ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գասպարյան Արման Հարությունի

ՅԱԿՈԲԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ԱՐԱԳԱՑՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐ

Ա.01.07 – «Հաշվողական մաթեմատիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2012

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Гаспарян Арман Арутюнович

АЛГОРИТМЫ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ПОЛИНОМАМ ЯКОБИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.07 – "Вычислительная математика"

Ереван 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆ. մ. գ. դ., ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսեսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Հ. Հովհաննիսյան
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Վ. Մելաձե

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2012 թ. հունիսի 12 -ին, ժամը $14^{\underline{00}}$ -ին, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025 Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2012 թ. մայիսի 10 -ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝
ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Վ. Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель: д. ф.-м. н., академик А. Б. Нерсесян

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук А. О. Оганесян
доктор физ.-мат. наук Г. В. Меладзе

Ведущая организация: Государственный инженерный университет Армении

Защита состоится 12 -го июня 2012 г., в $14^{\underline{00}}$ часов на заседании действующего в ЕГУ специализированного совета ВАК 044 "Математическая кибернетика и математическая логика" по адресу: 0025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 10 -го мая 2012 г.

Ученый секретарь специализированного совета,
кандидат физ.-мат. наук В. Ж. Думанян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Общеизвестна важная прикладная роль разложений по классической системе многочленов Якоби. Однако, если разлагаемая функция имеет точки разрывов, применение ее соответствующих урезанных разложений малоэффективно. Тема актуальна, поскольку до сих пор для классических ортогональных многочленов (в отличие, например, от случая рядов Фурье) не были предложены методы ускорения сходимости разложений для кусочно-гладких функций.

Цель и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка эффективных схем ускорения сходимости рядов по ортонормальной системе полиномов Якоби $\{\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ для кусочно-гладкой функции $f(x)$, $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$, которая имеет только конечное количество точек разрывов: $\{a_i\}$, $i = 1, \ldots, m$, $m \geq 1$.

Известно, что усеченный ряд Фурье-Якоби

$$S_N^{(\alpha,\beta)}(f) = \sum_{n=0}^{N} f_n^{(\alpha,\beta)} \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x),\ x \in [-1,1] \tag{1}$$

малопригоден для восстановлениия значений кусочно-гладкой функции $f(x)$, так как вблизи точек разрывов проявляется явление Гиббса.

В работе ставились следующие задачи:

1. Разработка алгоритмов ускорения сходимости рядов по системе полиномов Якоби и, в частности, по полиномам Гегенбауэра и Лежандра[1].

2. Построение программных пакетов в системе программирования MATHEMATICA 7 и проведение численных экспериментов.

3. Оценка эффективности алгоритмов на основе численных результатов.

Объект исследования. Разложения кусочно-гладких функций по полиномам Якоби.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались методы математического анализа, дифференциальных уравнений и вычислительные методы.

Научная новизна. Все полученные результаты новые.

[1] Разложения по многочленам Чебышева не рассматриваются, так как они сводятся, - заменой переменной, - к классическим рядам Фурье и поэтому на этот случай автоматически переносятся уже известные методы ускорений.

Практическая значимость. Полиномы Якоби (в частности, Гегенбауэра и Лежандра) широко используются в практической, научной и технической областях.

Апробация полученных результатов. Результаты диссертационной работы докладывались на семинарах отдела дифференциальных и интегральных уравнений института математики НАН Армении, на общем семинаре факультета информатики и прикладной математики ЕГУ и на семинаре факультета прикладной математики и информатики РАУ.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 4-х научных статьях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы (37 наименований). Объем работы - 109 стр.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** приводится обзор проблематики и краткое описание содержания работы.

Глава 1 посвящена разработке схемы ускорения сходимости разложений по ортонормальной системе полиномов Якоби для кусочно-гладкой функции f, которая имеет конечное количество точек разрывов: $\{a_i\}$, $i = 1, \ldots, m$, $m \geq 1$ и известны только коэффициенты Фурье-Якоби $\{f_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n=0}^{N}$, $N >> 1$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ и точки разрывов $\{a_i\}$, $i = 1, \ldots, m$. Здесь, в схеме ускорения, приблизительно находятся и используются скачки $A_{0i} = f(a_i + 0) - f(a_i - 0)$ разлагаемой функции f в точках разрывов $\{a_i\}$, $i = 1, \ldots m$, $m \geq 1$. Скачки производной функции f в точках разрывов $\{a_i\}$ обозначаются через $A_{1i} = f'(a_i + 0) - f'(a_i - 0)$.

В разделе 1.1 приводятся известные формулы и факты для ортонормальных полиномов Якоби $\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $n \geq 0$, $x \in [-1, 1]$, используемые в дальнейшем. Описание схемы ускорения сходимости разложений по ортонормальным полиномам Якоби для кусочно-гладкой функции $f(x)$ начинается (подраздел 1.2.1) со случая, когда функция $f(x)$ имеет одну точку разрыва: $-1 < a_1 < 1$ и $f(x) \in C^2[-1, a_1]$ и $f(x) \in C^2[a_1, 1]$. Далее приводится схема ускорения в случае двух точек разрыва. Общий случай, когда функция f имеет $m \geq 1$ точек разрыва, приводится в подразделе 1.2.3.

Опишем схему ускорения более подробно. Как известно[2], ортонормальные полиномы Якоби $\{\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ ортогональны в весовом пространстве $L_w^2[-1, 1]$, с весом $w(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $n \geq 0$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ и удовлетворяют

[2] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1971. - 296с.

дифференциальному уравнению:

$$(1-x^2)y''(x)+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\,x)y'(x)=-l_n\,y(x),\; l_n=n(n+\alpha+\beta+1). \quad (2)$$

Интервал $[-1,1]$ в формуле для коэффициентов Фурье-Якоби

$$f_n^{(\alpha,\beta)}=(f_n^{(\alpha,\beta)},\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x))=\int_{-1}^{1}f(x)\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)w(x)dx$$

разобьем на части следующим образом: $-1=a_0<a_1<...<a_m<a_{m+1}=1$. Тогда

$$f_n^{(\alpha,\beta)}=\int_{a_0}^{a_1}f(x)\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)w(x)dx+\cdots+\int_{a_m}^{a_{m+1}}f(x)\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)w(x)dx. \quad (3)$$

После выполнения интегрирования по частям (предполагается, что $f(x)\in C^2[a_j,a_{j+1}], j=0,...,m$), получим (учитывая свойство производной полиномов Якоби)

$$f_n^{(\alpha,\beta)}=\int_{-1}^{1}f(x)\,\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,(1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\beta}dx=\Omega_0^n+\Omega_1^n+I_m,$$

$$\Omega_0^n=l_n^{-1/2}\sum_{i=1}^{m}A_{0i}\,(1-a_i)^{\alpha+1}\,(1+a_i)^{\beta+1}\,\tilde{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(a_i),$$

$$\Omega_1^n=-l_n^{-1}\sum_{j=1}^{m}A_{1j}\,(1-a_j)^{\alpha+1}\,(1+a_j)^{\beta+1}\,\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(a_j),$$

$$I_m=-l_n^{-1}\sum_{k=0}^{m}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)(((1-x)^{\alpha+1}\,(1+x)^{\beta+1}\,f(x))''-$$
$$-(f(x)\,(1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\beta}\,(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\,x))')dx. \quad (4)$$

В схеме ускорения используются следующие кусочно-постоянные функции ($i=1,\ldots,m$):

$$\Phi^{0i}(x)=\begin{cases}1, & a_i\le x\le a_{i+1}\\ 0, & \text{в ост. случ.}\end{cases} \quad (5)$$

Явные выражения коэффициентов Фурье-Якоби ϕ_n^{0k}, $k=1,\ldots,m$, $n=0,\ldots,N$ функций $\Phi^{0k}(x)$, $k=1,\ldots,m$, $n=0,\ldots,N$ получаются с использованием известной формулы для неопределенного интеграла:

$$I_1=\int\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,w(x)dx=-(h_n^{(\alpha,\beta)})^{-1}(1-x)^{\alpha+1}(x+1)^{\beta+1}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)/(2n). \quad (6)$$

При заданных скачках $\{A_{0k}\}$, $k = 1, \ldots, m$, схема ускорения сходимости по ортонормальной системе полиномов Якоби $\{\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ определяется следующим образом:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(f_n^{(\alpha,\beta)} - \sum_{k=1}^{m}(\phi_n^{0k}\sum_{i=1}^{k}A_{0i}))\,\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \sum_{k=1}^{m}(\Phi^{0k}(x)\,\sum_{i=1}^{k}A_{0i}) \simeq$$

$$F_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(f_n - \sum_{k=1}^{m}(\phi_n^{0k}\sum_{i=1}^{k}A_{0i}))\,\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \sum_{k=1}^{m}(\Phi^{0k}(x)\,\sum_{i=1}^{k}A_{0i}). \tag{7}$$

Отметим, что здесь равенство слева являетя очевидным тождеством. В этой схеме использована идея А.Н. Крылова[3](относящаяся к случаю классического ряда Фурье), и, как видим, для восстановления значений разлагаемой функции $f(x)$ используется усеченный ряд функции

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{m}(\Phi^{0k}(x)\sum_{i=1}^{k}A_{0i}), \tag{8}$$

которая уже непрерывна в интервале $[-1, 1]$, что и обеспечивает более высокую скорость сходимости по сравнению с усеченным рядом Фурье-Якоби (1).

В данной схеме предполагается, что известны точные величины скачков разлагаемой функции. Однако важно, что с практической точки зрения можно ограничиться знанием только точек расположения скачков разлагаемой функции f (аналогично подходу К. Экгофа[4] в случае классических рядов Фурье). В нашем случае можно получить приблизительные величины скачков функции f, отбрасывая из (4) слагаемые Ω_1^n и I_m (эти члены можем проигнорировать, когда $n >> 1$), поэтому

$$f_n^{(\alpha,\beta)} \simeq \Omega_0^n = l_n^{-1/2}\,\sum_{i=1}^{m}A_{0i}\,(1-a_i)^{\alpha+1}\,(1+a_i)^{\beta+1}\,\tilde{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(a_i). \tag{$*$}$$

Таким образом, используя приближенное уравнение:

$$f_n^{(\alpha,\beta)} = l_n^{-1/2}\,\sum_{i=1}^{m}\tilde{A}_{0i}\,(1-a_i)^{\alpha+1}\,(1+a_i)^{\beta+1}\,\tilde{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(a_i) \tag{$**$}$$

и, зафиксировав значения $n = N - m + 1$, $N - m + 2$, ..., N, где $(N + 1)$ - количество заданных коэффициентов Фурье-Якоби (предполагаем, что $N >> 1$) получаем систему линейных уравнений относительно приблизительных скачков

[3] *Крылов А.Н.* Лекции о приближенных вычислениях. Л: Изд. АН СССР, 1933. - 541с.
[4] *Eckhoff K.S.* Math. Comp, 1995, V. 64, № 210, P. 671-690.

$\{\tilde{A}_{0k}\}$, $k = 1, \ldots, m$[5]. Выбор значений n вышепривиденным способом обоснован тем, что чем больше это значение, тем меньше величина ошибки при переходе от соотношения (∗) к уравнению (**). Система полученных линейных уравнений в векторном виде выглядит так: $F_P^m = M0_P^m\, A0_P^m$, где

$$M0_P^m = \begin{pmatrix} Y_{N-m+1}(\alpha,\beta,a_1) & \ldots & Y_{N-m+1}(\alpha,\beta,a_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_N(\alpha,\beta,a_1) & \ldots & Y_N(\alpha,\beta,a_m) \end{pmatrix},$$

$$A0_P^m = \begin{pmatrix} A_{01} \\ \vdots \\ A_{0m} \end{pmatrix}, F_P^m = \begin{pmatrix} l_{N-m+1}^{1/2}\, f_{N-m+1}^{(\alpha,\beta)} \\ \vdots \\ l_N^{1/2}\, f_N^{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix},$$

$$Y_n(\alpha,\beta,a) = (1-a)^{\alpha+1}(1+a)^{\beta+1}\tilde{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(a). \tag{9}$$

Решая эту систему, найдем (при условии обратимости соответствующей матрицы[6]) приблизительные значения величин A_{0k}, $k = 1, \ldots, m$.

Описанный алгоритм назовем алгоритмом **Первого Типа**. Таким образом, имея только точки разрыва кусочно-гладкой функции $f(x)$ и конечное количество ее коэффициентов по системе Якоби (и даже не имея никакой другой информации о разлагаемой функции), можем ускорять сходимость разложения этой функции (т.е. определять значения $f(x)$ более точно, чем посредством (1)).

Приведем некоторые теоретические оценки для схемы (7), лежащей в основе алгоритма ускорения первого типа.

Лемма. *Пусть $f(x) \in C^2[a_j, a_{j+1}], j = 0, ..., m,$ и $q = max(\alpha, \beta)$. Тогда, если скачки $\{A_{0i}\}$ и $\{A_{1i}\}$ в формуле (4) определены точно, справедливы оценки*

$$\begin{cases} |\Omega_0^n| \le C_0, |\Omega_1^n| \le C_1 n^{-2}, & \text{когда } -1 < q < -1/2 \\ |\Omega_0^n| \le C_0 n^{q+1/2}, |\Omega_1^n| \le C_1 n^{q-3/2}, & \text{когда} -1/2 \le q, \end{cases} \tag{10}$$

где постоянные $C_0 > 0$ и $C_1 > 0$ зависят соответственно только от величин скачков $\{A_{0i}\}$ и $\{A_{1i}\}$ (и не зависят от их локализации).

Укажем теперь одно достаточное условие равномерной сходимости.

[5] В дальнейшем, ради простоты, вместо $\tilde{A}_{0k}$ быдем использовать запись A_{0k}.

[6] В диссертации приведен анализ некоторых случаев необратимости возникающих в уравнениях матриц, а также коррекции алгоритмов в этом случае (см. также ниже стр. 9 и 12).

Теорема 1 (*о равномерной сходимости*). *Пусть* $f(x) \in C^2[a_j, a_{j+1}], j = 0, ..., m,\ q = max(\alpha, \beta) < 0$ и

$$F_N^0(x) = \sum_{n=0}^{N} (f_n^{(\alpha,\beta)} - \Omega_0^n)\, \tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) + G(x),\ G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_0^n\, \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Тогда, если скачки $\{A_{0i}\}$ *в формуле (4) определены точно, то справедливы оценки*

$$\begin{cases} \|f(x) - F_N^0(x)\|_{L_\infty} \le\ d_1\, N^{2\,q}, & -1/2 \le q < 0 \\ \|f(x) - F_N^0(x)\|_{L_\infty} \le\ d_2\, N^{-1}, & -1 < q < -1/2, \end{cases} \tag{11}$$

где постоянные $d_1 > 0$ *и* $d_2 > 0$ *зависят только от величин* $\{A_{1i}\}$ *скачков производной разлагаемой функции (и не зависят от локализации этих скачков).*

Замечание. На самом деле не важно, что в конце выражения F_N^0 фигурирует функция G в виде указанного ряда. Нетрудно убедиться, что *Теорема 1* сохраняет силу, если вместо $G(x)$ взять любую кусочно-гладкую функцию $G(x) \in C^2[a_j, a_{j+1}], j = 0, \ldots, m$, обладающую теми же скачками, что и $f(x)$, а вместо Ω_0^n подставить ее коэффициенты Фурье-Якоби. При этом финкция G может быть использована в основе алгоритма ускорения только тогда, когда (в отличие от G в *Теореме 1*) ее значения можно быстро вычислить с заданной точностью, как и значения ее коэффициентов Фурье-Якоби. Именно такая (кусочно-постоянная) функция и используется в предложенном выше алгоритме первого типа (см. (5)).

Таким образом, формула (7) обеспечивает равномерную сходимость $F_N(x)$ к $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Далее, в подразделе 1.2.4, приводятся блок-схемы алгоритмов ускорения первого типа в случаях, когда разлагаемая функция имеет одну, две и $m \ge 3$ точек разрыва.

В главе 2 описывается метод ускорения сходимости разложений по ортонормальной системе полиномов Якоби, в основе которого лежит нахождение и использование скачков как самой кусочно-гладкой функции $f(x)$, так и ее производной. Как и в главе 1, здесь предполагается, что известны только коэффициенты Фурье-Якоби и точки разрывов функции.

В подразделе 2.2.1 описывается схема ускорения в случае одной точки разрыва, а в подразделе 2.2.2 - схема ускорения в общем случае, когда функция f имеет m точек разрыва: $-1 < a_1 < \cdots < a_m < 1$, выполнены условия $f(x) \in C^2[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, m$.

Скачки первых производных $\{A_{1k}\}, k = 1, \ldots, m$ и скачки $\{A_{0k}\}$ функции $f(x)$ можно приблизительно вычислить, отбрасывая в (4) только член I_m. В этом случае получим $f_n^{(\alpha,\beta)} = \Omega_0^n + \Omega_1^n$ и, приписав значению n величины $N-2m+1,\dots,N\,(N>2m+1)$, получим $2m$ уравнений для определения $2m$ указанных скачков.

Таким образом, задача приводится к решению линейной системы уравнений, имеющей (в векторной записи) вид: $F_P^{2m} = M1_P^{2m}\,A1_P^{2m}$, где

$$M1_P^{2m} = \begin{pmatrix} Y_{\tilde N+1}(\alpha,\beta,a_1) & E_{\tilde N+1}(\alpha,\beta,a_1) & \dots & Y_{\tilde N+1}(\alpha,\beta,a_m) & E_{\tilde N+1}(\alpha,\beta,a_m) \\ Y_{\tilde N+2}(\alpha,\beta,a_1) & E_{\tilde N+2}(\alpha,\beta,a_1) & \dots & Y_{\tilde N+2}(\alpha,\beta,a_m) & E_{\tilde N+2}(\alpha,\beta,a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_N(\alpha,\beta,a_1) & E_N(\alpha,\beta,a_1) & \dots & Y_N(\alpha,\beta,a_m) & E_N(\alpha,\beta,a_m) \end{pmatrix}$$

$$A1_P^{2m} = \begin{pmatrix} A_{01} \\ A_{11} \\ \vdots \\ A_{0m} \\ A_{1m} \end{pmatrix}, F_P^{2m} = \begin{pmatrix} l_{\tilde N+1}^{1/2}\, f_{\tilde N+1}^{(\alpha,\beta)} \\ l_{\tilde N+2}^{1/2}\, f_{\tilde N+2}^{(\alpha,\beta)} \\ \vdots \\ l_{N-1}^{1/2}\, f_{N-1}^{(\alpha,\beta)} \\ l_N^{1/2}\, f_N^{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}$$

$$E_n(\alpha,\beta,a) = -l_n^{-1/2}(1-a)^{\alpha+1}(1+a)^{\beta+1}\tilde P_n^{(\alpha,\beta)}(a),\ \tilde N = N-2m. \tag{12}$$

В данном случае, дополнительно к $\{\Phi^{0i}(x)\}$, используются кусочно-линейные функции $\{\Phi^{1i}(x)\}$, $i=1,\dots,m$:

$$\Phi^{1i}(x) = \begin{cases} 0, & x \le a_i \\ x-a_i, & a_i \le x \le a_{i+1} \\ a_{i+1}-a_i, & \text{в ост. случ.} \end{cases}. \tag{13}$$

Аналогично (7), схема ускорения сходимости здесь принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(f_n^{(\alpha,\beta)} - \sum_{k=1}^{m}(\phi_n^{0k}\,(\sum_{i=1}^{k}A_{0i}) + \phi_n^{1k}\,(\sum_{j=1}^{k}A_{1j})))\tilde P_n^{(\alpha,\beta)}(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}(\Phi^{0k}(x)\,(\sum_{i=1}^{k}A_{0i}) + \Phi^{1k}(x)(\sum_{j=1}^{k}A_{1j})) \simeq \sum_{n=0}^{N}(f_n^{(\alpha,\beta)} - \sum_{k=1}^{m}(\phi_n^{0k}\,(\sum_{i=1}^{k}A_{0i}) +$$

$$+\phi_n^{1k}\,(\sum_{j=1}^{k}A_{1j})))\tilde P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \sum_{k=1}^{m}(\Phi^{0k}(x)\,(\sum_{i=1}^{k}A_{0i}) + \Phi^{1k}(x)(\sum_{j=1}^{k}A_{1j})). \tag{14}$$

Для эффективной реализации данной схемы необходимо вычислить коэффициенты Фурье-Якоби функций (5) и (13) при произвольных значениях параметров

Якоби $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Однако, для получения коэффициентов функций (13), следует вычислить неопределенный интеграл

$$I_2 = \int x\, \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, w(x)\, dx,\ n \geq 0,\ w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

но для этого (в отличие от интеграла I_1, см. (6)) мы не имеем простых явных формул. Поэтому пришлось воспользоваться известным представлением

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{n} \binom{n+\alpha}{m} \binom{n+\beta}{n-m} (x-1)^{n-m}(x+1)^m,$$

сводящим задачу к вычислению интегралов

$$I_3 = \int x\,(1-x)^{\alpha+n-k}\,(1+x)^{\beta+k}\, dx,\ k = 0, \ldots, n.$$

В случае полиномов Лежандра (частный случай полиномов Якоби, когда $\alpha = \beta = 0$, т.е. $w(x) = 1$) интегралы эти вычисляются явно (но в виде суммы) и мы приходим к алгоритмам **Второго Типа**.

В общем же случае явные выражения интегралов I_3 содержат специальные функции, вычисление которых производится медленно и с существенными неконтролируемыми ошибками. Поэтому в работе используется численное интегрирование в среде MATEMATIKA 7, которое, хоть и требует весьма значительного времени, поддается эффективному контролю точности. Это приводит к алгоритму **Третьего Типа**.

Далее формулируется Теорема 2, согласно которой, при применении алгоритмов второго и третьего типов, сходимость обеспечена, если $q < 1/2$ (если скачки A_{0i}, A_{1i}, $i = 1, \ldots, m$ определены точно).

Теорема 2 (*о равномерной сходимости*). *Пусть* $f(x) \in C^3[a_j, a_{j+1}], j = 0, ..., m$, $q = max(\alpha, \beta) < 1/2$ и

$$F_N^1(x) = \sum_{n=0}^{N} (f_n^{(\alpha,\beta)} - \sum_{k=1}^{m} (\phi_n^{0k}\, (\sum_{i=1}^{k} A_{0i}) + \phi_n^{1k}\, (\sum_{j=1}^{k} A_{1j}))) \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) + G(x),$$

$$G(x) = \sum_{k=1}^{m} (\Phi^{0k}(x)\, (\sum_{i=1}^{k} A_{0i}) + \Phi^{1k}(x) (\sum_{j=1}^{k} A_{1j})).$$

Тогда, если скачки $\{A_{0i}\}$ *и* $\{A_{1i}\}$ *определены точно, то справедливы оценки*

$$\begin{cases} \|f(x) - F_N^1(x)\|_{L_\infty} \leq\ d_3\, N^{2\,q-1}, & -1/2 \leq q < 1/2 \\ \|f(x) - F_N^1(x)\|_{L_\infty} \leq\ d_4\, N^{-2}, & -1 < q < -1/2, \end{cases}$$

где постоянные $d_3 > 0$ и $d_4 > 0$ зависят только от величин $\{A_{0i}\}$, $\{A_{1i}\}$ и $\{A_{2i}\}$ (и не зависят от локализации этих скачков).

В разделах 1.3, 2.4 представлены результаты численных экспериментов. В частности, рассматривались следующие функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеющие соответственно одну ($a_1 = 3/4$) и две ($a_1 = -2/3$, $a_2 = 1/3$) точки разрыва.

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin((4+3i)x)/2, & -1 \le x < 3/4 \\ ie^{(2+i)x}, & 3/4 \le x \le 1 \end{cases},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 3\cos(x+1/2), & -1 \le x < -2/3 \\ e^{2x}, & -2/3 \le x < 1/3 \\ \sin(x/2), & 1/3 \le x \le 1 \end{cases}. \tag{15}$$

Приведем численные результаты для функций (15), которые были получены применением разработанных в работе программных пакетов ускорения. Ниже используются обозначения:

- *Classic* - реализация классического подхода (1).
- *JacA0*, *JacA0Two* - реализации алгоритма первого типа в случаях, когда разлагаемая функция имеет, соответственно, одну и две точки разрыва.
- *LegA0A1Two* - реализация алгоритма второго типа в случае, когда функция имеет две точки разрыва.
- *JacA0A1*, *JacA0A1Two* - реализации алгоритма третьего типа в случаях одной и двух точек разрыва соответственно.

Таблица 1.

L^2_w - ошибки при восстановлении значений функции $f_1(x)$, при значениях параметров Якоби $\alpha = 3/2$, $\beta = 5/2$

коэфф.	*Classic*		*JacA0*		*JacA0A1*	
	L^2_w ош.	время	L^2_w ош.	время	L^2_w ош.	время
N = 25	$4.19\ 10^{-1}$	0.015 с.	$4.38\ 10^{-2}$	0.047 с.	$4.67\ 10^{-3}$	4.297 с.
N = 50	$2.96\ 10^{-1}$	0.062 с.	$1.64\ 10^{-2}$	0.094 с.	$8.57\ 10^{-4}$	25.25 с.
N = 75	$2.42\ 10^{-1}$	0.141 с.	$2.71\ 10^{-3}$	0.218 с.	$3.\ 10^{-4}$	101.188 с.
N = 100	$2.11\ 10^{-1}$	0.329 с.	$1.85\ 10^{-3}$	0.422 с.	$1.47\ 10^{-4}$	296.593 с.

Таблица 2.

L_∞ - ошибки при восстановлении значений функции $f_2(x)$, при значениях параметров Якоби $\alpha = -2/9, \beta = -1/12$

коэфф.	$Classic$		$JacA0Two$		$JacA0A1Two$	
	L_∞ ош.	время	L_∞ ош.	время	L_∞ ош.	время
N = 25	$1.35\ 10^0$	0.015 с.	$4.6\ 10^{-1}$	0.5 с.	$6.\ 10^{-3}$	8.922 с.
N = 50	$1.35\ 10^0$	0.032 с.	$8.\ 10^{-2}$	0.593 с.	$1.2\ 10^{-3}$	65.485 с.
N = 75	$1.3\ 10^0$	0.14 с.	$4.5\ 10^{-2}$	0.766 с.	$5.\ 10^{-4}$	229.531 с.
N = 100	$1.3\ 10^0$	0.297 с.	$1.5\ 10^{-2}$	1.032 с.	$2.5\ 10^{-4}$	701.468 с.

Таблица 3.

L^2_w - ошибки при восстановлении значений функции $f_2(x)$, ускоряются ряды по полиномам Лежандра: $\alpha = \beta = 0$

коэфф.	$Classic$		$JacA0Two$		$LegA0A1Two$	
	L^2_w ош.	время	L^2_w ош.	время	L^2_w ош.	время
N = 25	$3.1\ 10^{-1}$	0.031 с.	$8.5\ 10^{-2}$	0.047 с.	$8.7\ 10^{-4}$	0.328 с.
N = 50	$2.3\ 10^{-1}$	0.188 с.	$1.7\ 10^{-2}$	0.234 с.	$1.1\ 10^{-4}$	0.625 с.
N = 75	$1.8\ 10^{-1}$	0.656 с.	$4.3\ 10^{-3}$	0.703 с.	$4.1\ 10^{-5}$	1.204 с.
N = 100	$1.6\ 10^{-1}$	1.562 с.	$1.8\ 10^{-3}$	1.656 с.	$2.\ 10^{-5}$	2.266 с.

В разделе 2.5 диссертационной работы приводятся числа обусловленности k_∞ используемых матриц $M0^m_P$ и $M1^{2m}_P$ при разных значениях параметров. Приведем числа обусловленности соответствующих матриц, когда рассматривается функция $f_2(x)$ $(m = 2)$.

Таблица 4.

Числа обусловленности матриц $M0^2_P$ и $M1^4_P$ для функции $f_2(x)$

коэфф.	$\alpha = -2/9, \beta = -1/12$		$\alpha = 1, \beta = 2$	
	$k_\infty(M0^2_P)$	$k_\infty(M1^4_P)$	$k_\infty(M0^2_P)$	$k_\infty(M1^4_P)$
N = 25	12.0531	88.8834	3.65792	184.135
N = 50	3.72837	215.831	23.311	301.065
N = 75	3.98312	312.584	8.31943	471.439
N = 100	1.66762	394.537	5.19982	776.945

Заметим, что, в принципе, при определенных расположениях точек разрыва $f(x)$ соответствующая матрица может быть необратима и поэтому в блок-схеме алгоритмов предусмотрена определенная корректировка, чтобы этого избежать. Однако в наших многочисленных экспериментах такого случая не было.

В главе 3 анализируются свойства алгоритмов ускорения. В главном члене сложность алгоритмов представлена в следующей таблице.

Таблица 5.

Сложность алгоритмов ускорения сходимости

тип алгоритма	сложения	умножения	кол. числ. интегрирований
первый	mN	$(m+1)N$	0
второй	$m(N-1)N/2$	mN^2	0
третий	$m(N-1)N/2$	mN^2	$mN(N+1)/2$

В таблице пять m – количество точек разрыва, а N – количество заданных коэффициентов Фурье-Якоби разлагаемой функции.

В разделе 3.1 исследуются особенности используемой среды программирования MATHEMATICA 7. В конце главы 3 представлены тексты программ ускорения сходимости (в коде MATHEMATICA 7).

В заключении, приводятся основные результаты диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработаны алгоритмы ускорения сходимости разложений по полиномам Якоби, когда известны только конечное число коэффициентов Фурье-Якоби и точки разрывов разлагаемой кусочно-гладкой функции.

2. На основе методов ускорения сходимости реализован пакет программ в среде MATHEMATICA 7.

3. Получены две теоремы о равномерной сходимости.

4. Проведены численные эксперименты, которые характеризуют свойства алгоритмов ускорения сходимости.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Нерсесян А.Б., Гаспарян А.А.* Ускорение сходимости рядов по полиномам Лежандра // Доклады НАН Армении. 2011. Т. 111, № 4. С. 317-325.

2. *Нерсесян А.Б., Гаспарян А.А.* Ускорение сходимости рядов по полиномам Гегенбауэра // Вестник РАУ, физико-математические и естественные науки. Ер.: Изд-во РАУ, 2011. № 1. С. 84-96.

3. *Гаспарян А.А.* Об алгоритмах ускорения сходимости рядов по полиномам Якоби // Высокие технологии, фундаментальные исследования, экономика. Сборник статей двенадцатой международной научно-практической конференции. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. Т. 1. С. 82-87.

4. *Гаспарян А.А.* Об ускорении сходимости рядов по полиномам Якоби // Вестник Государственного Инженерного Университета Армении. Серия «Моделирование, оптимизация, управление». Ер.: Изд-во ГИУА, 2011. Вып. 14. Т. 2. С. 76-86.

Ա Մ Փ Ո Փ ՈՒ Մ

Արման Հարությունի Գասպարյան

ՅԱԿՈԲԻԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ԱՐԱԳԱՑՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐ

Աշխատանքը նվիրված է կտոր առ կտոր ողորկ ֆունկցիաների, ըստ Յակոբիի օրթոնորմալ բազմանդամներով վերլուծությունների զուգամիտության արագացման մեթոդների մշակման և հետազոտման հարցերին, երբ հայտնի են միայն վերլուծվող $f(x)$, $f:[-1,1]\to\mathbb{C}$ ֆունկցիայի վերջավոր թվով Ֆուրիե-Յակոբի գործակիցները և խզման կետերը՝ $\{a_i\}$, $i=1,\ldots,m$, $m\geq 1$:

Հայտնի է, որ կտոր առ կտոր ողորկ $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքների վերականգնումը, երբ օգտագործվում է նրա, Ֆուրիե-Յակոբիի մասնակի գումարը՝

$$S_N^{(\alpha,\beta)}(f)=\sum_{n=0}^{N} f_n^{(\alpha,\beta)}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x),\ x\in[-1,1],$$

որտեղ $\{f_n^{(\alpha,\beta)}\}$, $n=0,\ldots,N$ մեծությունը խզման կետեր պարունակող $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիե-Յակոբի գործակիցներն են, $\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ – Յակոբիի օրթոնորմալ բազմանդամներն են, արդյունավետ չէ, քանի որ խզման կետերի շրջակայքերում ի հայտ է գալիս Գիբսի երևույթ: Այստեղ, ի տարբերություն Ֆուրիեյի դասական վերլուծությունների, $[-1,1]$ հատվածի ծայրակետերում Գիբսի երևույթ չի դիտարկվում: Աշխատանքում մշակված մեթոդներն ուղղված են նշված երևույթի հաղթահարմանը:

Թեման արդիական է, քանի որ մինչ այժմ կտոր առ կտոր ողորկ ֆունկցիաների ըստ դասական օրթոնորմալ բազմանդամների վերլուծությունների զուգամիտության արագացման ալգորիթմներ առաջարկված չեն եղել:

Աշխատանքում մշակված են Յակոբիի օրթոնորմալ բազմանդամներով վերլուծությունների զուգամիտության արագացման երեք տիպի ալգորիթմներ: Ալգորիթմները տարբերվում են ինչպես բարդություններով, այնպես էլ զուգամիտության արագացման կարգով, ինչը հետևում է թվային արդյունքներից:

Ստացվել են որոշ տեսական գնահատականներ Յակոբիի օրթոնորմալ բազմանդամներով վերլուծությունների զուգամիտության արագացման ալգորիթմների համար: Դրանք հետևյալն են՝

Թեորեմ 1. Դիցուք, $f(x)\in C^2[a_j,a_{j+1}], j=0,...,m$, $q=max(\alpha,\beta)<0$ և

$$F_N^0(x)=\sum_{n=0}^{N}(f_n^{(\alpha,\beta)}-\Omega_0^n)\,\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)+G(x),\ G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_0^n\,\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x):$$

Եթե վերլուծվող ֆունկցիայի $\{A_{0i}\}$ թռիչքները (4) բանաձևում ճշգրիտ են որոշված, ապա տեղի ունեն հետևյալ գնահատականները՝

$$\begin{cases} \|f(x) - F_N^0(x)\|_{L_\infty} \leq \, d_1\, N^{2\, q}, & -1/2 \leq q < 0 \\ \|f(x) - F_N^0(x)\|_{L_\infty} \leq \, d_2\, N^{-1}, & -1 < q < -1/2, \end{cases}$$

որտեղ $d_1 > 0$ և $d_2 > 0$ հաստատունները կախված են միայն վերլուծվող ֆունկցիայի ածանցյալի $\{A_{1i}\}$ թռիչքներից (և կախված չեն խզման կետերի դասավորությունից):

Թեորեմ 2. Դիցուք, $f(x) \in C^3[a_j, a_{j+1}], j = 0, ..., m$, $q = max(\alpha, \beta) < 1/2$ և

$$F_N^1(x) = \sum_{n=0}^{N} (f_n^{(\alpha,\beta)} - \sum_{k=1}^{m} (\phi_n^{0k} \, (\sum_{i=1}^{k} A_{0i}) + \phi_n^{1k} \, (\sum_{j=1}^{k} A_{1j}))) \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) + G(x),$$

$$G(x) = \sum_{k=1}^{m} (\Phi^{0k}(x) \, (\sum_{i=1}^{k} A_{0i}) + \Phi^{1k}(x) (\sum_{j=1}^{k} A_{1j})) :$$

Եթե ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի $\{A_{0i}\}$ և $\{A_{1i}\}$ թռիչքները որոշված են ճշգրիտ, ապա ճիշտ են հետևյալ գնահատականները՝

$$\begin{cases} \|f(x) - F_N^1(x)\|_{L_\infty} \leq \, d_3\, N^{2\, q-1}, & -1/2 \leq q < 1/2 \\ \|f(x) - F_N^1(x)\|_{L_\infty} \leq \, d_4\, N^{-2}, & -1 < q < -1/2, \end{cases}$$

որտեղ $d_3 > 0$ և $d_4 > 0$ հաստատունները կախված են միայն $\{A_{0i}\}$, $\{A_{1i}\}$ և $\{A_{2i}\}$ մեծություններից (և կախվաց չեն խզման կետերի դասավորությունից):

Լայնածավալ թվային հաշվարկները բացահայտել են կառուցված ալգորիթմների հատկությունները:

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները:

1. Մշակվել են Յակոբիի օրթոնորմալ բազմանդամներով վերլուծությունների զուգամիտության արագացման մեթոդներ, երբ հայտնի են միայն վերլուծվող ֆունկցիայի խզման կետերը և վերջավոր թվով Ֆուրիե-Յակոբի գործակիցները:
2. Մշակված զուգամիտության արագացման մեթոդների հիման վրա մշակվել է ծրագրային փաթեթ $MATHEMATICA\, 7$ համակարգում:
3. Ձևակերպվել և ապացուցվել է 2 թեորեմ հավասարաչափ զուգամիտության մասին:
4. Կատարվել են թվային փորձարկումներ, որոնք բնութագրում են մշակված ալգորիթմների հատկությունները:

ABSTRACT

Arman Gasparyan

ON CONVERGENCE ACCELERATION ALGORITHMS FOR EXPANSIONS BY JACOBI POLYNOMIALS

In this work the problem of convergence acceleration for series by Jacobi's orthonormal polynomials is being discussed in the case when the function $f(x)$, $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ is piecewise continuous and only the limited number of Fourier–Jacobi coefficients and discontinuity points: $\{a_i\}$, $i = 1, \ldots, m$, $m \geq 1$ are known.

It is known that the restoral of the values of piecewise continuous function $f(x)$ is not efficient when Fourier–Jacobi partial sum

$$S_N^{(\alpha,\beta)}(f) = \sum_{n=0}^{N} f_n^{(\alpha,\beta)} \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x),\ x \in [-1,1],$$

is used, where $\{f_n^{(\alpha,\beta)}\}$, $n = 0, \ldots, N$ quantities are the Fourier–Jacobi coefficients of the function $f(x)$ which contains discontinuity points, $\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ – are the Jacobi orthonormal polynomials, as in the surrounding of discontinuity points Gibb's phenomenon appears. Here, unlike Fourier's classical expansions, in the finish points of the [-1,1] section Gibb's phenomenon is not observed. The elaborated methods of the work aim to surmount the mentioned phenomenon. The subject is actual, as convergence acceleration algorithms of expansions by Jacobi orthonormal polynomials for piecewise continuous functions haven't been suggested so far. In this work three types of algorithms of convergence acceleration for series by Jacobi's orthonormal polynomials have been developed. The algorithms differ not only in their complexities, but also in the order of convergence acceleration, which is obvious from numerical results. Some theoretical results have been obtained for the convergence acceleration algorithms. They are the following:

Theorem 1. Let, $f(x) \in C^2[a_j, a_{j+1}], j = 0, ..., m$, $q = max(\alpha, \beta) < 0$ and

$$F_N^0(x) = \sum_{n=0}^{N} (f_n^{(\alpha,\beta)} - \Omega_0^n)\, \tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) + G(x),\ G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_0^n\, \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

If the $\{A_{0i}\}$ jumps of the expanded function are properly determined in formula (4), then the following results are true.

$$\begin{cases} \|f(x) - F_N^0(x)\|_{L_\infty} \leq d_1\, N^{2\,q}, & -1/2 \leq q < 0 \\ \|f(x) - F_N^0(x)\|_{L_\infty} \leq d_2\, N^{-1}, & -1 < q < -1/2, \end{cases}$$

Where $d_1 > 0$ and $d_4 > 0$ constants depend only on the $\{A_{1i}\}$ jumps of the derivative of the expanded function (and do not depend on the arrangement of the discontinuity points).

Theorem 2. Let, $f(x) \in C^3[a_j, a_{j+1}], j = 0, ..., m$, $q = max(\alpha, \beta) < 1/2$ and

$$F_N^1(x) = \sum_{n=0}^{N}(f_n^{(\alpha,\beta)} - \sum_{k=1}^{m}(\phi_n^{0k}(\sum_{i=1}^{k} A_{0i}) + \phi_n^{1k}(\sum_{j=1}^{k} A_{1j})))\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) + G(x),$$

$$G(x) = \sum_{k=1}^{m}(\Phi^{0k}(x)(\sum_{i=1}^{k} A_{0i}) + \Phi^{1k}(x)(\sum_{j=1}^{k} A_{1j})).$$

If the $\{A_{0i}\}$ and $\{A_{1i}\}$ jumps of the function and its derivative are properly determined, then the following results are true.

$$\begin{cases} \|f(x) - F_N^1(x)\|_{L_\infty} \leq d_3 N^{2q-1}, & -1/2 \leq q < 1/2 \\ \|f(x) - F_N^1(x)\|_{L_\infty} \leq d_4 N^{-2}, & -1 < q < -1/2, \end{cases}$$

where $d_3 > 0$ and $d_4 > 0$ constants depend only on the $\{A_{0i}\}$, $\{A_{1i}\}$ and $\{A_{2i}\}$ quantities (and do not depend on the arrangement of the discontinuity points). A great number of numerical calculations have discovered the properties of the constructed algorithms. The following results have been obtained:

1. The methods of the convergence acceleration for series by Jacobi's orthonormal polynomials have been developed, when only final number discontinuity points of the expanded function and Fourier−Jacobi coefficients are known.

2. On the basis of the elaborated methods of convergence acceleration the package of programs has been developed using MATHEMATICA 7 application system.

3. Two theorems on uniform convergence have been compiled and proved.

4. Numerical experiments have been carried out which describe the properties of the elaborated algorithms.