ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ամիր Էհսանի

Մեդիալ տիպի հանրահաշիվների ներկայացումները

Ա.01.06- “Հանրահաշիվ և թվերի տեսություն” մասնագիտությամբ

Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի

Գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսություն

Սեղմագիր

ԵՐԵՎԱՆ – 2012

YEREVAN STATE UNIVERSITY

Amir Ehsani

Representations of the Medial-Like Algebras

Synopsis

Of dissertation for requesting the degree of candidate of

Physical and mathematical sciences specializing in

01.01.06- “Algebra and Number Theory”

Yerevan – 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի խորհրդի կողմից:

Գիտական ղեկավար` ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Յու. Մ. Մովսիսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ` ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Պ.Ս. Գևորգյան

ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Ս.Ս. Դավիդով

Առաջատար կազմակերպություն` Խ. Աբովյանի անվ. Հայկական պետական մանկավարժական համալսարան, բարձրագույն հանրահաշվի և երկրաչափության ամբիոն

Պաշտպանությունը կկայանա 2012 թ. ապրիլի 10-ին ժ. 15.00-ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքվել է 2012 թ. մարտի 1-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր Տ. Ն. Հարությունյան

Dissertation topic was approved at a meeting of academic council of the faculty of Mathematics and Mechanics of the Yerevan State University.

Scientific adviser:	Doctor of Phys. Math. Sciences Yu. M. Movsisyan
Official reviewer:	Doctor of Phys. Math. Sciences P.S. Gevorkyan
	Kandidate of Phys. Math. Sciences S.S. Davidov
Leading organization:	Armenian State Pedagogical University named after Khachatur Abovyan

Defense of the thesis will be held at the meeting of the specialized council 050 of HAC of Armenia at the Yerevan State University on April 10, 2012 at 15.00 (0025, Yerevan, Aleck Manoogian Str. 1).

The dissertation is available in the library of the YSU.

Synopsis was sent on March 1, 2012.

Scientific secretary of the specialized council,
Doctor of physical and mathematical sciences,
associate professor T. N. Harutyunyn

General characterization of the work
Actuality of the Problem

Let $(A,\cdot)$ be a groupoid, the medial identity for a gropoid, is the following identity:

$$xy \cdot uv = xu \cdot yv .$$

Probably the first explicit note concerning the medial identity is contained in A. K. Suškevič paper (1937), but the first paper on the subject (concerning medial quasigroups) is D. C. Murdoch (1939). Later, there appeared other papers devoted to the study of medial quasigroups and their geometrical aspects (e.g. D. C. Murdoch (1941), K. Toyoda (1941), R. H. Bruck (1958), S. K. Stein (1957), and A. Sade (1957)) and also medial groupoids (e.g. I. M. H. Etherington (1949), M. Scholander (1949), and O. Frink (1955)).

It should be noted here that medial identity was studied under various names. The authors have found the following terms: abelian (e.g. D. C. Murdoch (1941)), alternation (e.g. M. Scholander (1949)), bi-commutative (e.g. E. Doraczynska (1974)), bisymmetric (e.g. J. Azél (1948)), entropic (e.g. I. M. H. Etherington (1949)), medial (e.g. S. K. Stein (1957)), surcommutative (e.g. J. P. Soublin (1971)).

The generalization of medial identity for an n-ary groupoid (A, f) is the following identity:

$$f(f(x_{11},...,x_{1n}),...,f(x_{n1},...,x_{nn})) = f(f(x_{11},...,x_{n1}),...,f(x_{1n},...,x_{nn})).$$

In particular, the medial identity or its n-ary generalization is a natural condition to assume in characterizing mean value functions on the real numbers, J. Azél (1947), J. Azél (1948), J. Azél, J. Dhombres (1991).

Using the medial pair operations we can define a medial algebra, as follows:

Let f and g be m-ary and n-ary operations on a set A, the pair operation (f,g) is medial if

$$f(g(x_{11},...,x_{1n}),...,g(x_{m1},...,x_{mn})) = g(f(x_{11},...,x_{m1}),...,f(x_{1n},...,x_{mn})),$$

for every $x_{ij} \in A$, where $1 \le i \le m$ and $1 \le j \le n$. The algebra (A, F) is medial if every pair of operations of the algebra is a medial pair operation.

The following characterization of medial quasigroups was obtained by K. Toyoda.

Toyoda Theorem. Let $(Q,\cdot)$ is a medial quasigroup, then there is an abelian group $(Q,+)$, commuting automorphisms j_1, j_2 of $(Q,+)$ and an element $c \in Q$ such that

$$x \cdot y = j_1(x) + j_2(y) + c,$$

for all $x, y \in Q$, where $j_1 j_2 = j_2 j_1$.

Yu. M. Movsisyan characterized a generalization of Toyoda theorem for the algebra with two binary quasigroup operations.

Now, in this thesis, one of our aims is the characterization of a regular medial algebra, as a generalization of Toyoda theorem.

For an algebra ***A***= *(A, F)*, we define the complex operations for every $\varphi \neq A_1,...,A_n \subseteq A$ and every *n*-ary operation $f \in F$ on the set $r(A)$, of all non-empty subsets of the set *A,* by

$$f(A_1,...,A_n) = \{f(a_1,...,a_n) \mid a_i \in A_i\}.$$

The algebra $\boldsymbol{Cm\ A} = (r(A), F)$, is called complex algebra of A.

Now, consider the set ***CSub A***, of all (non-empty) subalgebras of the algebra ***A***. This set may or may not be closed under complex operations. For instance if ***A*** is an abelian group it is; however, for most groups, it is not. In the former case, ***CSub A*** is a subuniverse of ***Cm A*** and we called it the complex algebra of subalgebras. We will say that ***A*** has the complex algebra of subalgebras or that: ***CSub A*** exists.

A variety ***V*** (respectively, the algebra ***A***) satisfies the generalized medial (entropic) property if for every *n*-ary operation *f* and *m*-ary operation *g* of ***V*** (of ***A***) there exist *m*-ary term operations $t_1,...,t_n$ such that the identity:

$$g(f(x_{11},...,x_{n1}),...,f(x_{1m},...,x_{nm})) = f(t_1(x_{11},...,x_{1m}),...,t_n(x_{n1},...,x_{nm})),$$

holds in ***V*** (in ***A***) (K. Adaricheva, A. Pilitowska, D. Stanovskỳ).

For example, a groupoid satisfies the generalized entropic property, if there are binary term operations *t* and *s*, such that the identity: $xy \cdot uv = t(x,u) \cdot s(y,v)$, holds.

It was proved by T. Evans that for the variety ***V*** of groupoids, every groupoid in ***V*** has the complex algebra of subalgebras if and only if ***V*** satisfies the above identity for some term operations *t* and *s*.

In this investigation, we establish the generalized entropic property for a pair of operations and the clone of generalized endomorphisms on an algebra, which having this clone is equivalent to the fact that an algebra has the complex algebra of subalgebras. Then we introduce the connections of the generalized entropic property for a pair of operations and a medial pair of operations. Also, we introduce the connections of the generalized endomorphism of algebra and a medial algebra.

There is another identity, which is very similar to the medial identity, and researches on this identity and medial identity parallel has been done. The name of this identity is paramedial identity.

Let $(A,\cdot)$ be a groupoid, the paramedial identity for a gropoid is the following identity:

$$xy \cdot uv = vy \cdot ux.$$

The generalization of paramedial identity for an n-ary groupoid *(A, f)* is the following identity:

$$f(f(x_{11},...,x_{1n}),...,f(x_{n1},...,x_{nn})) = f(f(x_{nn},...,x_{1n}),...,f(x_{n1},...,x_{11})).$$

Let *f* and *g* be *m*-ary and *n*-ary operations on a set *A*, the pair operation *(f, g)* is
paramedial if we have the following identity:

$$f(g(x_{11},...,x_{1n}),...,g(x_{m1},...,x_{mn}))=g(f(x_{mn},...,x_{1n}),...,f(x_{m1},...,x_{11})),$$

for every $x_{ij} \in A$, where $1 \le i \le m$ and $1 \le j \le n$. An algebra $\boldsymbol{A}=(A,F)$ is paramedial if every pair operations of the algebra $\boldsymbol{A}$ is a paramedial pair operation.

The following characterization of paramedial quasigroups was obtained by T. Kepka and P. Némec:

Kepka-Némec Theorem. Let $(Q,\cdot)$ be a paramedial quasigroup, then there is an abelian group $(Q,+)$, commuting automorphisms j_1, j_2 of $(Q,+)$ and a fixed element $c \in Q$ such that

$$x \cdot y = j_1(x) + j_2(y) + c,$$

for all $x, y \in Q$, where $j_1^2 = j_2^2$.

The other aims of this thesis, is the representation of a paramedial algebra with an ***n***-ary quasigroup operation, and the representation of a regular paramedial algebra, as the generalizations of the Kepka-Némec theorem.

Medial and paramedial properties are the second order properties of algebras, in the sense of A. I. Maltsev and A. Church. In this regard, we define the other properties, co-medial and co-paramedial properties.

In this thesis we characterize co-medial and co-paramedial binary quasigroup pair operation, and as a consequence of these results we characterize co-medial and co-paramedial algebras with binary quasigroup operations.

The Aim and Objectives of the Dissertation

The main aims of the present thesis are the followings:

1. Representation of a regular medial algebra.
2. Connection of the generalized entropic property for a pair of operations and a medial pair of operations.
3. Representation of an n-ary paramedial groupoid with a J-regular element.
4. Representation of the regular paramedial algebra.
5. Representation of the paramedial algebra with binary quasigroup operations.
6. Representation of the co-medial algebra with binary quasigroup operations.
7. Representation of the co-paramedial algebra with binary quasigroup operations.

The Object of the Investigation

The objects of this investigation are the regular medial algebras, paramedial algebras, co-medial algebras, co-paramedial algebras, and algebras with quasigroup operations, regular algebras, regular elements and the generalized endomorphisms on algebras.

The Methods of the Investigation

In this thesis we used the results of the quasigroups and loops and universal algebraic theory, as well as, the concepts of group of the holomorphisms, regularity, idempotency, the generalized entropic property for pair of operations, the paramedial pair of operations, the co-medial pair of operations and the co-paramedial pair of operations.

Scientific Innovation

Following types of results are obtained in the thesis:

1. Linear representation of a regular medial algebra.
2. Connection of the generalized entropic property for a pair of operations and a medial pair of operations.
3. Defining the generalized endomorphism on algebra, and its connection with the medial algebra.
4. Linear representation of an n-ary paramedial groupoid with a J-regular element.
5. Linear representation of the paramedial algebra with a J-regular element.
6. Linear representation of the paramedial algebra with binary quasigroup operations.
7. Linear representation of the regular paramedial algebra.
8. Linear representation of the co-medial pair of quasigroup operations.
9. Linear representation of the co-medial algebra with binary quasigroup operations.
10. Linear representation of the co-paramedial pair of quasigroup operations.
11. Linear representation of the co-paramedial algebra with binary quasigroup operations.

All of the main results are new.

Theoretical and Practical Value

Medial, paramedial, co-medial and co-paramedial properties of algebras are the second order properties of algebras. These properties have many applications in various fields, such as: quasigroups theory, coding theory, cryptology, clones theory, graph theory, webs, nomograms and topological algebra.

The Approbation of the Results

The main results of the thesis have been presented to the following international scientific conferences:

- International Algebraic Conference Dedicated to the 70^{th} Birthday A. V. Yakovlev, June 19-24, (2010). St. Petersburg, Russia.
- International Conference Modern Algebra and Its Applications, September 20-26, (2010). Batumi, Georgia.
- The 7th IMT-GT International Conference on Mathematics, Statistics and its Applications, July 21-23, (2011). Bangkok, Thailand.
- The First International Scientific-Research Conference of Iranian Students, September 16-17, (2011). Yerevan, Armenia.
- The 2th International Conference of the Georgian Mathematical Union, September 15-19, (2011). Batumi, Georgia.
- International Conference Modern Algebra and Its Applications, September 19-25, (2011). Batumi, Georgia.
- Algebra and Mathematical Logic, International Conference Dedicated to 100^{th} Anniversary of V. V. Morozov, September 25-30, (2011). Kazan, Russia.

Publications

The main results of the thesis were published in eight scientific articles in the journals which we bring at the end of the Synopsis.

The Structure and Volume of the Thesis

The thesis is consisted of a Preface, four Chapters, Conclusion and a list of References. The publications of author are seven articles. The number of references is 77. The volume of the thesis is 115 pages.

The Main Content of the Thesis

Chapter1. Introduction

This chapter introduces some basic concepts which we need in the thesis. This chapter has three sections. In the first section, we introduce the concept of universal algebra, quasigroups and loops as the examples of universal algebras. In the second section, we introduce essential properties of the quasigroups that they will use in later chapters. Finally, in the third section, we introduce the concept of clone which we will use in the chapter three.

Chapter2. Representation of Regular Medial Algebras

Definition 2.1.1. An algebra, $A = (A, F)$, (without nullary operations) is called medial (entropic, abelian) if it satisfies the identity of mediality:

$$f(g(x_{11},...,x_{1n}),...,g(x_{m1},...,x_{mn})) = g(f(x_{11},...,x_{m1}),...,f(x_{1n},...,x_{mn})), \qquad (2.1)$$

for every n-ary $f \in F$ and m-ary $g \in F$.

Definition 2.1.2. Let $A = (A, F)$ be an algebra and $f \in F$. We say that the element e is the unit for the operation f, if:

$$f(x,e,...,e) = f(e,x,e,...,e) = \mathbf{L} = f(e,...,e,x) = x,$$

for every $x \in A$. The element e is a unit for the algebra (A, F), if it is a unit for every operation $f \in F$.

Definition 2.1.3. The element e, is idempotent for the operation f, if: $f(e,\ldots,e) = e$.
We say that the element e is idempotent for the algebra (A, F), if it is an idempotent for every operation $f \in F$.

Definition 2.1.4. Let (f, g) be a pair of m-ary and n-ary operations of the algebra, (A, F). For any element e, of A, let $a_1,...,a_m$ be mappings of A into A defined by

$$a_i : x \to f(e,...,e,x,e,...,e), \qquad (2.2)$$

with x at the i-th place. We call a_i, the i-th translation by e with respect to f. An element e is called i-regular with respect to f if a_i is a bijection. An element e is called i-regular for the pair operation (f, g), if it is an i-regular with respect to the both operations f and g. The element e is called i-regular for the algebra (A, F), if it is i-regular element for every pair operations $f, g \in F$. The element e is called regular for the algebra (A, F), if it is i-regular element for every operation $f \in F$ and every i's.

Definition 2.1.5. Let f be an m-ary operation and J be a non-empty subset of $\{1,2,...,m\}$, we will say that the element e is J-regular with respect to the operation f, if e is a j-regular element with respect to f, for all $j \in J$. The element e is J-regular element for the algebra (A, F), if e is a j-regular element with respect to every $f \in F$, for all $j \in J$, where $m = min\{|g| \,|\, g \in F\}$, and $m \geq 2$.

Theorem 2.1.3. Let (A, F) be a medial algebra with the idempotent element e which is i- and j-regular element of (A, F) for fixed i and j ($i \leq j$), then there exists a commutative semigroup $(A, +)$ with the unit element e, such that every operation $f \in F$ has the following linear representation

$$f(x_1,....,x_m) = a_1x_1 + \mathbf{L} + a_mx_m,$$

where $a_1,...,a_m$ are pairwise commuting endomorphisms of $(A, +), m \geq 2$. Furthermore, a_i, a_j are automorphisms.

Definition 2.2.1. Let $f, g \in F$ be *m*-ary and *n*-ary operations ($m \le n$), $\phi \ne J \subseteq \{1,2,...,m\}$ (where *J* contains at leas two elements) and $a_1,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_m,...,a_n$ are *J*-regular elements of the algebra *(A, f, g)*. The pair operation *(f, g)* is *(i, J)*-regular pair operation (where $i \in J$), if for every $x \in A$ we have the following equation:

$$f(a_1,...,a_{i-1},x,a_{i+1},...,a_m) = g(a_1,...,a_{i-1},x,a_{i+1},...,a_n), \qquad (2.3)$$

The pair operation *(f, g)* is a *J*-regular pair operation if *(f, g)* is *(i, J)*-regular for every $i \in J$. The pair operation *(f, g)* is a regular pair operation if *(f, g)* is *J*-regular pair operation for some $\phi \ne J \subseteq \{1,2,...,m\}$ (where *J* contains at leas two elements).

Theorem 2.2.1. Let *(A, f, g)* be a regular medial algebra with *m*-ary operation *f* and *n*-ary operation *g* ($m \le n$), then there is a commutative semigroup with an unit element *(A, +)*, such that

$$f(x_1,....,x_m) = g_1x_1 + \mathbf{L} + g_mx_m + d_1,$$

$$g(x_1,....,x_n) = l_1x_1 + \mathbf{L} + l_nx_n + d_2,$$

where, d_1, d_2 are fixed regular elements in *(A, +)* and $l_1,...,l_m, g_1,...,g_n$ are commuting automorphisms of the semigroup *(A, +)*.

Chapter3. Generalized Entropic Property

Definition 3.1.5. We say that a variety *V* (respectively, the algebra *A*) satisfies the generalized entropic property if for every *n*-ary operation *f* and *m*-ary operation *g* of *V* (of *A*) there exist *m*-ary term operations $t_1,...,t_n$ such that the identity:

$$f(g(x_{11},...,x_{1n}),...,g(x_{m1},...,x_{mn})) = g(t_1(x_{11},...,x_{m1}),...,t_n(x_{1n},...,x_{mn})), \qquad (3.2)$$

holds in *V* (in *A*).

Definition 3.1.6. Let *g* and *f* be *m*-ary and *n*-ary operations on the set *A*. We say that the pair of operations *(f, g)*, is entropic (or medial), if identity (2.1) holds in the algebra, *A = (A, f, g)*.

Definition 3.1.7. Let *g* and *f* be *m*-ary and *n*-ary operations on the set *A*. We say that the pair of operations *(f, g)*, satisfies the generalized entropic property if there exist m-ary term operations, $t_1,...,t_n$ of the algebra *A = (A, f, g)*, such that identity (3.2) holds in the algebra *A = (A, f, g)*. If *f* = *g*, then we say that the operation *f*, satisfies the generalized entropic property.

Theorem 3.1.2. Let *A = (A, F)* be an algebra and *(f, g)* be the pair of *n*-ary and *m*-ary operations with the unit element *e*. If *(f, g)* satisfies the generalized entropic property, then *(f, g)* is entropic.

Theorem 3.1.3. Every *n*-ary algebra *A = (A, F)*, with the unit element satisfying the generalized entropic property, is a mono-*n*-ary entropic algebra.

Theorem 3.1.4. Let *A = (A, f, g)* be an idempotent algebra with one *n*-ary and one *m*-ary operation (respectively *f, g*). If *g* is commutative and the pair *(f, g)* satisfies the generalized entropic property, then *(f, g)* is entropic.

Theorem 3.1.5. Every idempotent and commutative algebra $A = (A, f, g)$ with an n-ary and an m-ary operation, satisfying the generalized entropic property, is entropic.

Definition 3.2.1. Let $A = (A, F)$ be an algebra, then the mapping $w : A^n \to A$, is called the generalized endomorphism on the algebra A if, for every m-ary basic operation $f \in F$ there exist n-ary term operations $t_1,...,t_m$, of the algebra A, such that:

$$w(f(\underline{x}_1,...,\underline{x}_m))= f(t_1(\underline{x}_1),...,t_m(\underline{x}_m)),$$

where $\underline{x}_1,...,\underline{x}_m \in A^n$. (In the left hand of the above identity the operation f acting as operation of direct product). In the special case if $n = 1$ and $t_1 = \mathbf{L} = t_m = w$, then

$$w(f(\underline{x}_1,...,\underline{x}_m))= f(w(\underline{x}_1),...,w(\underline{x}_m)),$$

means that the mapping $w : A^n \to A$, is an endomorphism on the algebra A. If the algebra A is entropic algebra, then every operation of the algebra is a generalized endomorphism.

Theorem 3.2.1. Let $A = (A, f)$ be an idempotent and commutative mono-n-ary algebra. If f is the generalized endomorphism of the algebra A, then f is an entropic operation.

Theorem 3.2.2. Let $A = (A, F)$ be an algebra with the unit element e then for every generalized endomorphism $w : A^n \to A$ the pair of operations (w, f) is entropic (Where $f \in F$, is the m-ary basic operation, which we used in definition of the generalized endomorphism).

Theorem 3.2.3. Let $A = (A, F)$ be an n-ary algebra with the unit element e. If the algebra A, has a generalized endomorphism w, then the algebra, $A = (A, F)$ is the mono-n-ary entropic algebra.

Theorem 3.2.4. Let $A = (A, F)$ be an idempotent algebra. If $w : A^n \to A$ be a generalized endomorphism on the algebra A, then for every commutative m-ary operation $f \in F$, the pair of operations, (w, f) is entropic.

Theorem 3.2.5. Let $A = (A, F)$ be an idempotent and commutative algebra. If the algebra A has a generalized endomorphism, then A is an entropic algebra.

Theorem 3.2.6. Every idempotent and commutative n-ary algebra with a generalized endomorphism is a mono-n-ary entropic algebra.

Chapter4. Representation of Paramedial, Co-medial and Co-paramedial Algebras

Definition 4.1.1. Let $A = (A, f)$ be an n-ary groupoid, then $A = (A, f)$ is called paramedial (or paraentropic) if it satisfies the following identity of paramediality:

$$f(f(x_{11},...,x_{1n}),..., f(x_{n1},...,x_{nn}))= f(f(x_{nn},...,x_{1n}),..., f(x_{n1},...,x_{11})).$$

Theorem 4.1.1. Let (A, f) be a paramedial n-ary groupoid with a unit element e, then there exists a commutative semigroup $(A, +)$, with the unite element e such that $f(x_1,....,x_n)= x_1 + \mathbf{L} + x_n$.

Theorem 4.1.2. Let *(A, f)* be a paramedial *n*-ary groupoid with a regular idempotent element *e*, then there exists a commutative semigroup *(A, +)* with the unit element *e*, such that $f(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$, where, $a_1,\ldots,a_n$ are pairwise commuting automorphisms of *(A, +)*.

Theorem 4.1.3. Let *(A, f)* be an idempotent paramedial *n*-ary groupoid with a regular element *e*, then there is a commutative semigroup *(A, +)*, with the unit element *e*, such that $f(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$, where, $a_1,\ldots,a_n$ are pairwise commuting automorphisms of *(A, +)* and $a_1+.\cdots+a_n=1$.

Definition 4.1.3. Let *(A, +)* be a semigroup and *n* be an integer. We say that an element $b\in A$ is division by *n*, if there exists $a\in A$ such that $b=a+\cdots a=na$. If the element $a\in A$ is unique, then we say that *b* has a unique division by *n*, and we use the following notation: $a=\frac{b}{n}$.

Theorem 4.1.4. Let *(A, f)* be a commutative idempotent paramedial n-ary groupoid with a regular element *e*, then there is a commutative semigroup *(A, +)*, with the unit element *e*, such that: $f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, where the elements of this semigroup admitting unique division by *n*.

Theorem 4.2.2. Let *(A, f)* be a paramedial n-ary groupoid such that *A* contains a *J*-regular subgroupoid, then there is a commutative semigroup with unit element *(A, +)*, such that $f(x_1,\ldots,x_n)=g_1x_1+\cdots+g_nx_n+c$, where *c* is a fixed regular element in *(A, +)* and $g_1,\ldots,g_n$ are automorphisms of the semigroup *(A, +)*.

Definition 4.3.1. The algebra *A = (A, F)* (without nullary operations) is called paramedical (paraentropic) if it satisfies the identity of paramediality:

$$f(g(x_{11},\ldots,x_{1n}),\ldots,g(x_{m1},\ldots,x_{mn}))=g(f(x_{mn},\ldots,x_{1n}),\ldots,f(x_{m1},\ldots,x_{11})),$$

where f and g be *m*-ary and *n*-ary operations on a set A.

Theorem 4.3.1. Let *(A, F)* be a paramedial algebra with a unite element *e*, then there exists a commutative semigroup *(A, +)*, with the unite element *e*, such that every *m*-ary operation $f\in F$, has a linear representation as follows: $f(x_1,\ldots,x_n)=x_1+\cdots+x_n$.

Theorem 4.3.2. Let *(A, F)* be a paramedial algebra with the regular idempotent element *e*, then there exists a commutative semigroup *(A, +)* with the unit element *e*, such that every operation $f\in F$, has the following linear representation: $f(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$.

Theorem 4.4.2. Let *(A, f, g)* be a regular paramedial algebra with *m*-ary operation *f* and *n*-ary operation *g*, then there is a commutative semigroup *(A, +)*, such that

$$f(x_1,\ldots,x_m)=g_1x_1+\cdots+g_mx_m+d_1,$$

$$g(x_1,....,x_n) = l_1 x_1 + \mathbf{L} + l_m x_m + d_2,$$

where, d_1, d_2 are fixed regular elements in *(A, +)* and $l_1,...,l_m, g_1,...,g_n$ are commuting automorphisms of the semigroup *(A, +)*.

Definition 4.5.1. If *(Q,.)* is a group, then the bijection $a : Q \to Q$, is called a holomorphism of *(Q,.)* if $a(x.y^{-1}.z) = ax.(ay)^{-1}.az$, for every $x, y, z \in Q$. The set of all holomorphisms of *(Q,.)* is denoted by *Hol(Q,.)* , and it is a group under the superposition of mappings: $(a.b)x = b(ax)$, for every $x \in Q$.

Theorem 4.5.1. Let the set *Q*, forms a quasigroup under the binary operations, *f* and *g*. If the pair of binary operations *(f, g)*, is paramedial, then there exists a binary operation +, under which *Q* forms an abelian group, and for arbitrary elements $x, y \in Q$ we have:

$$f(x,y) = j_1(x) + y_1(y) + c_1,$$

$$g(x,y) = j_2(x) + y_2(y) + c_2,$$

where c_1, c_2 are fixed elements of *Q*, and j_i, y_i are automorphisms on the abelian group *(Q, +)*, for i = 1, 2, such that: $j_1 j_2 = y_2 y_1, j_2 j_1 = y_1 y_2, j_1 y_2 = j_2 y_1, y_2 j_1 = y_1 j_2$. The group (*Q, +*), is unique up to isomorphisms.

Theorem 4.5.2. Let *(Q, F)* is binary paramedial algebra with quasigroup operations, then there exists an abelian group *(Q, +)*, such that every operation $f_i \in F$ is represented by the following rule:

$$f_i(x,y) = j_i(x) + y_i(y) + c_i,$$

where $c_i \in Q$ and j_i, y_i are automorphisms on the abelian group *(Q, +)*, such that: $j_i j_j = y_j y_i, j_i y_j = j_j y_i, y_j j_i = y_i j_j$. The group *(Q, +)*, is unique up to isomorphisms.

Theorem 4.6.1. Let the set *Q* forms a quasigroup under the binary operations, *f* and *g*. If the pair of binary operations *(f, g)* is co-medial, then there exists a binary operation +, under which *Q* forms an abelian group, and for arbitrary elements $x, y \in Q$ we have:

$$f(x,y) = j_1(x) + y_1(y),$$

$$g(x,y) = j_1^{-1}(a_2(x) + y_2(y)),$$

where, j_i, y_i are bijections, for i = 1, 2 such that: $y_2(x) = c + y_1(j_1^{-1}(j_2(x)),\ j_1^{-1} y_1 \in Hol(Q, +)$ and *c* is a fixed element of *Q*. The group *(Q, +)*, is unique up to isomorphisms.

Theorem 4.6.2. Let *(Q, F)* is binary co-medial algebra with quasigroup operations, then there exists an abelian group *(Q, +)*, such that every operation $f_i \in F$ is represented by the following rule:

$$f_i(x,y) = j_i(x) + y_i(y) + c_i,$$

where $c_i \in Q$ and j_i, y_i are automorphisms on the abelian group *(Q, +)*, such that: $j_i y_j = y_j j_i$.

The group, (Q; +), is unique up to isomorphisms.

Theorem 4.6.3. Let the set *Q* forms a quasigroup under the binary operations, *f* and *g*. If the pair of binary operations *(f, g)* is co-paramedial, then there exists a binary operation +, under which *Q* forms an abelian group, and for arbitrary elements $x, y \in Q$ we have:

$$f(x,y) = j_1(x) + y_1(y),$$

$$g(x,y) = y_1^{-1}(j_2(x) + y_2(y)),$$

where, j_i, y_i are bijections, for i = 1, 2 such that: $y_2(x) = c + j_1(y_1^{-1}(j_2(x)),\ y_1^{-1} j_1 \in Hol(Q, +)$ and *c* is a fixed element of *Q*. The group *(Q, +)*, is unique up to isomorphisms.

Theorem 4.6.4. Let *(Q, F)* is binary co-paramedial algebra with quasigroup operations, then there exists an abelian group *(Q, +)*, such that every operation $f_i \in F$ is represented by the following rule:

$$f_i(x,y) = j_i(x) + y_i(y) + c_i,$$

where $c_i \in Q$ and j_i, y_i are automorphisms on the abelian group *(Q, +)*, such that: $j_i j_j = y_i y_j$.

The group, (Q, +), is unique up to isomorphisms.

List of Publications of the Author in the Journals

1. A. Ehsani, On a generalized endomorphism. Int. J. Algebra 5(2011), No. 29, 1427-1435.
2. A. Ehsani, On a generalized entropic property. Proc. Yerevan State Univ. Phys. and Math. Sci. (2010), No. 2, 55-57.
3. A. Ehsani, On regular co-medial algebras, Journal of Mathematics Research, Vol. 4, No. 2, (2012).
4. A. Ehsani, On the pair of operations with the generalized entropic property. Proc. of the ICMSA. Bangkok, Thailand. (2011), 40-45.
5. A. Ehsani, Some new results about the generalized entropic property. Australian J. Basic and Applied Sci. 8(2011), No. 5, 1229-1234.
6. A. Ehsani, The generalized entropic pair of operations and the generalized endomorphism. Proc. Int. Conference Modern Algebra and Its Applications. Batumi, Georgia. (2011), 73-77.
7. A. Ehsani, The Generalized entropic property for the pair of operations. J. of Contemporary Mathematical Analysis 46(2011), No. 1, 29-34.
8. A. Ehsani, The generalized entropic property for the mono-n-ary algebras. Proc. Yerevan State Univ. Phys. Math. Sci. (2011), No. 2, 63-66.

º½ñ³Ï³óáõÃÛáõÝ

²ÙÇñ ¾Ñë³ÝÇ
Ø»¹Ç³É ïÇåÇ Ñ³Ýñ³Ñ³ßÇíÝ»ñÇ Ý»ñÏ³Û³óáõÙÝ»ñÁ

Ատենախոսության մեջ ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները .

- Ենթադրենք *(A, F)* –ը մեդիալ հանրահաշիվ է՝ e իդեմպոտենտ տարրով, որը միաժամանակ *i*- ռեգուլյար և *j-ռեգուլյար է* ($i \leq j$), այդ դեպքում գոյություն կունենա միավորով *(A, +)* կոմուտատիվ կիսախումբն այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $f \in F$ գործողություն ունի հետևյալ գծային ներկայացումը՝ $f(x_1,....,x_m) = a_1 x_1 + \mathbf{L} + a_m x_m$, որտեղ $a_1,...,a_m$-ը *(A, +)* կիսախմբի զույգ առ զույգ տեղափոխական էնդոմորֆիզմներ են, $m \geq 2$: Դեռ ավելին a_i, a_j էնդոմորֆիզմները ավտոմորֆիզմներ են:
- Ենթադրենք *(A, f, g)-ը* *m*-տեղանի f գործողությամբ և n-տեղանի g գործողությամբ ($m \leq n$) ռեգուլյար, մեդիալ հանրահաշիվ է, այդ դեպքում գոյություն կունենա *(A, +)* միավորով կոմուտատիվ կիսախումբն այնպիսին, որ $f(x_1,....,x_m) = g_1 x_1 + \mathbf{L} + g_m x_m + d_1$, $g(x_1,....,x_n) = l_1 x_1 + \mathbf{L} + l_n x_n + d_2$, որտեղ, d_1, d_2-ը *(A, +)-ի* ռեգուլյար տարրեր են, $l_1,..., l_m, g_1,..., g_n$-ը *(A, +)-ի* տեղափոխական ավտոմորֆիզմներ են:
- Ենթադրենք *A = (A, f, g)-ը* *f n*-տեղանի և *g m*-տեղանի գործողություններով իդեմպոտենտ հանրահաշիվ է: Եթե *g*-ն տեղափոխական է, իսկ *(f, g)* զույգը բավարարում է ընդհանրացված էնտրոպիկության հատկությանը, ապա *(f, g)* զույգը էնտրոպիկ (մեդիալ) է:
- *n* -տեղանի և *m*-տեղանի գործողություններով յուրաքանչյուր *A = (A, f, g)* իդեմպոտենտ և տեղափոխական հանրահաշիվ, որը բավարարում է ընդհանրացված էնտրոպիկության հատկությանը էնտրոպիկ (մեդիալ) է:
- Ենթադրենք *A = (A, f)* –ը իդեմպոտենտ և տեղափոխական մոնո-*n-տեղանի* հանրահաշիվ է: Եթե *f-ը A* հանրահաշվի ընդհանրացված էնդոմորֆիզմ է, ապա այն էնտրոպիկ գործողություն է:
- Ենթադրենք *A = (A, F)-ը* իդեմպոտենտ հանրահաշիվ է: Եթե $w : A^n \to A$ արտապատկերումը A հանրահաշվի ընդհանրացված էնդոմորֆիզմ է, ապա յուրաքանչյուր $f \in F$ *m*-տեղանի տեղափոխական գործողության համար (w, f) գործողությունների զույգը էնտրոպիկ (մեդիալ) է:
- Ենթադրենք *A = (A, F)-ը* իդեմպոտենտ և տեղափոխական հանրահաշիվ է: Եթե *A* հանրահաշիվը ունի ընդհանրացված էնդոմորֆիզմ, ապա *A-ն* էնտրոպիկ (մեդիալ) հանրահաշիվ է:
- Յուրաքանչյուր իդեմպոտենտ և տեղափոխական *n* -տեղանի հանրահաշիվ, որն ունի ընդհանրացված էնդոմորֆիզմ, կլինի մոնո-*n*-տեղանի էնտրոպիկ (մեդիալ) հանրահաշիվ :
- Ենթադրենք *(A, f)-ը* *e* ռեգուլյար, իդեմպոտենտ տարրով *n*-տեղանի պարամեդիալ խմբակերպ է, այդ դեպքում գոյություն կունենա *e* միավորով տեղափոխական *(A, +)* կիսախումբն այնպիսին, որ $f(x_1,....,x_n) = a_1 x_1 + \mathbf{L} + a_n x_n$, որտեղ $a_1,...,a_n$-ը *(A, +)-ի* զույգ առ զույգ տեղափոխական ավտոմորֆիզմներ են:

- Ենթադրենք *(A, f)-ը* *n*-տեղանի պարամեդիալ խմբակերպ է այնպիսին, որ *A-ն* պարունակում է *J*-ռեգուլյար տարր, այդ դեպքում գոյություն կուննա միավորով *(A,+)* տեղափոխական կիսախումբն այնպիսին, որ $f(x_1,....,x_n)=g_1x_1+\mathbf{L}+g_nx_n+c$, որտեղ *c-ն* *(A, +)*կիսախմբի սևեռված ռեգուլյար տարր է , իսկ $g_1,...,g_n$-ը *(A, +)* կիսախմբի ավտոմորֆիզմներ են:
- Ենթադրենք *(A, F)-ը* ռեգուլյար, իդեմպոտենտ *e* տարրով պարամեդիալ հանրահաշիվ է , այդ դեպքում գոյություն կուննա *e* միավորով տեղափոխական *(A, +)* կիսախումբն այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $f\in F$ գործողություն ունի հետևյալ գծային ներկայացումը՝ $f(x_1,....,x_n)=a_1x_1+\mathbf{L}+a_nx_n$, որտեղ $a_1,...,a_n$-ը *(A, +)* կիսախմբի ավտոմորֆիզմներն են:
- Ենթադրենք *(A, f, g)-ը* *f* *m*-տեղանի գործողությամբ և *g* *n*-տեղանի գործողությամբ ռեգուլյար, պարամեդիալ հանրահաշիվ է, այդ դեպքում գոյություն կուննա *(A, +)* տեղափոխական կիսախումբն այնպիսին, որ $f(x_1,....,x_m)=g_1x_1+\mathbf{L}+g_mx_m+d_1$, $g(x_1,....,x_n)=l_1x_1+\mathbf{L}+l_mx_m+d_2$, որտեղ d_1,d_2 *(A, +)* կիսախմբի սևեռված ռեգուլյար տարրեր են, իսկ $l_1,...,l_m,g_1,...,g_n$-ը *(A, +)* կիսախմբի տեղափոխական ավտոմորֆիզմներ են:
- Ենթադրենք *(Q, F)-ը* քվազիխմբային գործողություններով պարամեդիալ հանրահաշիվ է, այդ դեպքում գոյություն կուննա *(Q, +)* աբելյան խումբն այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $f_i\in F$ գործողություն ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝ $f_i(x,y)=j_i(x)+y_i(y)+c_i$, որտեղ $c_i\in Q$, իսկ j_i,y_i-ը *(Q, +)* աբելյան խմբի ավտոմորֆիզմներ են այնպիսին, որ $j_ij_j=y_jy_i, j_iy_j=j_jy_i, y_jj_i=y_ij_j$: *(Q, +)* խումբն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ որոշվում է միարժեքորեն:
- Ենթադրենք *(Q,F)-ը* քվազիխմբային գործողություններով կո-մեդիալ (կո-էնտրոպիկ) հանրահաշիվ է, այդ դեպքում գոյություն կուննա *(Q, +)* աբելյան խումբն այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $f_i\in F$ գործողություն ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝ $f_i(x,y)=j_i(x)+y_i(y)+c_i$, որտեղ $c_i\in Q$, իսկ j_i,y_i-ը *(Q, +)* աբելյան խմբի ավտոմորֆիզմներ են այնպիսին, որ $j_iy_j=y_jj_i$: *(Q, +)* խումբն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ որոշվում է միարժեքորեն:
- Ենթադրենք *(Q, F)*-ը քվազիխբային գործողություններով երկտեղ կո-պարամեդիալ հանրահաշիվ է, այդ դեպքում գոյություն կուննա *(Q, +)* աբելյան խումբն այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $f_i\in F$ գործողություն ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝ $f_i(x,y)=j_i(x)+y_i(y)+c_i$, որտեղ $c_i\in Q$, իսկ j_i,y_i -ը *(Q, +)* աբելան խմբի ավտոմորֆիզմներ են այնպիսին, որ $j_ij_j=y_iy_j$: *(Q, +)* խումբն իզոմորֆիզմի ճշտությամբ որոշվում է միարժեքորեն:

Заключение

Амир Ехсани

Представления алгебр медиального типа

В диссертационной работе доказаны следующие основные результаты:

- Если (A, F) медиальная алгебра с идемпотентным элементом e, который одновременно является i-регулярным и j-регулярным для фиксированных i и j ($i \leq j$), то существует коммутативная полугруппа $(A, +)$ с единичным элементом e, такая что каждая операция $f \in F$ имеет линейное представление следующего вида: $f(x_1,\dots,x_m)=a_1x_1+\mathbf{L}+a_mx_m$, где $a_1,\dots,a_m$ попарно коммутирующие эндоморфизмы $(A, +), m \geq 2$. Более того, a_i, a_j являются автоморфизмами.
- Если (A, f, g) регулярная медиальная алгебра с m-местной операцией f и n- местной операцией g ($m \leq n$), то существует коммутативная полугруппа $(A, +)$ с единичным элементом такая, что $f(x_1,\dots,x_m)=g_1x_1+\mathbf{L}+g_mx_m+d_1$, $g(x_1,\dots,x_n)=l_1x_1+\mathbf{L}+l_nx_n+d_2$, где d_1, d_2-фиксированные регулярные элементы $(A, +)$, а $l_1,\dots,l_m, g_1,\dots,g_n$-коммутирующие автоморфизмы полугруппы $(A, +)$.
- Пусть (A, f, g) идемпотентная алгебра с одной m-местной операцией f и одной n-местной операцией g. Если g коммутативна, а пара (f, g) удовлетворяет обобщенному свойству энтропийности, то пара (f, g)- энтропийна (медиальна) .
- Каждая идемпотентная и коммутативная алгебра $A = (A, f, g)$ с n -арной и m-арной операциями удовлетворяющая обобщенному свойству энтропийности будет энтропийной (медиальной).
- Пусть $A = (A, f)$ идемпотентная и коммутативная моно-n-арная алгебра. Если f-обобщенный эндоморфизм алгебры A, то f- энтропийная операция.
- Пусть $A = (A, F)$ идемпотентная алгебра. *Если* $w: A^n \to A$ обобщенный эндоморфизм алгебры A, то для каждой m-арной коммуатативной операции $f \in F$, пара операций (w, f)- энтропийна (медиальна) .
- Пусть $A = (A, F)$ идемпотентная и коммутативная алгебра. Если алгебра A имеет обобщенный эндоморфизм, то A энтропийная (медиальная) алгебра.
- Каждая идемпотентная и коммутативная n-арная алгебра с обобщенным эндоморфизмом будет моно-n-арной энтропийной (медиальной) алгеброй.

- Если *(A, f)* парамедиальный *n*-арный группоид с регулярным идемпотентным элементом *e*, то существует коммутативная полурупла *(A, +)* с единичным элементом *e*, такая что $f(x_1,....,x_n)=a_1x_1+\mathbf{L}+a_nx_n$, где $a_1,...,a_n$ попарно коммутирующие автоморфизмы полугруппы *(A, +)*.
- Если *(A, f)* парамедиальный *n*-арный группоид содержащий *J*-регулярный элемент, то существует коммутативная полурупла *(A, +)* с единичным элементом, такая что $f(x_1,....,x_n)=g_1x_1+\mathbf{L}+g_nx_n+c$, где *c*-фиксированный регулярный элемент *(A, +)*, а $g_1,...,g_n$-автоморфизмы полугруппы *(A, +)*.
- Если *(A, F)* парамедиальная алгебра с регулярным идемпотентным элементом *e*, то существует коммутативная полурупла *(A, +)* с единичным элементом *e*, такая что каждая операция $f\in F$ имеет следующее линейное представление: $f(x_1,....,x_n)=a_1x_1+\mathbf{L}+a_nx_n$, где $a_1,...,a_n$- автоморфизмы полугруппы *(A, +)*.
- Если *(A, f, g)* регулярная парамедиальная алгебра с *m*-арной оперцией *f* и *n* -арной оперцией *g*, то существует коммутативная полурупла *(A, +)*, такая что $f(x_1,....,x_m)=g_1x_1+\mathbf{L}+g_mx_m+d_1$, $g(x_1,....,x_n)=l_1x_1+\mathbf{L}+l_mx_m+d_2$, где d_1,d_2-фиксированные регулярные элементы *(A, +)*, а $l_1,...,l_m,g_1,...,g_n$ коммутирующие автоморфизмы полугруппы *(A, +)*.
- Пусть *(Q, F)* бинарня парамедиальная алгебра с квазигрупповыми операциями, тогда существует абелева группа *(Q, +)* такая, что каждая операция $f_i\in F$ имеет следующее представление: $f_i(x,y)=j_i(x)+y_i(y)+c_i$, где $c_i\in Q$, а j_i,y_i-автоморфизмы абелевой группы *(Q, +)* такие, что $j_ij_j=y_jy_i, j_iy_j=j_jy_i, y_jj_i=y_ij_j$. Группа *(Q, +)* единственна с точностью до изоморфизма.
- Пусть *(Q,F)* бинарня ко-медиальная (ко-энтропийная) алгебра с квазигрупповыми операциями, тогда существует абелева группа *(Q, +)* такая что каждая операция $f_i\in F$ имеет следующее представление: $f_i(x,y)=j_i(x)+y_i(y)+c_i$, где $c_i\in Q$, а j_i,y_i- автоморфизмы абелевой группы *(Q, +)* такие, что $j_iy_j=y_jj_i$. Группа *(Q, +)* единственна с точностью до изоморфизма.
- Пусть *(Q,F)* бинарная ко-парамедиальная алгебра с квазигрупповыми операциями, тогда существует абелева группа *(Q, +)* такая что каждая операция $f_i\in F$ имеет следующее представление: $f_i(x,y)=j_i(x)+y_i(y)+c_i$, где $c_i\in Q$, а j_i,y_i-автоморфизмы абелевой группы *(Q, +)* такие, что $j_ij_j=y_iy_j$. Группа *(Q, +)* единственна с точностью до изоморфизма.