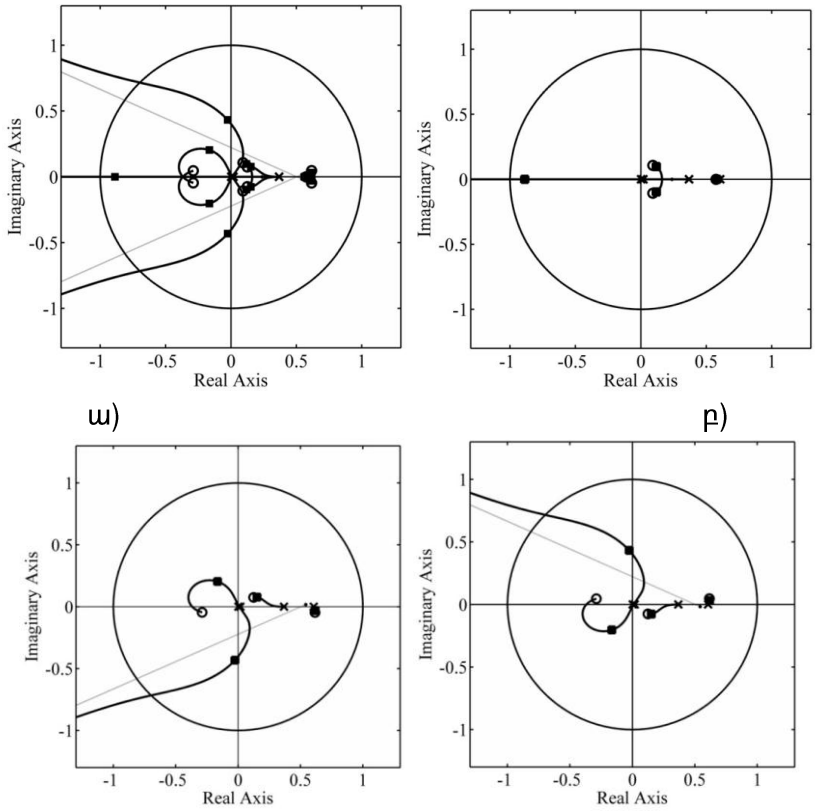
$$kq_1(z)=k\frac{1.06575z^3-0.80747z^2+0.13339z-0.012124}{z^4-0.9952z^3+0.24344z^2-0.00468z+0.00001}=$$
$$=k\frac{1.06575(z-0.57417)(z-0.09174\pm j0.10674)}{(z-0.00248)(z-0.018327)(z-0.36788)(z-0.60653)}, \quad (5.2.28)$$

$$kq_2(z)=k\frac{(0.415+j0.1835)z^3-(0.1911+j0.0757)z^2-(0.0547-j0.0249)z+(0.006+j0.0103)}{z^4-0.9952z^3+0.24344z^2-0.00468z+0.00001}=$$
$$=k\frac{(0.415+j0.1835)(z-0.1244-j0.075)(z+0.2886+j0.04565)(z-0.6166+j0.047)}{(z-0.00248)(z-0.018327)(z-0.36788)(z-0.60653)},$$

$$kq_3(z)=k\frac{(0.415-j0.1835)z^3-(0.1911-j0.0757)z^2-(0.0547+j0.0249)z+(0.006-j0.0103)}{z^4-0.9952z^3+0.24344z^2-0.00468z+0.00001}=$$
$$=k\frac{(0.415-j0.1835)(z-0.1244+j0.075)(z+0.2886-j0.04565)(z-0.6166-j0.047)}{(z-0.00248)(z-0.018327)(z-0.36788)(z-0.60653)}:$$

Ինչպես երևում է $kq_1(z)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիայի տեսքից (5.2.28) ու նկ.5.2.6 բ-ից, բևեռներն ու զրոները, ինչպես նաև արմատային հետագծերը բաշխված են կամ սիմետրիկ իրական առանցքի նկատմամբ, կամ պատկանում են տվյալ առանցքին: Նկ.5.2.6 գ,դ-ում պատկերված մյուս երկու բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերը համապատասխանում են $kq_2(z)$ և $kq_3(z)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաներին՝ հայտարարում կոմպլեքս գործակիցներով: Ուստի, այդ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների զրոները իրական առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ չեն բաշխված: Որպես հետևանք, $i=2,3$ դեպքում բնութագրիչ համակարգի արմատային հետագծերը նույնպես ունեն սիմետրիկության հատկություն: Դրա հետ մեկտեղ, ինչպես զրոները, այնպես էլ $kq_2(z)$ և $kq_3(z)$ բնութագրիչ համակարգերի

արմատային հետագծերը կոմպլեքս համալուծ են իրար նկատմամբ: Արդյունքում, նկ.5.2.6 ա-ում պատկերված եռաչափ դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերի ամբողջ պատկերը, որը ստացվում է նկ.5.2.6 բ-դ-ի առանձին բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերի պարզ վերադրումով, սիմետրիկ է իրական առանցքի նկատմամբ:



Նկ.5.2.5. $W(z)$ փոխանցման մատրիցով ՑԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերը
ա) ընդհանուր տեսք, բ) առաջին բնութագրիչ համաարգ, գ) 2-րդ բնութագրիչ համակարգ,
դ) 3-րդ բնութագրիչ համակարգ

5.3 ՑԲԱԿՀ-երի և ՀԲԱԿՀ-երի հետազոտումը ϖ - ձևափոխության հիման վրա

5.3.1 Դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի և ՀԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումն ու կայունության վերլուծությունը ϖ հարթությունում

Ենթադրենք, որ $W(z)$ (5.2.1) ցիրկուլյանտ մատրիցի առաջին տողի տարրերը տրված են հետևյալ տեսքով՝

$$w_r(z)=\frac{K_r\prod_{i=1}^{m_r}\left(z-z_r^i\right)}{\prod_{i=1}^{n_r}\left(z-p_r^i\right)},\quad r=0,1,2,...,N-1, \tag{5.3.1}$$

որտեղ m_r-ով և n_r-ով նշանակված են $w_r(z)$ փոխանցման ֆունկցիայի z_r^i զրոների և p_r^i բևեռների թիվը:

Այդ դեպքում $w_r(z)$ (5.3.1) վրա կիրառելով ստանդարտ երկգծային ձևափոխությունը, կստանանք $W(\varpi)$ ցիրկուլյանտ փոխանցման մատրիցը, որի $w_r(\varpi)$ առաջին տողի տարրերը որոշվում են հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$w_r(\varpi)=\frac{K_r^{\varpi}\left(\varpi-\frac{2}{T_S}\right)^{(n_r-m_r)}\prod_{i=1}^{m_r}\left(\varpi-z_{\varpi r}^i\right)}{\prod_{i=1}^{n_r}\left(\varpi-p_{\varpi r}^i\right)}=\frac{K_r^{\varpi}M_r^w(\varpi)}{D_r^w(\varpi)} \tag{5.3.2}$$

$$r=0,1,2,...,N-1,$$

որտեղ՝

$$K_r^{\varpi}=\frac{(-1)^{n_r-m_r}K_r\prod_{i=1}^{m_r}\left(1+z_r^i\right)}{\prod_{i=1}^{n_r}\left(1+p_r^i\right)},\quad z_{\varpi r}^i=-\frac{2}{T_S}\frac{\left(1-z_r^i\right)}{\left(1+z_r^i\right)},\quad p_{\varpi r}^i=-\frac{2}{T_S}\frac{\left(1-p_r^i\right)}{\left(1+p_r^i\right)}, \tag{5.3.3}$$

իսկ

$$M_r^w(\varpi)=\varpi^{n_r}+m_{n_r-1}^r\varpi^{n_r-1}+...+m_1^r\varpi+m_0^r\quad , \tag{5.3.4}$$

$$D_r^w(\varpi)=\varpi^{n_r}+d_{n_r-1}\varpi^{n_r-1}+...+d_1^r\varpi+d_0^r\quad , \tag{5.3.5}$$

- n_r միևնույն աստիճանի մոնիկ բազմանդամներ են (ամենամեծ աստիճանի գործակիցը հավասար է մեկի):

Բոլոր $w_r(\varpi)$ (5.3.2) փոխանցման ֆունկցիաները ունեն բևեռների և զրոների ընդհանուր թիվ, որը հավասար է $w_r(z)$ փոխանցման մատրիցի համապատասխան n_r բևեռների թվին: Այդ պատճառով, $\varpi=j\infty$ դեպքում, $w_r(\varpi)$ արժեքներն իրական են և վերջավոր բոլոր r-երի համար:

Դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի $W(\varpi)$, $\Phi(\varpi)$ և $\Phi_e(\varpi)$ փոխանցման մատրիցների կանոնական ներկայացումներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$W(\varpi)=C\,diag\{q_i(\varpi)\}C^{-1}=\sum_{i=1}^{N}c_i>q_i(\varpi)<c_i^+\quad , \tag{5.3.6}$$

$$\Phi(\varpi) = C diag\left\{\frac{q_i(\varpi)}{1+q_i(\varpi)}\right\}C^{-1} = \sum_{i=1}^{N} c_i > \frac{q_i(\varpi)}{1+q_i(\varpi)} < c_i^{+} \quad , \tag{5.3.7}$$

$$\Phi_e(\varpi) = C\, diag\left\{\frac{1}{1+q_i(\varpi)}\right\}C^{-1} = \sum_{i=1}^{N} c_i > \frac{1}{1+q_i(\varpi)} < c_i^{+} \ , \tag{5.3.8}$$

որտեղ՝ բաց համակարգի $q_i(\varpi)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիան սահմանվում է $w_r(\varpi)$ միջոցով՝ հետևյալ անալիտիկ արտահայտությամբ՝

$$q_i(\varpi) = w_0(\varpi) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(\varpi) \exp\left\{ j\frac{2\pi(i-1)}{N} k\right\} \tag{5.3.9}$$
$$i = 1, 2, \dots, N,$$

իսկ ունիտար $C = [c_1\ c_2 \dots c_N]$ մատրիցը կազմված է U (2.37) տեղափոխությունների մատրիցի c_i զույգ օրթոգոնալ սեփական վեկտորներից:

Դիսկրետ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-երի դեպքում ունենք իրական գործակիցներով երկու տարբեր բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաներ՝

$$q_1(\varpi) = w_0(\varpi) + (N-1)w_1(\varpi) \tag{5.3.10}$$

և

$$q_2(\varpi) = q_3(\varpi) = \dots\dots\dots = q_N(\varpi) = w_0(\varpi) - w_1(\varpi): \tag{5.3.11}$$

Դիսկրետ ՀԲԱԿՀ-ի $q_i(\varpi)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիան գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$q_i(\varpi) = w_0(\varpi) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(\varpi) \exp\left\{ j\frac{[2(i-1)+1]\pi}{N} k\right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N: \tag{5.3.12}$$

$q_i(\varpi)$ (5.3.9)-(5.3.12) բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիայի կարևորագույն հատկություններից մեկն այն է, որ դրանք հանդիսանում են կանոնավոր փոխանցման ֆունկցիաներ, քանի որ իրենցից ներկայացնում են $w_r(\varpi)$ (5.3.2) կանոնավոր փոխանցման ֆունկցիաների գծային կոմբինացիա: Բացի դրանից, ինչպես z հարթությունում դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի և ՀԲԱԿՀ-երի ուսումնասիրման դեպքում, այս բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաները նույնպես կարող են ներկայացվել 2 հանրահաշվական բազմանդամների հարաբերության տեսքով՝

$$q_i(\varpi) = \frac{M_i(\varpi)}{D(\varpi)}, \qquad i = 1, 2, \dots, N, \tag{5.3.13}$$

որտեղ՝

$$D(\varpi)=\prod_{r=0}^{N-1}D_r^w(\varpi) \qquad (5.3.14)$$

բազմանդամը $n_\Sigma=\sum_{r=0}^{N-1}n_r$ կարգի բոլոր $q_i(\varpi)$-երի համարիչներում ունի իրական գործակիցներ: Դա նշանակում է, որ բոլոր $q_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ները ունեն կոմպլեքս հարթության իրական առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ բաշխված միևնույն բևեռներ: Համապատասխանաբար, նույն n_Σ կարգը ունեն նաև բոլոր $M_i(\varpi)$ բազմանդամները $q_i(\varpi)$ (5.3.13) հայտարարում: Եթե U (2.37) և U_- (2.45) տեղափոխությունների մատրիցների (2.39) և (2.48) սեփական արժեքների համար ներմուծենք ընդհանուր β_i նշանակումը, ապա դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-ի և ՀԲԱԿՀ-ի $q_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ի հայտարարում $M_i(\varpi)$ բազմանդամը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$M_i(\varpi)=K_0^{\varpi}M_0^w(\varpi)\prod_{k=1}^{N-1}D_k^w(\varpi)+\sum_{k=1}^{N-1}\left[\beta_i^k K_k^{\varpi}M_k^w(\varpi)\prod_{r=0,\,r\neq k}^{N-1}D_r^w(\varpi)\right] \qquad (5.3.15)$$

$$i=1,2,\dots,N,$$

քանի որ բոլոր $M_k^w(\varpi)$ և $D_k^w(\varpi)$ բազմանդամները (5.13.15)-ում մոնիկ են (որոնց ամենամեծ աստիճանի գործակիցը հավասար է մեկի), ուստի $M_i(\varpi)$ բազմանդամի n_Σ ավագ աստիճանի K_i^Σ գործակիցները ընդհանուր դեպքում կոմպլեքս թվեր են և ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$K_i^\Sigma=K_0^{\varpi}+\sum_{k=1}^{N-1}\beta_i^k K_k^{\varpi}, \qquad i=1,2,\dots,N, \qquad (5.3.16)$$

որտեղ K_0^{ϖ} և K_k^{ϖ} (5.3.3) գործակիցները կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական թվեր:

Ելնելով վերը նշվածից, $q_i(\varpi)$ (5.3.13) ԲՓՖ-ն կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$q_i(\varpi)=\frac{M_i(\varpi)}{D(\varpi)}=\frac{K_i^\Sigma\prod_{j=1}^{n_\Sigma}(\varpi-z_j^i)}{\prod_{j=1}^{n_\Sigma}(\varpi-p_j)}, \qquad (5.3.17)$$

որտեղ p_j-ով նշանակված են i-րդ բնութագրիչ համակարգի բևեռները, z_j^i-ով՝ զրոները:

Պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-երի դեպքում ստացվում են ավելի պարզ անալիտիկ արտահայտություններ՝

$$q_1(\varpi)=\frac{M_1(\varpi)}{D(\varpi)}=\frac{K_0^{\varpi}M_0^{w}(\varpi)D_1^{w}(\varpi)\ +\ (N-1)K_1^{\varpi}M_1^{w}(\varpi)D_0^{w}(\varpi)}{D_0^{w}(\varpi)D_1^{w}(\varpi)}\ , \qquad (5.3.18)$$

$$q_2(\varpi)=q_2(\varpi)=...=q_N(\varpi)\ =\frac{M_2(\varpi)}{D(\varpi)}=\frac{K_0^{\varpi}M_0^{w}(\varpi)D_1^{w}(\varpi)\ -K_1^{\varpi}M_1^{w}(\varpi)D_0^{w}(\varpi)}{D_0^{w}(\varpi)D_1^{w}(\varpi)}\ , \qquad (5.3.19)$$

որտեղ $q_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ի բևեռների և զրոների թիվը հավասար է $n_{\Sigma}=n_1+n_2$, իսկ $M_1(\varpi)$ և $M_2(\varpi)$ բարձր աստիճանների բազմանդամների K_1^{Σ} և K_2^{Σ} գործակիցները կլինեն՝

$$K_1^{\Sigma}=K_0^{\varpi}\ +\ (N-1)K_1^{\varpi},\quad K_2^{\Sigma}=K_0^{\varpi}\ -K_1^{\varpi}\ : \qquad (5.3.20)$$

Համապատասխանաբար, $q_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ի ֆակտորացված ձևը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$q_1(\varpi)=\frac{\left[K_0^{\varpi}\ +\ (N-1)K_1^{\varpi}\ \right]\prod_{j=1}^{n_1+n_2}(\varpi\ -\ z_j^{\ i})}{\prod_{j=1}^{n_1+n_2}(\varpi\ -\ p_j)}\ , \qquad (5.3.21)$$

$$q_2(\varpi)=q_2(\varpi)=...=q_N(\varpi)\ =\frac{\left(K_0^{\varpi}\ -K_1^{\varpi}\right)\prod_{j=1}^{n_1+n_2}(\varpi\ -\ z_j^{\ i})}{\prod_{j=1}^{n_1+n_2}(\varpi\ -\ p_j)}\ : \qquad (5.3.22)$$

5.3.2 Դիսկրետ ՑԲԱԿՀ և ՀԲԱԿՀ արմատային հետագծերը ϖ հարթությունում

ϖ հարթությունում դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի և ՀԲԱԿՀ-երի հատկությունները դիտարկելիս կհիմնվենք (3.2.36) փակ բնութագրիչ համակարգերի արմատների ձևավորման ընդհանուր պայմանների վրա, որոնք կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝ հաշվի առնելով (5.3.13)-ը՝

$$kq_i(\varpi)=k\frac{M_i(\varpi)}{D(\varpi)}=-1,\quad i=1,2,...,N\ , \qquad (5.3.23)$$

Էական է այստեղ այն, որ $q_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ն համարիչում և հայտարարում ունի միևնույն աստիճանի բազմանդամներ և կարելի է գրել N կամայական թվի դեպքում:

(5.3.23) պայմանները թույլ են տալիս ϖ հարթությունում ձևակերպել դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երի և ՀԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի կառուցման կանոնները: Ընդ որում, մանրամասն կդիտարկվեն միայն ՑԲԱԿՀ-ի դեպքը, նշելով ՀԲԱԿՀ-երի և պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-երի հիմնական առանձնահատկությունները:

ՑԲԱԿՀ-երի հիմնական հատկությունը, որը շատ դեպքերում կանխորոշում է ϖ հարթությունում արմատային հետագծերի բնույթը, ցանկացած N-ի դեպքում U (2.37) տեղափոխությունների մատրիցի β_1 առաջին սեփական արժեքի մեկին հավասար լինելն է: Այդ դեպքում, (5.3.15)-ի հիման վրա առաջին $q_1(\varpi)$ ԲՓՖ-ի $M_1(\varpi)$ բազմանդամի համար կունենանք՝

$$M_1(\varpi) = K_0^{\varpi} M_0^{w}(\varpi) \prod_{k=1}^{N-1} D_k^{w}(\varpi) + \sum_{k=1}^{N-1} \left[K_k^{\varpi} M_k^{w}(\varpi) \prod_{r=0,\, r\neq k}^{N-1} D_r^{w}(\varpi) \right], \qquad (5.3.24)$$

այսինքն՝ այդ բազմանդամի բոլոր գործակիցներն իրական թվեր են, իսկ ϖ-ի բարձր աստիճանի դեպքում, հաշվի առնելով (5.3.16)-ը, K_1^{Σ} գործակիցը կլինի՝

$$K_1^{\Sigma} = K_0^{\varpi} + \sum_{k=1}^{N-1} K_k^{\varpi}, \qquad (5.3.25)$$

որտեղ՝ K_1^{Σ} գործակիցը ընդհանուր դեպքում կարող է լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական թիվ:

Քանի որ, բնութագրիչ համակարգի $M_i(\varpi)$ բազմանդամում իրական և կոմպլեքս գործակիցների դեպքում արմատային հետածերի հատկությունները էապես տարբերվում են, ուստի այդ երկու դեպքերը կդիտարկվեն առանձին:

Նշենք, որ ϖ հարթությունում ՑԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատկությունները $M_i(\varpi)$-ում իրական գործակիցներով բնութագրիչ համակարգերի համար $K_1^{\Sigma} > 0$ և $K_1^{\Sigma} < 0$ դեպքում ուսումնասիրված են կանոն 5-ում:

Կանոն 1. <u>*Արմատային հետագծերի թիվը:*</u> ϖ հարթությունում N չափանի դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերի թիվը հավասար է $N \cdot n_{\Sigma}$, որտեղ n_{Σ}-ը $W(\varpi)$ ցիրկուլյանտ մատրիցի առաջին տողի տարրերի բևեռների թիվն է:

Կանոն 2. <u>*Արմատային հետագծերի սկիզբն ու վերջը:*</u> $k = 0$ դեպքում յուրաքանչյուր i-րդ բնութագրիչ համակարգի արմատային հետագծերը սկսվում են $D(\varpi)$ բազմանդամի n_{Σ} արմատներում և ավարտվում են $k = \infty$ դեպքում $M_i(\varpi)$ բազմանդամի n_{Σ} արմատներում:

Կանոն 3. <u>*ϖ հարթությունում դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերը չունեն անսահմանությանը ձգտող ճյուղեր:*</u> ϖ հարթությունում դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-ի բոլոր

արմատային հետագծերն ավարտվում են վերջավոր զրոներում, այսինքն՝ ϖ հարթությունում բացակայում են անսահմանության ձգտող արմատային հետագծերի ճյուղերը և, համապատասխանաբար, բացակայում են արմատային հետագծերի ասիմպտոտները: Այդ հատկությունը բխում է կանոն 2-ից և սկզբունքայնորեն տարբերվում են ϖ հարթությունում դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերը z հարթության այդ նույն համակարգի արմատային հետագծերից:

Կանոն 4. *Ոչ սիմետրիկ արմատային հետագծեր (կոմպլեքս K_i^{Σ} դեպքում):* $M_i(\varpi)$ բազմանդամի կոմպլեքս գործակիցներով $kq_i(\varpi)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիայով բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերն իրական առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ չեն:

Կանոն 5. *Սիմետրիկ արմատային հետագծեր (իրական K_i^{Σ} դեպքում):* K_i^{Σ} իրական գործակիցների դեպքում $kq_1(\varpi)$ և $kq_{1+N/2}(\varpi)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաներն ունեն իրական գործակիցներ և նկարագրվում են սովորական փոխանցման ֆունցկիաներով: Համապատասխանաբար, $K_i^{\Sigma} > 0$ դեպքում այդ բնութագրիչ համակարգերի արմատային հետագծերը ϖ հարթությունում ենթարկվում են s հարթության մեկ մուտքով և ելքով կարգավորման անընդհատ համակարգերի արմատային հետագծերի վարքի բոլոր ստանդարտ կանոններին:

$K_1^{\Sigma} < 0$ դեպքը ավելի բարդ է, քանի որ առաջին բնութագրիչ համակարգի հետադարձ կապը փոխարինվում է դրական կապով: Քանի որ $kq_1(\varpi)$ ԲՓՖ-ն կանոնավոր փոխանցման ֆունկցիա է, ուստի միշտ գոյություն ունի k վերջավոր արժեք, որի դեպքում արմատային հետագծերի մեկ կամ մի քանի ճյուղերը ձգտում են անսահմանության:

(5.3.17) հավասարումը առաջին բնութագրիչ համակարգի համար կարտահայտվի առավել հարմար տեսքով՝

$$q_1(\varpi) = \frac{K_1^{\Sigma} \prod_{j=1}^{n_{\Sigma}} (\varpi - z_j^1)}{\prod_{j=1}^{n_{\Sigma}} (\varpi - p_j)} = \frac{K_1^{\Sigma} M_1^0(\varpi)}{D(\varpi)}, \qquad (5.3.26)$$

որտեղ՝ $K_1^{\Sigma} < 0$, իսկ $M_1^0(\varpi)$ և $D(\varpi)$ միևնույն n_{Σ} աստիճանի բազմանդամները կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$M_1^0(\varpi) = \varpi^{n_\Sigma} + m_{n_\Sigma-1}^1 \varpi^{n_\Sigma-1} + ... + m_1^1 \varpi + m_0^1 \qquad (5.3.27)$$

$$D(\varpi) = \varpi^{n_\Sigma} + d_{n_\Sigma-1} \varpi^{n_\Sigma-1} + ... + d_1 \varpi + d_0 : \qquad (5.3.28)$$

$K_1^\Sigma < 0$ դեպքում, առաջին բնութագրիչ համակարգի արմատների ձևավորման (5.3.25) պայմանը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$k| K_1^\Sigma | \frac{M_1^0(\varpi)}{D(\varpi)} = 1 \quad : \qquad (5.3.29)$$

Հաշվի առնելով (5.3.27), (5.3.28) հավասարումները, այն կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$k = \frac{D(\varpi)}{| K_1^\Sigma | M_1^0(\varpi)} = \frac{\varpi^{n_\Sigma} + d_{n_\Sigma-1} \varpi^{n_\Sigma-1} + ... + d_1 \varpi + d_0}{| K_1^\Sigma | \left(\varpi^{n_\Sigma} + m_{n_\Sigma-1}^1 \varpi^{n_\Sigma-1} + ... + m_1^1 \varpi + m_0^1 \right)}, \qquad (5.3.30)$$

այստեղից երևում է , որ

$$k_{cr} = \lim_{\varpi \to \infty} k = \lim_{\varpi \to \infty} \frac{\varpi^{n_\Sigma} + d_{n_\Sigma-1} \varpi^{n_\Sigma-1} + ... + d_1 \varpi + d_0}{| K_1^\Sigma | \left(\varpi^{n_\Sigma} + m_{n_\Sigma-1}^1 \varpi^{n_\Sigma-1} + ... + m_1^1 \varpi + m_0^1 \right)} = \frac{1}{| K_1^\Sigma |} \qquad (5.3.31)$$

վերջավոր արժեքը $\varpi = \infty$ դեպքում բավարարում է (5.3.23) և (5.3.29) պայմաններին: Քանի որ ϖ հարթությունում առաջին բնութագրիչ համակարգի բոլոր ճյուղերը պետք է սկսվեն $k = 0$ դեպքում $D(\varpi) = 0$ հավասարման n_Σ արմատներում և ավարտվեն $k \to \infty$ դեպքում $M_1^0(\varpi) = 0$ հավասարման վերջավոր n_Σ զրոներում, ուստի ստացվում է, որ $k = k_{cr} = 1/| K_1^\Sigma |$ դեպքում արմատային հետագծերի մի քանի ճյուղեր ձգտում են անսահմանության:

$K_1^\Sigma < 0$ դեպքում, առաջին բնութագրիչ համակարգի արմատային հետագծերին բնորոշ հատկությունները կներկայացվեն ստորև:

Կանոն 5.1. k *<u>ուժեղացման գործակիցն անսահմանությունում գտնվող արմատների համար:</u>* Արմատային հետագծերը միշտ ձգտում են անսահմանության $k = k_{cr} = 1/| K_1^\Sigma |$ գործակցի վերջավոր արժեքի դեպքում:

Կանոն 5.2. *<u>Իրական առանցքի վրա արմատային հետագծերը:</u>* Իրական առանցքի երկու ծայրերն էլ պատկանում են առաջին բնութագրիչ համակարգի արմատային հետագծերին:

Կանոն 5.3. *Անսահմանությունով անցնող հետագծերի ճյուղերի թիվը:* Անսահմանությանը ձգտող առաջին բնութագրիչ համակարգի արմատային հետագծերի ճյուղերի թիվը կախված է $q_1(\varpi)$-ի համարիչում և հայտարարում ϖ հավասար աստիճանների դեպքում համապատասխան գործակիցների արժեքներից և հավասար է ամենամեծ r արժեքին հետևյալ հաջորդականության մեջ՝

$$r_{cr} = \left(\frac{1}{|K_1^{\Sigma}|}\right)_1 = \left(\frac{d_{n_\Sigma-1}}{|K_1^{\Sigma}|\, m_{n_\Sigma-1}^1}\right)_2 = \left(\frac{d_{n_\Sigma-2}}{|K_1^{\Sigma}|\, m_{n_\Sigma-2}^1}\right)_3 = ... = \left(\frac{d_{n_\Sigma-r+1}}{|K_1^{\Sigma}|\, m_{n_\Sigma-r+1}^1}\right)_r : \qquad (5.3.32)$$

Կանոն 5.4. *Անսահմանությունով անցնող ճյուղերի ասիմպտոտները:* Եթե անսահմաությանը ձգտող ճյուղերի թիվը հավասար է r-ի, ապա $q_1(\varpi)$ ԲՓՖ-ի արմատային հետագծերն ունեն $2r$ հատ ասիմպտոտ՝ r հատ ասիմպտոտ անսահմանությանը ձգտող ճյուղերի համար, r հատ ասիմպտոտ այն ճյուղերի համար, որոնք գալիս են անսահմանությունից: Այդ բոլոր ասիմպտոտներն իրական առանցքի վրա ունեն կենտրոն, որը գտնվում է հետևյալ կետում՝

$$\sigma_c = \frac{1}{r}\left(\frac{m_{n_\Sigma-r-1}^1 k_{cr} - d_{n_\Sigma-r-1}}{m_{n_\Sigma-r}^1 k_{cr} - d_{n_\Sigma-r}} - m_{n_\Sigma-1}^1 k_{cr}\right): \qquad (5.3.33)$$

Իրական առանցքի նկատմամբ անսահմանությանը ձգտող ճյուղերի հետ կազմող ասիմտպտոտների անկյունները կլինեն՝

$$\theta_k = 360^\circ \frac{p}{r}, \quad p = 0,1,2,...,r-1 \quad , \qquad (5.3.34)$$

իսկ ճյուղերի ասիմպտոտների անկյունները, որոնք վերադառնում են անսահմանությունից, կլինեն՝

$$\theta_k = 180^\circ \frac{(2p+1)}{r}, \quad p = 0,1,2,...,r-1: \qquad (5.3.35)$$

Ստացված արդյունքները դժվար չէ կիրառել ϖ հարթությունում դիսկրետ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-երի, ինչպես նաև ՀԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի վրա:

Օրինակ 5.3. Օրինակ 5.2-ում դիտարկվել է $T_S = 0.1\,վ$ ընդհատման պարբերությամբ և $W(z)$ (5.2.27) փոխանցման մատրիցով եռաչափ դիսկրետ ՑԲԱԿՀ: Այդ մատրիցի տարրերի վրա կիրառելով երկգծային ձևափոխությունը, կստանանք ϖ հարթությունում հետևյալ ցիրկուլյանտ մատրիցը՝

$$W(\varpi)=-\begin{pmatrix} \dfrac{0.462\ (\varpi-20)}{(\varpi-9.242)} & \dfrac{0.277\ (\varpi+8.538)\ (\varpi-20)}{(\varpi+4.898)\ (\varpi+19.28)} & \dfrac{0.161\ (\varpi+6.942)\ (\varpi-20)}{(\varpi+19.28)\ (\varpi+19.9)} \\ \dfrac{0.161\ (\varpi+6.942)\ (\varpi-20)}{(\varpi+19.28)\ (\varpi+19.9)} & \dfrac{0.462\ (\varpi-20)}{(\varpi-9.242)} & \dfrac{0.277\ (\varpi+8.538)\ (\varpi-20)}{(\varpi+4.898)\ (\varpi+19.28)} \\ \dfrac{0.277\ (\varpi+8.538)\ (\varpi-20)}{(\varpi+4.898)\ (\varpi+19.28)} & \dfrac{0.161\ (\varpi+6.942)\ (\varpi-20)}{(\varpi+19.28)\ (\varpi+19.9)} & \dfrac{0.462\ (\varpi-20)}{(\varpi-9.242)} \end{pmatrix} \quad (5.3.36)$$

Նշենք, որ $W(z)$ մատրիցի առաջին տողի բոլոր $w_r(z)$ $(r=0,1,2)$ տարրերի երկգծային ձևափոխությունները բերում են K_r^{ϖ} (5.3.3) գործակիցների բացասական արժեքի: Դա երևում է $W(\varpi)$ (5.3.39) մատրիցի աջ մասում ընդհանուր «–» նշանից:

Տվյալ ՑԲԱԿՀ-ի $kq_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ն (5.3.9)-ի հիման վրա կստացվեն՝

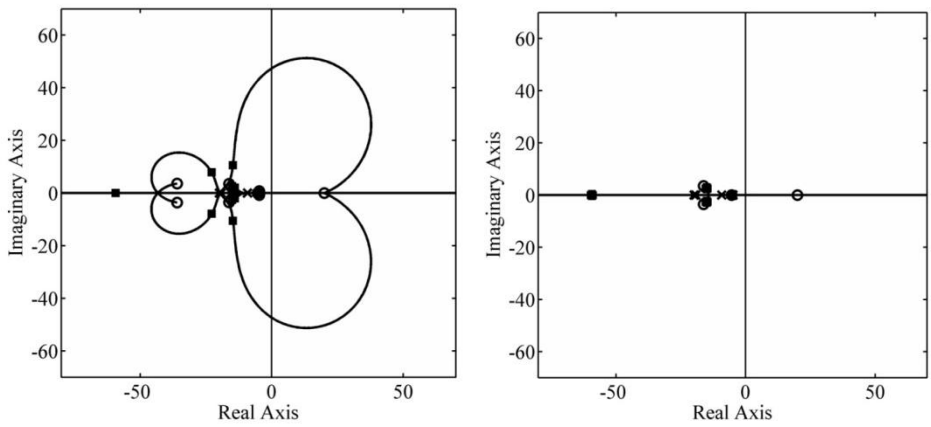
$$kq_1(\varpi)=k\frac{-0.8999\varpi^4-16.1921\varpi^3+274.985\varpi^2+6822.693\varpi+20701.66}{\varpi^4+53.322\varpi^3+983.033\varpi^2+7199.7\varpi+17371.23}=$$
$$=k\frac{-0.8999(\varpi-20)(\varpi+5.41)(\varpi+16.292+j3.5484)(\varpi+16.292-j3.5484)}{(\varpi+19.9011)(\varpi+19.281)(\varpi+9.2423)(\varpi+4.8984)} \quad (5.3.37)$$

$$kq_2(\varpi)=k\frac{-(0.243+j0.2)\varpi^4-(8.6+j4.1)\varpi^3+(74.6+j38)\varpi^2+(3266+j1340.1)\varpi+(12522+j6644.4)}{\varpi^4+53.322\varpi^3+983.033\varpi^2+7199.7\varpi+17371.23}=$$

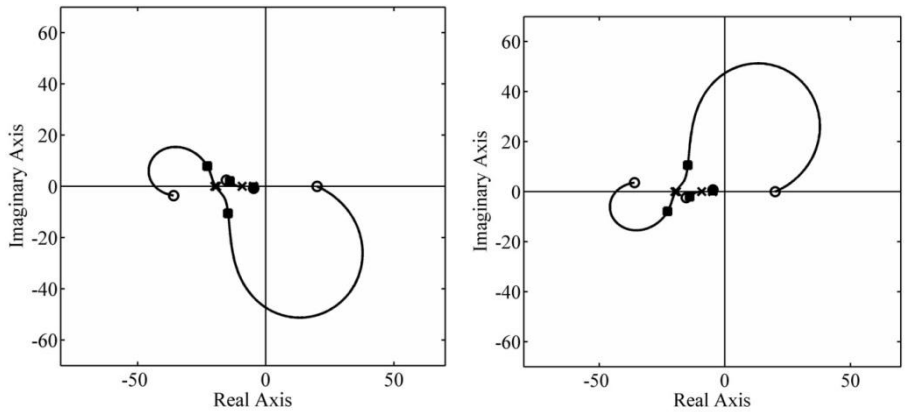
$$=k\frac{-(0.243+j0.2)(\varpi-20)(\varpi+4.72+j0.72)(\varpi+15.42-j2.36)(\varpi+36+j3.65)}{(\varpi+19.9011)(\varpi+19.281)(\varpi+9.2423)(\varpi+4.8984)}$$

$$kq_3(\varpi)=k\frac{-(0.243-j0.2)\varpi^4-(8.6-j4.1)\varpi^3+(74.6-j38)\varpi^2+(3266-j1340.1)\varpi+(12522-j6644.4)}{\varpi^4+53.322\varpi^3+983.033\varpi^2+7199.7\varpi+17371.23}=$$

$$=k\frac{-(0.243-j0.2)(\varpi-20)(\varpi+4.72-j0.72)(\varpi+15.42+j2.36)(\varpi+36-j3.65)}{(\varpi+19.9011)(\varpi+19.281)(\varpi+9.2423)(\varpi+4.8984)}$$



ա) բ)



գ) դ)

Նկ.5.2.6. $W(\varpi)$ (5.3.39) փոխանցման մատրիցով ՑԲԱԿՀ-ի արմատային հետագծերը
ա) ընդհանուր տեսք, բ) առաջին բնութագրիչ համակարգ,
գ) երկրորդ բնութագրիչ համակարգ, դ) երրորդ բնութագրիչ համակարգ

Ինչպես երևում է վերը ասվածից, $K_1^{\varpi} = 0.8999$ բացասական գործակցով առաջին բնութագրիչ համակարգի արմատային հետագծերը պետք է ձգտեն անսահմանության $k_{cr} = 1/|K_1^{\Sigma}| = 1.1112$ դեպքում, ընդ որում գոյություն ունի միայն մեկ ճյուղ, որը պատկանում է իրական առանցքին:

Եզրակացություններ V գլխի վերաբերյալ

Գլուխ 5-ում ԲՓՖ-ի մեթոդը տարածված է դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի դեպքի վրա, որի տարբերվող հատկությունը կանոնական բազիսի օրթոգոնալությունն է:

1. Տրված են z և երկգծային ձևափոխությունների հիման վրա դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումները: Ցույց է տրված, որ ԲԱԿՀ-երի առանձին կապուղիներում իմպուլսային տարրերի սինքրոն աշխատանքի ենթադրության դեպքում ՑԲԱԿՀ-ի, ՀԲԱԿՀ-ի, դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի կանոնական բազիսները կախված չեն z (կամ ϖ)-ից, այսինքն՝ հաստատուն են: Ստացված են դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի նշված դասերի $q_i(z)$ և $q_i(\varpi)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների համար անալիտիկ արտահայտություններ: Ցույց է տրված, որ ϖ-ձևափոխության օգտագործման ժամանակ բոլոր $q_i(\varpi)$ բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաներն ունեն (յուրաքանչյուր i համար) բևեռների և զրոների միևնույն թիվ, այսինքն՝ նկարագրվում են կոմպլեքս գործակիցներով, ոչ խիստ ռացիոնալ փոխանցման ֆունկցիաներով:

2. Դիտարկված են դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի Նայքվիստի, Բոդեի և Նիքոլսի հաճախականային դիագրամների օգնությամբ կայունության վերլուծության և տատանողականության ցուցանիշ սահմանելու հարցերը: Ցույց են տված, որ ընդհանրացված ԱՀԲ-ի ռեզոնանսային արժեքի օգնությամբ որոշվող դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշը հավասար է միաչափ բնութագրիչ համակարգերի տատանողականության ցուցանիշների առավելագույն արժեքին:

3. Հետազոտված են դիսրետ ՑԲԱՀ, ՀԲԱԿՀ և պարզ սիմետրիկ ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերի հատկությունները z և ϖ հարթություններում: Ցույց է տրված, որ ϖ հարթությունում նշված համակարգերի արմատային հետագծերը $k \to \infty$ դեպքում անսահմանությանը ձգտող ճյուղեր չունեն, այնուամենայնիվ, որոշ պայմանների դեպքում, պարունակում են այնպիսի ճյուղեր, որոնք k ուժեղացման գործակցի որոշակի վերջավոր արժեքի դեպքում ձգտում են անսահմանության և վերադառնում են այնտեղից:

4. Տրված են դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի թվային հաշվարկների օրինակներ, որոնք իրականացվում են MATLAB ծրագրային փաթեթի միջոցով:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ և ԵԶՐԱՀԱՆԳՈՒՄՆԵՐԸ

Ատենախոսության նպատակն է բնութագրիչ փոխանցման ֆուկցիաների (ԲՓՖ) մեթոդի հիման վրա, միաչափ դիսկրետ համակարգերի հաճախականային և արմատային հետազոտման մեթոդների տարածումը գիտատեխնիկական գրականությունում նկարագրված դիսկրետ բազմաչափ ավտոմատ կառավարման համակարգերի (ԲԱԿՀ) հիմնական կառուցվածքային դասերի (ընդհանուր տեսքի, միատիպ, ցիրկուլյանտ, հակացիրկուլյանտ, պարզ սիմետրիկ և այլն) վրա:

1. Բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների (ԲՓՖ) մեթոդի հիման վրա ստացվել են ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումները, ենթադրելով, որ առանձին կապուղիներում իմպուլսային տարրերն աշխատում են սինքրոն և սինֆազ: Ցույց է տրված, որ երկգծային ձևափոխության օգտագործման դեպքում (ϖ-ձևափոխության) $q_i(\varpi)$ ԲՓՖ-ները կամայական i-երի դեպքում ունեն միևնույն թվով բևեռներ և զրոներ, անկախ z տիրույթում $q_i(z)$ ԲՓՖ-ի զրոների և բևեռների թվից [15]:

2. Ցույց է տրված, որ ԲՓՖ-երի մեթոդի կիրառումը թույլ է տալիս N-չափանի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծությունը բերել N հատ միաչափ բնութագրիչ համակարգերի կայունության վերլուծության՝ կառավարման դիսկրետ համակարգերի տեսության դասական մեթոդների հիման վրա: Դիտարկված են դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության հետազոտման հաճախականային մեթոդները և տրված է անընդհատ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշի դասական հասկացության տարածումը դիսկրետ դեպքի վրա [15]:

3. Դիտարկված են դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի, այսինքն առանձին կապուղիներում միևնույն փոխանցման ֆունկցիաներով և կոշտ փոխադարձ կապերով, որոնք նկարագրվում են թվային մատրիցով, բազմաչափ դիսկրետ համակարգերի կանոնական ներկայացումների հատկությունները: Տրված են Նայքվիստի չափանիշի ուղիղ և հակադարձ ձևակերպումները և նշված են Նայքվիստի, Բոդեի և Նիկոլսի

հաճախականային դիագրամների միջոցով դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծության առանձնահատկությունները [14]:

4. Ստացված են z և ϖ տիրույթներում դիսկրետ նորմալ, այդ թվում ցիրկուլյանտ (ՑԲԱԿՀ) և հակացիրկուլյանտ (ՀԲԱԿՀ) ԲԱԿՀ-երը, կանոնական ներկայացումները: Ցույց է տրված, որ ՑԲԱԿՀ-երի և ՀԲԱԿՀ-երի կանոնական բազիսներն օրթոգոնալ են և կախված չեն z-ից: Ստացված են նշված դասերի դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-ների $q_i(z)$ և $q_i(\varpi)$ ԲՓՖ-երի համար անալիտիկ արտահայտություններ: Ցույց է տրված, որ $q_i(\varpi)$ ԲՓՖ-երը նկարագրվում են կոմպլեքս գործակիցներով ոչ խիստ փոխանցման ֆունկցիաներով: Ցույց է տրված, որ դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշը, որը որոշվում է փակ ԲԱԿՀ-երի ընդհանրացված ԱՀԲ-երի ռեզոնանսային արժեքի առավելագուն մեծությամբ, հավասար է միաչափ բնութագրիչ համակարգերի տատանողականության ցուցանիշների առավելագույն արժեքին [1, 2, 12, 24]:

5. Հետազոտված են z և ϖ հարթությունների վրա դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հիմնական դասերի արմատային հետագծերի հատկությունները: Ցույց է տրված, որ դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երը և ՀԲԱԿՀ-երը կարող են ունենալ z հարթության վրա արմատային հետագծերի ասիմպտոտների կոմպլեքս-համալուծ կենտրոններ: Ստացված են ասիմպտոտների կենտրոնների և դրանց թեքությունների համար անալիտիկ արտահայտություններ:

Ցույց է տրված, որ ϖ հարթության վրա նշված համակարգերի արմատային հետագծերը չունեն անսահմանության ձգտող ճյուղեր, երբ $k \to \infty$: Բացի դրանից, որոշակի պայմանների դեպքում, բոլոր տեսակի ԲԱԿՀ-երի արմատային հետագծերը ϖ հարթության վրա կարող են անցնել անսահմանությունով և վերադառնալ k ուժեղացման գործակցի որոշակի վերջավոր արժեքի դեպքում [2, 14, 16, 17]:

6. MATLAB ծրագրավորման լեզվի հիման վրա մշակվել է կիրառական ծրագրերի փաթեթ, որը հնարավորություն է տալիս հաշվարկել և կառուցել դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հիմնական դասերի արմատային հետագծերը և հաճախականային բնութագրերը z և ϖ տիրույթներում՝ հաշվի առնելով դրանց կառուցվածքային առանձնահատկությունները: Ատենախոսության բոլոր տեսական դրույթները

պարզաբանվում են դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կոնկրետ հաշվարկային օրինակներով: Մշակված ծրագրային փաթեթը կարող է օգտագործվել դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հետազոտման և նախագծման համար, ինչպես նաև ավտոմատ կառավարման ժամանակակից տեսության դասավանդման ժամանակ:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Օ.Հ.Օհանյան Դիսկրետ հասարակ սիմետրիկ համակարգերի կայունության վերլուծությունը // Լրաբեր 80, Մաս1.- Երևան 2013.- էջ 208-213:
2. Օհանյան Օ.Հ., Գասպարյան Գ.Օ. Դիսկրետ պարզ սիմետրիկ ավտոմատ կարգավորման համակարգերի արմատային հետագծերը// Լրաբեր, Մաս 1.-Երևան 2016.- էջ195-199:
3. Баранчук Е. И. Взаимосвязанные и многоконтурные регулируемые системы.-Л.: Энергия, 1968.- С. 267.
4. Бендриков Г. А., Огородникова В. И. Исследование трехканальной системы автоматического управления с антисимметричными перекрестными связями методом траекторий корней.-Автоматика и Телемеханика, 1968, № 9. - С.184-186.
5. Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования.-М.: Наука, 2003.
6. Воеводин В. И. Вычислительные основы линейной алгебры.-М.: Наука, 1977. - С. 304.
7. Воеводин В.И., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления.-М.: Нау-ка, 1984. - С. 320.
8. Гаспарян О.Н., Варданян Н.А. Особенности поведения траекторий корней многомерных однотипных систем автоматического регулирования. Серия ”Моделирование, оптимизация, управление”.- Ереван, 2007. - Вып. 10, том 1. - С. 107–114.
9. Гаспарян О.Н, Варданян Н.А. О траекториях корней циркулянтных и антициркулянтных систем автоматического регулирования. //Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. -2008. - Вып. 10, Т. 61, № 1. - С. 147-157.
10. Гаспарян О.Н., Варданян Н.А. Корневые годографы циркулянтных многомерных систем регулирования с нестрого рациональными передаточны-
ми функциями. // Вестник-75 ГИУА. Сборник научных и методических статей. - Ереван, 2008. - С. 370-373.
11. Гаспарян О.Н., Варданян Н.А. О дополнительных корневых годографах многомерных однотипных систем регулирования с нестрого рациональными передаточными функциями. Сборник научных трудов. И 741. Информационные технологии и управление, №5.-Ереван: Энциклопедия.- Арменика, 2007.- С.15-25.
12. Гаспарян О.Н., Варданян Н.А., Уликян А.Т., Оганян О.Г. Проектирование регуляторов для простых симметричных систем автоматического регулирования // Информационные

технологии и управление: ISSN 1829-071x: Сборник научных трудов. – Ереван, 2011. - Том 5. - С. 8-16.

13. Гаспарян О.Н. Теория многосвязных систем автоматического регулирования, ГИУА, Ереван, Изд-во «Асогик», С. 2010.-380.
14. Гаспарян О.Н., Оганян О.Г. Исследование дискретных однотипных систем регулирования на основе билинейного преобразования // Вестник НПУА, Информационные технологии, электроника, радиотехника - Ереван, 2015, № 2.-с.21-31.
15. Гаспарян О.Н., Оганян О.Г. Исследование многомерных дискретных систем регулирования методом характеристических передаточных функций// Сборник материалов XXII Международной научно-практической конференции «Приоритетные научные направления: от теории к практике».- Новосибирск, 5 февраля 2016 г., С. 132-141.
16. Гаспарян О.Н., Оганян О.Г. Корневые годорафы дискретных циркулянтных систем регулирования// НАНА и НПУА Известия: ISSN 0002-306 X: Серия технических. - 2016, - Том LXIX, № 1., С. 61-69.
17. Оганян О.Г. Корневые годорафы дискретных симметричных систем автоматического регулирования// «PERSPEKTYWICZNEOPRACOWANIA SĄ NAUKĄI TECHNIKAMI - 2026»07 – 15 listopada 2015 roku, Volume 12, С. 30-33.
18. Казамаров А. А., Палатник А. М., Роднянский Л. О. Динамика двумерных систем автоматического регулирования.- М.: Наука, 1967, С. 308.
19. Мееров М. В. Системы многосвязного регулирования.- М.: Наука, 1965, С. 384,
20. Морозовский В. Т. Многосвязные системы автоматического регулирования.- М.: Энергия, 1970, С. 288.
21. Муттер В.М. Аналого-цифровые автоматические системы.-Л.: Машино-строение, 1981, С. 199.
22. Соболев О.С. Однотипные связанные системы регулирования.-М.: Энергия, 1973, С.136.
23. Удерман Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управ-ления, Госэнергоиздат, 1963, С. 112.
24. Уликян А.Т., Оганян О.Г. Проектирование простых симметричных систем автоматического регулирования // МАТЕРИАЛИ ЗА XI МЕЖДУНАРОДНА НАУЧНА ПРАКТИЧНА КОНФЕРЕНЦИЯ «КЛЮЧОВИ ВЪПРОСИВ СЪВРЕМЕННАТА НАУКА - 2015» 17 - 25 април 2015 г. Том 19 Технологии, С. 75-78.

25. Хорол Д.М., Барский А.Г., Орлова М.С. Динамические системы с однока-нальными измерителями.- М.: Машиностроение, 1976, С. 207.
26. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем.- М.: Наука, 1977, С. 560.
27. Abraham R., Lunze J. Modelling and decentralized control of a multi-zone crystal growth furnace. *Proc. European Control Conference,* Gre-noble, France, 1991. pp. 2534-2539,
28. Albertos P., Sala A. *Multivariable Control Systems: An Engineering Approach*, Springer, 2004, - P. 358
29. Antoulas A.C. Approximation of linear dynamical systems. *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering,* 1999. 11:403-422,
30. Antsaklis P. J., Michel A. N. *Linear Systems*, Birkhauser, Boston, 2006, -P. 670.
31. Arkun Y., Manouslouthakis B., Palazoglu A. Robustness analysis of process control systems. A case study of decoupling control in distillation. *IEEC Process Design and Development*, 1984, 23(1), 93-101.
32. Balchen J.G., Mumme K. *Process Control. Structures and Applications*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1988.- P. 540.
33. Barman John F., Katznelson J. A Generalized Nyquist-Type Stability Criterion for Multivariable Feedback Systems. *Int. J. Contr.*, Vol. 20, No. 4, Oct., 1974, pp. 593-622,
34. Bellman R., *Introduction to Matrix Analysis.* McGraw-Hill, NY, 1970. - P. 403.
35. Bliss G. A., *Algebraic Functions.* New York: Dover, 1966. - P. 97.
36. Bosgra O.H., Kwakernaak H., Meinsma G. Design Methods for Control Systems, Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control, Winter term, DISC, 2003–2004. - P. 327.
37. Chen C.T. *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1984.
38. Chen Chi-Tsong. *Analog and Digital Control System Design*, Sounder College Publishing, 2006, -p. 609.
39. Chen J. Sensitivity integral relations and design trade-offs in linear multivariable feedback systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-40(10): 1995, -P. 1700–1716,
40. Churchill R. V., Brown J. W., Verhey R. F. *Complex Variables and Applications,* McGraw-Hill, New York, 1974.-P. 414.
41. *Control Toolbox. User's Guide*. The MathWorks, Natick, Mass., USA, 2014.
42. Davis P. J. *Circulant Matrices.* Wiley, NY, 1979, -P. 250.
43. D'Azzo J.J., Houpis C.H. *Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern.* McGraw-Hill Book Co., New York, NY, 1988. -P. 822.

44. Derusso P. M., Roy R. J., Close C. M. *State Variables for Engineers*, John Wiley & Sons, Inc, NY, 1998. -P. 605.
45. Desoer C.A., Wang Y.T. On the Generalized Nyquist Stability Criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-25, No. 2, Apr., 1980, - pp. 187-196,
46. Dorf R.C., Bishop R. *Modern Control Systems*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 2007.
47. Doyle J. C. *Lecture Notes on Advances in Multivariable Control*, ONR/ Honeywell Workshop, Minneapolis, October, 1984.
48. Doyle J.C., Francis B., Tannenbaum A. *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, 1992. - pp. 93- 168.
49. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear Operators: General Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1958.
50. Emami-Naeini A., Van Dooren P. Computation of Zeros of Linear Multivariable Systems, *Automatica*, Vol. 18, No. 4, pp. 415-430, July 1982; On Computation of Transmission Zeros and Transfer Functions, Proc. 21st Conf. Decision Contr., Dec. 1982, - pp. 51-55.
51. Evans W. R. Control system synthesis by root locus method. *Trans. Amer. Institute of Electrical Engineers*, 1950, 69:66–69.
52. Evans W.R. *Control System Dynamics*. McGraw-Hill Book Co., New York, NY, 1954,-p.282.
53. Eydgahi Ali M., and M. Ghavamzadeh,. Complementary Root Locus Revisited. IEEE Transaction on Education. - May 2001. - Vol. 44, No. 2.,- pp. 137-143.
54. Fagnani F., Willems J.C. Representations of symmetric linear dynamical systems. *Proc. 30th CDC Conference*, Brighton, England, 1991, - pp. 17-18.
55. Fortescue P.W. The Generalized Root Locus Method (For Similar Systems with Antisymmetric Coupling), *Int. J. Contr.*, Vol. 4, No. 4, 1976, - pp. 822-832.
56. Franklin G.F., Powell J.D., Emami-Naeini A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, MA, 1991, - pp. 193-195.
57. Freudenberg J.S., Looze D.P. *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems*, Vol. 104 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
58. Gantmacher F.R. *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Com-pany, New York, NY, 1964.
59. Gasparyan O.N. Computer-Aided Analysis and Design of Linear and Nonlinear Multivariable Control Systems: A Classical Approach, *Proceedings of the 2006 IEEE Computer Aided Control Systems Design International Symposium*, Munich, Germany, 2006, -pp. 1958-1963.

60. Gasparyan O.N., Kyureghyan S.G., Vardanyan N.H. Theoretical and Computational Aspects of Construction of Root Loci for Multivariable Control Systems. *Proceedings of the 6-th International Conference on Computer Science and Information Technologies*, National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia, 2007.
61. Gasparyan O.N., Eydgahi A. On Behavior of Root Loci of Uniform and Circulant Multivariable Control Systems, Proceedings of 2008 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design, San Antonio, Texas, USA, September 3-5, pp. 1067-1072, 2008.
62. Gasparyan O.N. *Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach*, John Wiley and Sons, West Sussex, Chichester, UK, 2008.
63. Glad T., Ljung L. *Control Theory: Multivariable and Nonlinear Methods,* CRC Press, 2000 (translation from Swedish).
64. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. *Matrix Polynomials*. Academic Press, NY, 1982.
65. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Computations*, John Hopkins University Press, Baltimore, 1989, -pp365-397.
66. Goodwin G. C., Graebe S. F., Salgado M. E. *Control System Design*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2001.
67. Gray R.M. Toeplitz and circulant matrices: A review. http://www-isl.stanford.edu/gray/toeplitz.pdf, Department of Electrical Engineering, Stanford University, California, Rev. 2002.
68. Green M., Limebeer D.J.N. *Linear Robust Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995.
69. Horn R.A., Johnson C.R. *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.
70. Horowitz I. M. *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press, London. 1963.
71. Hovd M., Skogestad S. Robust control of systems consisting of symmetrically interconnected subsystems. *Proc. American Control Conference,* Chicago, 1992, -pp. 3021-3025.
72. Hovd M., Skogestad S. Sequential design of decentralized controllers. *Automatica*, 1994, 30(10):1601-1607.
73. Hovd M., Skogestad S. Control of symmetrically interconnected plants. *Automatica*, Vol. 30, No. 6, 1994,- pp. 957-973.
74. Hovd M., Braatz R. D., Skogestad S. SVD Controllers for H_2, H_∞ and μ-optimal control. *Automatica*, Vol. 33, No. 3, pp. 433-439, 1997.
75. Hung Y.S., MacFarlane A.G.J. *Multivariable Feedback: A Quasi-Classical Approach,* Vol. 40 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
76. Kailath T. *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980.

77. Kouvaritakis B. *Characteristic Locus Methods for Multivariable Feedback Systems Design*, PhD thesis, University of Manchester Institute of Science and Technology, UK, 1974.
78. Kouvaritakis B., Edmunds J. M. Multivariable Root Loci: a Unified Approach to Finite and Infinite Zeros, *Int. J. Contr.*, Vol. 29, No. 3, March 1979. -pp. 393-428.
79. Kouvaritakis B., Shaked U. Asymptotic behavior of root loci of multivariable systems, *Int. J. Contr.*, Vol. 23, pp. 297-340, 1976.
80. Kuo B. J. *Automatic Control Systems*, Prentice Hall, EC, NJ, 1995.
81. Landau I.D., Zito G. *Digital Control Systems - Design, Identification and Impleme-ntation*. Springer-Verlag London Limited, 2006, 496 p.
82. Layton J. M. *Multivariable Control Theory.* Peter Peregrinus LTD, 1976.
83. Lunze J. Dynamics of strongly coupled symmetric composite systems. *Int. J. Control*, 44, 1986, -pp. 1617-1640.
84. Lunze J. Stability analysis of large-scale systems composed of strongly coupled similar subsystems. *Automatica*, 25, 1989, -pp 561-570.
85. Lunze J. *Feedback Control of Large-Scale Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1992.
86. Lurie B. J., Enright P. J. *Classical Feedback Control with MATLAB*, Marcel Dekker, NY, 2000.
87. MacFarlane A.G.J. Commutative controller: A new technique for the design of multivariable control systems. *Electronic Letters*, Vol. 6, 1970, pp. 121-123.
88. MacFarlane A.G.J. Return-difference and return-ratio matrices and their use in analysis and design of multivariable feedback control systems, *Proc. IEE*, 117,1970,- pp. 2037-2049.
89. MacFarlane A.G.J., Belletrutti J.J. The Characteristic Locus Design Method, *Automatica*, 1970, - pp. 575-588,
90. MacFarlane A.G.J., Karcanias N. Poles and zeros of linear multivariable systems: A survey of algebraic, geometric and complex variable theory, *Int. J. Contr.*, 1976, -pp 24: 33–74.
91. MacFarlane A.G.J., Postlethwaite I. The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci, *Int. J. Contr.*, Vol. 25, 1977, -pp. 81-127.
92. MacFarlane A.G.J., Postlethwaite I. Characteristic frequency functions and characteristic gain functions, *Int. J. Contr.*, Vol. 26, 1977, -pp. 265-278.
93. MacFarlane A.G.J., Kouvaritakis B., Edmunds J. M. Complex variable methods for multivariable feedback systems analysis and design, *Alternatives for Linear Multivariable Control*, National Engineering Consortium, Chicago, IL, 1977, -pp. 189-228.
94. MacFarlane A.G.J., Kouvaritakis B. A design technique for linear multivariable feedback systems, *Int. J. Contr.*,1977, -pp 25: 837–874.
95. Maciejowski J.M. *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley, Wokingham, UK., 1989.

96. Marcus M., Minc H. *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Dover Pubns, 1992.

97. Moudgalya K.M. *Digital Control* - John Wiley & Sons, UK, 2007.-543 p.

98. Mossaheb S. Nyquist Type Stability Criterion for Linear Multivariable Delayed Systems. *Int. J. Contr.*, Vol. 32, No. 5, Nov., 1980, - pp. 821-847.

99. Newman B., Fu D. Sketching rules for the multivariable root locus design technique, *Proc. Amer. Contr. Conf.*, Philadelphia, PA, June 1998, -pp. 2040–2044.

100. Nwokah O. D. Generalized Nyquist stability criterion for composite feedback control systems. Large Scale Systems 2, No. 3, 1981, -pp. 185-190.

101. Ogata K. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2009.

102. Owens D.H. Dyadic expansion for the analysis of linear multivariable systems. *Proceedings IEE*, Vol. 121, No. 7, 1974, - pp. 713-716,

103. Owens D.H. *Feedback and multivariable systems. P*eter Peregrinus LTD, 1978.

104. Pachter M., Kobylarz T., Houpis C.H. Literal Nyquist Stability Criterion for MIMO Control Systems , *Int. J. Contr.* , Vol. 63, No. 1, Jan 10, 1996, - pp. 55-65.

105. Phillips C.L., Nagle T.H. *Digital Control Systems Analysis and Design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995, -p 701.

106. Postlethwaite I. Generalized Inverse Nyquist Stability Criterion. *Int. J. Contr.*, V 26, N 3, Sep., 1977,- pp. 325-340.

107. Postlethwaite I. The asymptotic behaviour, the angles of departure, and the angles of approach of the characteristic frequency loci. *Int. J. Contr.*, 25, No. 3, 1977, - pp. 677-695

108. Postlethwaite I., MacFarlane A.G.J. *A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems*, Vol. 12 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

109. Postlethwaite I., Edmunds J.M., MacFarlane A.G.J. Principal gains and principal phases in the analysis of linear multivariable feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, , 1981, -pp 26:32–46.

110. Rosenbrock H. H. *State-space and Multivariable Theory*, Nelson, London, 1970.

111. Rosenbrock H.H. Design of multivariable control systems using the inverse Nyquist array, *Proc. ZEEE*, Vol. 1, No. 11, Nov. 1969.

112. Safonov M. *Stability and robustness of multivariable feedback systems*. The MIT Press, Cambridge, 1980.

113. Sain M.K., Schrader C.B. The role of zeros in the performance of multi-input, multi-output feedback systems. *IEEE Transactions on Education*, 1989, -pp 33:244–257.

114. Sam Fadali M. *Digital Control Engineering* – Analysis and Design. Elsevier Inc. Academic Press, Burlington, 2009, 526 p.

115. Schrader C.B., Sain M.K. Research on system zeros: A survey. *Int. J. Contr.*, 1989, 50:1407–1433.

116. Shaked U. The angles of departure and approach of the root-loci in linear multivariable systems. *Int. J. Contr.*, 23, No. 3,1976, - pp. 445-457.

117. Skogestad S., Postlethwaite I. *Multivariable Feedback Control. Analysis and Design*. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, Sussex, UK, 2005.

118. Smith M. C. On the Generalized Nyquist Stability Criterion., *Int. J. Contr.*, V 34, No. 5, Nov, 1981, -pp. 885-920.

119. Springer G. *Introduction to Riemann Surfaces.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1957.

120. Stevens P. K. Generalization of the Nyquist Stability Criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, V Ac-26, No. 3, 1981, - pp. 664-669.

121. Strang G. *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, New York, 1976.

122. Sundareshan M.K., Elbanna R.M. Qualitative analysis and decentralized controller synthesis for a class of large-scale systems with symmetrically interconnected subsystems. *Automatics*, 27, 1991, -pp 383-388.

123. Tou Julius T. *Digital and Sampled-Data Control Systems*. McGraw-Hill Book Co., New York, NY, 1959.

124. *Using MATLAB*, The MathWorks, Inc, 2014.

125. Valenca J.M.E., Harris C.J. Nyquist Criterion for Input/Output Stability of Multivariable Systems. *Int. J. Contr.*, V 31, N 5, May 1980, - pp. 917-935.

126. Vardulakis A. I. G. *Linear Multivariable Control: Algebraic Analy-sis and Synthesis Methods*. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, Sus-sex, UK, 1991.

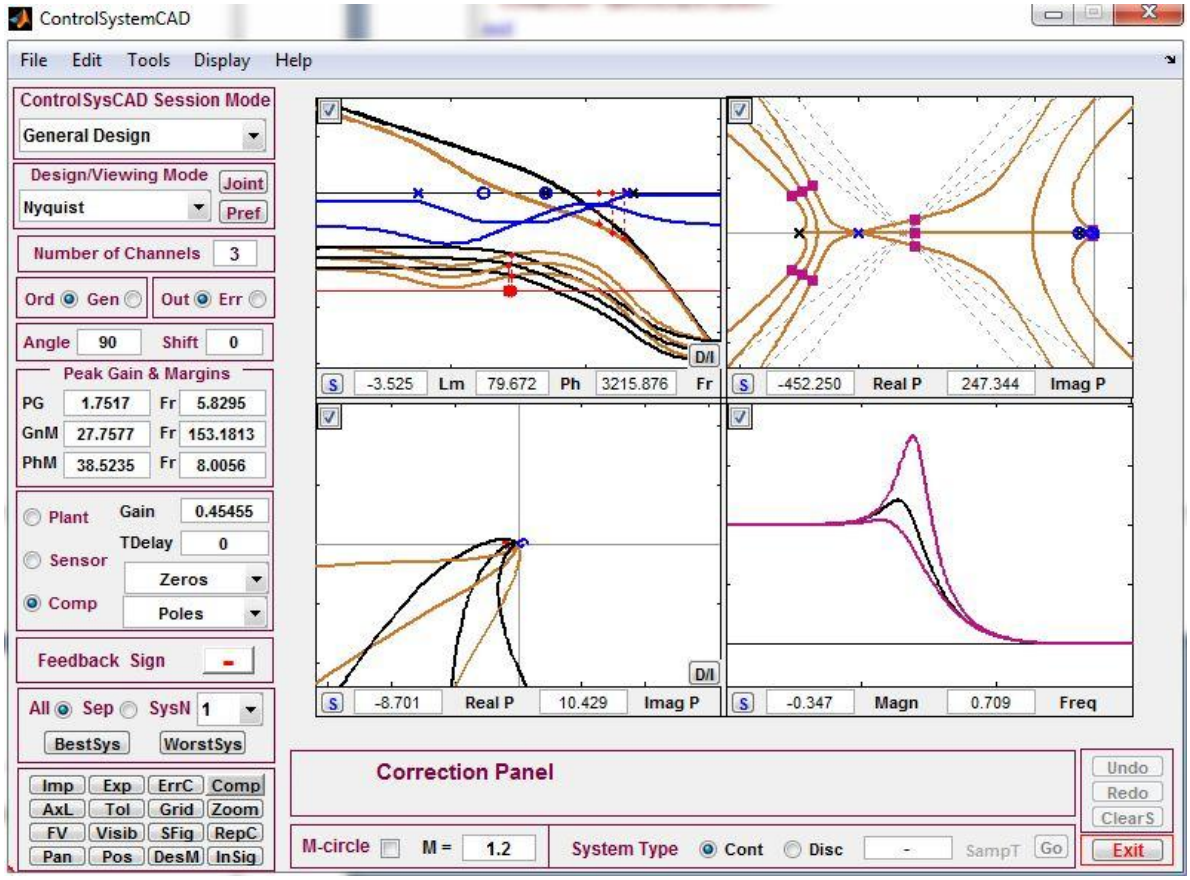
ՀԱՎԵԼՎԱԾ

ԱՇԽԱՏԱՆՔՈՒՄ ԱՌԱՋԱՐԿՎԱԾ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԵՎ ՄՈՏԵՑՈՒՄՆԵՐԻ ՀԻՄԱՆ ՎՐԱ MATLAB ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԼԵԶՎՈՎ ՄՇԱԿՎԱԾ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ԾՐԱԳՐԱՅԻՆ ՓԱԹԵԹԸ

Աշխատանքում բոլոր անհրաժեշտ հաշվարկները, համակարգերի հաճախականային բնութագրերի և արմատային բնութագրերի ստացումը z և ϖ տիրույթներում իրականացվել է MATLAB-ի միջավայրում մշակված կիրառական ծրագրային փաթեթի օգնությամբ:

Ստորև ներկայացված է **DISCRETE_MIMO_CAD** գրաֆիկական ինտերֆեյսը և համապատասխան ծրագրերը:

Գրաֆիկական ինտերֆեյսի ընդհանուր տեսքը



```
function [SysZ,SysW,CompZ,CompW] = DiscreteCAD(Plant,Sensor,Comp,Z)
%Function for calculating discrete-time MIMO systems
global Ts Z_W % Z_W = 1 - z-transform, else (Z-W = 0) w-transform
N = size(Plant,1);
Sys = minreal(Plant*Sensor);
SysZ = zpk(zeros(N)); SysW = []; CompW = [];
if Z
   SysZ = Sys;
   CompZ = Comp;
end
 SysCont = zpk(zeros(N));
 for i = 1:N
   for l = 1:N
             if ~Z
          SysZ(i,l) = c2d(Sys(i,l),Ts);
       else
           SysZ(i,l) = Sys(i,l);
       end
       [z,p,k] = zpkdata(SysZ(i,l),'v');
       SysCont(i,l) = zpk(z,p,k);
   end
end
if ~Z
   CompZ = c2d(Comp,Ts);
end
[z,p,k] = zpkdata(CompZ,'v');
CompCont = zpk(z,p,k);


if ~Z_W

   for i = 1:N

       for l = 1:N

           [z,p,k] = zpkdata(SysZ(i,l),'v');

           [wz,wp,kWpure] = Disc_z2w(z,p,k,Ts/2);

           SysCont(i,l) = zpk(wz,wp,kWpure);

       end

   end

   SysW = SysCont;

   [z,p,k] = zpkdata(CompZ,'v');
```

```
    [wz,wp,kWpure] = Disc_z2w(z,p,k,Ts/2);

    CompCont = zpk(wz,wp,kWpure);

end

% SysCont = balreal(SysCont);

ControlSysCAD_Discrete(1,SysCont,zpk(eye(N)),CompCont)

end

 function [wz,wp,kWpure] = Disc_z2w(z,p,k,T2)  % T2 = T/2,

% Transform from Z-plane to W-plane (modified and simple (if T2 = 1) bilinear transform)

[NumW,DenW,AA] = deal(1);

m = length(z);

n = length(p);

[wz, wp] = deal(zeros(1,n));

wz(1:m) = -(1 - z)./((1 + z).*T2);

wz(m+1:n) = 1/T2;  % positive zeros at 2/T

wp = -(1 - p)./((1 + p).*T2);

kWpure = k*((-1)^(n-m))*prod(1 + z)/prod(1 + p);  % for W = kWpure*prod(w - zw)/prod(w - pw)

end

function
[indA,WSysMat,LmSysMat,WComp,LmComp,WSys,LmSys,Fei,Foi,NormmaxEr,NormmaxOut,NormminE
r, NormminOut,FsepEr,FsepOut,Normal,QAuxMat,condNum] =
GeneralSysFreqChar(handles,N,Switch,FreqBase,Angle,Shift,NumSysMat,DenSysMat,NumComp,DenCom
p,TimeDelaySysMat,TimeDelayComp,Imp,WSysMatTest)

% Function for evaluating all frequency characteristics

global Ts Z_W

[Normal,FeedbackSign,dAng] = deal(0,handles.FeedbackSign,handles.dAngFr);

nFr = length(FreqBase);

if ~Z_W

    sw = Shift + FreqBase.*exp(1i*Angle);

else

    sw = exp(1i*Ts*FreqBase);%

end

NumCompFr = polLoc(NumComp,sw);

DenCompFr = polLoc(DenComp,sw);
```

```
WComp = (NumCompFr./DenCompFr).*exp(-TimeDelayComp.*sw);
LmComp = 20*log10(abs(WComp));
if Switch && nFr >= 3
   argWComp = (180/pi)*unwrapLoc(angle(WComp));
end
QAuxMat = cell(1,nFr); % without Comp
[WSysMat,LmSysMat,WSys,LmSys,Fei,Foi] = deal(zeros(N,nFr));
[FsepEr,FsepOut] = deal(cell(N));
[FsepEr{:}] = deal(zeros(1,nFr));
[FsepOut{:}] = deal(zeros(1,nFr));
[condNum,NormmaxEr,NormmaxOut,NormminEr,NormminOut] = deal(zeros(1,nFr));
if N == 1 % if we treat SISO system as a General Type MIMO system !
   NumSysMatFr = polLoc(NumSysMat,sw);
   DenSysMatFr = polLoc(DenSysMat,sw);
   WSysMat = -FeedbackSign*(NumSysMatFr./DenSysMatFr).*exp(-TimeDelaySysMat.*sw);
   LmSysMat = 20*log10(abs(WSysMat));
   WSys = WSysMat.*WComp;
   LmSys = LmSysMat + LmComp;
   Fei = 1./(1 + WSys);
   Foi = 1 - Fei;
   NormmaxEr = abs(Fei);
   NormminEr = NormmaxEr;
   NormmaxOut = abs(Foi);
   NormminOut = NormmaxOut;
else
   if nFr > 50
      hwait = waitbar(0,'Frequency-Domain Calculations (General Type MIMO System). Please wait ...');
   end
   for in = 1:nFr
      if nFr > 50
```

```
    waitbar(in/nFr)
end
[QAuxMat{in},QAuxSys,condNum(in),WSysMat(:,in)] = CalculateQAux(N,NumSysMat,...
    DenSysMat,TimeDelaySysMat,FeedbackSign,WComp(in),sw(in));
if Switch && Imp && in == 1 && ~isempty(WSysMatTest) % if Shift ~= 0 & Angle ~= 0
    WSysMat(:,in) = CADmatchlsq(WSysMatTest,WSysMat(:,in),i);
elseif Switch && Imp && in > 1
    WSysMat(:,in) = CADmatchlsq(WSysMat(:,in-1),WSysMat(:,in),i);
 elseif ~Switch % for inserted values
    WSysMat(:,in) = CADmatchlsq(WSysMatTest(:,in),WSysMat(:,in),i);
end
WSys(:,in) = WComp(in)*WSysMat(:,in);
LmSysMat(:,in) = 20*log10(abs(WSysMat(:,in)));
LmSys(:,in) = 20*log10(abs(WSys(:,in)));
Fei(:,in) = 1./(1 + WSys(:,in));
Foi(:,in) = 1 - Fei(:,in);
FsepErA = inv(eye(N) + QAuxSys);
FsepOutA = eye(N) - FsepErA;
if handles.FreqModeClosedLoop
    for r = 1:N
        for m = 1:N
            FsepEr{r,m}(in) = FsepErA(r,m);
            FsepOut{r,m}(in) = FsepOutA(r,m);
        end
    end
end
if abs(1 - condNum(in)) < eps % if normal
    NormmaxEr(in) = max(abs(Fei(:,in)));
    NormminEr(in) = min(abs(Fei(:,in)));
    NormmaxOut(in) = max(abs(Foi(:,in)));
```

```
            NormminOut(in) = min(abs(Foi(:,in)));
        else
            [NormminEr(in),NormmaxEr(in),NormminOut(in),NormmaxOut(in)] = ...
                SVDCalcul(QAuxSys,N);
        end
    end
end
if all(abs(1 - condNum) < 1e6*eps)
    Normal = 1;
end
argWSysMat = unwrapLoc(angle(WSysMat));
argWSys = unwrapLoc(angle(WSys));
function [QAux,QAuxSys,condNum,WSysMat] = CalculateQAux(N,NumSysMat,DenSysMat,...
    TimeDelaySysMat,FeedbackSign,WComp,swi)
% Finding system matrix for given ferquency
QAux = CADFindWSysOpen(N,NumSysMat,DenSysMat,TimeDelaySysMat,FeedbackSign,swi);
QAuxSys = WComp*QAux;
[Cmod,GainLMat] = eig(QAux);
WSysMat = diag(GainLMat);
condNum = cond(Cmod);
```