ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Հովհաննիսյան Ռուզան Զոհրաբի

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՄԱԿԱՐԴԱԿԱՅԻՆ
ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՅՈՒՄԸ
ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՒՄ

Ա.01.07 «Հաշվողական մաթեմատիկա»
մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2014

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Оганесян Рузан Зограбовна

ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОУРОВНЕВЫХ
ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЕЙ В МЕТОДЕ
НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.07 «Вычислительная математика»

Ереван – 2014

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Յու.Ռ. Հակոբյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Հ.Ա. Հակոբյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Գ.Ս. Հակոբյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2014թ. հունիսի 17-ին, ժ.13^{30} -ին
ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա»
մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025 Երևան, Ա.Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրը առաքված է 2014թ. մայիսի 14-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук Ю.Р. Акопян

Оффициальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук А.А. Акопян
кандидат физ.-мат. наук Г.С. Акопян

Ведущая организация: Государственный инженерный университет Армении

Защита состоится 17-го июня 2014 г., в 13^{30} на заседании действующего
в ЕГУ специализированного совета ВАК 044 «Математическая кибернетика»
по адресу: 0025 Ереван, ул. А.Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 14 мая 2014г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Ատենախոսությունը նվիրված է փորձարարական տվյալները փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով մոտարկելիս առաջացող նորմալ համակարգերի մատրիցների հանրահաշվական բազմամակարդակային վերապայմանավորիչների կառուցմանը և հետազոտմանը:

<u>Թեմայի արդիականությունը</u>: Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը փորձարարական տվյալների մաթեմատիկական մշակման առավել էֆեկտիվ և հանրահայտ միջոցներից մեկն է: Հաճախ մոտարկող ֆունկցիան փնտրվում է որպես ինչ-որ վերջավոր չափանի տարածության տարր: Այդ տարածության որոշ բազիսային ֆունկցիաների ընտրանքի դեպքում փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի կիրառումը հանգեցնում է գծային հանրահաշվական հավասարումների այսպես կոչված *նորմալ համակարգերի* լուծմանը: Հայտնի է, որ բազիսային ֆունկցիաների քանակի մեծացմանը զուգընթաց նորմալ համակարգերը դառնում են ավելի զգայուն հաշվողական սխալանքների կուտակման նկատմամբ: Պատճառն այն է, որ նորմալ համակարգի մատրիցի պայմանավորվածության թիվը արագ աճում է: Ուստի բազիսային ֆունկցիաների մեծ թվի դեպքում անհրաժեշտ է կիրառել նորմալ համակարգերի լուծման հատուկ մեթոդներ:

Վատ պայմանավորված գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման առավել տարածված մոտեցումներից է *վերապայմանավորման մեթոդը*: Նրա էությունը կայանում է սկզբնական գծային համակարգի պայմանավորվածության լավացման մեջ համապատասխան վերապայմանավորող մատրիցի, ինչպես ասում են՝ *վերապայմանավորիչի*, կառուցման միջոցով, որը կարող է օգտագործվել հիշատակված համակարգի լուծման տարբեր իտերացիոն մեթոդներում: Այս մեթոդի բավականաչափ լիակատար և համակարգված շարադրանքը կարելի է գտնել Կե Չենի[1] մենագրությունում: Վերապայմանավորիչների կառուցման տեխնիկան և մեթոդները բավականին բազմազան են: Մասնավորապես, մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման համար լայն տարածում են գտել այսպես կոչված վերապայմանավորման *բազմացանցային* կամ *բազմամակարդակային* մեթոդները, որոնց իրագործումը կապված է խտացող ցանցերի հաջորդականության օգտագործման հետ: Հարկ է նշել, որ նորմալ համակարգերի լուծման այսպիսի մոտեցում մինչ այժմ չի օգտագործվել: Այս տեսակետից անհրաժեշտություն է առաջանում նորմալ համակարգերի նկատմամբ վերապայմանավորման բազմամակարդակային ալգորիթմների կիրառության հնարավորությունների բացահայտումը, ինչն այսպիսի ալգորիթմների մշակումը և նրանց տեսական հիմնավորումը դարձնում է կարևոր խնդիր:

<u>Ատենախոսության նպատակն ու խնդիրները</u>: Վերապայմանավորման բազմամակարդակային մեթոդների մեջ հատուկ տեղ է զբաղեցնում հայտնի *AMLI*-մեթոդը (Algebraic Multilevel Iteration Method), որը կիրառվում է էլիպտական

[1]Ke Chen. Matrix Preconditioning Techniques and Applications.- Cambridge University Press, 2005.

հավասարումների թվային լուծման ժամանակ[1]: Նրա հիմքում ընկած է խտացող ստորակարգային ցանցերի հաջորդականության կիրառությունը և ցանցի հանգույցների հատուկ բազմամակարդակային կարգավորումը: Վերապայմանավորիչը սահմանվում է ռեկուրսիվ եղանակով, ցանցի տրոհման մի մակարդակից դեպի մյուսը, մինչև ամենախոշոր ցանցը, որտեղ բավականաչափ ցածր կարգի հանրահաշվական համակարգը լուծվում է որևէ ուղիղ մեթոդի միջոցով: *AMLI*-մեթոդների իրականացման տրամաբանությունը և ներքին կառուցվածքը հիմք է այն գաղափարի, որ այդ տեխնիկան կարող է կիրառելի լինել հաշվողական գծային հանրահաշվի նաև այլ խնդիրներում, որոնց լուծման համար օգտագործվում են բազմամակարդակային կառուցվածքներ: Մասնավորապես, այն կարող է կիրառվել նորմալ համակարգերի մատրիցների վերապայմանավորիչների կառուցման համար: Քանի որ այսպիսի մոտեցում կիրառվում է առաջին անգամ, ապա նրա արդյունավետության, կառուցման ընդհանուր սխեմայի և փուլերի մշակման նպատակով ներկա ատենախոսության մեջ դիտարկվել են միայն կտոր առ կտոր գծային բազիսային ֆունկցիաներ: Ընդ որում դրվել են հետևյալ հիմնական խնդիրները.

- մոտարկման հատվածի ստորակարգային տրոհման հետ զուգորդված նորմալ համակարգերի մատրիցների հաջորդականության կառուցումը,
- նորմալ համակարգի մատրիցի պայմանավորվածության թվի գնահատականի արտածումը և այդ գնահատականի կախվածության բացահայտումը մոտարկման հատվածի տրոհման մակարդակից (այլ կերպ ասած՝ բազիսային ֆունկցիաների քանակից),
- նորմալ համակարգերի մատրիցների համար երկմակարդակային վերապայմանավորիչների կառուցման եղանակի մշակում և պայմանավորվածության թվերի գնահատականների արտածում,
- ներքին չեբիշևյան իտերացիաներով բազմամակարդակային վերապայմանավորիչի կառուցում և մոտարկման հատվածի տրոհման մակարդակների թվից անկախ պայմանավորվածության թվի գնահատականի արտածում:

<u>**Հետազոտության առարկան**</u>**:** Հանրահաշվական բազմամակարդակային վերապայմանավորիչների կառուցում և ուսումնասիրություն՝ մոտարկման հատվածի ստորակարգային տրոհումների հետ զուգորդված նորմալ համակարգերի մատրիցների համար:

<u>**Հետազոտության մեթոդները**</u>**:** Ատենախոսությունում դրված խնդիրների լուծման համար կիրառվել են թվային անալիզի, գծային հանրահաշվի, մատրիցների տեսության և մաթեմատիկական անալիզի մեթոդները:

<u>**Գիտական նորույթը**</u>**:** Կիրառելով Ու.Աքսելսոնի և Պ.Վասիլևսկու[1], Յու.Կուզնեցովի[2], Յու.Հակոբյանի և Յու.Կուզնեցովի[3] աշխատանքներում մշակված ներ-

[1] O. Axelsson and P. S. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods. I. - Numer. Math., 56, 1989, 157-177.

[2] Yu. A. Kuznetsov. Algebraic multigrid domain decomposition methods. - Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, v. 4, № 5, 1989, 351-379.

[3] Yu. R. Hakopian and Yu. A. Kuznetsov. Algebraic multigrid/substructuring preconditioners on triangular grids. - Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, v. 6, № 6, 1991, 453-483.

քին իտերացիաներով բազմացանցային վերապայմանավորիչների կառուցման ընդհանուր սկզբունքները, ատենախոսության մեջ մշակված է մոտարկման հատվածի ստորակարգային տրոհման հետ զուգորդված նորմալ համակարգերի մատրիցների համար հանրահաշվական բազմամակարդակային վերապայմանավորիչների կառուցման նոր մեթոդ:

<u>**Տեսական և կիրառական նշանակությունը:**</u> Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքները կրում են տեսական բնույթ և ունեն բացահայտորեն արտահայտված գործնական ողղվածություն: Նրանք կարող են կիրառվել գծային հանրահաշվական հավասրումների նորմալ համակարգերի լուծման արդյունավետ թվային ալգորիթմներ ստեղծելիս:

<u>**Պաշտպանությանը ներկայացվող հիմնական դրույթները**</u>.

- նորմալ համակարգի մատրիցի պայմանավորվածության թվի գնահատականի արտածումը և այդ գնահատականի կախվածության բացահայտումը բազիսային ֆունկցիաների քանակից,
- նորմալ համակարգերի մատրիցների համար երկմակարդակային վերապայմանավորիչների կառուցման եղանակի մշակումը և պայմանավորվածության թվերի գնահատականների ստացումը,
- ներքին չեբիշևյան իտերացիաներով բազմամակարդակային վերապայմանավորիչի կառուցման եղանակի մշակումը և բազիսային ֆունկցիաների թվից անկախ պայմանավորվածության թվի գնահատականի ստացումը:

<u>**Արդյունքների ապրոբացիան**</u>: Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի Թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում:

<u>**Հրապարակումներ**</u>: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են չորս գիտական հոդվածներում:

<u>**Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը**</u>: Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, չորս գլուխներից, եզրակացությունից, օգտագործված գրականության ցանկից (47 անուն) և հավելվածից: Աշխատանքի ընդհանուր ծավալը 99 էջ է (առանց հավելվածի՝ 94 էջ):

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ներածության մեջ քննարկվում է հետազոտության թեմայի արդիականությունը, ձևակերպվում են ատենախոսության նպատակն ու խնդիրները: Համառոտակի ներկայացված է աշխատանքի հիմնական բաժինների բովանդակությունը:

<u>**Առաջին գլուխը**</u> կրում է ակնարկային բնույթ, որտեղ ձևակերպվում է փորձարարական տվյալների մոտարկման փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը, ցույց է տրվում, որ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի կիրառումը որոշակի բազիսային ֆունկցիաների ընտրության դեպքում հանգեցնում է գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծմանը: Այնուհետև բնութա-

գրվում է վատ պայմանավորված համակարգերի լուծման վերապայմանավորման մեթոդը:

Նախ ձևակերպվում է փորձարարական տվյալների մոտարկման փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը: Դիցուք x և y երկու փոփոխականների միջև կախվածությունը տրվում է

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} x & x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ \hline y & y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{array} \quad (1)$$

աղյուսակի տեքով: Ընտրվում է որոշակի պարամետրերից կախված $y = f(x)$ ֆունկցիա: Պահանջվում է գտնել այդ պարամետրերն այնպես, որ

$$\sum_{i=1}^{N} [f(x_i) - y_i]^2 \quad (2)$$

քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույն:

Հաճախ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդում $f(x)$ մոտարկող ֆունկցիան փնտրվում է որպես $\varphi_j(x)$, $j = 1,2,...,n$ բազիսային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիա, այսինքն՝ $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x)$: Այդ դեպքում (2) փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը հանգեցվում է

$$A^T A a = A^T y \quad (3)$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծմանը, որտեղ

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1(x_N) & \varphi_2(x_N) & \dots & \varphi_n(x_N) \end{bmatrix}$$

մատրիցը $x_1, x_2, ..., x_N$ կետերում բազիսային ֆունկցիաների արժեքների մատրիցն է, $a = [a_1\, a_2 \ldots a_n]^T$-ն՝ անհայտ գործակիցների վեկտոր է, իսկ $y = [y_1\, y_2 \ldots\, y_N]^T$-ը՝ արժեքների վեկտորն է: Ստացված (3) համակարգը կոչվում է *նորմալ հավասարումների համակարգ*, կամ ուղղակի՝ *նորմալ համակարգ*:

Հայտնի է, որ n-ի մեծացմանը զուգընթաց նորմալ համակարգը դառնում է ավելի զգայուն հաշվողական սխալանքների կուտակման նկատմամբ: Ուստի n-ի մեծ արժեքների դեպքում անհրաժեշտ է կիրառել նորմալ համակարգերի լուծման հատուկ մեթոդներ:

Դիցուք տրված է սիմետրիկ դրական որոշյալ մատրիցով գծային հանրահաշվական հավասարումների

$$Ax = b \quad (4)$$

համակարգը: Այդպիսի համակարգերի լուծման համար հիմնականում կիրառվում են իտերացիոն մեթոդներ, օրինակ, համալուծ գրադիենտների մեթոդ կամ չեբիշևյան մեթոդ: Հայտնի է, որ իտերացիոն մեթոդի զուգամիտության արագությունը կախված է համակարգի մատրիցի պայմանավորվածության թվից: Հիշեցնենք այդ հասկացությունը. *սիմետրիկ դրական որոշյալ A և B մատրիցների համար $\kappa(B^{-1}A)$ պայմանավորվածության թիվը սահմանվում է որպես $B^{-1}A$ մատրիցի մեծագույն և փոքրագույն սեփական արժեքների հարաբերություն:* Ինչքան մեծ է պայմանավորվածության թիվը, այնքան մեծ է անհրաժեշտ իտերացիաների քանակը: Այսպիսով, մեծ պայմանավորվածության թիվը բերում է իտերացիաների քանակի աճմանը, ինչն էլ, իր հերթին հանգեցնում է մեքենայական ժամանակի մեծացմանը: Այդ պատճառով մեծ պայմանավորվածության թիվ ունեցող մատրիցների դեպքում մտցվում է այսպես կոչված *վերապայմանավորման մատրից* կամ *վերապայմանավորիչ* P, որը նույնպես սիմետրիկ դրական որոշյալ մատրից է, և (4) համակարգի փոխարեն դիտարկվում է

$$P^{-1}Ax = P^{-1}b$$

համարժեք համակարգը: P վերապայմանավորիչը պետք է բավարարի հետևյալ երկու հիմնական պահանջներին.

1. P մատրիցը պետք է լավ մոտարկի A մատրիցն այն իմաստով, որ $\kappa(P^{-1}A)$ պայմանավորվածության թիվը պետք է էապես փոքր լինի A մատրիցի $\kappa(A)$ պայմանավորվածության թվից,
2. վերապայմանավորված իտերացիոն մեթոդում յուրաքանչյուր քայլում լուծվում է P մատրիցով համակարգ, ուստի այդ գործողությունը պետք է լինի հեշտ իրականացվող:

Երկրորդ գլուխում դիտարկվում և հետազոտվում են մոտարկման հատվածի ստորակարգային տրոհումների հետ զուգորդված նորմալ համակարգերի մատրիցները:

Պարագրաֆ 2.1-ում բացահայտվում են նորմալ համակարգերի մատրիցների հիմնական հատկությունները:

Դիցուք ունենք տվյալների (1) աղյուսակը: Ենթադրենք, որ $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ բազմության կետերն ընկած են (a,b) միջակայքում: Ընտրելով $h = \dfrac{b-a}{n-1}$ քայլը, կատարենք $[a,b]$ հատվածի հավասարաչափ տրոհում $t_m = a + (m-1)h$, $m = 1,2,...,n$ *հանգույցների* միջոցով, որոնց բազմությունը կազմում է *ցանց*՝ $\sigma = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$: Ներմուծենք նշանակումներ հատվածի տրոհման հետ զուգորդված միջակայքերի համար.

$$\Delta_m = (t_m, t_{m+1}), \quad m = 1,2,...,n-1:$$

Այնուհետև կենթադրենք, որ $n \le N$: Բոլոր $m = 1,2,...,n$ արժեքների համար սահմանենք $\varphi_m(x)$ *բազիսային կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաներ*:

Սահմանենք երկու տարածություն:

G-ն σ ցանցի վրա որոշված ցանցային ֆունկցիաների տարածությունն է: Այդ տարածության տարրերը կարելի է դիտարկել նաև որպես n երկարության վեկտորներ՝ $v = [v_1, v_2, ..., v_n]^T$: $v \in G$ ցանցային ֆունկցիայի *նորմը*՝ $\| v \| \equiv \sqrt{v^T v}$:

V-ն σ ցանցի հետ զուգորդված $\hat{v}(x)$ կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաների տարածությունն է: Ընդ որում՝

$$\hat{v}(x) = \sum_{m=1}^{n} v_m \varphi_m(x), \quad v_m = \hat{v}(t_m)$$

Սահմանված G և V տարածությունների միջև գոյություն ունի բնական փոխմիարժեք համապատասխանություն: Ասում են, որ $\hat{v} \in V$ ֆունկցիան $v \in G$ ցանցային ֆունկցիայի *լրացումն է*՝ $\hat{v} = prol(v \in G : V)$:

Ձևակերպենք (1) տվյալների ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի մոտարկման խնդիրը. *գտնել այնպիսի* $\hat{u} \in V$ *ֆունկցիա, որի համար*

$$\sum_{i=1}^{N}[\hat{u}(x_i) - y_i]^2 = \min_{\hat{v}\in V}\sum_{i=1}^{N}[\hat{v}(x_i) - y_i]^2 : \qquad (5)$$

Ըստ վերը նշվածի, (5) խնդրի լուծումը հանգում է

$$A^T A v = A^T y$$

նորմալ համակարգի լուծմանը: Այս համակարգի $n \times n$ չափի $L \equiv A^T A$ մատրիցը կանվանենք NS-*մատրից* (անգլերենից՝ normal system): Ապացուցված է հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 2.1.1[1]: *Եթե* $[a,b]$ *հատվածի տրոհման յուրաքանչյուր* Δ_m, $m = 1,2,...,n-1$ *միջակայքը պարունակում է գոնե մեկ կետ տվյալների* X *բազմությունից, ապա* L *մատրիցը դրական որոշյալ է:*

Պարագրաֆ 2.2-ում կառուցվում են $[a,b]$ հատվածի ստորակարգային տրոհումները: Ընտրենք $n_0 \ge 2$ բնական թիվ և $h_0 = (b-a)/(n_0-1)$ քայլով կատարենք $[a,b]$ հատվածի *սկզբնական տրոհում*

$$t_m^{(0)} = a + (m-1)h_0\,, \quad m = 1,2,...,n_0$$

կետերի միջոցով: Անվանենք այդ կետերը *սկզբնական տրոհման հանգույցներ*: Դրանց բազմությունը կազմում է *սկզբնական ցանց* $\sigma_0 = \{t_m^{(0)}\}_{m=1}^{n_0}$:

Սահմանափակվենք ինչ-որ $p > 1$ բնական թվով և կառուցենք $[a,b]$ հատվածի *ստորակարգային տրոհումների*

$$\tau_0, \tau_1, ..., \tau_p$$

հաջորդականությունը հետևյալ կերպ: Դիցուք τ_{k-1} տրոհումը, որի հետ զուգորդված է h_{k-1} քայլով $\sigma_{k-1} = \{t_m^{(k-1)}\}_{m=1}^{n_{k-1}}$ ցանցը, արդեն կառուցված է: Ներմուծենք նոր հանգույցներ՝ բաժանելով τ_{k-1} տրոհմանը համապատասխանող յուրաքանչյուր $\Delta_m^{(k-1)} = (t_m^{(k-1)}, t_m^{(k-1)} + h_{k-1})$ միջակայքը երկու հավասար մասերի: Արդյունքում կստանանք $h_k = h_0 / 2^k$ քայլով նոր ցանց՝ $\sigma_k = \{t_m^{(k)}\}_{m=1}^{n_k}$, որի *հանգույցները* $t_m^{(k)}$ կետերն են: Դրանով ստանում ենք τ_k տրոհումը: Այդ տրոհմանը համապատասխանում են $\Delta_m^{(k)} = (t_m^{(k)}, t_m^{(k)} + h_k)$ միջակայքերը: Ըստ կառուցման՝ $n_k = 2^k(n_0 - 1) + 1$, $k = 0,1,...,p$:

Յուրաքանչյուր k-րդ մակարդակում, որտեղ $1 \le k \le p$, ունենք σ_k ցանցի բաժանում երկու մասի՝

$$\sigma_k = \sigma_k^{(1)} \cup \sigma_k^{(2)}\,, \qquad (6)$$

որտեղ $\sigma_k^{(1)}$ և $\sigma_k^{(2)}$ ենթացանցերը համապատասխանաբար հին և նոր հանգույցների բազմություններն են, այսինքն՝ $\sigma_k^{(1)} = \sigma_{k-1}, \sigma_k^{(2)} = \sigma_k \setminus \sigma_{k-1}$: Եթե $n_k^{(i)}$-ով նշանակենք $\sigma_k^{(i)}$ ենթացանցի հանգույցների թիվը, ապա $n_k^{(1)} = n_{k-1}$, $n_k^{(2)} = n_k - n_{k-1}$:

Այնուհետև, (6) բաժանմանը համապատասխան սահմանենք σ_k ցանցի հանգույցների համարակալման հետևյալ օրենքը. $\sigma_k^{(1)}$ *ենթացանցի հանգույցները պահպանում են իրենց համարները, այնուհետև* $n_k^{(1)}+1, n_k^{(2)}+2, ..., n_k$ *թվերով աճման կարգով համարակալվում են* $\sigma_k^{(2)}$ *ենթացանցի հանգույցները:*

---

[1] Սահմանումների և պնդումների համարակալումը տրվում է ըստ ատենախոսության տեքստի:

Բոլոր $k=0,1,...,p$ մակարդակների համար սահմանենք ցանցային ֆունկցիաների G_k և կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաների V_k տարածությունները (տես 2.1 պարագրաֆը):

Եթե $k \geq 1$, ապա համաձայն վերը ընդունված հանգույցների համարակալման սկզբունքի կամայական $v \in G_k$ ցանցային ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել

$$v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n_k^{(1)} \\ \}n_k^{(2)} \end{matrix}, \quad v_i \in G_k^{(i)}, \ i=1,2$$

տեսքով, որտեղ $G_k^{(i)}$-ն՝ $\sigma_k^{(i)}$ ենթացանցի վրա որոշված ցանացային ֆունկցիաների տարածությունն է:

Յուրաքանչյուր V_k, $0 \leq k \leq p$ տարածությունում սահմանվում են $\varphi_m^{(k)}(x) \in V_k$, $m=1,2,...,n_k$ *բազիսային կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաներ*:

<u>Պարագրաֆ 2.3</u>-ում ցանցերի ստորակարգային հաջորդականության վրա կառուցվում են NS-մատրիցները:

Ցանցի մանրացման բոլոր $k=0,1,...,p$ մակարդակների համար ներմուծվում են հետևյալ $N \times n_k$ չափի մատրիցներ.

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} \varphi_1^{(k)}(x_1) & \varphi_2^{(k)}(x_1) & \cdots & \varphi_{n_k}^{(k)}(x_1) \\ \varphi_1^{(k)}(x_2) & \varphi_2^{(k)}(x_2) & \cdots & \varphi_{n_k}^{(k)}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(k)}(x_N) & \varphi_2^{(k)}(x_N) & \cdots & \varphi_{n_k}^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}:$$

Այնուհետև սահմանվում են $n_k \times n_k$ չափի NS-մատրիցներ

$$L^{(k)} \equiv A^{(k)^T} A^{(k)}: \tag{7}$$

Այսպիսով, ունենք NS-մատրիցների

$$L^{(0)}, L^{(1)}, ..., L^{(p)}$$

հաջորդականությունը:

Եթե $k \geq 1$, ապա համաձայն σ_k ցանցի (6) բաժանմանը $L^{(k)}$ մատրիցը կարելի է ներկայացնել

$$L^{(k)}=\begin{bmatrix} L_{11}^{(k)} & L_{12}^{(k)} \\ L_{21}^{(k)} & L_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \tag{8}$$

վանդակային տեսքով, որտեղ $L_{ij}^{(k)} \equiv A_i^{(k)^T} A_j^{(k)}$, $i,j=1,2$ վանդակները $n_k^{(i)} \times n_k^{(j)}$ չափի մատրիցներ են: Ընդ որում $L_{21}^{(k)}=L_{12}^{(k)^T}$, իսկ $L_{11}^{(k)}$ և $L_{22}^{(k)}$ վանդակներն անկյունագծային մատրիցներ են:

Ենթադրենք, որ $[a,b]$ հատվածի τ_p ամենամանր տրոհումն այնպիսին է, որ բավարարված է հետևյալ պահանջը:

Պայման 2.3.1: *Յուրաքանչյուր $\Delta_m^{(p)}$ միջակայքը պարունակում է գոնե մեկ կետ տվյալների X բազմությունից:*

Ապացուցվում է, որ այս պայմանի առկայության դեպքում $L_{11}^{(k)}$ և $L_{22}^{(k)}$ մատրիցները դրական որոշյալ են:

Պարագրաֆ 2.4-ում ուսումնասիրվում է $L^{(k)}, 0 \le k \le p$ մատրիցների պայմանավորվածության թվի վարքը՝ կախված k-ից: Դրա համար ատենախոսության մեջ կատարվում է հետևյալ ենթադրությունը:

Ցանցի մանրացման յուրաքանչյուր k-րդ մակարդակում $d_m^{(k)}$-ով նշանակենք $\widetilde{\Delta}_m = [t_m, t_{m+1})$ միջակայքին պատկանող X բազմության կետերի քանակը: Կհամարենք, որ p-րդ մակարդակում $d_m^{(p)}$ թվերը համեմատական են $N/(n_p - 1)$ մեծությանը հետևյալ իմաստով. բոլոր m-րի համար

$$c_1 \frac{N}{n_p - 1} \le d_m^{(p)} \le c_2 \frac{N}{n_p - 1},$$

որտեղ c_1 և c_2-ը դրական հաստատուններ են:

$L^{(k)}$ մատրիցների պայմանավորվածության թվերը գնահատելու նպատակով անհրաժեշտ է նախ գնահատել այդ մատրիցների սեփական արժեքները: Նշանակենք $\lambda_{\min}^{(k)}$ և $\lambda_{\max}^{(k)}$-ով $L^{(k)}$ մատրիցի համապատասխանաբար փոքրագույն և մեծագույն սեփական արժեքները: Ատենախոսության մեջ ապացուցված են հետևյալ պնդումները:

Թեորեմ 2.4.1: *Բոլոր* $k = 0,1,\ldots, p-2$ *արժեքների համար*

$$\lambda_{\min}^{(k)} \ge \alpha_k,$$

որտեղ

$$\alpha_k \equiv c_1 \frac{N}{n_0 - 1} \, \frac{4 \cdot 2^{2(p-k)} - 15 \cdot 2^{p-k} + 8}{24 \cdot 2^{2p-k}}:$$

Ցույց է տրվում, որ $\alpha_{k+1} < \alpha_k$, $k = 0,1,\ldots, p-3$: Համաձայն 2.1.1 լեմմայի $\lambda_{\min}^{(p)} > 0$, $\lambda_{\min}^{(p-1)} > 0$: Ուստի կարող ենք համարել, որ $\alpha_p = \alpha_{p-1} = 0$: Այսպիսով,

$$0 = \alpha_p = \alpha_{p-1} < \alpha_{p-2} < \cdots < \alpha_1 < \alpha_0:$$

Թեորեմ 2.4.2: *Բոլոր* $k = 0,1,\ldots, p$ *արժեքների համար*

$$\lambda_{\max}^{(k)} \le \beta_k,$$

որտեղ

$$\beta_k \equiv c_2 \frac{N}{n_0 - 1} \frac{2^{p-k} + 1}{2^p}:$$

Ինչ վերաբերում է $\lambda_{\max}^{(k)}$ սեփական արժեքների վերին սահմանների վարքի, ապա ցույց է տրվում, որ

$$0 < \beta_p < \beta_{p-1} < \cdots < \beta_1 < \beta_0:$$

$L^{(k)}$ մատրիցների սեփական արժեքները գնահատելուց հետո գնահատվում են այդ մատրիցների

$$\kappa(L^{(k)}) = \lambda_{\max}^{(k)} / \lambda_{\min}^{(k)}$$

պայմանավորվածության թվերը:

Թեորեմ 2.4.3: *Բոլոր* $k = 0,1,\ldots, p-2$ *արժեքների համար*

$$\kappa(L^{(k)}) \le \frac{c_2}{c_1} \, \frac{24 \cdot 2^{p-k}(2^{p-k} + 1)}{4 \cdot 2^{2(p-k)} - 15 \cdot 2^{p-k} + 8}:$$

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումը.

$$\gamma_k \equiv \frac{24\cdot 2^{p-k}(2^{p-k}+1)}{4\cdot 2^{2(p-k)}-15\cdot 2^{p-k}+8}, \qquad k=0,1,\ldots,p-2:$$

Ապացուցվում է, որ

$$6<\frac{24\cdot 2^{p}(2^{p}+1)}{4\cdot 2^{2p}-15\cdot 2^{p}+8}=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_{p-3}<\gamma_{p-2}=40:$$

Տեսնում ենք, որ k-ի նվազման հետ մեկտեղ $L^{(k)}$ մատրիցի պայմանավոր-վածության թիվը նվազում է:

Երրորդ գլուխը նվիրված է երկմակարդակային վերապայմանավորիչների կառուցմանը և նրանց հիմնական հատկությունների հետազոտմանը:

Պարագրաֆ 3.1-ում նկարագրվում է երկմակարդակային վերապայմանավո-րիչների կառուցումը (7) բանաձևով տրվող $L^{(k)}, k\geq 1$ մատրիցների համար: Ելնելով այդ մատրիցների (8) վանդակային ներկայացումից, որպես վերապայ-մանավորիչ $L^{(k)}$ մատրիցի համար դիտարկվում է

$$B^{(k)}=\begin{bmatrix} L^{(k-1)}+L_{12}^{(k)}L_{22}^{(k)^{-1}}L_{21}^{(k)} & L_{12}^{(k)} \\ L_{21}^{(k)} & L_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \tag{9}$$

մատրիցը: Ապացուցվում է հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 3.1.3: *Բոլոր* $k=1,2,\ldots,p$ *արժեքների համար* $B^{(k)}$ *մատրիցները դրական որոշյալ են:*

Մշակված է $B^{(k)}$ վերապայմանավորիչով համակարգի լուծման ալգորիթմը: Դիցուք ունենք

$$B^{(k)}v=g, \tag{10}$$

համակարգը, որտեղ

$$v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},\ g=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix},\ v_i, g_i \in G_k^{(i)},\ i=1,2:$$

Algorithm TL PREC/$B^{(k)}$

1. Հաշվվում է
$$f_1=g_1-L_{12}^{(k)}L_{22}^{(k)^{-1}}g_2$$
ցանցային ֆունկցիա:
2. Լուծվում է
$$L^{(k-1)}v_1=f_1$$
համակարգը:
3. Հաշվվում է
$$v_2=L_{22}^{(k)^{-1}}(g_2-L_{21}^{(k)}v_1)$$
ցանցային ֆունկցիա:

end

Այսպիսով, (10) համակարգի լուծման խնդիրը հանգում է $L^{(k-1)}$ մատրիցով համակարգի լուծմանը: Այդ պատճառով $B^{(k)}$ մատրիցը կանվանենք *երկմակար-դակային վերապայմանավորիչ* $L^{(k)}$ մատրիցի համար:

Պարագրաֆ 3.2-ը նվիրված է $B^{(k)^{-1}}L^{(k)}$ մատրիցների $\lambda_{\max}^{(k)}$ մեծագույն սեփական արժեքների գնահատմանը:

Նախ ապացուցվում է հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 3.2.1: *Ցանցի ստորակարգային տրոհման բոլոր* $k=1,2,...,p$ *մակարդակների համար* $B^{(k)^{-1}}L^{(k)}$ *մատրիցի սեփական արժեքները պատկանում են* $(0,1]$ *միջակայքին:*

Այնուհետև ստացված է պարագրաֆի հետևյալ հիմնական արդյունքը:

Թեորեմ 3.2.1: *Ցանցի ստորակարգային տրոհման բոլոր* $k=1,2,...,p$ *մակարդակների համար* $\lambda_{\max}^{(k)}=1$:

Պարագրաֆ 3.3-ում գնահատվում են $B^{(k)^{-1}}L^{(k)}$ մատրիցների $\lambda_{\min}^{(k)}$ փոքրագույն սեփական արժեքները:

Թեորեմ 3.3.1: *Ցանցի ստորակարգային տրոհման բոլոր* $k=1,2,...,p-3$ *մակարդակների համար*

$$\lambda_{\min}^{(k)} \geq \frac{c_1}{c_2}\,\frac{(2\cdot 2^{p-k}-1)(2^{p-k}-4)}{4(2\cdot 2^{p-k}+1)(2^{p-k}-1)}:$$

Օգտագործելով նախորդ երկու պարագրաֆներում ստացված պնդումները, պարագրաֆ 3.4-ում արտածվում է $B^{(k)^{-1}}L^{(k)}$ մատրիցի

$$\kappa(B^{(k)^{-1}}L^{(k)})=\frac{\lambda_{\max}^{(k)}}{\lambda_{\min}^{(k)}}$$

պայմանավորվածության թվի գնահատականը:

Թեորեմ 3.4.1: *Ցանցի ստորակարգային տրոհման բոլոր* $k=1,2,...,p-3$ *մակարդակների համար*

$$\kappa(B^{(k)^{-1}}L^{(k)}) \leq \frac{c_2}{c_1}\,\frac{4(2\cdot 2^{p-k}+1)(2^{p-k}-1)}{(2\cdot 2^{p-k}-1)(2^{p-k}-4)}: \qquad (11)$$

Հետազոտվում է (11) գնահատականի կարևոր բաղադրիչ մաս հանդիսացող

$$\delta_k \equiv \frac{4(2\cdot 2^{p-k}+1)(2^{p-k}-1)}{(2\cdot 2^{p-k}-1)(2^{p-k}-4)},\quad k=1,2,...,p-3$$

մեծությունների վարքը՝

$$4<\delta_1<\delta_2<.....<\delta_{p-4}<\delta_{p-3}=\frac{119}{15}\approx 7.94:$$

Այսպիսով, k-ի նվազման հետ մեկտեղ $B^{(k)^{-1}}L^{(k)}$ մատրիցի պայմանավորվածության թիվը նույնպես նվազում է:

Սույն գլխում ստացված արդյունքները էապես օգտագործվում են հաջորդ գլխում՝ NS-մատրիցների համար բազմամակարդակային վերապայմանավորիչները կառուցելիս:

Չորրորդ գլխում կառուցվում է ներքին չեբիշևյան իտերացիաներով բազմամակարդակային վերապայմանավորիչ:

Պարագրաֆ 4.1-ը կրում է օժանդակ բնույթ, նկարագրված է վերապայմանավորված չեբիշևյան իտերացիոն մեթոդը, բերված են փաստարկներ, որոնք կիրառվում են բազմամակարդակային վերապայմանավորիչի կառուցման ժամանակ:

Պարագրաֆ 4.2-ը նվիրված է բազմամակարդակային վերապայմանավորիչի կառուցմանը:

Ընտրելով բավականին մեծ $p>1$ թիվ, կառուցենք 2.2 պարագրաֆում նկարագրված $[a,b]$ հատվածի $\tau_0,\tau_1,...,\tau_p$ ստորակարգային տրոհումների հաջորդականությունը: Այնուհետև, առաջնորդվելով նույն սկզբունքով, կատարենք երեք լրացուցիչ տրոհում՝ $\tau_{p+1},\tau_{p+2},\tau_{p+3}$: Հետագայում մենք կենթադրենք, որ վերջին՝ τ_{p+3} տրոհումը այնպիսին է, որ յուրաքանչյուր $\Delta_m^{(p+3)}$ միջակայքը պարունակում է գոնե մեկ կետ տվյալների X բազմությունից (տես 2.3.1 պայմանը): Կառուցելով բոլոր տրոհման մակարդակների համար NS-մատրիցները, կունենանք

$$L^{(0)},L^{(1)},...,L^{(p)},L^{(p+1)},L^{(p+2)},L^{(p+3)}:$$

Սահմանափակվենք առաջին $p+1$ հատ մատրիցներով՝

$$L^{(0)},L^{(1)},...,L^{(p)}\equiv L$$

և կառուցենք բազմամակարդակային վերապայմանավորիչ L մատրիցի համար:

Ունենալով $B^{(k)}$ երկմակարդակային վերապայմանավորիչի (9) վանդակային ներկայացումը, ընտրենք $s>1$ բնական թիվ և $k=1,2,\dots,p$ արժեքների համար հաջորդաբար կառուցենք

$$M^{(k)}=\begin{bmatrix} R^{(k-1)}+L_{12}^{(k)}L_{22}^{(k)^{-1}}L_{21}^{(k)} & L_{12}^{(k)} \\ L_{21}^{(k)} & L_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

մատրիցները, որտեղ

$$\begin{cases} R^{(0)}=L^{(0)}, \quad k=1, \\ R^{(k-1)}=L^{(k-1)}\left[I^{(k-1)}-\prod_{j=1}^{s}\left(I^{(k-1)}-\theta_j^{(k-1)}M^{(k-1)^{-1}}L^{(k-1)}\right)\right]^{-1}, \quad 2\le k\le p \end{cases}$$

(այստեղ $I^{(k-1)}$-ն n_{k-1} կարգի միավոր մատրից է): Բանաձևի մեջ մասնակցող $\theta_j^{(k-1)}$ պարամետրերը արտահայտվում են s-րդ կարգի Չեբիշևի բազմանդամի արմատների միջոցով:

Այսպիսով, կառուցվում է

$$M^{(1)},M^{(2)},...,M^{(p)}\equiv M$$

մատրիցների հաջորդականությունը: Այդ հաջորդականության վերջին մատրիցը՝ M-ը դիտարկվում է որպես *բազմամակարդակային վերապայմանավորիչ* L մատրիցի համար: Ապացուցված է հետևյալ հիմնական պնդումը:

Թեորեմ 4.2.1: *Եթե* $s>\dfrac{1}{\sqrt{\mu_*}}$, *որտեղ* $\mu_*\equiv\dfrac{c_1}{c_2}\dfrac{15}{119}$, *ապա* $\kappa(M^{-1}L)\le c_*$, *որտեղ* c_**-ը*

$$c=\frac{1}{\mu_*}\left[\frac{(\sqrt{c}+1)^s+(\sqrt{c}-1)^s}{(\sqrt{c}+1)^s-(\sqrt{c}-1)^s}\right]^2$$

հավասարման միակ դրական լուծումն է:

Պարագրաֆ 4.3-ում քննարկվում են բազմամակարդակային վերապայմանավորիչի թվային իրականացման հետ կապված հարցերը:

M վերապայմանավորիչը կոչվում է *բազմամակարդակային* հետևյալ պատճառով: Բանն այն է, որ տարբեր իտերացիոն մեթոդներում, որտեղ $M = M^{(p)}$ մատրիցը հանդես է գալիս որպես վերապայմանավորիչ, անհրաժեշտ է լուծել $M^{(k)}$, $k = 1,2,...,p$ մատրիցներով գծային հավասարումների համակարգեր:

Դիտարկենք

$$M^{(k)} v = g \,,$$

համակարգը, որտեղ

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \; g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \; v_i, g_i \in G_k^{(i)}, \; i = 1,2:$$

Algorithm ML PREC/$M^{(k)}$

1. Հաշվվում է

$$f_1 = g_1 - L_{12}^{(k)} L_{22}^{(k)^{-1}} g_2$$

ցանցային ֆունկցիա:

2. Լուծվում է

$$R^{(k-1)} v_1 = f_1 \qquad (12)$$

համակարգը: Եթե $2 \le k \le p$, ապա (12) համակարգի լուծումը համարժեք է հետևյալ չեբիշևյան իտերացիոն մեթոդի s քայլերի կատարմանը.

$$M^{(k-1)} \frac{v_1^{(j)} - v_1^{(j-1)}}{\theta_j^{(k-1)}} = -L^{(k-1)} v_1^{(j-1)} + f_1 \,, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad v_1^{(0)} = 0, \; v_1 = x_1^{(s)}:$$

Եթե $k = 1$, ապա լուծվում է

$$L^{(0)} v_1 = f_1 \qquad (13)$$

համակարգը:

3. Հաշվվում է

$$v_2 = L_{22}^{(k)^{-1}} (g_2 - L_{21}^{(k)} v_1)$$

ցանցային ֆունկցիա:

end

Ինչպես տեսնում ենք, $M^{(k)}$ մատրիցով համակարգի լուծումը հանգում է կամ $M^{(k-1)}$ մատրիցներով համակարգերի հաջորդական լուծմանը (երբ $k \ge 2$), կամ էլ $L^{(0)}$ մատրիցով համակարգի լուծմանը (երբ $k = 1$): Ամենաստորին՝ $k = 0$ մակարդակում (13) համակարգը լուծվում է որոշ ուղիղ մեթոդի միջոցով:

Վերջում գնահատվում է մեկ վերապայմանավորման քայլի հաշվողական բարդությունը, այսինքն՝ A_{ops} թվաբանական գործողությունների քանակը, որը պահանջվում է M մատրիցով համակարգը լուծելու համար: Այդ թիվը կոչվում է M վերապայմանավորիչի *թվաբանական գին*:

Պնդում 4.3.1: *M վերապայմանավորիչի A_{ops} թվաբանական գնի համար տեղի ունեն հետևյալ գնահատականները.*

$$A_{ops} \le (0.5 A_{ops}^{(0)} + 13p) n + 13p \,, \quad \text{եթե} \;\; s = 2 \,,$$

$$A_{ops} \le \frac{2(4s+5)}{s-2} \left(\frac{s}{2} \right)^p n + s^{p-1} A_{ops}^{(0)} \,, \quad \text{եթե} \;\; s > 2:$$

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ատենախոսությունում կատարված հետազոտությունների արդյունքում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

1. Գնահատված է մոտարկման հատվածի ստորակարգային տրոհումների հետ զուգորդված նորմալ համակարգի մատրիցի պայմանավորվածության թիվը և բացահայտված է այդ գնահատականի կախվածությունը տրոհման մակարդակից:
2. Մշակված է նորմալ համակարգերի մատրիցների համար երկմակարդակային վերապայմանավորիչների կառուցման մեթոդը և ստացված են պայմանավորվածության թվերի գնահատականները:
3. Կառուցված է ներքին չեբիշևյան իտերացիաներով բազմամակարդակային վերապայմանավորիչ և ստացված է բազիսային ֆունկցիաների թվից անկախ պայմանավորվածության թվի գնահատականը:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՏԱՐԿՎԱԾ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ

1. Оганесян Р.З. О поведении числа обусловленности матриц нормальных систем на последовательности сеток.- *Математика в высшей школе,* т.8, No.2, изд-во “Чартарагет”, Ереван, 2012, 41-51.
2. Оганесян Р.З. Об оценке числа обусловленности матриц в методе наименьших квадратов с кусочно-линейными базисными функциями.- *Вестник государственного инженерного университета Армении,* вып.16, No.1, изд-во “Чартарагет”, Ереван, 2013, 25-34.
3. Hakopian Yu.R. and R.Z. Hovhannisyan. On two-level preconditioning in least squares method.- *Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences,* No.1, 2014, 7-15.
4. Акопян Ю.Р., Оганесян Р.З. Об использовании чебышевских итераций при построении многоуровневых переобуславливателей.- *Вестник РАУ, серия: физикоматематические и естественные науки*, изд-во РАУ, No.1, 2014, 4-16.

Р Е З Ю М Е

Оганесян Рузан Зограбовна

ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОУРОВНЕВЫХ
ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЕЙ В МЕТОДЕ
НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Диссертация посвящена построению и исследованию алгебраических многоуровневых переобуславливателей для матриц нормальных систем, возникающих при аппроксимации экспериментальных данных методом наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов является одним из наиболее эффективных и популярных средств математической обработки экспериментальных данных. В самом общем виде постановка задачи такова. Имея некоторый набор данных (x_i, y_i), $i = 1,2,..., N$, требуется построить такую функцию $y = f(x)$, для которой сумма квадратов отклонений

$$\sum_{i=1}^{N}[f(x_i) - y_i]^2$$

принимает свое наименьшее значение. Естественно, прежде всего возникает вопрос выбора типа приближающей функции $f(x)$. В подавляющем большинстве случаев эта функция ищется как элемент некоторого конечномерного пространства. При определенном выборе базисных функций указанного пространства применение метода наименьших квадратов сводится к решению так называемой *нормальной системы* линейных алгебраических уравнений. Общеизвестно, что при увеличении числа базисных функций нормальные системы становятся все более чувствительными по отношению к накоплению неизбежных вычислительных погрешностей. Причина заключается в том, что число обусловленности матрицы нормальной системы быстро растет. Поэтому при большом числе базисных функций возникает необходимость в применении специальных методов решения нормальных систем.

Одним из наиболее распространенных подходов к решению плохо обусловленных систем является *метод переобуславливания*. Суть его заключается в улучшении обусловленности исходной системы путем построения специальной переобуславливающей матрицы или, как ее называют, *переобуславливателя*. Техника и методы построения переобуславливателей довольно разнообразны. В частности, при численном решении дифференциальных уравнений с частными производными широкое распространение получили *многосеточные* или *многоуровневые* методы, реализация которых связана с использованием последовательностей сгущающихся сеток. Следует заметить, что такой подход к решению нормальных систем пока не получил должного развития. С этой точки зрения возникает необходимость в выяснении возможности использования многоуровневых алгоритмов переобуславливания при решении нормальных систем.

Среди многоуровневых методов переобуславливания особое место занимают *AMLI*-методы (Algebraic Multilevel Iteration Method). В основе его лежит использование иерархических сеток и специальное многоуровневое упорядочение узлов сетки. Переобуславливатель строится рекурсивно, от одного уровня разбиения к другому, где алгебраическая система достаточно низкого порядка решается с помощью некоторого прямого метода. Логика реализации *AMLI*-методов и способы их построения приводят к мысли о том, что эта техника может быть применена и в других задачах вычислительной линейной алгебры, для решения которых используются многоуровневые структуры. Именно такой подход лежит в основе предлагаемого в

настоящей диссертации методе построения многоуровневых переобуславливателей для матриц нормальных систем. Так как такой подход к построению переобуславливателей применяется впервые, для выяснения его эффективности и разработки общей схемы построения и ее этапов, в работе был рассмотрен лишь случай кусочно-линейных базисных функций.

Используя общие принципы построения многосеточных переобуславливателей с внутренними итерациями, в работе разработана новая методика построения многоуровневых переобуславливателей для матриц нормальных систем, ассоциированных с иерархическим разбиением отрезка аппроксимации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В результате проведенных в работе исследований получены следующие основные результаты.

1. Получена оценка числа обусловленности матрицы нормальной системы, ассоциированной с иерархическим разбиением отрезка аппроксимации и выявлена зависимость этой оценки от уровня разбиения.
2. Разработана методика построения двухуровневых переобуславливателей для матриц нормальных систем и получены оценки чисел обусловленности.
3. Построен многоуровневый переобуславливатель с внутренними чебышевскими итерациями и получена оценка числа обусловленности, не зависящая от числа базисных функций.

A B S T R A C T

Ruzan Z. Hovhannisyan

CONSTRUCTION OF ALGEBRAIC MULTILEVEL
PRECONDITIONERS IN LEAST SQUARES METHOD

The thesis is devoted to the construction and investigation of algebraic multilevel preconditioners for the matrices of normal systems arising in the data fitting by the least squares method.

The least squares method of is one of the most efficient and popular tools for mathematical processing of experimental data. The most general formulation of the problem looks as follows. Having a set of data (x_i, y_i), $i = 1,2,..., N$, is required to construct a function $y = f(x)$ for which the sum of squared deviations

$$\sum_{i=1}^{N} [f(x_i) - y_i]^2$$

takes its smallest value. Naturally, the first question is the choice of the type of approximating function $f(x)$. In most cases this function is sought as an element of a finite dimensional space. Under a certain choice of the basis functions of the space, the application of the least squares method is reduced to solving the so-called *normal system* of linear algebraic equations. It is generally known that by increasing the number of basis functions the normal systems become more sensitive towards the inevitable accumulation of computational errors. The reason is that the condition number of the matrix of the normal system is rapidly growing. Therefore, for a large number of basis functions becomes necessary to use special methods for solution of normal systems.

One of the most widespread approaches to solving ill-conditioned systems is the *preconditioning method*. The essence of that approach consists in improving the conditioning of the original system by constructing special preconditioning matrix or, as it is called, *preconditioner*. Technique and methods of constructing the preconditioners are quite diverse. In particular, for the numerical solution of partial differential equations are widely used *multigrid* or *multilevel* methods, the implementation of which involves the use of sequences of refining grids. It should be noted that such an approach to solving the normal systems has not yet properly developed. From this viewpoint becomes necessary to clarify the possibility of using multilevel preconditioning algorithms for solving normal systems.

Among multilevel preconditioning methods a special place belongs to *AMLI*-methods (Algebraic Multilevel Iteration Method). It is based on the use of hierarchical grids and the special multilevel ordering of the grid nodes. The preconditioner is constructed recursively, from one partition level to another one, where the algebraic system of sufficiently low order is solved by some direct method. The logic of implementation of *AMLI*-methods and the ways of their constructing lead to the idea that this technique can be also applied in other problems of computational linear algebra where multilevel structures are used. This is the approach to construct algebraic multilevel preconditioners for matrices of normal systems which form the basis of proposed method. Since this technique of constructing the preconditioners is applied for the first time, to ascertain its effectiveness and development of the general scheme of construction and its stages, in present work we confined ourselves to considering the case of piecewise linear basis functions.

Using the general principles of constructing multigrid preconditioners with inner iterations, in the thesis a new methodology of constructing multilevel preconditioners for the matrices of normal systems associated with a hierarchical partition of the interval of approximation.

THE MAIN RESULTS OF THE THESIS

As a consequence of the research carried out in the thesis, the following principal results have been obtained.

1. Estimate for the condition number of the matrix of normal system associated with the hierarchical decomposition of the segment of approximation is derived. The dependence of this estimate of the level of decomposition is revealed.
2. A new technique to construct two-level preconditioners for the matrices of normal systems is developed and estimates for condition numbers are obtained.
3. A multilevel preconditioner with inner Chebyshev iterative procedures is constructed and the estimate for condition number which is independent of the number of basic functions is obtained.