

Ա.01.01 – “Մաթեմատիկական անալիզ” մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Հայկ Գազիկի Ալեքսանյան

**ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՎ ԳՐԻԴԻ ԱԼԳՈՐԻԹՄԻ
ՋՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ**

ՍԵՂՍԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2012

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Айк Гагикович Алексанян

**СХОДИМОСТЬ ГРИДИ АЛГОРИТМА ПО
ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – “Математический анализ”

ЕРЕВАН – 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է
Երևանի Պետական Համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ
Ա.Ա. Սահակյան

Պաշտոնական քննդիմախոսներ՝

Ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր Գ.
Կարազուլյան
Ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու Ս.
Եպիսկոպոսյան

Առաջատար կազմակերպություն՝

Բելառուսական պետական
համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2012թ. հունիսի 12-ին ժ. 15⁰⁰-ին Երևանի
պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի Մաթեմատիկայի-050 մաս-
նագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2012թ. մայիսի 12-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար

Ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր

Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в
Ереванском Государственном Университете

Научный руководитель:

Член-корреспондент НАН РА
А.А. Саакян

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат.наук
Г. Карагулян
кандидат физ.-мат. наук
С. Епископосян

Ведущая организация:

Белорусский государственный
университет

Защита состоится 12-го июня 2012г. в 15⁰⁰ на заседании специализирован-
ного совета ВАК Математики-050 при Ереванском государственном
университете (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 12 мая, 2012г.

Ученый секретарь специализированного совета,

доктор физ.-мат. наук

Т.Н. Арутюнян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Гриди (жадный) алгоритм, как способ приближения по разным системам, применялся давно, однако его систематическое исследование в области нелинейной аппроксимации началось в конце 90-х, в многочисленных работах В. Темлякова, С. Конягина, П. Войтащика и других математиков. В настоящее время по этой тематике опубликованы сотни работ, основные результаты которых подытожены в недавно опубликованной монографии В. Темлякова [Т2].

Понятие гриди базиса, для которого гриди алгоритм реализует почти наилучшее m -членное приближение для всех элементов банахово пространства и для всех $m = 1, 2, \dots$, было введено С. Конягиным и В. Темляковым [КТ1], которые получили полное описание этих базисов в произвольном банаховом пространстве. Далее было введено понятие квази-гриди базиса, которое в свою очередь было описано Войтащиком [W] в 2000 году. В дальнейшем гриди алгоритм для конкретных систем и различных видов сходимости был рассмотрен многими авторами. Оказалось, что некоторые классические системы, например тригонометрическая система, являются плохими базисами с точки зрения гриди аппроксимации.

Однако, как стало ясно из одной работы Т. Тао [Т], сходимость гриди алгоритма тесно связано с нормировкой системы, что эквивалентно рассмотрению гриди алгоритма с весом. Различные результаты, посвященные сходимости гриди алгоритма с весом были получены С. Конягиным и В. Темляковым [КТ2], Т. Кёрнером [К] и С. Гогяном [G].

Цель работы. Целью диссертации является изучение разных видов сходимости гриди алгоритма с весом по системе Хаара, Франклина, и по тригонометрической системе.

Методы исследования. В работе используются методы ортогональных рядов, теории рядов Фурье, а также методы теории аппроксимации.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Основная задача тео-

рии аппроксимации является замена сложного объекта (целевая функция) более простыми объектами (аппроксиманты). Эта идея широко распространена и с успехом применяется во многих областях, в том числе в вычислительной математике, обработке изображений и сигналах, сжатии информации. В теоретической постановке, задача теории аппроксимации следующая: фиксируется банахово пространство X , элементы которого будут служить целевыми функциями, и некоторая система $\mathcal{D}$ элементов из X как система аппроксимантов. Далее, для фиксированного элемента $f \in X$ и для $m \in \mathbb{N}$ некоторым методом ставятся в соответствие линейная комбинация некоторых m элементов $\mathcal{D}$, которая будет служить аппроксимантом f в том или ином смысле. Если оператор соответствия f и m -членного аппроксиманта линейен, то метод называется линейным, в противном случае нелинейным. Гриди (жадный) алгоритмы сравнительно новая часть теории нелинейных аппроксимаций, интенсивно изучаемых с конца 90-х годов (см. [D] и [T1] для обзора).

Теоретический и практический интерес представляет изучение различных видов сходимости гриди алгоритма по конкретным системам. В работе изучается влияние нормировки системы на сходимость аппроксимаций, т.е. гриди алгоритм с весом. В первой главе и второй главе полностью характеризуются связь нормировки системы с равномерной сходимости и сходимости почти всюду по системе Хаара и Франклина соответственно. Теорема Т. Тао о сходимости оператора жесткого отбора (hard sampling) по системе Хаара получается как частный случай. Третья глава посвящена тригонометрической системе. Здесь мы получаем характеризацию влияния нормировки на сходимость гриди алгоритма по мере и по норме пространства $L^p(0,1)$, при $1 < p < \infty$. Также уснанавливается несуществование весового гриди алгоритма, которая сходится почти всюду для всех функций из $L^1(0,1)$. Тем самым получаем, что тригонометрическая система не является хорошей, с точки зрения гриди алгоритмов.

Аппробация работы. Основные результаты работы докладовались на международной конференции *Гармонический анализ и аппроксимации* - 5, (Сентябрь 2011, Тцахкадзор, Армения), на армянско-грузинском семинаре по действительному анализу (Октябрь 2009, Тцахкадзор, Армения), и на семинарах по действительному анализу факультета Математики и механики в ЕГУ (2009-2011).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 5 работ, список

которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех глав, списка использованной литературы из 35 наименований и содержит 62 страниц текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сформулированы постановка проблемы, цель и задачи диссертации, указаны объекты и методы исследования. Сформулированы все основные результаты.

Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ базис в банаховом пространстве X с условием $\inf_{n \geq 1} \|\varphi_n\|_X > 0$. Тогда любой элемент $f \in X$ единственным образом разлагается в ряд по системе Φ , который сходится к f по норме пространства X :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) \varphi_n,$$

где $c_n(f)$ коэффициенты разложения, и $c_n(f) \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$. Определим погрешность N -членной аппроксимации f по базису Φ как

$$\sigma_N(f, \Phi) := \inf_{\Lambda: |\Lambda|=N} \inf_{\{a_k\}} \left\| f - \sum_{k \in \Lambda} a_k \varphi_k \right\|.$$

Как ясно из определения, аппроксимируя данный элемент f линейными комбинациями любых N членов базиса Φ , лучший порядок, что можно ожидать есть σ_N .

Начнем с некоторых центральных понятий теории гриди алгоритмов. Для элемента f перестановка натуральных чисел (необязательно всех) ρ назовем убывающей, если

$$|c_{k_1}(f, \Phi)| \geq |c_{k_2}(f, \Phi)| \geq \dots,$$

где $\rho(j) = k_j$, для $j = 1, 2, \dots$, и будем писать $\rho \in D(f) := D(f, \Phi)$. Определим N -тый *гриди (жадный) аппроксимант* для f по системе Φ соответствующей перестановке $\rho \in D(f)$ по формуле

$$G_N(f) := G_N(f, \Phi) := G_N(f, \Phi, \rho) := \sum_{j=1}^N c_{k_j}(f, \Phi) \varphi_{k_j}.$$

Метод аппроксимации f по $G_N(f)$ называется *гриди (жадным) алгоритмом* (см. [T2] для подробностей).

Определение 1: Базис Φ называется *гриди базисом* если для любого $f \in X$ существует перестановка $\rho \in D(f)$ такая, что неравенство

$$\|f - G_N(f, \Phi, \rho)\|_X \leq C \sigma_N(f, \Phi)_X, \quad (1)$$

выполняется с константой независимой от N и f .

Как доказано в [КТ1] для гриди базиса неравенство (1) имеет место для любого $\rho \in D(f)$.

Легко видеть, что в гильбертовом пространстве каждый ортонормированный базис является гриди базисом с константой 1. Нетривиальные примеры гриди базисов приведены в [T2] (см стр. 17, Т. 1.11), где доказано, что при $1 < p < \infty$ каждый базис Φ который L^p -эквивалентен системе Хаара, является гриди базисом в $L^p(0, 1)$. Следовательно, системы Хаара и Франклина (см. [KS], стр. 239) являются гриди базисами в $L^p(0, 1)$, при $1 < p < \infty$. Следуя [КТ1] приведем следующее

Определение 2: Скажем, что система Φ *демократична* в X , если существует константа $D := D(\Phi, X)$ такая, что для любых конечных множеств индексов P и Q с равным количеством элементов имеет место

$$\left\| \sum_{n \in P} \varphi \right\|_X \leq D \left\| \sum_{n \in Q} \varphi \right\|_X.$$

Следующая теорема из [КТ1] характеризует гриди базиси.

Теорема (С. Конягин и В. Темляков). Базис является гриди базисом тогда и только тогда, когда является безусловным и демократичным базисом.

Другая важная концепция в теории гриди алгоритмов, это *квази-гриди базис*.

Определение 3: Базис Φ назовем *квази-гриди базисом*, если для любой перестановки $\rho \in D(f)$ имеет место

$$\|G_N(f, \Phi, \rho)\|_X \leq C \|f\|_X, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где константа C независима от f , N и ρ .

Как доказал П. Войташек (см. [W]), базис Φ является квази-гриди базисом тогда и только тогда, когда для любого $f \in X$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f, \Phi)\|_X = 0. \quad (2)$$

Как видно из определения, каждый гриди базис является также квази-гридом. Сходимость гриди алгоритма для конкретных систем была рассмотрена многими авторами. Как было отмечено, система Хаара, и Франклина являются квази-гриди базисами в $L^p(0, 1)$, при $1 < p < \infty$, тогда как тригонометрическая система в $L^p(0, 1)$ удовлетворяет условию (2) только при $p = 2$ (см. [GN]).

В последующем через $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ обозначим убывающую последовательность положительных чисел и будем называть ее весовой последовательностью. Для $f \in X$ рассмотрим убывающую по модулю перестановку ненулевых коэффициентов с весом γ_n :

$$|\gamma_{\sigma(1)}c_{\sigma(1)}(f)| \geq |\gamma_{\sigma(2)}c_{\sigma(2)}(f)| \geq \dots |\gamma_{\sigma(n)}c_{\sigma(n)}(f)| \geq \dots, \quad (3)$$

и определим гриди аппроксимант с весом Γ следующим образом:

$$G_N(f) := G_N(f, \Phi) := G_N(f, \Phi, \Gamma) := \sum_{n=1}^N c_{\sigma(n)}(f) \varphi_{\sigma(n)}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Множество перестановок σ с условием (3) обозначим через $D(f, \Phi, \Gamma)$. Легко видеть, что (4) совпадает с гриди аппроксимантом по перенормированной системе Φ :

$$G_N(f, \Phi, \Gamma) = G_N\left(f, \left\{\frac{1}{\gamma_n} \varphi_n\right\}\right), \quad N = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Гриди алгоритм с весом для общих систем был рассмотрен в работах [КТ2] и [КРТ], а в работах [Г], [К] и [Г] - для вейвлет систем, системы Хаара и Уолша.

В главе 1 рассматривается равномерная сходимость и сходимость почти всюду гриди алгоритма с весом по системе Хаара. Обозначим через $H_{\infty} = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ систему Хаара нормированную по норме $\|\cdot\|_{\infty}$ и пусть $\Gamma_p = \{\gamma_{n,p}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\gamma_{n,p} = 2^{-\frac{k}{p}}$, если $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$ и $1 \leq p \leq \infty$. Пусть $f \in L^1(0, 1)$ и $c_n(f)$ есть n -тый коэффициент Фурье функции f по системе H_{∞} . Обозначим

$$\text{sp}(f) = \{n \geq 0 : c_n(f) \neq 0\}.$$

Важно заметить, что если $f \in C[0, 1]$ то $c_n(f) \rightarrow 0$ и следовательно определение (3) корректно, но условие $f \in L^1(0, 1)$ не гарантирует, что коэффициенты стремятся к нулю. Поэтому в зависимости от Γ и f

множество $D(f, \Psi, \Gamma)$ может быть пустым. В этом случае коэффициенты разбиваются на две части следующим образом:

$$A := \{n \in \text{spf} : |c_n(f)| \leq 1\}, \quad B := \text{spf} \setminus A,$$

после чего рассматриваются те перестановки σ ненулевых коэффициентов, для которых

$$|c_{\sigma(n)}(f)\gamma_{\sigma(n)}| \searrow \text{ на } A, \quad (6)$$

а часть B может перестановливаться произвольным образом. Сходимость гриди аппроксимантов понимается уже для таких перестановок.

Заметим, что для Γ стремящихся к нулю, перестановка, удовлетворяющая (6) всегда существует, а для последовательностей, не стремящихся к нулю, рассматриваются только функции, для которых перестановка удовлетворяющая (6) существует, что, как показано в диссертации не ограничивает общности.

В дальнейшем множества $D(f, \Phi, \Gamma)$ и аппроксиманты (4) будем понимать с учетом сделанного замечания.

Следующую теорему Т. Тао мы приводим в несколько иной но эквивалентной формулировке.

Теорема. (*Т. Тао [T]*) а) Если $1 < p < \infty$, тогда для любой функции $f \in L^p(0, 1)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_N(f, H_\infty, \Gamma_p)(x) = f(x) \text{ п.в. на } [0, 1].$$

б) существует функция $f \in \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(0, 1)$ такая, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup |G_N(f, H_\infty, \Gamma_\infty)(x)| = +\infty, \quad x \in [0, 1].$$

Заметим, что в силу (4) и (5) имеем $G_N(f, H_\infty, \Gamma_p) \equiv G_N(f, H_p)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Для весовой последовательности $\Gamma = \{\gamma_n\}$ обозначим

$$\tau(\Gamma) = \sup_{m > n} \left\{ \frac{m}{n} : \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \leq 2 \right\}. \quad (7)$$

Легко видеть, что из условия $\tau(\Gamma) < \infty$ следует $\gamma_n \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$. Так же ясно, что $\tau(\{n^{-\alpha}\}_{n=1}^\infty) < \infty$, для любого $\alpha > 0$, тогда как $\tau(\{(\ln n)^{-1}\}_{n=2}^\infty) = \infty$.

Для системы Хаара С. Гогян [G] доказал, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f, H_1, \Gamma)\|_{L^1} = 0$$

для любого $f \in L^1(0, 1)$ тогда и только тогда, когда $\tau(\Gamma) < +\infty$.

В главе 1 доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. 1) Если $\tau(\Gamma) < +\infty$, тогда для любой функции $f \in C[0, 1]$ и любой перестановки $\sigma \in D(f, H_\infty, \Gamma)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f, H_\infty, \Gamma)\|_C = 0.$$

2) Если $\tau(\Gamma) = \infty$, тогда существует функция $f \in C[0, 1]$, такая что для любой перестановки $\sigma \in D(f, H_\infty, \Gamma)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup |G_N(f, H_\infty, \Gamma)(x)| = +\infty \text{ п.в. на } [0, 1]$$

Теорема 2. Для того, чтобы $\lim_{N \rightarrow \infty} G_N(f, H_\infty, \Gamma)(x) = f(x)$ п.в. на $[0, 1]$, для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ при любой перестановке $\sigma \in D(f, H_\infty, \Gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы $\tau(\Gamma) < +\infty$.

Так как $\tau(\Gamma_p) < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$ и $\tau(\Gamma_\infty) = \infty$, то теорема Т. Тао следует из теорем 1 и 2. В других терминах теорема 1 была доказана Т. Кёрнером [К] в случае, когда весовая последовательность является константой на двоичных пачках системы Хаара.

В Главе 2 рассматривается сходимость гриди алгоритма с весом по классической системе Франклина и ставится вопрос о характеризации всех весовых последовательностей, обеспечивающих равномерную сходимость для непрерывных функций и сходимость почти всюду для интегрируемых функций. Обозначим через $\mathcal{F}_\infty = \{\tilde{f}_n\}_{n=0}^\infty$ систему Франклина нормированную по норме $\|\cdot\|_\infty$. Доказываются следующие теоремы:

Теорема 3. 1) Если $\tau(\Gamma) < +\infty$, тогда для любой функции $f \in C[0, 1]$ и любой перестановки $\sigma \in D(f, \mathcal{F}_\infty, \Gamma)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f, \mathcal{F}_\infty, \Gamma)\|_C = 0.$$

2) Если $\tau(\Gamma) = \infty$, тогда существует функция $f \in C[0, 1]$, такая что для любой перестановки $\sigma \in D(f, \mathcal{F}_\infty, \Gamma)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup |G_N(f, \mathcal{F}_\infty, \Gamma)(x)| = +\infty \text{ п.в. на } [0, 1]$$

Теорема 4. Для того, чтобы $\lim_{N \rightarrow \infty} G_N(f, \mathcal{F}_\infty, \Gamma)(x) = f(x)$ п.в. на $[0, 1]$, для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ при любой перестановке $\sigma \in D(f, \mathcal{F}_\infty, \Gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы $\tau(\Gamma) < +\infty$.

Отметим, что несмотря на идентичность результатов для системы Хаара из главы 1 и вышеуказанных результатов для системы Франклина, их доказательства являются совершенно разными. Отметим еще, что методы разработанные в главе 2 для системы Франклина применимы также для вейвлет систем. Для вейвлет систем с порядком убывания $\frac{C}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}$ для некоторого $\varepsilon > 0$ в [GS] была сконструирована функция из $L^\infty(\mathbb{R})$ для которой гриди алгоритм в L^∞ расходится п.в. . При помощи методов главы 2 и работы [GS] доказывается, что можно построить непрерывную функцию с теми же свойствами, если вейвлет в добавок является непрерывным.

Глава 3 посвящена изучению сходимости по норме и п.в. весового гриди алгоритма по тригонометрической системе. Но начнем с одного общего утверждения. В работе С. Конягина и В. Темлякова [КТ2] доказано, что для любого нормированного базиса Φ в банаховом пространстве X , при $\Gamma = \{2^{-n}\}_{n=0}^\infty$ для любого $f \in X$ имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f, \Phi, \Gamma)\|_X = 0.$$

Для весовой последовательности $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ обозначим

$$\omega(\Gamma) = \sup_{m > n \geq 0} \left\{ m - n : \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \leq 2 \right\}. \quad (8)$$

Очевидно, что $\omega(\{\alpha^n\}_{n=1}^\infty) < \infty$ для любого числа $\alpha < 1$, тогда как $\omega(\{n^{-1}\}_{n=1}^\infty) = \infty$. Также ясно, что из условия $\omega(\Gamma) < \infty$ следует, что γ_n стремится к нулю.

В главе 3 доказывается следующее

Утверждение 1. Пусть для последовательности Γ имеет $\omega(\Gamma) < \infty$. Тогда для любого нормированного базиса Φ в банаховом пространстве X , для каждого $f \in X$ при любом $\sigma \in D(f, \Phi, \Gamma)$ верно

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f, \Phi, \Gamma)\|_X = 0.$$

Поскольку $\omega(\{2^{-n}\}_{n=1}^\infty) < \infty$, то вышеуказанная теорема С. Конягина и В. Темлякова вытекает из Утверждения 1.

Обозначим через $\mathcal{T} = \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}} := \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ тригонометрическую систему в нумерации $\psi_0 = 1$, $\psi_{2n-1} = e^{inx}$, $\psi_{2n} = e^{-inx}$, для $n = 1, 2, \dots$, и пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — одномерный тор. Как известно в указанной нумерации система $\mathcal{T}$ базис в $L^p(\mathbb{T})$, при $1 < p < \infty$.

В случае тригонометрической системы перестановка имеет вид $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, т.е. для $f \in L^1(\mathbb{T})$ рассматривается последовательность

$$|c_0(f)\gamma_0|, |c_1(f)\gamma_1|, |c_{-1}(f)\gamma_2|, |c_2(f)\gamma_3|, |c_{-2}(f)\gamma_4|, \dots$$

и σ переставляет ее по убыванию.

В главе 3 доказаны следующие теоремы.

Теорема 5. При $\omega(\Gamma) < \infty$ для любого $f \in L^p(\mathbb{T})$, где $1 < p < \infty$ и при любом $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$ верны следующие утверждения:

- 1) $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\|_p = 0$,
- 2) $\lim_{N \rightarrow \infty} G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)(x) = f(x)$ п.в. для $x \in \mathbb{T}$.

Теорема 6. При $\omega(\Gamma) = \infty$ существует функция

- 1) $f \in \bigcap_{1 \leq p < 2} L^p(\mathbb{T})$ для которой последовательность $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ расходится по мере при любом $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$,
- 2) $f \in C(\mathbb{T})$ для которой последовательность $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ расходится по норме $\|\cdot\|_p$, для любого $2 < p < \infty$ при любом $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$.

Как видно из теоремы 6, утверждение 1 является точным в классе всех банаховых пространств и нормированных базисов.

Для непрерывных функций верна следующая

Теорема 7. Пусть последовательность Γ фиксирована. Тогда

- 1) при $\omega(\Gamma) = \infty$ существует функция $f \in C(\mathbb{T})$, для которой последовательность $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ неограниченно расходится п.в. при любом $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$,
- 2) при $\omega(\Gamma) < \infty$ существует функция $f \in C(\mathbb{T})$, удовлетворяющая условию $\|f - G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\|_C \not\rightarrow 0$ при любом $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$.

Из пункта 1 теоремы 7 следует, что необходимым условием для сходимости гриди алгоритма почти всюду для всех функций из $L^1(\mathbb{T})$ является условие $\omega(\Gamma) < \infty$. Однако имеет место следующая

Теорема 8. *При условии $\omega(\Gamma) < \infty$, существует функция $f \in L^1(\mathbb{T})$, для которой последовательность $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ неограниченно расходится почти всюду при любой перестановке $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$.*

Список литературы

- [D] R. DeVore; *Nonlinear approximation*; Acta Numerica , 51-150 (1998)
- [GN] R. Gribonval, M. Nielsen; *On the Quasi-greedy Property and Uniformly Bounded Orthonormal Systems*; Technical Report Aalborg University (2003)
- [GS] G.G. Gevorkyan, A.A. Stepanyan; *Almost everywhere divergence of a summation method for wavelet expansions*; Journal of Contemporary Mathematical Analysis **39** (2), 33-39 (2004)
- [KPT] G. Kerkacharian, D. Picard, V.N. Temlyakov; *Some inequalities for the tensor product of greedy bases and weight-greedy bases*; East J. on Approx., **12** (1), 103-118 (2006)
- [KT1] S.V. Konyagin, V.N. Temlyakov; *A remark on greedy approximation in Banach spaces*; East J. on Approx. **5**, 1-15 (1999)
- [KT2] S.V. Konyagin, V.N. Temlyakov; *Convergence of greedy approximation I. General Systems*; Studia Math. **159** (1), 143-160 (2003)
- [K] T.W. Körner; *Hard summation, Olevskii, Tao and Walsh*; Bull. London Math. Soc. **38**, 705-729 (2006)
- [T] T. Tao; *On the almost everywhere convergence of wavelet summation methods*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 384-387 (1996)
- [T1] V.N. Temlyakov; *Nonlinear methods of approximation*; Found. Comput. Math. **3**, 33-107 (2003)
- [T2] V.N. Temlyakov; *Greedy Approximation*; Cambridge University Press (2011)

- [W] P. Wojtaszczyk; *Greedy algorithms for general systems*; J. Approx. Theory **107**, 293-314 (2000)
- [G] С. Гогян; *О жадном алгоритме в $L^1(0, 1)$ по подсистемам системы Хаара и о ω -квази-гриды базисах*; Мат. заметки, **88**, (1), 18-29, (2010)
- [KS] Б.С. Кашин, А.А. Саакян; *Ортогональные ряды*, 2-е изд., Наука (1999)

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] А. Алексанян; *О жадном алгоритме по системе Хаара*; Известия НАН Армении, Математика, **45** (3), 11-24 (2010)
- [2] H. Aleksanyan; *On Greedy Algorithm by Renormed Franklin System*; East Journal on Approximations, **16** (3), 273-296 (2010)
- [3] А. Алексанян; *Нелинейная аппроксимация по перенормированной тригонометрической системе*; Известия НАН Армении, Математика, **47** (2) 3-18 (2012)
- [4] H. Aleksanyan; *Weighted greedy algorithm in $L_p(0, 1)$ and $C(0, 1)$ with respect to Franklin and trigonometric systems*; 10-17 September, 2011, Tsaghkadzor, Armenia, International Conference *Harmonic Analysis and Approximations*, V, pp.11-12
- [5] H. Aleksanyan; *On divergence of greedy algorithm with regard to the Haar system*; Anniversary Scientific Session Dedicated to the 90th Anniversary of YSU, pp.188-196, 2010

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Գրիդի (ազահ) ալգորիթմը, որպես մոփարկման մեթոդ ըստ փարբեր համակարգերի վաղուց կիրառվել է, սակայն այդ ուղղությամբ համակարգված հեփազոփությունները ոչ գծային մոփալոորությունների փեսության շրջանակներում սկիզբ առան 90-ական թվականների վերջին՝ Ս. Կոնյազինի, Վ. Տեմլյակովի, Պ. Վոյաաշչիկի և այլ մաթեմափիկոսների փարբեր աշխափանքներում: Գրիդի բազիսի գաղափարը, որի համար գրիդի ալգորիթմը իրականացնում է համարյա լավագույն m -անդամանի մոփարկումը փարածության բոլոր էլեմենտների և բոլոր $m = 1, 2, \dots$ թվերի համար, ներմուծվել է Ս. Կոնյազինի և Վ. Տեմլյակովի կողմից, որոնք և սփացել են այդ բազիսների նկարագրությունը կամայական բանալիյան փարածություններում: Նեփազայում մփցվեց նաև քվազի-գրիդի բազիսի գաղափարը, որն էլ իր հերթին բնութագրվեց Պ. Վոյաաշչիկի կողմից 2000 թ.-ին:

Նեփազայում գրիդի ալգորիթմը կոնկրեփ համակարգերի և փարբեր փիլի գուզամիփությունների համար դիփարկվել է բազմաթիվ հեղինակների կողմից: Պարզվեց, որ որոշ դասական համակարգեր, մասնալորալես եռանկյունաչափական համակարգը, լավը չեն գրիդի ալգորիթմի փեսակեփից: Սակայն ինչպես փարզ դարձալ Տ. Տաոյի 1997թ.-ի մի արդյունքից, գրիդի ալգորիթմի գուզամիփությունը էալես կալված է համակարգի նորմալորումից, որն էլ իր հերթին համարժեք է որոշակի կշռային գրիդի ալգորիթմի դիփարկմանը: Այլ արդյունքներ, որոնք բացահայաեցին համակարգի նորմալորման և գրիդի ալգորիթմի ըստ նոր՝ վերանորմալորած համակարգի գուզամիփության կալը, սփացվեցին Ս. Կոնյազինի և Վ. Տեմլյակովի 2003 թ., Թ. Կորների 2006 թ., և Ս. Գոզյանի 2010 թ. կողմից:

2009թ.-ից հեղինակը սկսեց հեփազոփել գրիդի ալգորիթմի վարքը ըստ վերանորմալորած Նաարի, Ֆրանկլինի և եռանկյունաչափական համակարգերի: Դրվեց խնդիր, լիովին նկարագրել նշված համակարգերի մոնոփոն նորմալորման և գրիդի ալգորիթմի գուզամիփության միջև կալը:

Աշխափանքում օգաազործվում են օրթոգոնալ շարքերի, Ֆուրիեի անալիզի, ինչպես նաև մոփալոորության փեսության մեթոդները:

Ափենալիոսությունում սփացված հիմնական արդյունքներն են՝

1. Գփնվել է փայման, որին բալարարող բոլոր կշռային գրիդի ալգորիթմները ըստ Նաարի համակարգի հալասարաչափ գուզամեփ են բոլոր անընդհափ Ֆունկցիաների, և համարյա ամենուրեք գուզամեփ են բոլոր ինփեգրելի Ֆունկցիաների համար: Ավելին, փվյալ փայմանին չբալարարող կշռային գրիդի ալգորիթմների համար ապացուցվել է, որ

գոյություն ունի անընդհար ֆունկցիա, որի գրիդի ալգորիթմը համարյա ամենուրեք տարամիպում է անվերջության:

2. Վերը ձևակերպած արդյունքները ստացվել են Ֆրանկլինի դասական համակարգի համար:
3. Ընդհանուր բանախյան տարածություններում և նորմավորած բազիսների դեպքում նկարագրվել են բոլոր կշռային գրիդի ալգորիթմները, որոնք զուգամիպում են տարածության ցանկացած էլեմենտի համար այդ տարածության նորմով:
4. Եռանկյունաչափական համակարգի համար գրնվել է պայման համակարգի նորմավորման համար, որի տեղի ունենալու դեպքում գրիդի ալգորիթմը ըստ վերանորմավորած եռանկյունաչափական համակարգի զուգամետ է ցանկացած $f \in L^p$, $1 < p < \infty$ ֆունկցիայի համար L^p տարածության նորմով, ինչպես նաև համարյա ամենուրեք: Նորմավորման նշված պայմանի տեղի չունենալու դեպքում ապացուցվել է, որ գոյություն ունի ֆունկցիա պարկանող բոլոր L^p , $1 \leq p < 2$ տարածություններին, և անընդհար ֆունկցիա, որոնց գրիդի ալգորիթմները ըստ վերանորմավորած համակարգի տարամետ են համապատասխանաբար ըստ չափի և L^p տարածության նորմով ցանկացած $2 < p < \infty$ -ի համար:
5. Եռանկյունաչափական համակարգի դեպքում ապացուցվել է, որ ցանկացած կշռային գրիդի ալգորիթմի համար գոյություն ունեն ֆունկցիա L^1 -ից և անընդհար ֆունկցիա, որոնց գրիդի ալգորիթմները տարամետ են համապատասխանաբար համարյա ամենուրեք և հավասարաչափ նորմով:

SUMMARY

Greedy algorithms as a method of approximation by various systems had been used for a long time, but its systematic study in the framework of nonlinear approximations began in late 90-s in various papers by S. Konyagin, V. Temlyakov, P. Wojtaszek and other mathematicians. The concept of greedy basis, for which the greedy algorithm realizes almost the best m -term approximation for any element of the space and all $m = 1, 2, \dots$, was introduced and characterized in arbitrary Banach space by S. Konyagin and V. Temlyakov. Then the concept of quasi-greedy basis was introduced, which was described by P. Wojtaszek in 2000.

Later the greedy algorithm by specific systems and modes of convergence was studied by many mathematicians. It was observed that some classical systems, e.g. the trigonometric system, behave badly in the sense of greedy algorithms. But as it became clear from one result by work of T. Tao from 1997, convergence of the greedy algorithm on a great extent depends on normalization of the system, which is equivalent to considering a weighted greedy algorithm. Other results, shedding a light on the interplay between system's normalization and convergence of the greedy algorithm were obtained by S. Konyagin and V. Temlyakov 2003, T. Korner 2006, and S. Gogyan 2010.

From 2009 the author started to study the greedy algorithm by renormed Haar, Franklin and trigonometric systems. The problem was posed to describe the interplay between monotonic renormalizations of these systems and convergence of the greedy algorithm.

Methods of orthogonal series, Fourier analysis, and approximation theory are used in the thesis.

The main results obtained in the thesis are:

1. The condition is obtained so that the weighted greedy algorithms with respect to Haar system, which satisfy the condition, converge uniformly for all continuous functions and converge almost everywhere for all integrable functions. Moreover, for weighted greedy algorithms which do not satisfy the condition it is proved that there exists a continuous function for which the greedy algorithm diverges unboundedly almost everywhere.
2. The results formulated above were obtained for classical Franklin system.

3. In general Banach spaces and normed bases the all weighted greedy algorithms were described which converge by norm for all elements of the space.
4. For the trigonometric system a condition was found on system's normalization so that once it is fulfilled, the greedy algorithm of any function $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, by renormalized system converges by the norm of L^p , as well as almost everywhere. Moreover, if the condition is not satisfied it is proved that there exists a function belonging to all L^p , $1 \leq p < 2$, spaces, and a continuous function, for which the greedy algorithm diverges respectively by measure and in the norm of L^p for any $2 < p < \infty$.
5. In case of trigonometric system for any weighted greedy algorithm it is proved that there exists a function from L^1 and a continuous function, for which the algorithm diverges respectively almost everywhere and in the uniform norm.