ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ջաֆար Փաշազադե

ԻԴԵՄՊՈՏԵՆՏ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՒՄԸ: ԴԵ ՄՈՐԳԱՆԻ ԵՐԿԿԻՍԱԽՄԲԵՐ և ԵՌԱԿԻՍԱԽՄԲԵՐ

Ա.01.09 – "Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն" մասնագիտությամբ

ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2010

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Джафар Пашазаде

ХАРАКТЕРИСТИКА МНОГОЧЛЕНОВ ИДЕМПОНЕНТНЫХ АЛГЕБР. БИПОЛУГРУППЫ И ТРИПОЛУГРУППЫ ДЕ МОРГАНА

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени кандидата физикоматематических наук по специальности 01.01.09 – "Математическая кибернетика и математическая логика"

ЕРЕВАН - 2010

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար` ֆ.մ.գ.դ. Յու.Մ.Մովսիսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ` ֆ.մ.գ.դ. Հ.Բ.Մարանջյան
ֆ.մ.գ.թ. Ս.Ս.Դավիդով

Առաջատար կազմակերպություն` ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2010 թ. դեկտեմբերի 22 -ին ժ.14.00-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 "Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն" մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով` Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան, 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքվել է 2010 թ. նոյեմբերի 20-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար
Ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Վ.Ժ.Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель: д.ф.м.н. Ю.М.Мовсисян

Официальные оппоненты д.ф.м.н. Г.Б.Маранджян
к.ф.м.н. С.С.Давидов

Ведущая организация Институт проблем информатики и автоматизаци НАН РА

Защита состоится 22-го декабря 2010 г. в 14:00 на заседании специализированного совета 044 "Математическая кибернетика и математическая логика" ВАК при ЕГУ по адресу: 0025, г.Ереван, ул.Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 20-го ноября 2010 г.

Ученый секретарь специализированного совета
кандидат физ.мат.наук В.Ж.Думанян

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի արդիականությունը: Հանրահաշվի **բազմանդամի** կամ **հանրահաշվական գործողության (**թերմային գործողության) գաղափարը ներմուծվում է ինդուկցիայով: Դիցուք $(U;F)$-ը հանրահաշիվ է: Այս հանրահաշվի U հենքային բազմության n-տեղանի **տրիվիալ գործողություններ** են կոչվում հետևյալ ֆունկցիաները՝

$$e_i^n(x_1,...,x_n)=x_i,\quad i=1,...,n:$$

(U,F) հանրահաշվի n-տեղանի հանրահաշվական գործողությունները (բազմանդամները) սահմանվում են հետևյալ կերպ.

ա) U հենքային բազմության յուրաքանչյուր n-տեղանի տրիվիալ գործողություն հանդիսանում է $(U;F)$ հանրահաշվի n-տեղանի հանրահաշվական գործողություն (բազմանդամ);

բ) յուրաքանչյուր $f\in F$ m-տեղանի գործողության և ցանկացած $g_1,...,g_m$ n-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների համար

$$f(g_1,...,g_m)(x_1,...,x_n)=f(g_1(x_1,...,x_n),...,g_m(x_1,...,x_n))$$

գործողությունը ևս կոչվում է տրված $(U;F)$ հանրահաշվի n-տեղանի հանրահաշվական գործողություն (բազմանդամ);

գ) ուրիշ n-տեղանի հանրահաշվական գործողություններ (բազմանդամներ) չկան:

U բազմության վրա որոշված գործողությունը կոչվում է $(U;F)$ հանրահաշվի հանրահաշվական գործողություն (բազմանդամ), եթե այն հանդիսանում է $(U;F)$ հանրահաշվի n-տեղանի հանրահաշվական գործողություն որևէ n բնական թվի համար:

Օրինակ, եթե $(U;+,\cdot)$ -ը կավար է (lattice), ապա այդ դեպքում U-ի բոլոր երկտեղանի հանրահաշվական գործողությունների դասը բաղկացած է հետևյալ չորս բազմանդամներից.

$$e_1^{(2)}(x_1,x_2)=x_1,\ e_2^{(2)}(x_1,x_2)=x_2, p(x_1,x_2)=x_1+x_2\ ,\ q(x_1,x_2)=x_1x_2\ :$$

(U,F) հանրահաշիվը կոչվում է իդեմպոտենտ, եթե $f(x,x,\ldots,x)=x$ նույնությունը տեղի ունի հանրահաշվի կամայական f (հանրահաշվական) գործողության համար:

U իդեմպոտենտ հանրահաշվի հանրահաշվական գործողությունների (բազմանդամների) բնութագրման խնդիրը դրվել է 1960-ական թվականներին Է. Մարչևսկու կողմից: Դիցուն $\Phi_1(U)$-ն բոլոր այն դրական ամբողջ n թվերի բազմությունն է, որոնց համար գոյություն ունի ոչ-տրիվիալ հանրահաշվական n-տեղանի գործողություն U-ում, որը կախված է բոլոր փոփոխականներից (էական հանրահաշվական գործողություն): Նշանակենք

$\Phi_2(U)$-ով բոլոր այն դրական ամբողջ n թվերի բազմությունը, որոնց համար գոյություն ունի ոչ-տրիվիալ հանրահաշվական n-տեղանի գործողություն U-ում, որը կախված է առնվազն $n-1$ փոփոխականներից: Նշանակենք $\Phi_3(U)$-ով բոլոր այն դրական ամբողջ n թվերի բազմությունը, որոնց համար գոյություն ունի ոչ-տրիվիալ հանրահաշվական n-տեղանի գործողություն U-ում, որը կախված է առնվազն $n-2$ փոփոխականներից: $\Phi_1(U)$ բազմության նկարագրման խնդիրը՝ U իդեմպոտենտ հանրահաշիվների դեպքում ևս առաջարկվել է Մարչևսկու կողմից: Մասնավորապես, նա [15]-ում ապացուցել է, որ եթե U հանրահաշվում գոյություն չունի հաստատուն գործողություն, բայց գոյութուն ունի n-տեղանի սիմետրիկ (նույնիսկ քվազի-սիմետրիկ) գործողություն, ապա $\Phi_1(U)$ բազմությունը պարունակում է թվաբանական պրոգրեսիա $n+(n-1)k, (k=0,1,2,\ldots)$: Այդ արդյունքը n=2 դեպքում նախկինում ստացվել էր նաև Պլոնկայի կողմից [24]-ում: [32]-ում Կ. Ուրբանիկը բնութագրել է $\Phi_1(U)$-ն և բոլոր երկտեղանի հանրահաշվական գործողությունների բազմությունը U իդեմպոտենտ հանրահաշվի համար, երբ $2\in\Phi_1(U)$ և $\Phi_1(U)\neq\{2,3,\ldots\}$: Նա ապացուցել է, որ այդ բազմությունը վերջավոր Բուլյան հանրահաշիվ է հետևյալ գործողությունների նկատմամբ՝

$$\begin{aligned}(f\wedge g)(x,y)&=f(g(x,y),y),\\ (f\vee g)(x,y)&=f(g(x,y),y),\\ \tilde{f}(x,y)&=f(y,x):\end{aligned}\qquad(1)$$

Բնականորեն ծագում է նույն հարցը U իդեմպոտենտ հանրահաշվի երեք-տեղանի և չորս-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների համար: Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ երբ գոյություն ունի $r\geq 2$ ամբողջ թիվ այնպես, որ $r\in\Phi_1(U)$ և $r+2\notin\Phi_2(U)$, ապա բոլոր երեք-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների բազմությունը կազմում է ֆիքսված տարրով վերջավոր Դե Մորգանի հանրահաշիվ՝ հետևյալ գործողությունների նկատմամբ.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x,y,z)&=f(z,y,x),\\ (f\vee g)(x,y,z)&=f(g(x,y,z),g(y,y,z),z),\\ (f\wedge g)(x,y,z)&=f(x,g(x,y,y),g(x,y,z)):\end{aligned}\qquad(2)$$

Նշենք, որ ֆիքսված տարրով (կետով) Դե Մորգանի հանրահաշիվը մի հանրահաշիվ է՝ $D=(D;+,\cdot,-,0,1,\phi)$, որտեղ $(D;+,\cdot,0,1)$-ը սահմանափակ բաշխական կավար է, որն օժտված է քվազի-լրացման գործողությամբ՝ $-$ և ϕ հաստատունով ու բավարարում է հետևյալ պայմաններին (նույնություններին) .

a. $\overline{(a+b)}=\bar{a}\cdot\bar{b}$,
b. $\bar{\bar{a}}=a$,
c. $a+\bar{a}+\phi=a+\bar{a}$,
d. $\bar{0}=1$,
e. $\bar{\phi}=\phi$:

Հետևաբար, $(D;+,\cdot,-,0,1)$ ռեդուկցիան Դե Մորգանի հանրահաշիվ է:

Որոշ հեղինակներ, օրինակ Զ.Եսիկը [11], Յ.Բրզոզովսկին, Յ.Յ.Լոուն և Ռ.Նեգուլեսկուն [3], Յ.Բրզոզովսկին և Ց.Սեգերը [4] և Մ.Յոելին և Ս.Ռինոնը [34] անվանել են ֆիքսված տարրով Դե Մորգանի հանրահաշիվը երեք-տեղանի հանրահաշիվ, այն դեպքում, երբ Յու.Մովսիսյանը [20] և Ե.Բ.Այխելբերգերը [10] անվանել են այն Քլինիի հանրահաշիվներ:

1959 թ. Մյուլլերը [21] – ում սահմանել է ֆիքսված տարրով Դե Մորգանի հանրահաշիվը $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ բազմության վրա՝ հոսանքի աղմուկի փոխարկումների երևույթները շղթայի ներսում ուսումնասիրելու համար: 1964 թ. Մ.Յոելին և Ս.Ռինոնը [34] -ում կիրառել են այդ հանրահաշիվները հավասարակշռված աղմուկները կոմբինացված էլեկտրականացված շղթանում: 1995 թ. Յ.Բրզոզովսկին և Ց.Սեգերը [4] -ում նկարագրել են ֆիքսված տարրով Դե Մորգանի հանրահաշիվների լրացուցիչ կիրառություններ:

U իդեմպոտենտ հանրահաշվի չորս-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների համար ատենախոսության մեջ ցույց է տրվում, որ երբ գոյություն ունի $r \geq 2$, այնպիսին որ $r \in \Phi_1(U)$ և $r+3 \notin \Phi_3(U)$, ապա U-ի բոլոր չորս-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների բազմությունը կազմում է Դե Մորգանի հանրահաշիվ՝ հետևյալ գործողությունների նկատմամբ.

$$\begin{gathered}\overline{f}(x,y,z,t) = f(t,z,y,x)\,,\\ (f \vee g)(x,y,z,t) = f(g(x,y,z,t), g(y,y,z,t), g(z,z,z,t), t)\,,\\ (f \wedge g)(x,y,z,t) = f(x, g(x,y,y,y), g(x,y,z,z), g(x,y,z,t)) :\end{gathered} \tag{3}$$

Աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները:

Ներկայացվող աշխատանքի հիմնական նպատակները երեքն են.

1. Բնութագրել իդեմպոտենտ հանրահաշիվների երեք-տեղանի և չորս-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների բազմությունները;
2. Բնութագրել բազմության վրա որոշված երկտեղանի և երեք-տեղանի ֆունկցիաները՝ համապատասխանաբար որպես Դե Մորգանի երկկիսախումբ և Դե Մորգանի եռակիսախումբ;
3. Նկարագրել Բուլյան հանրահաշիվները որպես մատրիցների և ֆունկցիաների հանրահաշիվներ:

Հետազոտության օբյեկտը:

Հետազոտության հիմնական օբյեկտներն են իդեմպոտենտ հանրահաշիվները, երկտեղանի, երեք-տեղանի և չորս-տեղանի ֆունկցիաների և հանրահաշվական գործողությունների բազմությունները, համապատասխանաբար որոշված բազմության և իդեմպոտենտ հանրահաշիվների վրա:

Հետազոտության մեթոդները:

Ատենախոսության մեջ օգտագործվել են ներդրման մեթոդները, մասնավորապես Դե Մորգանի և Բուլյան հանրահաշիվներում, Դե Մորգանի երկկիսախմբերում և Դե Մորգանի եռակիսախմբերում:

Արդյունքների նորությունը:

Աշխատանքում ապացուցվել են չորս ուղղությամբ արդյունքներ.

1. Իդեմպոտենտ U հանրահաշվի, որն ունի առնվազն մեկ r-տեղանի $(r \geq 2)$ հանրահաշվական գործողություն, որը կախված է բոլոր փոփոխականներից, այնպես որ գոյություն չունի $r+2$-տեղանի հանրահաշվական գործողություն կախված առնվազն $r+1$ փոփոխականներից, բոլոր երեք-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների բազմությունը նկարագրվում է որպես ֆիքսված տարրով վերջավոր Դե Մորգանի հանրահաշիվ և բնութագրում է այդ Դե Մորգանի հանրահաշիվը:

2. Իդեմպոտենտ U հանրահաշվի, որն ունի առնվազն մեկ r-տեղանի $(r \geq 2)$ հանրահաշվական գործողություն, որը կախված է բոլոր փոփոխականներից, այնպես որ գոյություն չունի $r+3$-տեղանի հանրահաշվական գործողություն կախված առնվազն $r+1$ փոփոխականներից, բոլոր չ ո ր ս -տեղանի հանրահաշվական գործողությունների բազմությունը նկարագրվում է որպես վերջավոր Դե Մորգանի հանրահաշիվ և բնութագրում է այդ Դե Մորգանի հանրահաշիվը:

3. Բոլոր երկտեղանի և երեք-տեղանի ֆունկցիաների բազմությունը, որոշված բազմության վրա, նկարագրվում են են համապատասխանաբար որպես Դե Մորգանի երկկիսախումբ և Դե Մորգանի եռակիսախումբ և բնութագրում են այդ հանրահաշիվները:

4. Բուլյան հանրահաշիվները բնութագրվում են որպես մատրիցների և ֆունկցիաների հանրահաշիվներ:

Բոլոր հիմնական արդյունքները նոր են:

Ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը:

Ատենախոսությունում ստացված արդյունքները կարող են օգտագործվել իդեմպոտենտ հանրահաշիվների ուսումնասիրության ընթացքում, Դե Մորգանի հանրահաշիվների տեսության մեջ, $(2,n)$-կիսախմբերը և բուլյան հանրահաշիվները հետազոտելիս, ինչպես նաև ունիվերսալ հանրահաշիվները դիտարկելիս:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան:

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները զեկուցվել են հետևյալ միջազգային գիտաժողովներում.

1. CSIT (2007), Երևան, Հայաստան,
2. Հանրահաշվի և երկրաչափության առաջին միջազգային գիտաժողով, մայիսի 16-20, 2007, Երևան, Հայաստան,
3. "Մալցևյան հանդիպումներ" միջազգային գիտաժողով, Նովոսիբիրսկի պետական համալսարան, օգոստոսի 24-28, 2009, Ռուսաստան,
4. ,, Ժամանակակից հանրահաշիվ և նրա կիրառությունները" միջազգային գիտաժողով, սեպտեմբեր 20-26, 2010, Բաթումի, Վրաստան:

Հրատարակությունները:

Ատենախոսության թեմայով հրատարակված են 6 գիտական աշխատանք:

Աշխատանքի կառուցվածքը և ծավալը:

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, 3 գլուխներից, եզրահանգումից և օգտագործված գրականության ցանկից: Աշխատանքի ծավալը 88 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Աշխատանքը բաղկացած է երեք գլուխներից: Առաջին գլխում բնութագրվել են իդեմպոտենտ հանրահաշիվների բոլոր երեք-տեղանի և 4-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների բազմությունները համապատասխանաբար որպես Դե Մորգանի հանրահաշիվ ֆիքսված տարրով և որպես Դե Մորգանի հանրահաշիվ: Երկրորդ գլխում բնութագրվել են բազմության վրա որոշված երկտեղանի և երեք-տեղանի ֆունկցիաների բազմությունները և նկարագրվել են դրանք համապատասխանաբար որպես Դե Մորգանի երկկիսախումբ և Դե Մորգանի եռակիսախումբ: Երրորդ գլխում Բուլյան հանրահաշիվները նկարագրվում են որպես մատրիցային հանրահաշիվներ, երկտեղանի և երեք-տեղանի ֆունկցիաների հանրահաշիվներ:

Գլուխ 1. Իդեմպոտենտ հանրահաշիվների երեք-տեղանի և չորս-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների նկարագրումը:

Ենթադրենք $L=(L;+,\cdot,0,1)$ - ը սահմանափակ բաշխական կավար է: Դիցուք

$$M_L^{(3)}=\{[a_1,a_2,a_3]:a_1,a_2,a_3\in L,\ a_i\cdot a_j\neq 0\,(i\neq j),\ a_1+a_2+a_3=1\}:$$

Սահմանենք հետևյալ գործողությունները մատրիցների արտադրյալի միջոցով: Բոլոր $a=[a_1,a_2,a_3]$ - երի և $b=[b_1,b_2,b_3]$ - երի համար $M_L^{(3)}$ - ից՝

$$a+b=[a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_1+b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a\cdot b=[a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2+b_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

և քվազի-լրացումը՝

$$a^{\sim}=[a_3,a_2,a_1]\ :$$

Լեմմ 1. *Յուրաքանչյուր սահմանափակ բաշխական L կավարի համար $M_L^{(3)}$ բազմությունը վերևում սահմանված գործողություններով Դե Մորգանի հանրահաշիվ է ֆիքսված տարրով:*

Թեորեմ 1. *Դիցուք U-ն իդեմպոտենտ հանրահաշիվ է և $\Phi_1(U)$-ն բոլոր դրական ամբողջ n թվերի բազմությունն է, որոնց համար գոյություն ունի U-ում հանրահաշվական ոչ տրիվիալ n-տեղանի գործողություն՝ կախված բոլոր փոփոխականներից: Ենթադրենք $\Phi_2(U)$-ն բոլոր դրական ամբողջ n թվերի բազմությունն է, որոնց համար գոյություն ունի U-ում հանրահաշվական ոչ տրիվիալ n-տեղանի գործողություն՝ կախված առնվազն $n-1$ փոփոխականներից: Դիցուկ գոյություն ունի $r\geq 2$ ամբողջ թիվ, այնպես որ $r\in\Phi_1(U)$ և $r+2\notin\Phi_2(U)$: Այդ դեպքում U-ի բոլոր երեք-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների բազմությունը կազմում է ֆիքսված տարրով վերջավոր Դե Մորգանի հանրահաշիվ հետևյալ գործողությունների նկատմամբ՝*

$$f^{\sim}(x,y,z)=f(z,y,x),$$
$$(f\vee g)(x,y,z)=f(g(x,y,z),g(y,y,z),z),$$
$$(f\wedge g)(x,y,z)=f(x,g(x,y,y),g(x,y,z)),$$

և իզոմորֆ է որևէ ֆիքսված տարրով Դե Մորգանի $M_L^{(3)}$ մատրիցային հանրահաշվի որոշ L կավարի համար: Կամայական երեք-տեղանի հանրահաշվական f գործողություն U հանրահաշվում բավարարում է հետևյալ հավասարություններին բոլոր $x,y,z\in U$ տարրերի համար՝

$$f(f(x,y,z),f(y,y,z),z)=f(x,y,z),$$

$$f(x,f(x,y,y),f(x,y,z))=f(x,y,z)$$

(հետևաբար այս հավասարությունները ճիշտ են որպես գերնույնություններ):

Ենթադրենք $L=(L;+,\cdot,0,1)$ - ը հանդիսանում է սահմանափակ բաշխական կավար: Դիցուք

$$M_L^{(4)}=\{[a_1,a_2,a_3,a_4]: a_1,a_2,a_3,a_4\in L,\ a_i\cdot a_j=0\,(i\neq j),\ a_1+a_2+a_3+a_4=1\}\ :$$

$a=[a_1,a_2,a_3,a_4]$ - ի և $b=[b_1,b_2,b_3,b_4]$ - ի համար $M_L^{(4)}$ - ից սահմանենք $a+b$ և $a\cdot b$ գործողությունները որպես մատրիցների արտադրյալ

$$a+b=[a_1,a_2,a_3,a_4]\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & b_1+b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & b_1+b_2+b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a\cdot b=[a_1,a_2,a_3,a_4]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2+b_3+b_4 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3+b_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}:$$

Ավելին, մենք սահմանում ենք քվազի-լրացում՝

$$\overline{a}=[a_4,a_3,a_2,a_1]:$$

Լեմմ 2. *Յուրաքանչյուր սահմանափակ բաշխական L կավարի համար $M_L^{(4)}$ բազմությունը վերևում սահմանված գործողություններով Դե Մորգանի հանրահաշիվ է:*

Թեորեմ 2. *Դիցուք U -ն իդեմպոտենտ հանրահաշիվ է և $\Phi_1(U)$ -ն սահմանվում է ինչպես նախկինում, իսկ $\Phi_3(U)$-ն բոլոր դրական ամբողջ n թվերի բազմությունն է, որոնց համար գոյություն ունի U - ում հանրահաշվական ոչ տրիվիալ n -տեղանի գործողություն՝ կախված առնվազն $n-2$ փոփոխականներից: Դիցուկ գոյություն ունի $r\geq 2$ ամբողջ թիվ, այնպես որ $r\in\Phi_1(U)$ և $r+3\notin\Phi_3(U)$: Այդ դեպքում U-ի բոլոր չորս-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների բազմությունը կ³½ÙáõÙ ¿ վերջավոր Դե Մորգանի հանրահաշիվ հետևյալ գործողությունների նկատմամբ՝*

$$\overline{f}(x,y,z,t)=f(t,z,y,x),$$

$$(f\vee g)(x,y,z,t)=f(g(x,y,z,t),g(y,y,z,t),g(z,z,z,t),t),$$

$$(f\wedge g)(x,y,z,t)=f(x,g(x,y,y,y),g(x,y,z,z),g(x,y,z,t))$$

և իզոմորֆ է որևէ Դե Մորգանի $M_L^{(4)}$ մատրիցային հանրահաշվի որոշ L կավարի համար: Կամայական չորս-տեղանի հանրահաշվական f գործողություն U հանրահաշվում բավարարում է հետևյալ հավասարություններին բոլոր $x,y,z,t\in U$ տարրերի համար՝

$$f(f(x,y,z,t),f(y,y,z,t),f(z,z,z,t),t)=f(x,y,z,t),$$

$$f(x,f(x,y,y,y),f(x,y,z,z),f(x,y,z,t))=f(x,y,z,t)$$

(հետևաբար այս հավասարությունները ճիշտ են որպես գերնույնություններ):

Գլուխ 2. Դե Մորգանի երկկիսախմբի և Դե Մորգանի եռակիսախմբի նկարագրումը բազմության վրա որոշված ֆունկցիաների վրա:

Երկկիսախումբը $(B,+,\cdot)$ հանրահաշիվ է՝ երկու երկտեղանի զուգորդական $\cdot$ և $+$ գործողություններով, իսկ **Դե Մորգանի երկկիսախումբը** մի $(D,+,\cdot,-,0,1)$ հանրահաշիվ է այնպես որ $(D,+,\cdot)$ - ը երկկիսախումբ է և քվազի-լրացման գործողությունը $-:D\to D$ և 0, 1 հաստատունները բավարարում են հետևյալ պայմաններին բոլոր $x,y\in D$ համար

1. $x+0=0+x=x$,
2. $x\cdot 1=1\cdot x=x$,
3. $\overline{\overline{x}}=x$,
4. $\overline{x+y}=\overline{x}\,\overline{y}$,
5. $\overline{x\cdot y}=\overline{x}+\overline{y}$:

Դիցուք Ω-ն բազմություն է և D_Ω-ն բոլոր երկտեղանի $A:\Omega\times\Omega\to\Omega$ ֆունկցիաների բազմությունն է: Սահմանենք հետևյալ գործողությունները D_Ω- ում.

$$(A+B)(x,y)=A(x,B(x,y)),$$
$$(A\cdot B)(x,y)=A(B(x,y),y),$$
$$\overline{A}(x,y)=A(y,x):$$

Այդ գործողություններով և հաստատունների դիտարկմամբ՝

$$0(x,y)=y,\quad 1(x,y)=x,$$

ստանում ենք $(D_\Omega,+,\cdot,-,0,1)$ Դե Մորգանի երկկիսախումբ, որը ատենախոսության մեջ անվանվում է **երկտեղանի ֆունկցիաների Դե Մորգանի երկկիսախումբ:**

Եթե D հանրահաշիվը D' հանրահաշվի ենթահանրահաշիվն է, ապա D'-ը կոչվում է D-ի վրա-հանրահաշիվ:

Թեորեմ 3. *Որպեսզի Դե Մորգանի $(D,+,\cdot,-,0,1)$ երկկիսախումբը լինի իզոմորֆ Դե Մորգանի երկտեղանի ֆունկցիաների $(D_\Omega,+,\cdot,-,0,1)$ երկկիսախմբին (որոշված Ω-ի վրա) անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի տեղի ունենան հետևյալ պայմանները.*

1. *D- ի բոլոր զրո տարրերի $n(D)$ բազմությունը ունի նույն հզորությունը, ինչ որ Ω - ն:*
2. *Բոլոր $A,B\in D$ և $N\in n(D)$ տեղի ունեն*

$$(A\cdot B)+N=(A+N)\cdot(B+N),$$
$$(A+B)\cdot N=(A\cdot N)+(B\cdot N):$$

3. *Բոլոր $A,B\in D$, եթե $(A\cdot N')+N=(B\cdot N')+N$ բոլոր $N,N'\in n(D)$, ապա $A=B$:*
4. *Եթե $(D',+,\cdot,-,0,1)$ Դե Մորգանի երկկիսախումբը վրա-հանրահաշիվ է $(D,+,\cdot,-,0,1)$ Դե Մորգանի երկկիսախմբի համար, որը բավարարում է (2) և (3) պայմաններին, որտեղ $n(D')=n(D)$, ապա $D'=D$:*
5. *Ցանկացած $N\in n(D)$ -համար $\overline{N}=N$:*

$(D,+,\cdot,*)$ հանրահաշիվը կոչվում է **եռակիսախումբ,** եթե $+$, $\cdot$, $*$ հանդիսանում են D-ի վրա որոշված երկտեղանի զուգորդական գործողություններ: **Դե Մորգանի**

եռակիսախումբը մի հանրահաշիվ է՝ $(D,+,\cdot,*,-,0,1,e)$ այնպիսին, որ $(D,+,\cdot,*)$ - ը հանդիսանում է եռակիսախումբ, իսկ քվազի-լրացման գործողությունը $(-:D\to D)$ և 0, 1, e հաստատունները բոլոր $x,y\in D$ տարրերի համար բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

1. $x+0=0+x=x$,
2. $x\cdot 1=1\cdot x=x$,
3. $x*e=e*x=x$,
4. $\overline{\overline{x}}=x$,
5. $\overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$,
6. $\overline{x\cdot y}=\overline{x}+\overline{y}$,
7. $\overline{x*y}=\overline{x}*\overline{y}$:

Դիցուք Ω-ն կամայական ոչ դատարկ բազմություն է: Նշանակենք T_{Ω}-ով բոլոր երեք-տեղանի ֆունկցիաների բազմությունը՝ որոշված Ω-ի վրա : T_{Ω}- ում սահմանենք հետևյալ գործողությունները.

$$
\begin{aligned}
&(A+B)(x,y,z)=A(x,y,B(x,y,z)),\\
&(A*B)(x,y,z)=A(x,B(x,y,z),z),\\
&(A\cdot B)(x,y,z)=A(B(x,y,z),y,z),\\
&\overline{A}(x,y,z)=A(x,y,z):
\end{aligned}
$$

Այդ գործողություններով և հետևյալ հաստատունների դիտարկմամբ՝

$$I_1(x,y,z)=x, I_2(x,y,z)=y, I_3(x,y,z)=z,$$

ստացվող $(T_{\Omega},+,\cdot,*,I_3,I_1,I_2)$ հանրահաշիվը հանդիսանում է Դե Մորգանի եռակիսախումբ և կոչվում է Ω- **ում որոշված երեք-տեղանի ֆունկցիաների Դե Մորգանի եռակիսախումբ:**

Թեորեմ 4. *Որպեսզի Դե Մորգանի* $(D,+,\cdot,*,-,0,1,e)$ *եռակիսախումբը լինի իզոմորֆ Դե Մորգանի երեքտեղանի ֆունկցիաների* $(T_{\Omega},+,\cdot,*,-,0,1,I_3,I_1,I_2)$ *եռակիսախմբին (որոշված* Ω *- ի վրա) անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի տեղի ունենան հետևյալ պայմանները.*

1. D *- ի բոլոր զրո տարրերի* $n(D)$ *բազմությունը ունի նույն հզորությունը, ինչ* Ω *- ն:*
2. *Բոլոր* $A,B\in D$ *և* $N\in n(D)$ *տեղի ունեն*

$$(A+B)\cdot N=(A\cdot N)+(B\cdot N),\quad (A+B)*N=(A*N)+(B*N),,$$

$$(A\cdot B)+N=(A+N)\cdot(B+N),\qquad (A*B)+N=(A+N)*(B+N),$$

$$(A+B)*N=(A*N)+(B*N),\quad (A\cdot B)*N=(A*N)\cdot(B*N),$$

3. *Բոլոր* $A,B\in D$ *համար, եթե*

$[(A\cdot N_1)*N_2]+N_3=[(B\cdot N_1)*N_2]+N_3$

բոլոր $N_1, N_2, N_3 \in n(D)$ *, ապա* $A = B$ *:*

4. Եթե $(D', +, \cdot, *)$ *եռակիսախումբը վրա-հանրահաշիվ է* $(D, +, \cdot, *)$ *եռակիսախմբի համար, որը բավարարում է (2) և (3) պայմաններին, որտեղ* $n(D') = n(D)$ *, ապա* $D' = D$ *:*

5. Ցանկացած $N \in n(D)$ *-համար* $\overline{N} = N$ *:*

Գլուխ 3. Բուլյան հանրահաշիվների բնութագրումը:

Ենթադրենք $B = (B, +, \cdot, \sim, 0, 1)$ - ը բուլյան հանրահաշիվ է: Դիցուք

$$M_B^2 = \{[a_1, a_2] : a_1 + a_2 = 1, \; a_1 a_2 = 0, \; a_1, a_2 \in B\} \text{ :}$$

Սահմանենք հետևյալ գործողությունները որպես մատրիցների արտադրյալ

$$ab = [a_1, a_2]\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a + b = [a_1, a_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{a} = [a_2, a_1],$$

բոլոր $a = [a_1, a_2]$- երի և $b = [b_1, b_2]$-երի համար M_B^2– ից:

Թեորեմ 5*. Եթե* B *-ն բուլյան հանրահաշիվ է, ապա* M_B^2 *բազմությունը նշված գործողությունների նկատմամբ բուլյան հանրահաշիվ է: Եվ հակառակը, յուրաքանչյուր* B *բուլյան հանրահաշիվ ներդրվում է* M_B^2 *բուլյան հանրահաշվի մեջ:*

Մենք օգտագործում ենք այս արդյունքը, երեք-տեղանի ֆունկցիաների միջոցով բուլյան հանրահաշիվների ներկայացման համար:

Հիմնական արդյունքները և եզրահանգումները

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

1. Եթե հ դեմպոտենտ U հանրահաշիվն ունի առնվազն մեկ r- տեղանի $(r > 1)$ հանրահաշվական գործողություն, որը կախված է բոլոր փոփոխականներից, իսկ գոյություն չունի $r+2$ - տեղանի հանրահաշվական գործողություն կախված առնվազն $r+1$ փոփոխականներից, ապա U հանրահաշվի բոլոր երեք-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների բազմությունը կազմում է ֆիքսված տարրով վերջավոր Դե Մորգանի հանրահաշիվ և բնութագրում է այդ Դե Մորգանի հանրահաշիվը:

2. Եթե իդեմպոտենտ U հանրահաշվն ունի առնվազն մեկ r- տեղանի $(r>1)$ հանրահաշվական գործողություն, որը կախված է բոլոր փոփոխականներից, իսկ գոյություն չունի $r+3$- տեղանի հանրահաշվական գործողություն կախված առնվազն $r+1$ փոփոխականներից, ապա U հանրահաշվի բոլոր չորս-տեղանի հանրահաշվական գործողությունների բազմությունը կազմում է վերջավոր Դե Մորգանի հանրահաշիվ և բնութագրում է այդ Դե Մորգանի հանրահաշիվը:

3. Բոլոր երկտեղանի ֆունկցիաների բազմությունը, որոշված բազմության վրա, բնութագրվել է որպես Դե Մորգանի երկկիսախումբ:

4. Բոլոր երեք-տեղանի ֆունկցիաների բազմությունը, որոշված բազմության վրա, բնութագրվել է որպես Դե Մորգանի եռակիսախումբ:

5. Բուլյան հանրահաշիվները բնութագրվել են որպես մատրիցների և ֆունկցիաների հանրահաշիվներ:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրատարակված աշխատությունների ցանկ

1. J. Pashazadeh, *A characterization of De Morgan bisemigroup of binary functions*, Int.J. of Algebra and Computation, vol 18, No.5(2008), 951-956.

2. J. Pashazadeh, *On the representation of Boolean Algebras*, FJMS, vol. 26, No 3 (2007), 789-794 (with Yu. M. Movsisyan).

3. J. Pashazadeh, *An isomorphism theorem on algebras of triple semigroup of ternary functions over a set*, FJMS,32(3)(2007),423-430.

4. J. Pashazadeh, *A Cayley Theorem for Boolean and Demorgan algebras*, Proceeding of CSIT(2007). Yerevan. Armenia.pp 63-65.

5. J. Pashazadeh, *Characterization of binary polynomials of idempotent algebras,* Procedings of The International Conference ,, Modern Algebra and Its Applications". Batumi Shota Rustaveli State University. September 20-26,2010, pp 128-131 (with Yu. M. Movsisyan).

6. J. Pashazadeh, *On the Number of 4-ary polynomials in idempotent algebras*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, Vol.18, 1(2010), 41-47 (with Yu. M. Movsisyan).

.

Резюме

Джафар Пашазаде

Характеристика многочленов идемпотентных алгебр.

Биполугруппы и триполугруппы Де Моргана

В диссетации получены следующие основные результаты

1. Множество всех трехместных алгебраических операций идемпотентной алгебры U, которая имеет по крайней мере одну r- местную ($r>1$) алгебраическую операцию, зависящая от каждой переменной, такая что не существует $r+2$-местная алгебраическая операция, зависящая по крайней мере от $r+1$ переменных, образует конечную алгебру Де Моргана с неподвижным элементом и характеризуется эта алгебра.

2. Множество всех 4 – местных алгебраических операций идемпотентной алгебры U, которая имеет по крайней мере одну r- местную ($r>1$) алгебраическую операцию, зависящая от каждой переменной, такая что не существует $r+3$-местная алгебраическая операция, зависящая по крайней мере от $r+1$ переменных, образует конечную алгебру Де Моргана и характеризуется эта алгебра Де Моргана.

3. Множество всех бинарных функций, определенных на множестве, характеризованы как биполугруппа Де Моргана.

4. Множество всех трехместных функций, определенных на множестве, характеризуется как триполугруппа Де Моргана.

5. Булевы алгебры характеризуются как алгебры матриц и функций.

Jafar Pashazade

Characterization of polynomials of idempotent algebras.

DeMorgan bisemigroups and triple semigroups