ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դարյուշ Քալվանդ

ՆԵՅՄԱՆԻ ԽՆԴԻՐԸ ՉՈՐՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ-ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա.01.02 – "Դիֆերենցիալ հավասարումներ" մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2012

YEREVAN STATE UNIVERSITY

Daryush Kalvand

NEUMANN PROBLEM FOR DEGENERATE DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS OF FOURTH ORDER

SYNOPSIS

of dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences specializing in A.01.02 – "Differential equations"

Yerevan 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի խորհրդի կողմից:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու Լ.Պ. Տեփոյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր Ա.Հ. Հովհաննիսյան
	ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու Ա.Հ. Քամալյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Խ. Աբովյանի անվան Հայկական պետական մանկավարժական համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2012թ. նոյեմբեր 27-ին ժ. 15^{00}-ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքվել է 2012թ. հոկտեմբերի 26-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար Տ.Ն. Հարությունյան

Dissertation topic was approved at a meeting of academic council of the faculty of Mathematics and Mechanics of the Yerevan State University.

Supervisor:	candidate of physical and mathematical sciences L.P. Tepoyan
Official opponents:	doctor of physical and mathematical sciences A.H. Hovhannisyan
	candidate of physical and mathematical sciences A.H. Kamalyan
Leading organization:	Armenian State Pedagogical University named after Khachatur Abovian

Defense of the thesis will be held at the meeting of the a specialized council 050 of HAC of Armenia at Yerevan State University on November 27, 2012 at 15^{00} (0025, Yerevan, A.Manoogian str. 1).

The thesis can be found in the library of the YSU.

Synopsis was sent on October 26, 2012.

Scientific secretary of specialized council T.N. Harutyunyan

General characteristics of the work

Relevance of the theme.

The study of differential equations whose coefficients are unbounded operators in Hilbert or Banach spaces, suitable not only because they contain many partial differential equations, but also because we are able to look from a unified point of view of both on the ordinary differential operators and the partial differential operators.

In the dissertation we consider the Neumann problem for degenerate differential-operator equations of fourth order

$$Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au = f, \tag{1}$$

where $t \in [0, b], 0 \leq \alpha \leq 4$, $f \in L_2((0, b), \mathcal{H})$, the operator A has complete system of eigenfunctions $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, which form a Riesz basis in $\mathcal{H}$, i.e. any $x \in \mathcal{H}$ has the representation

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)\varphi_k$$

and there are some positive constants c_1 and c_2 such that

$$c_1 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \|x\|^2 \leq c_2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2.$$

The most important class of operator equations (1) are degenerate elliptic fourth-order equations. Degenerate elliptic equations encountered in solving of many important problems of applied character, such as the theory of small deformations surfaces of rotation, the membrane theory of shells, the bending of plates of variable thickness with a sharp edge (see, for instance G. Jaiani [8]). Particularly, important are these equations in the gas dynamics. Start of numerous studies put the work of F. Tricomi [27], devoted to the second-order equation with non-characteristic degeneration. Fundamental role in the theory of degenerate elliptic equations was played the article of M.V. Keldysh [9], where was first studied the first boundary value problem for the second-order elliptic equation with characteristic degeneration (see also the article of G. Jaiani [7]). The next stage was the work of Bicadze [1], where was first formulated a weight problem. By G. Fichera [5] was created a unified theory of second-order equations with nonnegative characteristic form. S.G. Mikhlin [15], L.D. Kudryavtsev [11], [12] and others have investigated degenerate elliptic equations (both second and higher order) by variational methods. Fourth order elliptic equations degenerating on the boundary of domain, for which we can not apply variational methods, were first considered by V.K. Zakharov [30], [31]. He extended the results of M.I. Vishik [28] on the fourth-order equation on the plane, provided that the coefficient of the third-order derivative with respect to the y fulfill to some condition near the line of degeneracy $y = 0$. It turned out that for the fourth-order degenerate equation also the “lower terms” have influence for the statement of the boundary value problem. A similar fact has been studied by other methods by Narchaev [17], [18]. E.V. Makhover in [13], [14] obtained the conditions for the discreteness and non-discreteness of the spectrum for the degenerate elliptic operator of fourth order (see also the book written by K. Mynbayev, M. Otelbaev [16]). Degenerate differential equations in abstract spaces have been studied by V.P. Glushko and S.G. Krein in [6], by A.A. Dezin [2], by V.V. Kornienko [10] and other authors.

This work is a direct continuation of [2], [22], [25] and is based on the study of one-dimensional differential equation (1), i.e. in the case where the operator A is the multiplication operator the number $a \in \mathbb{C}$. Note that this approach were applied in the book of A.A. Dezin [3], by V.K. Romanko [20], etc.. This approach makes it possible complete to study a number of phenomena, which were not fully explored. At the same time it is easy to trace the connection between ordinary differential equations and operator equations.

It is worth to note that the operator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ in general is an unbounded operator.

Note that the operator equation (1) contains, in addition to elliptic equations, wide class of degenerate partial differential equations both classical and nonclassical types.

We are interested in the nature of the boundary conditions with respect to t (at $t = 0, b$) being connected to the equation (1) and ensuring a unique solution for any right-hand sides $f \in L_2((0,b), \mathcal{H})$.

The aim of the thesis:

- to obtain estimates for the elements of the weighted Sobolev space $W^2_\alpha(0,b)$ near the point $t = 0$
- to prove that the one-dimensional operator $Bu \equiv (t^\alpha u'')'' + u$ is positive and self-adjoint as well as that the inverse operator $B^{-1} : L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ is bounded for $0 \leq \alpha \leq 4$ and is for $0 \leq \alpha < 4$ compact
- to give a description of the domain of definition of the operator $Lu \equiv (t^\alpha u'')'' + au$ depending on the order of degeneration α
- to give sufficient conditions for the uniquely solvability of the Neumann problem for the differential-operator equation
- to give the description of the spectrum of the operator L when the operator A is self-adjoint

Scientific innovation. All results are new.

Practical and theoretical value. The results of the work have theoretical character. The results of the thesis can be used in the study of the Neumann problem for the degenerate elliptic equations.

Approbation of the results. The obtained results were presented

- at the research seminar of the chair of Differential equations of the Yerevan State University

- at the International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, 11-13 July, Iran, 2012
- at the 43th Annual Iranian Mathematics Conference, University of Tabriz, 27-30 August, Iran, 2012.

The main results of the thesis

The thesis consists of an introduction, three chapters and a bibliography.

Chapter 1 consists of two sections and is devoted to the one-dimensional case.

In Section 1.1 we define the weighted Sobolev space $\dot{W}^2_\alpha(0,b)$, $\alpha \geq 0$ as the completion of $\dot{C}^2[0,b]$ in the norm

$$\|u\|^2_{\dot{W}^2_\alpha(0,b)} = \int_0^b t^\alpha \, |u''(t)|^2 \, dt, \tag{2}$$

where $\dot{C}^2[0,b]$ is the set of twice continuously differentiable functions $u(t)$ defined on $[0,b]$ and satisfying the conditions

$$u(0) = u'(0) = u(b) = u'(b) = 0. \tag{3}$$

Proposition 1.1. *For every $u \in \dot{W}^2_\alpha(0,b)$ close to $t=0$ we have following estimates*

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 &\leq C_1 t^{3-\alpha} \|u\|^2_{\dot{W}^2_\alpha(0,b)}, \text{ for } \alpha \neq 1,3, \\ |u'(t)|^2 &\leq C_2 t^{1-\alpha} \|u\|^2_{\dot{W}^2_\alpha(0,b)}, \text{ for } \alpha \neq 1. \end{aligned} \tag{4}$$

For $\alpha = 3$ the factor $t^{3-\alpha}$ should be replaced by $|\ln t|$; for $\alpha = 1$ the factor $t^{1-\alpha}$ by $|\ln t|$ and the factor $t^{3-\alpha}$ by $t^2|\ln t|$.

Proposition 1.2. *For every $0 \leq \alpha \leq 4$ we have a continuous embedding*

$$\dot{W}^2_\alpha(0,b) \hookrightarrow L_2(0,b), \tag{5}$$

which for $0 \leq \alpha < 4$ is compact.

Let $\psi_h(t) \equiv 0$ for $0 \leq t \leq h$ and

$$\psi_h(t) = \begin{cases} h^{-3}(t-h)^2(5h-2t), & h < t \leq 2h, \\ 1, & 2h < t \leq b. \end{cases}$$

Define $u_h(t) = u(t)\psi_h(t)$. Clearly, the function $u_h(t)$ belongs to the space $\dot{W}^2_\alpha(0,b)$.

Proposition 1.3. *For every function $u \in \dot{W}^2_\alpha(0,b)$ and $\alpha \neq 1, \alpha \neq 3$ the norm $\|u_h - u\|_{\dot{W}^2_\alpha(0,b)}$ tends to zero by $h \to 0$.*

Denote by $W^2_\alpha(0,b)$ the completion of $C^2[0,b]$ in the norm

$$\|u\|^2_{W^2_\alpha(0,b)} = \int_0^b \left(t^\alpha |u''(t)|^2 + |u(t)|^2\right) dt. \tag{6}$$

Proposition 1.4 *For every $0 \leq \alpha \leq 4$ we have the embedding*

$$W^2_\alpha(0,b) \subset L_2(0,b). \tag{7}$$

Proposition 1.5. *For every $u \in W^2_\alpha(0,b)$ we have*

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 &\leq (C_1 + C_2 t^{3-\alpha})\|u\|^2_{W^2_\alpha(0,b)}, \text{ for } \alpha \neq 1, 3, \\ |u'(t)|^2 &\leq (C_3 + C_4 t^{1-\alpha})\|u\|^2_{W^2_\alpha(0,b)}, \text{ for } \alpha \neq 1. \end{aligned} \tag{8}$$

For $\alpha = 3$ the factor $t^{3-\alpha}$ should be replaced by $|\ln t|$; for $\alpha = 1$ the factor $t^{1-\alpha}$ by $|\ln t|$ and the factor $t^{3-\alpha}$ by $t^2|\ln t|$.

Proposition 1.6. *For every $0 \leq \alpha \leq 4$ we have a continuous embedding*

$$W^2_\alpha(0,b) \hookrightarrow L_2(0,b), \tag{9}$$

which for $0 \leq \alpha < 4$ is compact (see [22]).

In Section 1.2 we consider the Neumann problem for the one-dimensional equation (1) in

$$Lu \equiv (t^\alpha u'')'' + au = f, \tag{10}$$

where $t \in (0,b)$, $0 \leq \alpha \leq 4$, $f \in L_2(0,b)$ and $a = const$.

Definition 1.7. *The function $u \in W^2_\alpha(0,b)$ is called a generalized solution of the Neumann problem for the equation (10) if for every $v \in W^2_\alpha(0,b)$ we have (see [21])*

$$(t^\alpha u'', v'') + a(u,v) = (f,v). \tag{11}$$

First we consider the following particular case of the equation (10) for $a = 1$

$$Bu \equiv (t^\alpha u'')'' + u = f, \quad f \in L_2(0,b). \tag{12}$$

Proposition 1.8. *The generalized solution of the Neumann problem for the equation (12) in the space $W^2_\alpha(0)$ exists and is unique for every $f \in L_2(0,b)$.*

Definition 1.9. *We say that the function $u \in W^2_\alpha(0,b)$ belongs to the domain of definition $D(B)$ of the operator B, if there exists a function $f \in L_2(0,b)$, such that for every $v \in W^2_\alpha(0,b)$ and $a = 1$ holds the equality (11). In this case we write $Bu = f$.*

As a result we get an operator $B : L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ in $L_2(0,b)$ with dense domain of definition $D(B) \subset W^2_\alpha(0,b)$.

Theorem 1.10. *The operator $B : L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ is for $0 \le \alpha \le 4$ positive and self-adjoint. The inverse operator $B^{-1} : L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ exists and is bounded for $0 \le \alpha \le 4$. Moreover, the inverse operator is for $0 \le \alpha < 4$ is compact.*

Consequently, the operator $B : L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ for $0 \le \alpha < 4$ has a discrete spectrum, and its eigenfunction system is complete in $L_2(0,b)$. Observe that for $\alpha = 4$ the spectrum of the operator B is non-discrete.

Consider special case of the equation (10) for $a = 0$

$$(t^\alpha u'')'' = f. \tag{13}$$

For the solvability of the equation (13) we get the following result.

Proposition 1.11. *The generalized solution of the Neumann problem for the equation* (13) *exists if and only if $(f, P_1(t)) = 0$ for any polynomial $P_1(t)$ of order* 1.

Observe also that the generalized solution of the Neumann problem for the equation (13) is unique up to an arbitrary additive polynomial of order 1.

Theorem 1.12. *The domain of definition $D(L)$ of the operator L consists of the functions $u(t)$ for which $u(0)$ is finite when $0 \le \alpha < \frac{7}{2}$ and $u'(0)$ is finite for $0 \le \alpha < 2$. The values $u(0)$ and $u'(0)$ can not be specified arbitrarily, but are determined by the right-hand side of the equation*(10).

In Chapter 2, which consists from two sections, we concentrate on operator equations.

In Section 2.1 we investigate so-called Π-operators. Let

$$L(-iD)u \equiv \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha u$$

be the differential operation with constant coefficients defined on the set $\mathcal{P}^\infty$ of smooth functions in $V = (0, 2\pi)^n$ that are periodic in each variable, where $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ is a multi-index and

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad D_k \equiv \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Let $s \in \mathbb{Z}^n$. To every differential operation $L(-iD)$ we can associate a polynomial $A(s)$ with constant coefficients such that

$$A(-iD)e^{is\cdot x} = A(s)e^{is\cdot x}, \quad s \cdot x = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n.$$

We define the corresponding operator $A : L_2(V) \to L_2(V)$ to be the closure in $L_2(V)$ of the differential operation $A(-iD)$ first defined on $\mathcal{P}^\infty$.

Let $\mathcal{S} = \mathbb{Z}^n$. The set of exponentials $\{e^{is\cdot x}, s \in \mathcal{S}\}$ forms an orthogonal basis in $L_2(V)$. Observe that $e^{is\cdot x}, s \in \mathcal{S}$ are the eigenfunctions for each Π-operator A

corresponding to the eigenvalues $A(s), s \in \mathcal{S}$. Denote the set of eigenvalues by $\{A(s), s \in \mathcal{S}\} \stackrel{def}{=} A(\mathcal{S})$.

Proposition 2.1. *The spectrum of each* Π*-operator* $A : L_2(V) \to L_2(V)$ *is the closure* $\overline{A(\mathcal{S})}$ *in the complex plane* $\mathbb{C}$ *of the set* $A(\mathcal{S})$*, which forms the point spectrum* $\sigma_p(A)$*. The set* $\sigma_c(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ *is the continuous spectrum of the operator* A*.*

In Section 2.2 we consider the operator equation (1).

Since the system of the eigenfunctions $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ forms a Riesz basis in H we can write

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k. \tag{14}$$

Therefore, the operator equation (1) can be decomposed into an infinite chain of degenerate ordinary differential equations (see [2], [3])

$$L_k u_k \equiv (t^{\alpha} u_k'')'' + a_k u_k = f_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

where $f_k \in L_2(0, b), k \in \mathbb{N}$. Let $D(L_k), k \in \mathbb{N}$ denote the domains of definition for the one-dimensional operators $L_k, k \in \mathbb{N}$. First we define the operator L on the finite sums

$$u^m = \sum u_k(t)\varphi_k, \quad u_k \in D(L_k), \quad L_k u_k = f_k, \tag{16}$$

by the equality

$$Lu^m \equiv \sum L_k u_k(t)\varphi_k = \sum f_k(t)\varphi_k \equiv f^m.$$

Definition 2.2. *The function* $u \in L_2((0, b), \mathcal{H})$ *is called the generalized solution of the equation* (1)*, if there is some sequence of finite sums* (16)*, such that are valid the equalities*

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u^m\|_{L_2((0,b),\mathcal{H})} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \|f - f^m\|_{L_2((0,b),\mathcal{H})} = 0.$$

Theorem 2.3. *The operator equation* (1) *is uniquely solvable for every* $f \in L_2((0, b), \mathcal{H})$ *if and only if the equations* (15) *are uniquely solvable for every* $f_k \in L_2(0, b)$ *and uniformly with respect to* $k \in \mathbb{N}$ *we have*

$$\|u_k\|_{L_2(0,b)} \leq c\|f_k\|_{L_2(0,b)}. \tag{17}$$

It follows from the inequalities (17) that for $0 \leq \alpha \leq 4$ the inverse operator L^{-1} is bounded. In contrast to the one-dimensional case (see Theorem 1.10) the operator L^{-1} for $0 \leq \alpha < 4$ will be compact only in the case, when the space $\mathcal{H}$ is finite-dimensional.

Theorem 2.4. *Let holds the conditions*

$$\rho(1 - a_k; \sigma(B)) > \varepsilon, \; k \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

where $\varepsilon > 0$, ρ is the distance in the complex plane $\mathbb{C}$. Then the generalized solution of the equation (1) *exists and is unique.*

Note that Theorem 2.4 describes the resolvent set $\rho(L)$ of the operator L and thus also the spectrum.

When the operator A is self-adjoint we can give the following description of the spectrum of the operator L.

Theorem 2.5. *The spectrum $\sigma(L)$ of the operator L coincides with the closure of the direct sum $\sigma(B)$ and $\sigma(A - I_{\mathcal{H}})$, i.e.*

$$\sigma(L) = \overline{\sigma(B) + \sigma(A - I_{\mathcal{H}})} \equiv \overline{\{\lambda_1 + \lambda_2 - 1 : \lambda_1 \in \sigma(B),\ \lambda_2 \in \sigma(A)\}}.$$

In Chapter 3 we investigate numerical solution of the one-dimensional equation (10) by quintic and non-polynomial as well as cubic spline functions. Let $\triangle = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ be a partition of the interval $[0, b]$ and $S_\triangle \in C^{k-1}[0, b]$ is a piecewise polynomial function with the continuous $(k-1)$-th derivative. We approximate the solution of the equation (10) by $S_\triangle(t)$ and estimate the norm of the difference $f - S_\triangle$. In order to do this we represent the difference in the form

$$\|f - S_\triangle\|^2_{L_2(0,b)} = \int_a^b |f''(t) - S''_\triangle(t)|^2 dt =$$

$$= \|f\|^2_{L_2(0,b)} - 2\int_a^b \big(f''(t) - S''_\triangle(t)\big) S''_\triangle(t)\, dt - \|S_\triangle\|^2_{L_2(0,b)}.$$

A quintic spline functions $S_i(t), i = 1, \ldots, N$ interpolating a function $u(t)$ on each subinterval $[t_i, t_{i+1}]$ is a polynomial of, at most, degree five. The spline functions $S_i(t)$ for $t \in [t_i, t_{i+1}]$ have the form

$$S_i(t) = \sum_{k=0}^{5} a(i, k)(t - t_i)^k,$$

where the coefficients $a(i, k)$, $\quad k = 0, 1, \ldots, 5$ are constants to be determined. We consider also the rate of the convergence.

References

1. A.V. Bicadze, *Equations of mixed type.* M.: Izd. AN SSSR, 1959.

2. A.A. Dezin, *Degenerate operator equations*, Math. USSR Sbornik, vol. 43(3), 1982, pp. 287-298.

3. A.A. Dezin, *Partial Differential Equations* (An Introduction to a General Theory of Linear Boundary Value Problems), Springer, 1987.

4. P.A. Djarov, *Compactness of embeddings in some spaces with power weight*, Izvestya VUZ-ov, matematika, vol. 8, 1988, pp. 82-85 (Russian).

5. G. Fichera, *On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order*, Boundary Problems of Differential Equations, The Univ. of Wisconsin Press, 1960, pp. 97-120.

6. V.P. Glushko, S.G. Krein, *On degenerate linear differential equations in Banach space*, DAN SSSR, 1968, vol. 181, no. 4, pp. 784-787.

7. G. Jaiani, *On a generalization of the Keldysh theorem*, Georgian Mathematical Journal, vol. 2, no. 3, 1995, pp. 291-297.

8. G. Jaiani, *Theory of cusped Euler-Bernoulli beams and Kirchoff-Love plates*, Lecture Notes of TICMI, vol. 3, 2002.

9. M.V. Keldysh, *On certain cases of degeneration of equations of elliptic type on the boundary of a domain*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 77, 1951, pp. 181-183 (Russian).

10. V.V. Kornienko, *On the spectrum of degenerate operator equations*, Mathematical Notes, vol. 68(5), 2000, pp. 576-587.

11. L.D. Kudryavtzev, *On a variational method of determination of generalized solution of differential equations in the function spaces with power weight*, Differ. Urav., vol. 19(10), 1983, pp. 1723-1740 (Russian).

12. L.D. Kudryavtzev, *On equivalent norms in the weight spaces*, Trudy Mat. Inst. AN SSSR, vol. 170, 1984, pp. 161-190 (Russian).

13. E.V. Makhover, *Bending of a plate of variable thickness with a cusped edge.* Scientific Notes of Leningrad State Ped. Institute, vol. 17, no. 2, 1957, pp. 28-39 (Russian).

14. E.V. Makhover, *On the spectrum of the fundamental frequency*, Scientific Notes of Leningrad A.I. Hertzen State Ped. Institute, vol. 197, 1958, pp. 113-118 (Russian).

15. S.G. Mikhlin, *Degenerate elliptic equations*, Vestnik LGU, vol. 3, no. 8, 1954, pp. 19-48 (Russian).

16. K. Mynbayev, M. Otelbaev, *Weighted Functional Spaces and Spectrum of Differential Operator*, Nauka, 1988.

17. A. Narchaev, *First boundary value problem for the elliptic equations degenerating on the boundary of the domain*, Dokl. AN SSSR, 1964, vol. 156, no. 1, pp. 28-31.

18. A. Narchaev, *On degenerate elliptic equation*, Izvestia AN Turk. SSR, ser. phyz.-techn., chem. and geol. sciences, 1966, no. 2, pp. 3-7.

19. E. Poulsen, *Boundary values in function spaces*, Math. Scand., vol. 10, 1962, pp. 45-52.

20. V.K. Romanko, *On the theory of the operators of the form* $\frac{d^m}{dt^m} - A$, Differential Equations, 1967, vol. 3, no. 11, pp. 1957-1970 (Russian).

21. R.E. Showalter, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Monograph 01, 1994.

22. L. Tepoyan, *Degenerate fourth-order diffeential-operator equations*, Differ. Urav., vol. 23(8), 1987, pp. 1366-1376, (Russian); English Transl. in Amer. Math. Soc., no. 8, 1988.

23. L. Tepoyan, *On a degenerate differential-operator equation of higher order*, Izvestiya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii. Matematika, vol. 34(5), 1999, pp. 48-56.

24. L. Tepoyan, *On the spectrum of a degenerate operator*, Izvestiya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii. Matematika, vol. 38, no. 5, 2003, pp. 53-57.

25. L. Tepoyan, *The Neumann problem for a degenerate differential-operator equation*, Bulletin of TICMI (Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics), vol. 14, 2010, pp. 1-9.

26. L. Tepoyan, *Degenerate differential-operator equations of higher order and arbitrary weight*, Asian-European Journal of Mathematics, vol. 05, no. 02, 2012, pp. 1250030-1 - 1250030-8.

27. F. Tricomi, *On linear partial differential equations of second order equations of mixed type*, M., Gostexizdat, 1947 (Russian).

28. M.I. Višik, *Boundary-value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a region*, Mat. Sb., 35(77), 1954, pp. 513-568; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl., vol. 35, no. 2, 1964.

29. J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, Teil 1, Grundlagen, Teubner Verlag, Stuttgart, 2000.

30. V.K. Zakharov, *Embedding theorems for spaces with a metric, degenerate in a straightline part of the boundary*, Dokl. AN SSSR, vol. 114, no. 3, 1957, pp. 468-471.

31. V.K. Zakharov, *The first boundary value problem for elliptic equations fourth order degenerate on the boundary*, Dokl. AN SSSR, vol. 114, no. 4, 1957, pp. 694-697.

List of publications of the author

1. Daryoush Kalvand, L. Tepoyan, *Neumann problem for the fourth order degenerate ordinary differential equation*, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, no. 1, 2010, pp. 22-26.

2. Daryoush Kalvand, *Neumann problem for the degenerate differential-operator equations of the fourth order*, Vestnik RAU, Physical-Mathematical and Natural Sciences, no. 2, 2010, pp. 34-41 (Russian).

3. Daryoush Kalvand, L. Tepoyan, J. Rashidinia, *Existence and uniqueness of the fourth order boundary value problem and Quintic Spline solution*, Proceeding of 9th Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems, 11-13 July, Iran, 2012, pp. 137-140.

4. Daryush Kalvand, Esmaeil Yousefi, L. Tepoyan, *Numerical solution of fourth order ordinary differential equation by Quintic Spline in the Neumann problem*, The 43th Annual Iranian Mathematics Conference, University of Tabriz, 27-30 August, Iran, 2012.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

ԴԱՐՅՈՒՇ ՔԱԼՎԱՆԴ

Նեյմանի խնդիրը չորրորդ կարգի վերասերվող դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումների համար

Ատենախոսությունը նվիրված է Նեյմանի խնդրի ուսումնասիրությանը չորրորդ կարգի վերասերվող դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումների մի դասի համար: Այդ դասը իր մեջ ներառում է ինչպես դասական, այնպես էլ ոչ դասական մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումներ: Միաժամանակ հնարավորություն է ստեղծվում նայել սովորական և մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումներին միասնական տեսանկյունից:

Ներկայացվող ատենախոսության մեջ դիտարկվել է Նեյմանի խնդիրը չորրորդ կարգի վերասերվող դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարման համար

$$Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au = f(t),\ t \in (0,b), \alpha \geq 0, f \in L_2((0,b),\mathcal{H}), \tag{1}$$

որտեղ $A:\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ գծային օպերատորը (ընդհանրապես ասած՝ անսահմանափակ) գործում է որևէ $\mathcal{H}$ սեպարաբել հիլբերտյան տարածության մեջ: Ենթադրվում է, որ $\mathcal{H}$-ում գոյություն ունի Րիսի բազիս՝ $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, այնպիսին որ $\varphi_k, k \in \mathbb{N}$ ֆունկցիաները հանդիսանում են A օպերատորի համար սեփական ֆունկցիաներ $A\varphi_k = a_k\varphi_k, k \in \mathbb{N}$:

Ատենախոսության մեջ նախ դիտարկվում է միաչափ դեպքը, այսինքն երբ A օպերատորը a թվով բազմապատկման օպերատոր է՝ $Au = au,\ a \in \mathbb{C}$: Այնուհետև օգտվելով

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, \qquad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k$$

ներկայացումներից (1) դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումը բերվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ անվերջ շղթային

$$L_k u_k \equiv (t^{\alpha}u_k'')'' + a_k u_k = f_k(t), t \in (0,b), \alpha \geq 0, f_k \in L_2(0,b), k \in \mathbb{N}: \tag{2}$$

Սկզբում սահմանվում է (2) տեսքի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար Նեյմանի խնդրի ընդհանրացված լուծումը Սոբոլևի $W_{\alpha}^{2}(0,b)$ կշռային տարածության մեջ: Այնուհետև սահմանվում է (1) դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարման համար Նեյմանի ընդհանրացված խնդրի լուծումը:

Ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- Սոբոլևի կշռային $W_\alpha^2(0,b)$ տարածության տարրերի և նրանց ածանցյալների համար ստացվել են գնահատականներ $t=0$ կետի շրջակայքում, ինչպես նաև ապացուցվել են ներդրման և կոմպակտության թեորեմներ:

- Ցույց է տրվել, որ միաչափ $Bu \equiv (t^\alpha u'')'' + u$ օպերատորը $L_2(0,b)$ տարածության մեջ դրական է և ինքնահամալուծ, երբ $0 \le \alpha \le 4$, իսկ հակադարձ $B^{-1}: L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ օպերատորը գոյություն ունի ու անընդհատ է, երբ $0 \le \alpha \le 4$: $0 \le \alpha < 4$ դեպքում ապացուցվել է հակադարձ օպերատորի կոմպակտությունը:

- Տրվել է միաչափ $Lu \equiv (t^\alpha u'')'' + au$ օպերատորի որոշման տիրույթի նկարագիրը կախված վերասերման α ցուցիչից:

- Ստացվել են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում Նեյմանի խնդրի ընդհանրացված լուծումը դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարման համար գոյություն ունի և միակն է կամայական $f \in L_2\big((0,b),\mathcal{H}\big)$ համար:

- A օպերատորի ինքնահամալուծ լինելու դեպքում ցույց է տրվել, որ

$$L: L_2\big((0,b),\mathcal{H}\big) \to L_2\big((0,b),\mathcal{H}\big)$$

օպերատորի սպեկտրը համընկնում է $A - I_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ և $B: L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ օպերատորների սպեկտրների $\sigma(L) = \overline{\sigma(A - I_{\mathcal{H}}) + \sigma(B)}$ ուղիղ գումարի փակման հետ, որտեղ $I_{\mathcal{H}}$ -ը միավոր օպերատորն է $\mathcal{H}$ տարածության մեջ:

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ДАРЮШ КАЛВАНД

Задача Неймана для вырождающихся дифференциально-операторных уравнений четвертого порядка

Диссертация посвящена к исследованию смешанной задачи для одного класса вырождающихся дифференциально-операторных уравнений четвертого порядка. Это довольно широкий класс, который содержит как классические, так и неклассические дифференциальные уравнения в частных производных.

В представленной диссертации рассматривается Задача Неймана для вырождающихся дифференциально-операторных уравнений четвертого порядка

$$Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au = f(t),\;\; t \in (0,b),\;\;\; \alpha \geq 0, f \in L_2((0,b),\mathcal{H}),\;\; (1)$$

где $A:\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является линейным оператором (вообще говоря неограниченный), действующим в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Предполагается, что в $\mathcal{H}$ существует базис Рисса $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, такой что функции $\varphi_k, k \in \mathbb{N}$ являются собственными функциями $A\varphi_k = a_k\varphi_k, k \in \mathbb{N}$ для оператора A.

В диссертационной работе сперва изучается одномерный случай, т.е. случай, когда A является оператором умножения $Au = au,$ $a \in \mathbb{C}$ на число a. Затем используя представления

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, \qquad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k$$

дифференциально-операторное уравнение (1) приводится к бесконечной цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_k u_k \equiv (t^{\alpha}u_k'')'' + a_k u_k = f_k(t),\; t \in (0,b),\; \alpha \geq 0, f_k \in L_2(0,b),\; k \in \mathbb{N}.\; (2)$$

Сперва для обыкновенного дифференциального уравнения вида (2) определяется обобщенное решение задачи Неймана в весовом пространстве Соболева $W_{\alpha}^{2}(0)$ и $W_{\alpha}^{2}(b)$. Затем определяется соответствующее обобщенное решение задачи Неймана для дифференциально-операторного уравнения (1).

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

● Для элементов весового пространства Соболева $W_\alpha^2(0,b)$ и их производных получены оценки в окрестности точки $t = 0$.

● Доказано, что одномерный оператор $Bu \equiv (t^\alpha u'')'' + u,\ \ D(B) \subset W_\alpha^2(0,b)$ является в пространстве $L_2(0,b)$ положительным и самосопряженным при $0 \le \alpha \le 4$, а обратный оператор $B^{-1}\colon L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ существует и непрерывен при $0 \le \alpha \le 4$. При $0 \le \alpha < 4$ обратный оператор является компактным оператором.

● Дано описание области определения для одномерного оператора L в зависимости от показателя вырождения α .

● Получены достаточные условия, при выполнении которых задача Неймана для дифференциально-операторного уравнения однозначно разрешима.

● Когда оператор A является самосопряженным, тогда спектр оператора

$$L\colon L_2\big((0,b),\mathcal{H}\big) \to L_2\big((0,b),\mathcal{H}\big)$$

совпадает $\sigma(L) = \overline{\sigma(A - I_{\mathcal{H}}) + \sigma(B)}$ с замыканием прямой суммы спектров операторов $A - I_{\mathcal{H}}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $B\colon L_2(0,b) \to L_2(0,b)$, где $I_{\mathcal{H}}$ - единичный оператор в пространстве.