ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մոկացյան Արսեն Հակոբի

ԱՆԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐ ԵՎ ՄԻԹՈՏԻԿՈՒԹՅՈՒՆ՝ ԸՍՏ ԹՈՒՅԼ (*T*- և *wtt*-) ԵՎ ԱՂՅՈՒՍԱԿԱՅԻՆ ՀԱՆԳԵՑՈՒՄՆԵՐԻ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ

ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2012

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Мокацян Арсен Акопович

СТЕПЕНИ НЕРАЗРЕШИМОСТИ И МИТОТИЧНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛАБЫХ (*T*- и wtt-) И ТАБЛИЧНЫХ СВОДИМОСТЕЙ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.09 «Математическая кибернетика и математическая логика»

Ереван – 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Հ.Բ. Մարանջյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ս.Ա. Նիգիյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Վ.Կ. Մարգարյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Ռուս-Հայկական (Սլավոնական) համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2012թ. հոկտեմբերի 5-ին, ժ.14^{30} -ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025 Երևան, Ա.Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2012թ. սեպտեմբերի 5-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Институте проблем информатики и автоматизации НАН РА

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук,
член-корреспондент НАН РА Г.Б. Маранджян

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук С.А. Нигиян
кандидат физ.-мат. наук В.К. Маркарян

Ведущая организация: Российско-Армянский (Славянский) университет

Защита состоится 5 октября 2012г. в 14^{30} на заседании действующего в ЕГУ специализированного совета ВАК 044 «Математическая кибернетика и математическая логика» по адресу: 0025 Ереван, ул. А.Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 5 сентября 2012г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Первым исследованием в области митотических разбиений рекурсивно перечислимых множеств явилась работа А.Лахлана[1]. Он доказал существование рекурсивно перечислимого немитотического множества. Систематическое исследование этого понятия произвел Р. Ладнер[2,3].

Он в частности доказал идентичность этого понятия и понятия автосводимости (введенного Б.А. Трахтенбротом[4]).

Р. Ладнер[3] доказал существование всецело митотической рекурсивно перечислимой степени. Р. Ладнер[2] доказал также существование полного немитотического множества.

Затем Р. Доуни и Т. Сламан[5] произвели масштабное исследование всецело митотических степеней.

Ими было доказано существование низкой нерекурсивной всецело митотической степени, а также существование высокой всецело митотической степени.

Р. Доуни и Т. Сламан[5] доказали также, что существует степень $\boldsymbol{a}$ такая, что для каждой степени $\boldsymbol{b}$ такой, что $\mathbf{0} < \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}$ степень $\boldsymbol{b}$ содержит немитотическое рекурсивно перечислимое множество.

М. Инграссия[6] доказал, что степени, содержащие немитотические рекурсивно перечислимые множества, плотны в $\mathbf{R}$.

Исследование митотичности было успешно продолжено Е.Гриффитсом[7].

Важные исследования, касающиеся μ-степеней, были произведены Л. Сассо[8].

В частности, им было доказано, что любая тотальная μ-степень имеет минимальное покрытие.

Существенные результаты в этой области были получены Д. Скордевым[9] и В.Поляковым[10]. Обзор некоторых результатов, касающихся частичных степеней, можно найти в книге В.Полякова, М.Розинаса[11].

Сложность представления натуральных чисел основана на понятиях, разработанных Колмогоровым[12]. Он же доказал существование асимптотически оптимальных частично рекурсивных функций.

---

[1] *Lachlan A.H.,* The priority method. I. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik.* vol.13, pp.1-10, 1967.

[2] *Ladner R.,* Mitotic Enumerable Sets. In: The Journal of Symbolic Logic, vol. 38, N. 2, pp.199-211, 1973.

[3] *Ladner R.E.,* A completely mitotic nonrecursive r.e. degree. *Transaction of the American Mathematical Society*, vol.184, pp. 479–507, 1973.

[4] *Трахтенброт Б.А.,* Об автосводимости. ДАН СССР, т. 192, № 6, с. 1224-1227, 1970.

[5] *Downey R.G. and Slaman T. A.,* Completely mitotic r. e. degrees. *Ann. Pure Appl. Logic*, vol. 41, pp.119–152, 1989.

[6] *Ingrassia M.,* P-genericity for recursively enumerable sets. *Ph.D. Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign*, 1981.

[7] *Griffiths E.J.*, Completely Mitotic Turing degrees, Jump Classes and Enumeration Degrees. *Ph. D. Thesis, University of Wisconsin-Madison*, 1998.

[8] *Sasso L.,* A survey of partial degrees. The Journal of Symbolic Logic, vol. 40, pp.130–140, 1975.

[9] *Скордев Д.Г.,* О частичной конъюктивной сводимости. II Всесоюзная конференция по мат. логике, Тезисы, М., с. 43–44, 1972.

[10] *Поляков В.А*., Ответ на один вопрос А.И. Мальцева. Всесоюзный алгебраический симпозиум, Тезисы, 2, Гомель, с. 438, 1975.

[11] *Поляков В.А*., *Розинас М.Г.,* Теория алгоритмов. Иваново, 1976.

[12] *Колмогоров А.Н.,* Три подхода к опрделению понятия “количество информации”. Проблемы передачи информации, т. I, вып. I, с. 3-11, 1965.

Фундаментальные результаты в этой области получены Г.Б. Маранджяном[13,14], М.И. Кановичем[15].

Аналогичные понятия сложности были рассмотрены, но не столь систематично, Р.Дж.Соломоновым[16] и Г.Дж.Чейтиным[17]. В работе И.Д. Заславского[18] предложен конструктивный подход к алгоритмическим сложностям.

Обзоры исследований в области сложностей по Колмогорову можно найти, в частности, в статье А.К.Звонкина и Л.А.Левина[19] , и в книге М.Ли и П. Витаньи[20].

Цель и задачи диссертационной работы. Целью работы является исследование возможности митотического разбиения рекурсивно перечислимых множеств и, в частности:

- выяснение возможности существования множества, совмещающего в себе потенциал *T*-митотического разбиения и невозможность *wtt*-митотического разбиения;
- при наличии таких множеств – исследование структуры *T*-степеней подобных множеств;
- постановка таких же вопросов относительно возможности совмещения *wtt*-митотичности и не-*tt*-митотичности, а также возможности совмещения *tt*-митотичности и не-*btt*-митотичности;
- исследование свойств структуры частичных степеней, в частности, μ -степеней;
- исследование свойств релятивизованных сложностей Колмогорова.

Методы исследования. Математической основой исследования является теория алгоритмов и ее составная часть – теория степеней неразрешимости.

Научная новизна. Все полученные результаты принадлежат автору и являются новыми. Впервые исследованы в таком объеме возможности митотического разбиения множеств относительно многих видов сводимостей и, в осбенности, относительно слабых сводимостей.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Исследованы, в частности, возможности митотического разбиения множеств относительно различных видов сводимостей, что приводит к доказательству невозможности существования некоторых алгоритмов.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на общих семинарах ИПИА НАН РА (ранее ВЦ АН Арм. ССР), на международных конференциях по информатике и информационным технологиям CSIT'1997, CSIT'2003, CSIT'2007, CSIT'2009, CSIT'2011.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в девяти научных статьях.

---

13 *Маранджян Г.Б.,* О некоторых свойствах асимптотически оптимальных рекурсивных функций. Математика, Известия АН Арм. ССР, т. IV (1), с. 3-22, 1969.

14 *Marandjian H. B.,* Selected Topics in Recursive Function Theory in Computer Science, DTH, Lyngby, 1990.

15 *Канович М.И.,* О сложности минимизации булевых функций. ДАН СССР, т.198, N.1, с. 35-38, 1971.

16 *Solomonoff R.J.,* A formal theory of inductive inference. Information and Control, 7 (1), pp. 1-22, 1964.

17 *Chaitin G.J.,* On the length of frograms for computing finite binary sequences. JACM, 13, pp.547-569, 1966.

18 *Заславский И.Д.,* О псевдофукциях Шеннона. Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР, 16, с. 65-76, 1969.

19 *Звонкин А.К. и Левин Л.А.,* Сложность конечных объектов и уточнение понятия информации и случайности с помощью теории алгоритмов. Успехи математических наук, XXV (6), с. 85-127, 1970.

20 *Li M. and Vitanyi P.M.B.* An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications. Springer-Verlag, New-Yerk, Berlin, Heidelberg, Lodon, 1997, 637 pp.

<u>Структура и объем работы</u>. Диссертация состоит из введения, семи глав и списка цитируемой литературы (69 наименований.) Объем работы – 76 стр.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обсуждается актуальность темы исследования, формулируются цели и задачи диссертационной задачи.

В **Главе 1** даны предварительные сведения о степенях неразрешимости, в том числе определения полных степеней, минимальных степеней, Теорема Фридберга о полноте, сведения о разбиениях множеств.

Первая по времени теорема о разбиении принадлежит Фридбергу[21], согласно которой, если A является нерекурсивным рекурсивно перечислимым множеством, то существуют множества A_1 и A_2 такие, что $A = A_1 \cup A_2$. Кроме того, эти множества обладают нижеследующим свойством:

(**1**) для всех рекурсивно перечислимых множеств W, если множество $W - A$ не является рекурсивно перечислимым, то $W - A_i$ не является рекурсивно перечислимым для $i = 1, 2$.

Определение. Предположим, что A является нерекурсивным рекурсивно перечислимым множеством.

(i) *Разбиением* A называется пара непересекающихся рекурсивно перечислимых множеств A_1, A_2 таких, что $A_1 \cup A_2 = A$. Запись $A_1 \coprod A_2$ будет означать, что пара A_1, A_2 является разбиением A.

(ii) *Нетривиальным разбиением* A называется такое разбиение A_1, A_2 множества A, что A_1 и A_2 является нерекурсивными.

(iii) *Фридберговым разбиением* A называется такое нетривиальное разбиение A, что вдобавок, множества A_1, A_2 удовлетворяют условие (1).

Определение. Множества A и B *рекурсивно отделимы*, если существует рекурсивное множество C такое, что $A \subset C$ и $B \subset \overline{C}$.

В параграфе 1 **Главы 2** приведены предварительные сведения о методе деревьев в приоритетных доказательств.

Для решения проблемы Поста[22] А.А. Мучником[23] и Р. Фридбергом[24] был применен (независимо друг от друга) метод, названный методом приоритета. Доказательство Мучника-Фридберга является примером приоритетного доказательства с конечными нарушениями.

Когда имеем дело с бесконечными нарушениями, часто используется метод деревьев в приоритетном доказательстве.

---

[21] *Friedberg R.M.*, Three theorems on recursive enumeration. The Journal of Symbolic Logic, vol.23, pp.308-316, 1958.

[22] *Post E.L.*, Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50, pp. 284-316, 1944.

[23] *Мучник А.А.*, Неразрешимость проблемы сводимости теории алгоритмов, ДАН СССР, т. 108, с. 194-197, 1956.

[24] *Friedberg R.M.*, Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvablility. Proc. Natl. Acad, Sci. USA, vol. 43, pp. 236-238, 1957.

Приведем ту терминологию и систему обозначений, касающихся применения деревьев в методе приоритета, которые будем использовать в дальнейшем.

Пусть Λ – счетное (часто – конечное) множество с линейным порядком $<_\Lambda$; T – дерево $\Lambda^{<\omega}$ конечных последовательностей элементов из Λ, а $[T]$ – дерево бесконечных путей (paths) через (through) T, где h есть бесконечный путь через T, если $h \upharpoonright n \in T$ для всех n.

Строчными греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ будем обозначать элементы из $\Lambda^{<\omega}$.

Обозначение $\alpha \subseteq \beta$ ($\alpha \subset \beta$) будет означать, что цепочка β продолжает (собственно продолжает) α.

Через λ обозначим пустую цепочку.

Через a обозначим цепочку, состоящую только из элемента a.

Через $\alpha\hat{}\beta$ обозначим конкатенацию цепочки α, продолженной цепочкой β.

Через $(\mu\beta\subseteq\alpha)P(\beta)$ обозначим наименьшую (по длине) из тех цепочек β, которые удовлетворяют условиям $\beta \subseteq \alpha$ и $P(\beta)$.

Определение. Пусть $\alpha, \beta \in T$

(i) α находится слева от β $(\alpha <_L \beta)$, если $(\exists a,b\in \Lambda)(\exists \gamma \in T)$ $[\gamma\hat{}\langle a\rangle \subseteq \alpha$ &

& $\gamma\hat{}\langle b\rangle \subseteq \beta$ & $a <_\Lambda b]$

(ii) $\alpha \leq \beta$, если $\alpha <_L \beta$ или $\alpha \subseteq \beta$

(iii) $\alpha < \beta$, если $\alpha \leq \beta$ или $\alpha \neq \beta$.

Если $\alpha \subset \beta$, то α называется *предшественником* β и β называется *преемником* α.

Чтобы доказать теорему в теории рекурсивных функций мы вначале представляем список требований R_i, $i \in \omega$, выполнение которых достаточно для доказательства теоремы. Затем формулируем стратегию (называемую *базовым модулем*) для удовлетворения одного такого, отдельно взятого, требования. Базовый модуль может потребовать выполнения бесконечного числа действий и может иметь несколько (возможно бесконечное число) финальных результатов (выходов).

Пусть Λ – множество символов, кодирующих возможные выходы и $<_\Lambda$ – соответствующий порядок на Λ, обычно выбираемый так, что если $a <_\Lambda b$ и количество этапов, когда a “кажется правильным” – бесконечно, то b не является правильным финальным результатом (выходом).

Если имеются несколько различных типов требований (например позитивных и отрицательных), мы можем нуждаться в различных типах базового модуля для каждого из них, и множество выходов Λ будет изменяться в зависимости от типа требований.

Затем определяем дерево приоритетов $T = \Lambda^{<\omega}$ и используем обозначения и терминологию (о дереве T), упомянутые выше, в частности

Определение. Для каждой цепочки $\alpha \in T$ мы определяем α-стратегию для удовлетворения требования R_i, где $i = |\alpha|$.

α-стратегия фактически есть видоизменение базового модуля, приспособленного к следующему обстоятельству:

для каждого $k < |\alpha|, \alpha(k) = a \in \Lambda$ означает, что α “предугадывает”, что финальный результат β-стратегии для $\beta = \alpha \upharpoonright k$ есть a. (Это дает α-стратегии значительное преимущество перед обычной (линейной) версией того же доказательства, где R_i не имеет информации о результатах стратегий, предназначенных для удовлетворения требований R_j с более высоким приоритетом, то есть $j < i$).

Завершая конструкцию, мы определяем *истинный путь* $f \in \Lambda^{\omega}$ по индукции; а именно, если $\alpha = f \upharpoonright n$, положим $f(n) \in \Lambda$ есть финальный результат α-стратегии. При представлении всей рекурсивной конструкции $\mathcal{C} = \bigcup \{ \mathcal{C}_{\alpha} \mid \alpha \in T \}$ (где $\mathcal{C}_{\alpha}$ – это часть конструкции, выполненной согласно α-стратегии) нашей главной задачей является обеспечение того, что *конструкция вдоль истинного пути* согласно терминологии Л. Харингтона[25], а именно $\hat{\mathcal{C}} = \bigcup \{ \mathcal{C}_{\alpha} \mid \alpha \subset f \}$, достигнет своей цели, поскольку в итоге мы можем удостовериться, что

(**2**) $(\forall i)[\alpha = f \upharpoonright i \Rightarrow \alpha$ удовлетворяет требование $R_i]$.

Конечно, $\hat{\mathcal{C}}$ не является, на самом деле, "конструкцией" в смысле эффективности, так как функция f не рекурсивна, но $\hat{\mathcal{C}}$ является просто частью всей рекурсивной конструкции $\mathcal{C}$. Несмотря на это, $\hat{\mathcal{C}}$ является единственной существенной частью $\mathcal{C}$, потому что согласно (2), единственными цепочками, которые в итоге будут играть значимую роль, являются цепочки $\alpha \subset f$. Тем не менее, поскольку мы не можем, в течение конструкции, рекурсивно идентифицировать те цепочки α, для которых верно $\alpha \subset f$, мы вынуждены определять возможное действие *для каждого* $\alpha \in T$ таким способом, чтобы если $\alpha \subset f$, то α-стратегия при удовлетворении условий, требуемых базовым модулем, достигла своей цели.

Определяем рекурсивную аппросимацию функции f (recursive approximation to f), $\{\delta_s\}_{s\in\omega}$, где $\delta_s \in \Lambda^{<\omega}$ и $|\delta_s| = s$. Фиксируем s и определяем $\delta_s(n)$ индукцией по n для $n < s$. Решающим моментом в определении является то, что f – наиболее леворасположенный (leftmost) из путей, бесконечно часто посещаемых аппроксимациями $\{\delta_s\}_{s\in\omega}$, а именно, что $f \upharpoonright n = \liminf_s \delta_s \upharpoonright n$, для всех $n \in \omega$, в том смысле, что если $\alpha = f \upharpoonright n$, то

$$(\exists^{<\infty} s)\ [\delta_s <_L \alpha]$$

и

$$(\exists^{\infty} s)\ [\alpha \subseteq \delta_s].$$

Далее, условимся, что

$(\forall \beta)[\delta_s <_L \beta \Rightarrow$ цепочка β инициализирована к концу этапа $s]$, где β *инициализирована на этапе* s посредством переназначения всех ее параметров и отмены всех подвешенных β-акций. На этапе $s+1$ о тех цепочках α, для которых имеет место $\alpha \subseteq \delta_s$, говорят, что они "*кажутся правильными*" и s называется α-этапом для такой цепочки α. Далее, α только тогда пригоден к действию, когда он кажется правильным, а именно,

$$(\forall \alpha)(\forall s)[\alpha \text{ действует на этапе } s+1 \Rightarrow \alpha \subseteq \delta_s].$$

---

[25] *Harrington L.,* A gentle approach to priority arguments (handwritten notes for a talk at A.M.S. Summer Research Institute in Recursion Theory, Cornell University, July 1982).

Каждая цепочка оказавшись пригодной для действия на данном этапе, проделывает действия (согласно базовому модулю), необходимые для удовлетворения R_i. Те цепочки β, для которых имеет место $\beta <_L \alpha$, будут действовать лишь на конечном числе этапов и возможно не удовлетворят R_i. Те цепочки β, для которых имеет место $\alpha <_L \beta$, будут инициализированы бесконечно часто и поэтому, возможно, не удовлетворят R_i, в то время как α обязательно достигнет цели (то есть удовлетворит R_i).

В параграфе 2 **Главы 2** представлена теорема о плотности *T*-степеней, содержащих *T*-митотические множества, не являющиеся *wtt* –митотическими.

В литературе обычно в качестве основной сводимости берется сводимость по Тьюрингу. Если слово “сводимость” употреблено без дополнительных пояснений, подразумевается, как правило, *сводимость по Тьюрингу*. Если без дополнительных пояснений употреблен термин “степень неразрешимости”, обычно подразумевается *T -степень*.

Определение. Рекурсивно перечислимое множество A называется *T-митотическим* (*wtt-митотическим*), если существует разбиение A_1, A_2 множества A такое, что $A \equiv_T A_1 \equiv_T A_2$ ($A \equiv_{wtt} A_1 \equiv_{wtt} A_2$).

Определение. Рекурсивно перечислимая степень $\boldsymbol{a}$ называется *сцепленной* (*contiguous*), если для каждой пары A, B рекурсивно перечислимых множеств из $\boldsymbol{a}$ имеет место $A \equiv_{wtt} B$. Рекурсивно перечислимая тьюрингова степень $\boldsymbol{a}$ называется *сильно сцепленной* (*strongly contiguous*), если для каждой пары C, D множеств (не обязательно рекурсивно перечислимых) из степени $\boldsymbol{a}$ имеет место $C \equiv_{wtt} D$.

Из определения сцепленной степени следует, что сцепленные степени не содержат *T*-митотических множеств, которые не являются *wtt*-митотическими.

Р. Ладнер и С.Сассо[26] доказали, что для любой ненулевой рекурсивно перечислимой степени $\boldsymbol{b}$ существует ненулевая степень $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$ такая, что $\boldsymbol{a}$ является сцепленной.

Р.Г. Доуни[27] доказал, что существует сильно сцепленная рекурсивно перечислимая тьюрингова степень.

Определение. Множество A называется *автосводимым*, если существует функционал Φ такой, что для всех x, $\Phi(A \cup \{x\}; x) = A(x)$.

Р. Ладнер[28] доказал, что рекурсивно перечислимое множество A митотично $\Leftrightarrow$ A — автосводимо.

М. Инграссиа[29] доказал, что степени, содержащие немитотические множества, плотны в $\mathbf{R}$.

Доказана **Теорема 2.18.[30]** *T*-степени, содержащие *T*-митотические множества, не являющиеся *wtt*-митотическими, плотны в $\mathbf{R}$ (то есть, в классе рекурсивно перечислимых степеней).

---

[26] *Ladner R.E.and Sasso L.,* The weak truth-table degrees of recursively enumerable sets. Arch. Math. Logik Grundlag, 8, pp. 429-448, 1975.

[27] *Downey R.G.*, Δ_2^0 degrees and transfer theorems. Illinois J. Math., 31, pp. 419-427, 1987.

[28] *Ladner R.,* Mitotic Enumerable Sets. In: The Journal of Symbolic Logic, vol. 38, N. 2, pp.199-211, 1973.

[29] *Ingrassia M.,* P-genericity for recursively enumerable sets. *Ph.D. Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign*, 1981.

[30] Нумерация теорем дается в соответствии с текстом диссертации.

В **Глава 3** доказана **Теорема 3.3.** Существует низкая рекурсивно перечислимая степень $\mathbf{u}$ такая, что если $\mathbf{v}$ – рекурсивно перечислимая степень такая, что $\mathbf{u} \le \mathbf{v}$, тогда $\mathbf{v}$ содержит T-митотическое множество, которое не является *wtt*-митотическим (степень $\boldsymbol{a}$ называется *низкой (low),* если $\boldsymbol{a}' = \mathbf{0}'$) (то есть, скачок $\mathbf{a}'$ низкой степени является наименьшим из всех возможных скачков).

В **Главе 4** исследуются возможности построения множеств, которые не будучи *tt*-митотическими, являются, тем не менее, *wtt*-митотическими.

Определение. Пусть A – бесконечное множество.

(i) Скажем, что функция f *мажорирует* A если $(\forall n)[f(n) \ge z_n]$, где $z_0, z_1, \ldots$ элементы множества A, расположенные в порядке строгого возрастания.

(ii) Скажем, что A *гипериммунно* (сокращенно: *h-immune*), если ($\forall$общерекурсивная f) [f не мажорирует A].

Определение. Множество A *гиперпросто*, если A рекурсивно перечислимо и $\overline{A}$ гипериммунно.

Кузнецовым, Медведевым, Успенским[31] доказана теорема, которая дает полезную характеризацию гипериммунных множеств:

A гипериммунно $\Leftrightarrow$ A конечно и

$$\neg(\exists \text{ общерекурсивная } f)[(\forall u)[D_{f(u)} \cap A \neq \varnothing] \,\&\, (\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow D_{f(u)} \cap D_{f(v)} = \varnothing]].$$

Определение.

(i) Множество А *гипергипериммунно* (сокращенно: *hh-immune*), если A бесконечно и $\neg(\exists$ общерекурсивная $f)$

$$[(\forall u)[W_{f(u)} \textit{ конечно} \,\&\, W_{f(u)} \cap A \neq \varnothing] \,\&\, (\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow W_{f(u)} \cap W_{f(v)} = \varnothing]].$$

(ii) Множество A *гипергиперпросто* (сокращенно: *hh-simple*) , если A рекурсивно перечислимо и $\overline{A}$ гипергипериммунно.

Определение. Множество A называется *сжатым* (*cohesive*), если

(i) A бесконечно;

(ii) $(\forall B)[B$ рекурсивно перечислимо

$\Rightarrow [A \cap B$ конечно или $A \cap \overline{B}$ конечно$]]$.

Определение. Множество A называется *максимальным*, если A рекурсивно перечислимо и $\overline{A}$ сжато.

Из результатов Д.А. Мартина[32] следует, что $\boldsymbol{a}$ является степенью максимального множества $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}$ является степенью гипергиперпростого множества $\Leftrightarrow$ [$\boldsymbol{a}$ рекурсивно перечислимо и $\boldsymbol{a}' = \mathbf{0}''$].

Важным результатом является теорема Р. Робинсона об интерполяции скачка, которая утверждает, что если рекурсивно перечислимые множества D, C и рекурсивно перечислимое в C множество S таковы, что $D <_T C$ и $D' \le S$, тогда существует рекурсивно перечислимое множество A такое, что $D <_T A <_T C$ и $A' \equiv_T S$.

---

[31] *Медведев Ю.Т.*, О неизоморфных рекурсивно перечислимых множествах. ДАН СССР, 102, с. 211-214, 1955.

[32] *Martin D.A.*, A Theorem on Hyperhypersimple Sets. The Journal of Symbolic Logic. vol.28, pp.273-278, 1963.

Определение. Рекурсивно перечислимое множество A называется tt-митотичским *(btt-митотичским),* если существует разбиение A_0, A_1 множества A такое, что A_0, A_1 имеют ту же tt-степень *(btt-степень)* неразрешимости, что и A.

Доказана **Теорема 4.11.** Существует низкая рекурсивно перечислимая *T*-степень ***u*** такая, что если ***v*** рекурсивно перечислимая *T*-степень и ***u*** $\leq$ ***v***, тогда ***v*** содержит гиперпростое wtt-митотическое множество, которое не является tt-митотическим.

Из вышеуказанных теорем Д.А. Мартина и Р. Робинсона следует, что в Теореме 4.11 невозможно заменить “гиперпростое” на “гипергиперпростое”.

В **Главе 5** строится T-полное множество, с нижеуказанными свойствами.

*Определение***.** Множество A *полно по Тьюрингу* (T*-полно*), если

(i) A рекурсивно перечислимо,

(ii) $(\forall B)[B$ рекурсивно перечислимо $\Rightarrow$ $\mathrm{B} \leq_{\mathrm{T}} A]$.

*Определение***.** A *ограниченно таблично сводимо* к B (обозначение: $A \leq_{btt} B$), если ($\exists$ общерекурсивная f) $(\exists m)(\forall x)$ [tt-условие $f(x)$ имеет порядок $\leq m$ и [$x \in A \Leftrightarrow f(x)$ выполняется B]].

Доказана **Теорема 5.7.** Существует *T*-полное tt-митотическое множество, которое не является btt-митотическим.

В **Главе 6** рассматриваются свойства μ-степеней.

μ-сводимости определяются нижеупомянутым способом.

Пусть машины Тьюринга определены как множества четверок. Напомним, что при описании машины Тьюринга с оракулом A четверка $q_i S_j q_k q_l$, если она применима, ведет к состоянию q_k, если число, кодированное на ленте, принадлежит A и к состоянию q_l в противном случае.

Будем рассматривать только однозначные множества A (т.е. графики частичных функций); в этом случае четверка $q_i S_j q_k q_l$, если применима, будет интерпретироваться, как ведущая к состоянию q_k, если число $\langle m, n\rangle$, кодированное на ленте, принадлежит A и как ведущая к состоянию q_l, если $(\exists n')(n' \neq n \ \& \ \langle m, n'\rangle \in A)$; в противном случае считается, что вычисление “застопорилось”.

Зафиксируем допустимую нумерацию машин Тьюринга.

Через $\{i\}^f$ обозначим одноместную частичную функцию, вычисляемую i-ой машиной Тьюринга относительно f (в вышеуказанном смысле).

Функция g μ*-сводится к* f, если $(\exists i)(g = \{i\}^f)$.

Определение.

(i) Если D_n однозначно (т.е. D_n есть график конечной функции f), то $\{i\}^n$ означает $\{i\}^f$.

(ii) Скажем, что кодированная тройка $\langle\langle m,r\rangle, n\rangle$ является i-*минимальной*, тогда и только тогда, когда $\{i\}^n(m)=r$ и $\{i\}^n(m)$ расходится, если $D_k \subset D_n$.

(iii) Множество T_i всех -минимальных троек называется i-*ым Тьюринговым оператором*.

(iv) Для функции f положим

$$T_i(f)=\{\pi_1(k)\ k\in T_i\ \&\ D_{\pi_2(k)}\subseteq\tau(f)\},$$

где $\tau(x,y)=\dfrac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2=3x+y\right)$ и для всех z имеет место $\tau(\pi_1(z),\pi_2(z))=z$.

Обозначение. Для произвольного k обозначим $D_k^0=\{n \mid \langle n,0\rangle\in D_k\}$;
для каждого i пусть $T_i^0=\{\langle m,k\rangle \mid \langle\langle m,0\rangle,k\rangle\in T_i\ \&\ D_k\subseteq N\times\{0\}\}$;
$T_i^0(A)=\{m \mid (\exists k)[\langle m,k\rangle\in T_i^0\ \&D_k^0\subseteq A]\}$ (для произвольного A).

Тогда $S_B\le_\mu S_A \Leftrightarrow \exists\, i\left[B=T_i^0(A)\right]$; и для каждого i T_i^0 однозначно.

Через Θ обозначим множество тех μ-степеней, которые содержат всюду определенную (*тотальную*) функцию.

Определение. (i)Степень $\boldsymbol{b}$ называется $\boldsymbol{a}$-*квазиминимальной* (*квазиминимальным покрытием для* $\boldsymbol{a}$), если $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ $(\forall\boldsymbol{c})(((\boldsymbol{c}\text{ - тотальная})\ \&(\boldsymbol{c}\le\boldsymbol{b}))\Rightarrow(\boldsymbol{c}\le\boldsymbol{a}))$.

(ii) $\mathbf{0}$-квазиминимальные степени называются *квазиминимальными*.

(iii) Степень $\boldsymbol{b}$ называется $\boldsymbol{a}$-*минимальной* (*минимальным покрытием для* $\boldsymbol{a}$), если $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ и $(\forall\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\le\boldsymbol{c}\le\boldsymbol{b}\Rightarrow(\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}))$.

(iv) $\mathbf{0}$-минимальные степени называются *минимальными*.

Доказана **Теорема 6.10. (** μ **-).** Если $\boldsymbol{a}\in\Theta$, то *существует* $\boldsymbol{a}$-квазиминимальная степень, имеющая минимальное покрытие.

В **Главе 7** произведена релятивизация понятия асимптотически оптимальной функции (относительно произвольного множества A) и доказана теорема о свойствах подобного рода функций и ее некоторые следствия.

Пусть $l(x)=[\log_2(x+1)]$. Согласно А.Н. Колмогорову [56], сложность $K_\varphi(n)$ натурального числа n относительно частично рекурсивных функций φ определяется следующим образом:

Определение.

$$K_\varphi(n)=\begin{cases}\min_p\{\,l(p)\mid\varphi(p)=n\,\}, & \text{если существует } p \text{ такое, что } \varphi(p)=n;\\ \infty\,, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Определение. Одноместная частично рекурсивная функция (ч.р.ф.) φ называется *асимптотически оптимальной* (или *оптимальной*), если для любой ч.р.ф. ψ существует такая константа c, что для любого n выполнено следующее неравенство:

$$K_\varphi(n)\le K_\psi(n)+c\,.$$

А.Н. Колмогоров доказал существование асимптотически оптимальная частично рекурсивной функции.

Определение. Определим трехместный предикат Q следующим образом:

$$Q(\varphi,\psi,c) \Leftrightarrow (\forall x\, y)\big(\psi(x)=y \Rightarrow (\exists z)(\varphi(z)=y \ \&\ l(z)\le l(x)+c)\big),$$

где φ, ψ – переменные, допустимыми значениями которых являются одноместные частично рекурсивные функции, а x,y,z,c – переменные, допустимыми значениями которых являются натуральные числа.

Из определения предиката Q следует, что одноместная частично рекурсивная функция F_0 является асимптотически оптимальной функцией для частично рекурсивных функций тогда и только тогда, когда для любой ч.р.ф. φ

$$(\exists c)\, Q(F_0,\varphi,c).$$

Определение. Определим двуместные предикаты L_1,L_2,L_3 следующим образом:

$L_1(\varphi,\psi) \Leftrightarrow (\exists c)\, Q(\varphi,\psi,c)$;
$L_2(\varphi,\psi) \Leftrightarrow L_1(\varphi,\psi)\ \&\ \neg L_1(\psi,\varphi)$;
$L_3(\varphi,\psi) \Leftrightarrow L_1(\varphi,\psi)\ \&\ L_1(\psi,\varphi)$.

Для произвольного фиксированного множества A осуществим полную релятивизацию вышеуказанных понятий. (Мы будем обозначать релятивизованные предикаты так же, как и соответствующие релятивизованные предикаты. Для релятивизованных предикатов Q,L_1,L_2,L_3 допустимыми значениями функциональных переменных будут одноместные A- частично рекурсивные функции.)

Результатом полной релятивизации понятия асимптотически оптимальной функции является понятие функции, асимптотически оптимальной для A- частично рекурсивных функций.

Через F_0 обозначим некоторую фиксированную асимптотически оптимальную функцию.

Для произвольного множества A через F_0^A обозначим некоторую фиксированную функцию, асимптотически оптимальную для A-частично рекурсивных функций.

Доказана следующая теорема:

Теорема 7.6. $(\forall A)\big((d(A')>\mathbf{0}') \Rightarrow L_2(F_0^A,F_0)\big)$.

Полная релятивизация этого результата дает

Следствие 7.10.

$(\forall A)(\forall B)\big((d(A)>d(B)\ \&\ d(A')>d(B')) \Rightarrow L_2(F_0^A,F_0^B)\big)$.

Доказаны также следующие следствия Теоремы 7.6.:

Следствие 7.11. Пусть рекурсивно перечислимые множества D, C таковы, что $D<_T C$ и $D'<_T C'$. Тогда существует рекурсивно перечислимое множество A такое, что $D<_T A<_T C$ и $L_2(F_0^A,F_0^D)\ \&\ L_2(F_0^C,F_0^A)$.

Следствие 7.12. Существует такое множество B, что $d(B)$ – минимальная степень и $L_2(F_0^B,F_0)$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Доказано, что T-степени, содержащие T-митотические множества, не являющиеся wtt –митотическими, плотны в $\mathbf{R}$.

2. Существует низкая рекурсивно перечислимая степень $\mathbf{u}$ такая, что если $\mathbf{v}$ – рекурсивно перечислимая степень такая, что $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$, тогда $\mathbf{v}$ содержит T-митотическое множество, которое не является wtt-митотическим.

3. Существует низкая рекурсивно перечислимая T-степень $\boldsymbol{u}$ такая, что если $\boldsymbol{v}$ рекурсивно перечислимая T-степень и $\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{v}$, тогда $\boldsymbol{v}$ содержит гиперпростое wtt-митотическое множество, которое не является tt-митотическим.

4. Существует T-полное tt-митотическое множество, которое не является btt-митотическим.

5. Если $\boldsymbol{a}$ – тотальная μ-степень, то существует $\boldsymbol{a}$-квазиминимальная степень, имеющая минимальное покрытие.

6. Доказано, что $(\forall A)(\forall B)\big((d(A) > d(B) \ \& \ d(A') > d(B')) \Rightarrow L_2\big(F_0^A, F_0^B\big)\big)$.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Мокацян А.А.** Некоторые свойства релятивизованных сложностей Колмогорова.- *Доклады АН Арм. ССР*, LXIV (2), 1977, 77-80.

2. **Мокацян А.А.** О w-митотических, но не btt-митотических рекурсивно перечислимых множествах.- *Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники*, изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1982, т.X, 143-151.

3. **Мокацян А.А.** Нетотальность и минимальные μ-покрытия.- *Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники*, изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1986, т.XVI, 68-75.

4. **Mokatsian A.H.** On strongly tt-mitotic but non-w-mitotic recursively enumerable sets.- In: “*Computer Science and Information Technologies*”, Proceedings of CSIT-1997 International Conference, Yerevan, Armenia, 1997, 32-33.

5. **Mokatsian A.H.** The weak reducibilities (T- and wtt-) and non-mitoticity.- In: “*Computer Science and Information Technologies*”, Proceedings of CSIT-2003 International Conference, Yerevan, Armenia, 2003, 44-49.

6. **Mokatsian A.H.** On upper cone of degrees containing T-mitotic but not wtt-mitotic sets.- In: “*Computer Science and Information Technologies*”, Proceedings of CSIT-2007 International Conference, Yerevan, Armenia, 2007, 55-56.

7. **Mokatsian A.H.** On upper cone of T- degrees containing wtt-mitotic but not tt-mitotic sets.- In: “*Computer Science and Information Technologies*”, Proceedings of CSIT-2009 International Conference, Yerevan, Armenia, 2009, 54-56.

8. **Mokatsian A.H.** On hypersimple wtt-mitotic sets which are not tt-mitotic.- *International Journal* “*Information Theories and Applications*” (ITHEA), Sofia, 2010, v.17, No.2, 154-162.

9. **Mokatsian A.H.** T-compliteness and tt-mitotic sets which are not btt-mitotic.- In: “*Computer Science and Information Technologies*”, Proceedings of CSIT-2011 International Conference, Yerevan, Armenia, 2011, 52-54.

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ
Մոկացյան Արսեն Հակոբի

ԱՆԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐ ԵՎ ՄԻԹՈՍՏԻԿՈՒԹՅՈՒՆ՝ ԸՍՏ ԹՈՒՅԼ (*T*- և *wtt*-) ԵՎ ԱՂՅՈՒՍԱԿԱՅԻՆ ՀԱՆԳԵՑՈՒՄՆԵՐԻ

Աշխատանքը նվիրված է ռեկուրսիվորեն թվարկելի բազմությունների՝ ըստ տարբեր տիպի հանգեցումների միթոտիկ տրոհման հնարավորությունների հետազոտմանը: Մասնավորապես, ապացուցվել է այնպիսի բազմությունների գոյությունը, որոնք համատեղում են T-միթոտիկությունը և ոչ-wtt-միթոտիկությունը, նաև այն բազմությունների գոյությունը, որոնք համատեղում են wtt-միթոտիկությունը և ոչ-tt-միթոտիկությունը, և վերջապես այնպիսիների գոյությունը, որոնք համատեղում են tt-միթոտիկությունը և ոչ-btt-միթոտիկությունը: Հետազոտվել է վերոհիշյալ տիպի բազմություններ պարունակող T-աստիճանների տեղաբաշխումը ռեկուրսիվորեն թվարկելի T-աստիճանների կիսացանցում:

Սահմանում. Ռեկուրսիվորեն թվարկելի ***a*** աստիճանը անվանվում է միակցված (*contiguous*), եթե ***a***-ին պատկանող A,B ռեկուրսիվորեն թվարկելի բազմությունների կամայական զույգի համար տեղի ունի $A \equiv_{wtt} B$:

Միակցված աստիճանի սահմանումից հետևում է, որ միակցված աստիճանները չեն պարունակում T-միթոտիկ բազմություններ, որոնք wtt-միթոտիկ չեն:

Ատենախոսության մեջ պացուցված է T-միթոտիկ, բայց ոչ-wtt-միթոտիկ բազմություն պարունակող T-աստիճանների խտությունը ռեկուրսիվորեն թվարկելի աստիճանների կիսացանցում:

Ատենախոսության մեջ ապացուցված է այնպիսի ցածր ռեկուրսիվորեն թվարկելի u աստիճանի գոյությունը, որ եթե v-ն այնպիսի ռեկուրսիվորեն թվարկելի աստիճան է, որ u $\leq$v, ապա v-ն պարունակում է T-միթոտիկ, բայց ոչ-wtt-միթոտիկ բազմություն:

Ուսումնասիրվել են նաև μ-աստիճանների կառուցվածքին վերաբերող հարցեր: Ռելյատիվիզացվել են բարդությունները ըստ Կոլմոգորովի և հետազոտվել են նրանց հատկությունները:

Սահմանվել են հետևյալ պրեդիկատները.

$Q(\varphi,\psi,c) \Leftrightarrow (\forall x\, y)\big(\psi(x)=y \Rightarrow (\exists z)(\varphi(z)=y \;\&\; l(z)\leq l(x)+c)\big)$,

$L_1(\varphi,\psi) \Leftrightarrow (\exists c)\, Q(\varphi,\psi,c)$,

$L_2(\varphi,\psi) \Leftrightarrow L_1(\varphi,\psi) \;\&\; \neg L_1(\psi,\varphi)$,

Որտեղ φ,ψ ՝ փոփոխականներ են, որոնց թույլատրելի արժեքներն են միտեղանի մասնակի ռեկեւրսիվ ֆունկցիաները, իսկ x, y, z, c ՝ փոփոխական-ներ են, որոնց թույլատրելի արժեքներն են բնական թվերը:

Կամայական A բազմության համար F_0^A -ով կնշանակենք որևէ ֆունկցիա, որը ասիմպտոտիկ օպտիմալ է A -մասնակի ռեկուրսիվ ֆունկցիաների համար:

Ատենախոսության մեջ ապացուցված է, որ

$(\forall A)(\forall B)((d(A) > d(B) \ \& \ d(A') > d(B')) \Rightarrow L_2(F_0^A, F_0^B))$:

Մյուս հիմնական արդյունքները, որոնք ստացվել են հեղինակի կողմից, հետևյալն են.

- ապացուցված է այնպիսի ցածր ռեկուրսիվորեն թվարկելի u աստիճանի գոյությունը, որ եթե v-ն այնպիսի ռեկուրսիվորեն թվարկելի աստիճան է, որ u ≤v, ապա v-ն պարունակում է հիպերպարզ wtt-միթոտիկ, բայց ոչ-tt-միթոտիկ բազմություն,
- ապացուցված է T-լրիվ tt-միթոտիկ, բայց ոչ-btt-միթոտիկ բազմության գոյութունը,
- ապացուցված է, որ եթե ***a***-ն տոտալ μ -աստիճան է, ապա գոյություն ունի մինիմալ ծածկույթ ունեցող ***a*** - քվազիմինիմալ աստիճան.

ABSTRACT

Mokatsian Arsen

UNSOLVABILITY DEGREES AND MITOTICITY WITH RESPECT TO WEAK (*T*- and *wtt*-) AND TRUTH TABLE REDUCIBILITIES

A splitting of recursively enumerable set A is a pair A_1, A_2 of disjoin recursively enumerable sets such that $A_1 \cup A_2 = A$. Theorems about splitting have played an important role in recursion theory. The maim reason for this is that a splitting of A is a decomposition of A in both the lattice of recursively enumerable sets and in the uppersemilattice of recursively enumerable degrees (since $A_1 \leq_T A$, $A_2 \leq_T A$ and $A \leq_T A_1 \oplus A_2$).

Thus splitting theorems have used to obtain results about the structure of abovementioned lattice, of the structure of abovementioned uppersemilattice and the relationship between the two structures. Furthermore, the questions about splittings often generated important technical development in recursion theory.

The earliest theorem is due to Friedberg[33] (Friedberg's Splitting theorem).

Definition. An recursively enumerable set A is *mitotic* if there is a splitting A_1, A_2 of A such, that $A_1 \equiv_T A_2 \equiv_T A$.

The definitions of *wtt-, tt-, btt*-mitoticities are similar to abovementioned mitoticity.

A.Lachlan was the first, to show, that not all recursively sets are mitotic investigation of mitotic, but the first systematic investigation of mitotic sets was by R. Ladner[34,].

The first basic result reduces mitoticity to autoreduciblity, that is,

a recursively enumerable set A is mitotic, if and only if A is auto reducible.

Definition. An recursively enumerable set autoreducible if there is a functional Φ such that for every x, $\Phi(A \cup \{x\}) = A(x)$.

Definition. An recursively enumerable degree ***a*** is *contiguous*, if for every pair *A, B* of recursively enumerable sets in ***a***, $A \equiv_{wtt} B$.

Note that contiguous degree does not contain *T*-mitotic but non-*wtt*- mitotic sets.

The possibilities of mitotic splitting for some sets with respect to different reducibilities are investigated in this thesis.

Also the properties of relativized Kolmogorov complexities and the structures of μ-degrees are investigated in this thesis.

THE MAIN RESULTS OF THE THESIS

- It is proved, that the complete degree contains a *T*-mitotic but non-wtt-mitotic set (denote [T-M | wtt-NM] set).

[33] *Friedberg R.M.*, Three theorems on recursive enumeration. The Journal of Symbolic Logic, vol.23, pp.308-316, 1958.

[34] *Ladner R.,* Mitotic Enumerable Sets. In: The Journal of Symbolic Logic, vol. 38, N. 2, pp.199-211, 1973.

- It is proved, that there exists a low recursively enumerable degree $\mathbf{u}$ such that if $\mathbf{v}$ is a recursively enumerable degree and $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ then $\mathbf{v}$ contains T-mitotic but non-*wtt*-mitotic set.

- It is proved, that there exists a low recursively enumerable *T*-degree **u** such that if **v** is a recursively enumerable *T*-degree and $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ then **v** contains hypersimple *wtt*-mitotic set, which is not *tt*-mitotic.

- It is proved, that there exists a *T*- complete *tt*-mitotic set which is not *btt*-mitotic.

- It is proved, that if $\boldsymbol{a}$ is a total μ-degree, then there exists a $\boldsymbol{a}$-quasiminimal degree, which has a minimal cover.