ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Բայրամյան Վահագն Հայկի

n–ՃՇԳՐԻՏ և GC_n ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՈՐ ՀԱՏԿՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա.01.07 “Հաշվողական մաթեմատիկա” մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2017

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Байрамян Ваагн Гайкович

О НОВОМ СВОЙСТВЕ n– ТОЧНЫХ и GC_n МНОЖЕСТВ

Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.07 “Вычислительная математика”

АВТОРЕФЕРАТ

Ереван – 2017

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.–մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Ա. Հակոբյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.–մաթ. գիտ. դոկտոր Յու. Ռ. Հակոբյան
ֆիզ.–մաթ. գիտ. թեկնածու Ա. Հ. Քամալյան

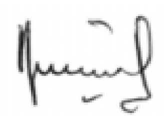
Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2017 թ.–ի մարտի 3–ին, ժ. 14^{30}–ին ԵՊՀ–ում գործող ԲՈՀ–ի 044–“Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա” մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ–ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2017 թ.-ի հունվարի 30–ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.–մաթ. գիտ. դոկտոր՝



Վ. Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском гасударственном университете

Научный руководитель: доктор физ.–мат. наук А. А. Акопян

Официальные опоненты: доктор физ.–мат. наук Ю. Р. Акопян
кандидат физ.–мат. наук А. Г. Камалян

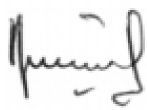
Ведущая организация: Институт математики НАН Армении

Защита состоится 3–го марта 2017 г. в 14^{30}–часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 30–го января 2017 г.

Ученый секретарь специализированного совета.
доктор физ.–мат. наук



В. Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի արդիականությունը. Միջարկումը (ինտերպոլացիա) որևէ բարդ ֆունկցիայի արժեքների մոտավոր հաշվումն է՝ օգտագործելով այդ ֆունկցիայի որոշ կետերում տրված արժեքները: Բազմանդամային միջարկման դեպքում որպես միջարկիչ ֆունկ–ցիաներ օգտագործվում են բազմանդամներ: Այսինքն, հարթության մեջ տրված են կետեր, պահանջվում է գտնել այնպիսի բազմանդամ, որի գրաֆիկը ճշգրիտ անցնում է այդ կետերով: Միջարկումը՝ բազմանդամներով կամ այլ ֆունկցիաներով, հաշվո–ղական մաթեմատիկայի բավականին հին մեթոդներից է:

Ներկայումս բազմանդամային միջարկումը մոտարկումների տեսության և հաշվողա–կան մաթեմատիկայի կարևորագույն բաժիններից մեկն է: Այն լայնորեն կիրառվում է բազմաթիվ մաթեմատիկական խնդիրներում:

Միաչափ բազմանդամային միջարկման խնդրի ամբողջական լուծումներ են տվել դեռևս Լագրանժը և Նյուտոնը: Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջար–կումը համեմատաբար նոր թեմա է և սկիզբ է առել 19–րդ դարի երկրորդ կեսերից՝ Վ. Բորչարդի և Լ. Կրոնեկերի աշխատանքներով:

Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկման առաջին կարևոր արդյունք–ները ստացել են Բերզոլարին, Ռադոնը, ինչպես նաև Չանգը և Յաոն: Ներկայումս բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեջ կան շատ չլուծված կարևոր խնդիրներ: Մասնավորապես՝ լուծված չէ դեռևս 1982 թ.–ին Գասքայի և Մաեզթուի կողմից առաջադրված վարկածը, որը քննարկում ենք ատենախոսության մեջ:

Նշենք նաև, որ բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդիրը սերտորեն առնչ–վում է հանրահաշվական երկրաչափության հետ: Ներկայումս մի քանի փոփոխա-կաններով միջարկման ուղղությունը հանդիսանում է նաև հանրահաշվական երկրա-չափության արդիական բաժիններից մեկը:

Ատենախոսական աշխատանքի նպատակը. Ճշգրիտ և GC_n բազմություններում ուղիղների օգտագործման ուսումնասիրությունը, Գասքա–Մաեզթուի վարկածի հետազոտություն:

Հետազոտման օբյեկտը. Երկու փոփոխականի բազմանդամային տարածություններ, միջարկման ճշգրիտ բազմություններ, միջարկման անկախ բազմություններ, GC_n բազմություններ, մաքսիմալ ուղիղներ, հանրահաշվական կորեր և մաքսիմալ կորեր:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են բազմաչափ բազմանդամային միջարկ–ման տեսության մեթոդները: Օգտագործվել են նաև գծային հանրահաշվի և հանրա–հաշվական երկրաչափության որոշ մեթոդներ:

Գիտական նորությունը. Ապացուցվել է n–ճշգրիտ և GC_n բազմությունների մի նոր կարևոր հատկություն: Ձևակերպվել է նոր վարկած GC_n բազմությունների համար: Այդ վարկածը ապացուցվել է որոշ կարևոր մասնավոր դեպքերում:

Կիրառական նշանակությունը. Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքներն ունեն ինչպես տեսական, այնպես էլ՝ կիրառական նշանակություն: Վերը նշված արդյունքները վերաբերում են անկախ և ճշգրիտ բազմությունների բնութագրմանը, որոնք կարևոր դեր են կատարում բազմաչափ միջարկումների տեսության մեջ: Այդ արդյունքները կարող են կիրառվել բոլոր այն խնդիրներում, որոնց լուծման մեջ օգտագործվում է բազմաչափ բազմանդամային միջարկումը:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան. Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի Թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում, Հարմոնիկ անալիզ և մոտարկումներ, VI, միջազգային կոնֆերանսում, 2015, Հայկական Մաթեմատիկական Միության 2016 թվականի տարեկան նստաշրջանում, :

Հրատարակությունները. Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են չորս գիտական հոդվածներում և հետևյալ երկու կոնֆերանսների թեզիսներում՝ Հարմոնիկ անալիզ և մոտարկումներ VI, Միջազգային կոնֆերանս, Ծաղկաձոր 2015, Հայկական Մաթեմատիկական Միության տարեկան նստաշրջան, 2016:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է նե–րածությունից, չորս գլխից, ամփոփումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 29 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 92 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գլուխ 1–ը նվիրվում է միջարկման խնդրին և ճշգրիտ, անկախ բազմություններին: Պարագրաֆ 1.1–ում ներկայացնում ենք մեկ փոփոխականի բազմանդամների համար Լագրանժի միջարկման խնդիրը և դրա լուծման Լագրանժի և Նյուտոնի բանաձևերը: Միաչափ միջարկման խնդրի լուծման միակության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը այն է, որ կետերի քանակը հավասար լինի բամանդամային տարածության չափողականությանը:

Պարագրաֆ 1.2–ում դիտարկում ենք Լագրանժի երկչափ միջարկման խնդիրը: Սահմանում ենք ճշգրիտ և անկախ բազմությունները:

Նշանակենք Π_n–ով երկու փոփոխականի $\leq n$ աստիճանի իրական գործակից–ներով բազմանդամների տարածությունը.

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{i+j\leq n} a_{ij}x^i y^j : | \, a_{ij} \in R \right\}:$$

Ունենք որ

$$N := dim\Pi_n = \binom{n+2}{2}: \qquad (1.2.1)$$

Դիտարկենք s կետերի (հանգույցների) հետևյալ բազմությունը՝

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_s = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_s, y_s)\}:$$

$p \in \Pi_n$ բազմանդամի գտնելու խնդիրը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$p(x_i, y_i) = c_i, \qquad i = 1,2, \dots, s \qquad (1.2.2)$$

կոչվում է Լագրանժի միջարկման խնդիր:

Սահմանում 1.2.1: *$\mathcal{X}_s$ հանգույցների բազմությունը կոչվում է n–ճշգրիտ, եթե ցանկա–ցած $c_1, \dots, c_s$ թվերի համար գոյություն ունի (1.2.2) պայմաններին բավարարող միակ $p \in \Pi_n$ բազմանդամ:*

Նկատենք, որ ինչպես և միաչափ դեպքում, միջարկման (1.2.2) պայմանները հանգում են N անհայտներով s գծային հանրահաշվական հավասարումների հետևյալ համակարգին՝

$$\sum_{i+j\le n} a_{ij}x_k^i y_k^j = c_k, \quad k = 1,2,\dots,s,$$

որտեղ անհայտները p բազմանդամի գործակիցներն են՝ a_{ij}: Հետևաբար $\mathcal{X}_s$ բազմու–թյան n–ճշգրտության անհրաժեշտ պայմանն է՝

$$|\mathcal{X}_s| = s = N = dim\Pi_n: \tag{1.2.3}$$

Այսուհետև երբ դիտարկենք ճշգրիտ բազմություն, կենթադրենք, որ տեղի ունի (1.2.3) պայմանը՝ $\mathcal{X} = \mathcal{X}_N$:

Ի տարբերություն միաչափ դեպքի, բազմաչափ միջարկման խնդրի միակորեն լուծե–լիության համար միայն (1.2.3) պայմանը բավարար չէ: Բազմաչափ միջարկման համար բացի հանգույցների քանակի սահմանափակումից, պետք են նաև այլ պայ–մաններ՝ խնդրի միակորեն լուծելիությունն ապահովելու համար: Երկչափ դեպքում ճշգրտությունն էապես կախված է ոչ միայն հանգույցների քանակից, այլ նաև դրանց երկրաչափական դասավորությունից:

Թեորեմ 1.2.2: *$\mathcal{X}_N$ հանգույցների բազմությունը՝ $|\mathcal{X}_N| = N = \binom{n+2}{2}$ հզորությամբ, n–ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝*

$$p(x_i, y_i) = 0, \;\; i = 1,2,\dots,N \quad \Longrightarrow \quad p \equiv 0:$$

Այստեղից ստանում ենք երկչափ բազմանդամային միջարկման ճշգրտության երկ–րաչափական մեկնաբանությունը.

$\mathcal{X}_{\mathrm{N}}$ հանգույցների բազմությունը կլինի ոչ n–ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի n աստիճանի հանրահաշվական կոր, որը անցնում է $\mathcal{X}_N$–ի բոլոր հանգույցներով:

Սահմանում 1.2.5: *$p \in \Pi_n$ բազմանդամը կոչվում է $A = (x_k, y_k) \in X_s$ հանգույցի n–ֆունդամենտալ բազմանդամ, եթե տեղի ունեն*

$$p(x_i, y_i) = \delta_{ik}, \qquad i = 1,2, \dots, s$$

հավասարությունները, որտեղ δ_{ik} *Կրոնոկերի սիմվոլն է:*

Մենք կնշանակենք $A \in \mathcal{X}_s$ հանգույցի n–ֆունդամենտալ բազմանդամը p_A^*–ով:

Սահմանում 1.2.6: *$\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է n–անկախ, եթե նրա բոլոր հանգույց– ները ունեն n–ֆունդամենտալ բազմանդամ: Հակառակ դեպքում $\mathcal{X}$–ը կոչվում է n–կախյալ:*

Պարզ է, որ ֆունդամենտալ բազմանդամները գծորեն անկախ են: Հետևաբար n–ան– կախության անհրաժեշտ պայմանն է՝ $|\mathcal{X}| \leq N$:

$\mathcal{X} = \mathcal{X}_s$ բազմությունը n–անկախ է այն և միայն այն դեպքում երբ (1.2.2) միջարկման խնդիրը լուծելի է: Սա նշանակում է, որ ցանկացած $c_1, \dots, c_s$ թվերի համար գոյություն ունի (1.2.2) պայմաններին բավարարող (*ոչ անհրաժեշտաբար միակ*) $p \in \Pi_n$ բազման– դամ:

Հաջորդ երկու թեորեմները բնութագրում են n–անկախ բազմությունները, որպես n– ճշգրիտ բազմության ենթաբազմություն:

Թեորեմ 1.2.7: *Ցանկացած n–անկախ $\mathcal{X}_s$ բազմություն, $s < N$ հզորությամբ, կարելի է ընդլայնել մինչև n–ճշգրիտ բազմություն:*

Թեորեմ 1.2.8: *$\mathcal{X}_N$ բազմությունը n–ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե n–անկախ է:*

Ատենախոսության մեջ մենք գործ կունենանք n–կախյալության ավելի խիստ տար– բերակի հետ:

Սահմանում 1.2.9: *$\mathcal{X}$ բազմությունը կոչվում է էապես n–կախյալ, եթե նրա ոչ մի հան– գույց չունի n–ֆունդամենտալ բազմանդամ:*

Սահմանում 1.2.11: *Տրված է n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը: Կասենք, որ $A \in \mathcal{X}$ հանգույցը օգտագործում է $q \in \Pi_k$ կորը, եթե q–ն $p_{A,\mathcal{X}}^*$ ֆունդամենտալ բազմանդամի բաժանա– րար է.*

$$p_{A,\mathcal{X}}^* = qr, \quad \text{որտեղ } r \in \Pi_{n-k}:$$

Թեորեմ 1.2.13: *Դիցուք ունենք ℓ ուղիղը: Այդ դեպքում ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազման– դամի համար տեղի ունեն հետևյալ դրույթները.*

1. *Եթե p բազմանդամը 0 է ℓ–ի $n+1$ կետերում, ապա այն 0 է ամբողջ ℓ ուղղի վրա,*
2. *Եթե p բազմանդամը 0 է ℓ ուղղի վրա, ապա*

$$p = \ell r, \quad \text{որտեղ } r \in \Pi_{n-1}:$$

Այս թեորեմից ստանում ենք հետևյալ հետևանքները.

Հետևանք 1.2.14: *$n+2$ համագիծ հանգույցներից բաղկացած ցանկացած բազմություն էապես n–կախյալ է:*

Հետևանք 1.2.15: *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը n–ճշգրիտ բազմություն է: Այդ դեպքում ունենք՝*

1. *Ամենաշատը $n+1$ հանգույցներ կարող են լինել համագիծ,*
2. *$\mathcal{X}$–ից $n+1$ հանգույցներ պարունակող ℓ ուղիղը օգտագործվում է $\mathcal{X}\backslash\ell$ բազ–մության բոլոր հանգույցների կողմից.*

Հաշվի առնելով այս ամենը՝ n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության $n+1$ հանգույցներ պարունա–կող ℓ ուղիղը անվանում են մաքսիմալ ուղիղ: Հեշտությամբ կարելի է ապացուցել մաքսիմալ ուղիղների հետևյալ 2 հատկությունները՝

Հետևանք 1.2.16: *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը n–ճշգրիտ բազմություն է: Այդ դեպքում ունենք՝*

1. *$\mathcal{X}$–ի ցանկացած 2 մաքսիմալ ուղիղ հատվում են $\mathcal{X}$–ի հանգույցում,*
2. *$\mathcal{X}$–ի ցանկացած 3 մաքսիմալ ուղիղ չեն կարող հատվել մեկ կետում:*

Հետևաբար n–ճշգրիտ բազմության մաքսիմալ ուղիղները գտնվում են ընհանուր դրության մեջ, այսինքն՝ ոչ մի երկուսը զուգահեռ չեն և ոչ մի երեքը չեն հատվում մեկ կետում: Հաշվի առնելով (1.2.1) հավասարությունը, կարող ենք ասել, որ n–ճշգրիտ բազմությունը ամենաշատը կարող է պարունակել $n+2$ մաքսիմալ ուղիղ:

Այժմ բերենք անկախության և կախյալության վերաբերյալ մի քանի արդյունքներ:

Սկենք Սևերի հետևյալ պարզ, բայց կարևոր արդյունքից.

Թեորեմ 1.2.18 (Սևերի): *Ամենաշատը $n+1$ հանգույց պարունակող ցանկացած բազ–մություն n–անկախ է:*

Հաջորդիվ մենք կդիտարկենք ամենաշատը $2n+1$ հանգույց պարունակող բազմու–թյունները.

Թեորեմ 1.2.19 (Էյսենբադ, Գրին, Հարիս): *Ամենաշատը* $2n+1$ *հանգույց պարունակող ցանկացած բազմություն* n*–անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ դրանցից ոչ մի* $n+2$*–ը համագիծ չեն:*

Այս շարքի երրորդ արդյունքը հետևյալն է.

Թեորեմ 1.2.20 (Հակոբյան, Մալինյան): *Ամենաշատը* $3n-1$ *հանգույց պարունակող ցանկացած բազմություն* n*–անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ երկու պայմանները՝*

1. *ոչ մի* $n+2$ *հանգույցներ համագիծ չեն,*
2. *ոչ մի* $2n+2$ *հանգույցներ չեն գտնվում 2 կարգի կորի վրա:*

Պարագրաֆ 1.3–ում դիտարկում ենք GC_n բազմությունները և ձևակերպում ենք Գասքա–Մաեզթուի հայտնի վարկածը, որը կարճ անվանում են GM–վարկած:

Սահմանում 1.3.1 (Չանգ, Յաո): n*–ճշգրիտ* $\mathcal{X}$ *բազմությունը կոչվում է* GC_n *բազմություն, եթե յուրաքանչյուր* $A \in \mathcal{X}$ *հանգույցի* n*–ֆունդամենտալ բազմանդամը վերլուծվում է* n *գծային արտադրիչների:*

Այլ խոսքով GC_n բազմությունը այն բազմությունն է, որի յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է ճիշտ n ուղիղ: Այժմ մենք կարող ենք ներկայացնել.

Վարկած 1.3.2 (Գասքա, Մաեզթու): *Ցանկացած* GC_n *բազմություն պարունակում է* $n+1$ *համագիծ հանգույց:*

Այլ խոսքով GM–վարկածը պնդում է, որ ցանկացած GC_n բազմություն պարունակում է մաքսիմալ ուղիղ:

Թեորեմ 1.3.4 (Քարնիսեր, Գասքա): *Եթե Գասքա–Մաեզթուի վարկածը ճիշտ է, ապա ցանկացած* GC_n *բազմություն պարունակում է ամենաքիչը 3 մաքսիմալ ուղիղ:*

Այստեղից հետևում է, որ n–ճշգրիտ բազմության յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է մաքսիմալ ուղիղ:

Պարագրաֆ 1.4–ում դիտարկում ենք հետևյալ 4 կոնստրուկցիաները՝ Բերզոլարի–Ռադոնի կոնստրուկցիա, Նյուտոնի ցանց, Չանգ–Յաոյի ցանց և Քարնիսեր–Գասքաի ցանց: Առաջինը n–ճշգրիտ բազմության օրինակ է, իսկ մյուս 3–ը՝ GC_n բազմության:

Գլուխ 2–ը նվիրվում է մաքսիմալ կորերին, $\mathcal{N}_\ell$ և $\mathcal{X}_\ell$ բազմություններին:

Պարագրաֆ 2.1–ում սահմանում ենք մաքսիմալ կորերը և բերում դրանց վերաբերյալ որոշ թեորեմներ:

Սկսենք **Թեորեմ 1.2.13**–ի ընդհանրացումից ավելի բարձր կարգի հանրահաշվական կորերի համար: Նշանակենք $k \leq n$–ի համար

$$d(n,k) := \dim\Pi_n - \dim\Pi_{n-k} = \frac{1}{2}k(2n+3-k):$$

Թեորեմ 2.1.1 (Ռաֆայելյան)**:** *Դիցուք q–ն $k \leq n$ կարգի հանրահաշվական կոր է, առանց պատիկ արտադրիչների: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալը՝*

1. *$d(n,k)$–ից ավել հանգույցներից բաղկացած q–ի ցանկացած ենթաբազմություն n–կախյալ է,*
2. *Ճիշտ $d(n,k)$ հանգույցներից բաղկացած $\mathcal{X} \subset q$ ենթաբազմությունը n–անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝*

$$p(x) = 0\ \forall x \in \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad p = qr, \quad r \in \Pi_{n-k}$$

Ինչպես ուղիղների դեպքում (**Հետևանք 1.2.15**), այստեղ էլ ստանում ենք.

Հետևանք 2.1.2: *Ցանկացած n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար տեղի ունեն՝*

1. *Ամենաշատը $d(n,k)$ հանգույցներ կարող են գտնվել k–րդ կարգի կորի վրա,*
2. *$\mathcal{X}$–ից $d(n,k)$ հանգույցներ պարունակող $k \leq n$ կարգի q կորը օգտագործվում է $\mathcal{X} \backslash q$ բազմության բոլոր հանգույցների կողմից:*

Հաջորդիվ դիտարկենք մաքսիմալ ուղիղ գաղափարի ընդհանրացումը

Սահմանում 2.1.3: *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը n–ճշգրիտ բազմություն է: $k \leq n$ կարգի կորը, որը պարունակում է $\mathcal{X}$–ի ճիշտ $d(n,k)$ հանգույցներ կոչվում է մաքսիմալ կոր:*

Ուստի մաքսիմալ ուղիղը, երկրորդ կարգի կորը (*կոնիկ*) և երրորդ կարգի կորը (*կուբիկ*) համապատասխանաբար պարունակում են $\mathcal{X}$ բազմության $n+1$, $2n+1$ և $3n$ հանգույցներ:

Հաջորդ թեորեմը, բնութագրում է մաքսիմալ կորերը:

Թեորեմ 2.1.4 (Ռաֆայելյան)**:** *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և առանց պատիկ արտադրիչների $k \leq n$ կարգի q կորը: Այդ դեպքում հետևյալ պնդումները համարժեք են.*

1. *q–ն մաքսիմալ կոր է $\mathcal{X}$ բազմության համար,*
2. *$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \backslash q$ բազմության բոլոր հանգույցները օգտագործում են q կորը,*
3. *$\mathcal{Y}$ բազմությունը $(n-k)$–ճշգրիտ է: Ավելին, եթե $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է, ապա $\mathcal{Y}$–ը GC_{n-k} բազմություն է:*

Հայտնի է որ, n–ճշգրիտ ցանկացած $N-1$ հանգույցներով միակորեն որոշվում է n–րդ կարգի կորը: Հարց է առաջանում, թե քանի հանգույցներով են միակորեն որոշվում ավելի ցածր կարգի կորերը:

Թեորեմ 2.1.6: *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ի ցանկա– ցած $N-4$ հանգույցներով, անցնում է ամենաշատը մեկ $(n-1)$–րդ կարգի հանրա– հաշվական կոր: Ավելին, գոյություն ունի n–անկախ $N-5$ հանգույցների այնպիսի բազմություն, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի $(n-1)$–րդ կարգի կորեր:*

Այժմ ներկայացնենք Քելի–Բախարախի թեորեմը երկու կորերի հատման կետերի բազմության անկախության մասին:

Թեորեմ 2.1.7 (Քելի–Բախարախ): *Դիցուք m և n աստիճանի երկու կորեր հատվում են ճիշտ mn կետերում: Այդ դեպքում հատման կետերի $\mathcal{X}$ բազմությունը $(m+n-2)$– անկախ է և էապես $(m+n-3)$–կախյալ է:*

Պարագրաֆ 2.2–ում սահմանվում են $\mathcal{N}_\ell$ և $\mathcal{X}_\ell$ բազմությունները, ինչպես նաև ներ– կայացվում է ատենախոսության արդյունքներից մեկը կապված 2–հանգույցանի ուղղի օգտագործման հետ:

Սահմանենք $\mathcal{X}$ բազմության $\mathcal{N}_\ell$ և $\mathcal{X}_\ell$ ենթաբազմությունները, որտեղ ℓ–ը ուղիղ է:

1. $\mathcal{X}_\ell$–ը $\mathcal{X}$ բազմության այն ենթաբազմությունն է, որի հանգույցները օգտագոր– ծում են ℓ ուղիղը;
2. $\mathcal{N}_\ell$–ը $\mathcal{X}$ բազմության այն ենթաբազմությունն է, որի հանգույցները չեն օգտա– գործում ℓ ուղիղը և ընկած չեն ℓ–ի վրա:

Նկատենք, որ՝

$$\mathcal{X}_\ell \cup \mathcal{N}_\ell = \mathcal{X} \backslash \ell \tag{2.2.1}$$

$\mathcal{X}_\ell$ բազմության համար **Թեորեմ 2.1.6**–ից հետևում է

Թեորեմ 2.2.1: *Յանկացած n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար՝*

$$|\mathcal{X}_\ell| \leq 1, \text{ եթե } \ell\text{–ը } 2\text{–հանգույցանի ուղիղ է:} \tag{2.2.3}$$

Նշենք որ (2.2.3) արդյունքը, այն դեպքում երբ $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է, ավելի վաղ ապացուցվել է Քարնիսերի և Գասքայի կողմից[1]:

Հետևյալ թեորեմը բնութագրում է $\mathcal{N}_\ell$ բազմության կարևոր հատկություն:

Թեորեմ 2.2.2 (Քարնիսեր, Գասքա): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և ℓ ուղիղը: Այդ դեպքում, եթե $\mathcal{N}_\ell$–ը դատարկ չէ, ապա էապես $(n-1)$–կախյալ է:*

Գլուխ 4–ում մենք օգտագործում ենք հետևյալ 2 լեմմաները.

Լեմմա 2.2.3 (Քարնիսեր, Գասքա): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և ℓ ուղիղը, այնպես որ $|\ell \cap \mathcal{X}| \leq n$: Ենթադրենք նաև, որ գոյություն ունի այնպիսի M մաքսիմալ ուղիղ, որ $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$: Այդ դեպքում՝*

$$\mathcal{X}_\ell = (\mathcal{X} \backslash M)_\ell\text{:} \tag{2.2.4}$$

Եթե ℓ–ը ճիշտ n–հանգույցանի ուղիղ է, ապա ունենք նաև՝ $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M)$, որտեղից հետևում է, որ $\mathcal{X}_\ell$–ը $(n-2)$–կախյալ է և $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$:

Լեմմա 2.2.4 (Քարնիսեր, Գասքա): *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և ℓ ուղիղը, այնպես որ $|\ell \cap \mathcal{X}| \leq n$: Ենթադրենք նաև, որ գոյություն ունեն այնպիսի երկու M', M'' մաքսիմալ ուղիղներ, որ $M' \cap M'' \cap \ell \in \mathcal{X}$: Այդ դեպքում՝*

$$\mathcal{X}_\ell = (\mathcal{X}(M' \cup M''))_\ell\text{:} \tag{2.2.5}$$

Եթե ℓ–ը ճիշտ n–հանգույցանի ուղիղ է, ապա ունենք, նաև՝ $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M' \cup M'')$, որտեղից հետևում է, որ $\mathcal{X}_\ell$–ը $(n-3)$–կախյալ է և $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$:

Գլուխ 3–ում ավելի մանրամասն դիտարկում ենք Գլուխ 1–ում ձևակերպված **Վարկած 1.3.2**–ը: Նշենք, որ վարկածը հաստատվել է մինչև $n \leq 5$ դեպքերի համար: $n = 2$ դեպքի համար վարկածը ակնհայտ է:

Պարագրաֆ 3.1–ում ապացուցում ենք GM–վարկածը $n = 3$ դեպքի համար.

---

[1] J. M. Carnicer and M. Gasca, On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation, in: T. Lyche, M.-L. Mazure, and L. L. Schumaker (eds.), 21-30. Curve and Surface Design: Saint Malo 2002, Nashboro Press, Brentwood, 2003.

Թեորեմ 3.1.1: *Դիցուք $\mathcal{X}$ –ը 10 հանգույցներից բաղկացած GC_3 բազմություն է: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ –ում գոյություն ունեն 4 համագիծ հանգույցներ:*

Պարագրաֆ 3.2–ում ապացուցում ենք GM–վարկածը $n = 4$ դեպքի համար: Տրվում է նոր, պարզ ապացույց.

Թեորեմ 3.2.1: *Դիցուք $\mathcal{X}$ –ը 15 հանգույցներից բաղկացած GC_4 բազմություն է: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ –ում գոյություն ունեն 5 համագիծ հանգույցներ:*

Եվ վերջին 4–րդ գլխում ներկայացնում ենք n–ճշգրիտ և GC_n բազմությունների նոր հատկություն: Ձևակերպում ենք նոր վարկած, և ապացուցում այն, որոշ կարևոր մասնավոր դեպքերում:

Պարագրաֆ 4.1–ում ապացուցվում է ատենախոսության արդյունքներից մեկը՝ n–ճշգրիտ բազմության n–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ.

Թեորեմ 4.1.1: *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և ℓ ուղիղը, որը պարունակում է ճիշտ n հանգույց $\mathcal{X}$ –ից: Այդ դեպքում ունենք՝*

1. $|\mathcal{X}_\ell| \le \binom{n}{2}$;
2. *Եթե* $|\mathcal{X}_\ell| \ge \binom{n-1}{2} + 1$, *ապա* $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$: *Ավելին,* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* $(n-2)$*–ճշգրիտ բազմություն է և* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M)$, *որտեղ* M*–ը մաքսիմալ ուղիղ է, այնպիսին, որ* $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$;
3. *Եթե* $\binom{n-1}{2} \ge |\mathcal{X}_\ell| \ge \binom{n-2}{2} + 2$, *ապա* $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$: *Ավելին,* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* $(n-3)$*–ճշգրիտ բազմություն է և* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup \beta)$, *որտեղ* β*–ն կոնիկ է, այնպիսին, որ* $\mathcal{N}_\ell = (\beta \backslash \ell) \cap \mathcal{X}$ *և* $|\mathcal{N}_\ell| = 2n$: *Բացի այդ* $2n$ *հանգույցներից կոնիկը կարող է պարունակել ամենաշատը 1 հանգույց, որը անհրաժեշտորեն պատկանում է* ℓ*–ին: Բացի այդ, եթե* β*–ը կոնիկը վերլուծելի է.* $\beta = \ell_1\ell_2$, *ապա ունենք, որ* $|\ell_i \cap \mathcal{X} \backslash \ell| = n,\ i = 1,2$:

Պարագրաֆ 4.2–ում ապացուցվում է ատենախոսության արդյուքներից մեկը՝ n–ճշգրիտ բազմության $(n-1)$–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ.

Թեորեմ 4.2.1: *Դիցուք ունենք n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմությունը և ℓ ուղիղը, որը պարունակում է ճիշտ $n-1$ հանգույց $\mathcal{X}$ –ից: Այդ դեպքում ունենք՝*

1. $|\mathcal{X}_\ell| \leq \binom{n-1}{2}$;
2. *Եթե* $|\mathcal{X}_\ell| \geq \binom{n-2}{2} + 3$, *ապա* $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$*: Ավելին,* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* $(n-3)$*–ճշգրիտ բազմություն է և* $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup \beta)$*, որտեղ* β*–ն մաքսիմալ կոնիկ է, այնպիսին, որ* $\beta \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$*, որտեղից հետևում է, որ* $\mathcal{N}_\ell = \beta \cap \mathcal{X}$ *և* $|\mathcal{N}_\ell| = 2n+1$*: Բացի այդ, եթե* β *կոնիկը վերլուծելի է.* $\beta = \ell_1\ell_2$*, ապա* $\mathcal{N}_\ell$*–ի* $n+1$ *հանգույցները ընկած են 1 ուղղի, օրինակ* ℓ_1*–ի, վրա և մնացած* n *հանգույցները ընկած են* $\ell_2 \backslash \ell_1$ *վրա:*

Պարագրաֆ 4.3–ում ապացուցվում է ատենախոսության արդյուքներից մեկը՝ GC_n բազմության k–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ.

Թեորեմ 4.3.1: *Ենթադրենք, որ GM–վարկածը ճիշտ է* υ*–ն չգերազանցող բոլոր աստի– ճանների համար: Դիցուք* $\mathcal{X}$*–ը* GC_n *բազմություն է, որտեղ* $n \leq \upsilon$*, և ունենք* ℓ *ուղիղը որը օգտագործվում է առնվազն մեկ հանգույցի կողմից և որը պարունակում է ճիշտ* k *հանգույց* $\mathcal{X}$*–ից, որտեղ* $1 \leq k \leq n+1$*: Այդ դեպքում* $\mathcal{X}_\ell$*–ը* $(k-2)$*–անկախ բազմու- թյուն է: Ավելին յուրաքանչյուր* $A \in \mathcal{X}_\ell$ *հանգույց ունի* $(k-2)$*–ֆունդամենտալ բազ- մանդամ* $\mathcal{X}_\ell$*–ում, որը* $\mathcal{X}$*–ում* A*–ի* n*–ֆունդամենտալ բազմանդամի արտադրիչ է:*

Հաջորդիվ կբերենք մի քանի հետևանքներ այն փաստից, որ $\mathcal{X}_\ell$–ը $(k-2)$–անկախ բազմություն է:

Հետևանք 4.3.2: *Ենթադրենք, որ* ***Թեորեմ 4.3.1****–ի պայմանները տեղի ունեն: Այդ դեպքում ունենք՝*

1. $|\mathcal{X}_\ell| \leq \binom{k}{2}$;
2. $\mathcal{X}_\ell$*–ը պարունակում է ամենաշատը* $k-1$ *համագիծ հանգույցներ;*
3. *Ցանկացած* $m \leq k-2$ *կարգի* q *կորի համար ունենք, որ*

$$|\mathcal{X}_\ell \cap q| \leq d(k-2, m):$$

Նկատենք, որ 2–րդ կետը 3–րդ կետի մասնավոր դեպք է, երբ $m = 1$: Նշենք, որ 1–ին և 2–րդ կետերը ապացուցվել են Քարնիսերի և Գասքայի կողմից[2]:

[2] J. M. Carnicer and M. Gasca, On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation, in: T. Lyche, M.-L. Mazure, and L. L. Schumaker (eds.), 21-30. Curve and Surface Design: Saint Malo 2002, Nashboro Press, Brentwood, 2003.

Պարագրաֆ 4.4–ում ապացուցվում է ատենախոսության հիմնական արդյունք–ներից մեկը՝ GC_n բազմության n–հանգույցանի ուղիղների վերաբերյալ.

Թեորեմ 4.4.1: *Ենթադրենք, որ GM–վարկածը ճիշտ է υ–ն չգերազանցող բոլոր աս–տիճանների համար: Դիցուք $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է, որտեղ $n \le \upsilon$, և ունենք ℓ ուղիղը որը պարունակում է ճիշտ n հանգույց $\mathcal{X}$–ից: Այդ դեպքում ունենք, որ*

$$|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2} \text{ կամ } \binom{n-1}{2}: \tag{4.4.1}$$

Ավելին տեղի ունեն՝

1. $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$ *այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի M մաքսիմալ ուղիղ՝ այնպիսին, որ $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$: Այս դեպքում ունենք, որ $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \setminus (\ell \cup M)$: Ուստի $\mathcal{X}_\ell$–ը GC_{n-2} բազմություն է:*
2. $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$ *այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունեն երկու M', M'' մաքսիմալ ուղիղներ՝ այնպիսին, որ $M' \cap M'' \cap \ell \in \mathcal{X}$: Այս դեպքում ունենք, որ $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \setminus (\ell \cup M' \cup M'')$: Ուստի $\mathcal{X}_\ell$–ը GC_{n-3} բազմություն է:*

Պարագրաֆ 4.5–ում ապացուցվում է **Թեորեմը 4.4.1–ը**:

Պարագրաֆ 4.6–ում ձևակերպվում է վարկած GC_n բազմությունների k–հանգույց-անի ուղիղների վերաբերյալ և այն ապացուցվում է որոշ կարևոր մասնավոր դեպքերում:

Վարկած 4.6.1: *Ենթադրենք, որ GM–վարկածը ճիշտ է υ չգերազանցող բոլոր աս–տիճանների համար: Դիցուք $\mathcal{X}$–ը GC_n բազմություն է, որտեղ $n \le \upsilon$, և ունենք k–հանգույցանի ℓ ուղիղը, $1 \le k \le n+1$: Այդ դեպքում ունենք, որ*

$$|\mathcal{X}_\ell| = \binom{s}{2}, \text{ որտեղ } 2k - n - 1 \le s \le k: \tag{4.6.1}$$

Ավելին, $\mathcal{X}_\ell$–ը GC_{s-2} բազմություն է և $\mathcal{X}$–ի ցանկացած M մաքսիմալ ուղղի համար տեղի ունեն՝

1. *$M \cap \mathcal{X}_\ell = \emptyset$, եթե M–ը բավարարում է այս պայմաններից մեկին*
   (i) *$M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$;*

(ii) *գոյություն ունի մեկ այլ M' մաքսիմալ ուղիղ, այնպիսին որ $M \cap M' \cap \ell \in \mathcal{X}$:*

2. *Եթե M–ը չի բավարարում (i) և (ii) պայմաններից ոչ մեկին, ապա $|M \cap \mathcal{X}_\ell| = s-1$, որտեղ s–ը որոշվում է (4.6.1) հավասարությունից:*

Վարկած 4.6.1–ը ապացուցվում է հետևյալ կարևոր մասնավոր դեպքերում՝

1. $k \geq n$,
2. GC_n բազմությունների համար, որոնք ունեն առնվազն n մաքսիմալ ուղիղ:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

1. Բնութագրվել է 2–հանգույցանի ուղղի օգտագործումը n–ճշգրիտ բազմություններում:
2. Ապացուցվել է n–ճշգրիտ և GC_n բազմությունների նոր հատկություն:
3. Ձևակերպվել է GC_n բազմությունների նոր հատկության վերաբերյալ վարկած:
4. Վարկածը ապացուցվել է որոշ կարևոր մասնավոր դեպքերում:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅԻ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՏԱՐԱԿԱԾ ԱՇԽԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ

1. **V. Bayramyan, H. Hakopian and S. Toroyan**, On the uniqueness of algebraic curves, Proc. of YSU, Phys. Math. Sci., 1 (2015), 3–7.
2. **V. Bayramyan, H. Hakopian and S. Toroyan**, A simple proof of the Gasca–Maeztu conjecture for $n=4$, Jaen J. Approx. 7(1) (2015), 137–147.
3. **V. Bayramyan and H. Hakopian**, On a new property of n–poised and GC_n sets, Adv Comput Math (2016). doi:10.1007/s10444–016– 9499–3.
4. **V. Bayramyan**, On a conjecture concerning GC_n sets, Mathematics in Higher School 12(1)(2016), p 11–17.
5. **V. Bayramyan**, On the usage of 2–node lines in n–poised sets, International Conference in Harmonic Analysis and Approximations, VI, 2015, Abstracts, p. 18.
6. **V. Bayramyan, H.Hakopian,** A new property of n–poised and GC_n sets, Armenian Mathematical Union, Annual Session 2016, Dedicated to the 110th Anniversary of Artashes Shahinyan, Abstracts, p. 26.

РЕЗЮМЕ

Многомерная полиномиальная интерполяция является одним из основных предметов численного анализа и теории приближений. Для одномерной интерполяции существование и единственность интерполяционного многочлена зависят лишь от количества узлов. В случае многомерной интерполяции эти вопросы зависят также от конфигурации узлов.

Пусть Π_n есть пространство многочленов двух переменных суммарной степени не превышающей n. Обозначим $N := dim\,\Pi_n = \binom{n+2}{2}$. Множество узлов $\mathcal{X}$ называется n–точным, если существует единственный многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям интерполяции.

Назовем многочлен $p \in \Pi_\mathrm{n}$ фундаментальным для узла $A \in \mathcal{X}$, если он обращается в ноль во всех узлах $\mathcal{X}$, кроме A. Будем говорить, что узел множества $\mathcal{X}$ использует прямую, если прямая является множителем фундаментального многочлена этого узла.

Рассматриваются специалные n–точные множества, называемые GC_n множествами, для которых n–фундаментальный многочлен каждого узла является произведением n линейных множителей. Другими словами, каждый узел GC_n множества использует ровно n прямых.

Прямая ℓ называется k–узловой для множества узлов $\mathcal{X}$, если она проходит точно через k узлов. $(n+1)$–узловая прямая называется максимальной прямой. В 1982 году М. Гаска и Дж И. Маезту представили гипотезу, согласно которой каждое GC_n множество имеет максимальную прямую. До сих пор эта гипотеза подтверждена для $n \leq 5$. Хорошо известно, что любая максимальная прямая M в $\mathcal{X}$ используется каждым узлом в множестве $\mathcal{X} \backslash M$.

Далее мы представляем наш результат, касающийся использования 2–узловых прямых в n–точных множествах. Пусть $\mathcal{X}$ является n–точным множеством. Тогда любая 2–узловая прямая используется не более чем одним узлом. Отметим, что в случае когда $\mathcal{X}$ есть GC_n множество, этот результат принадлежит Карнисеру и Гаска.

Определим следующие множества: $\mathcal{X}_\ell$ — подмножество узлов $\mathcal{X}$, которые используют прямую ℓ, $\mathcal{N}_\ell$ — подмножество узлов $\mathcal{X}$, которые не используют прямую ℓ и не лежат на ℓ.

В данной работе доказаны следующие два утверждения об n–узловых и $(n-1)$–узловых прямых в n–точном множестве.

1. Пусть $\mathcal{X}$ является n–точным множеством и ℓ — прямая, проходящая точно через n узлов в $\mathcal{X}$. Тогда:

(i) $|\mathcal{X}_\ell| \leq \binom{n}{2}$;

(ii) Если $|\mathcal{X}_\ell| \geq \binom{n-1}{2}$, то $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$. Кроме того, $\mathcal{X}_\ell$ является $(n-2)$–точным множеством и $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M)$, где M есть максимальная прямая, такая, что $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$;

(iii) Если $\binom{n-1}{2} \geq |\mathcal{X}_\ell| \geq \binom{n-2}{2} + 2$, то $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$. Кроме того, $\mathcal{X}_\ell$ является $(n-3)$–точным множеством и $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup \beta)$, где $\beta \in \Pi_2$ является коником, такой, что $\mathcal{N}_\ell = (\beta \backslash \ell) \cap \mathcal{X}$ и $|\mathcal{N}_\ell| = 2n$. Помимо этих $2n$ узлов коник может

содержать не более одного дополнительного узла, который обязательно принадлежит ℓ. Более того, если коник β приводимый, то есть $\beta = \ell_1\ell_2$, то мы имеем, что $|\ell_i \cap \mathcal{X} \backslash \ell| = n, i = 1,2$.

2. Пусть $\mathcal{X}$ является n–точным множеством и ℓ — прямая, проходящая точно через $(n-1)$ узлов в $\mathcal{X}$. Тогда:

(i) $|\mathcal{X}_\ell| \le \binom{n-1}{2}$;

(ii) Если $|\mathcal{X}_\ell| \ge \binom{n-2}{2} + 3$, то $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$. Кроме того, $\mathcal{X}_\ell$ является $(n-3)$–точным множеством и $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup \beta)$, где $\beta \in \Pi_2$ является коником, таким, что $\beta \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$. Следовательно, $\mathcal{N}_\ell = \beta \cap \mathcal{X}$ и $|\mathcal{N}_\ell| = 2n+1$. Более того, если коник β приводимый, то есть $\beta = \ell_1\ell_2$, то $n+1$ узлов $\mathcal{N}_\ell$ лежат на одной прямой, скажем на ℓ_1, а остальные n узлов — на $\ell_2 \backslash \ell_1$.

Одним из основных результатов диссертации является то, что если гипотеза Гаска–Маезту верна, то любая n–узловая прямая в GC_n множестве $\mathcal{X}$ используется либо точно $\binom{n}{2}$ узлами, либо точно $\binom{n-1}{2}$ узлами. Кроме того:

(i) $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$ тогда и только тогда, когда существует такая максимальная прямая M, что $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$. В этом случае $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M)$. Следовательно, $\mathcal{X}_\ell$ есть GC_{n-2} множество;

(ii) $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$ тогда и только тогда, когда существуют такие две максимальные прямые M', M'', что $M' \cap M'' \cap \ell \in \mathcal{X}$. В этом случае $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M' \cup M'')$. Следовательно, $\mathcal{X}_\ell$ есть GC_{n-3} множество.

В конце мы представляем гипотезу о к–узловых прямых и доказываем её для нескольких важных случаев.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Найдено число узлов n–точного множества, которые используют прямую, проходящую точно через 2 узла этого множества.
2. Доказано новое свойство n–точных и GC_nмножеств.
3. Выдвунита гипотеза об исползовании k–узловых прямых в GC_n множествах, где $2 \le k \le n$.
4. Гипотеза доказана для нескольких важных случаев.

ABSTRACT

Multivariate polynomial interpolation is one of the basic subjects of Numerical Analysis and Approximation Theory. For the univariate interpolation the existence and uniqueness of interpolating polynomial depend only on the number of nodes. For the multivariate interpolation they depend also on the configuration of nodes.

Let Π_n be the space of bivariate polynomials of total degree at most n. We have that $N := dim\,\Pi_n = \binom{n+2}{2}$. A set of nodes $\mathcal{X}$ is called n–poised if there exists a unique polynomial $p \in \Pi_n$, satisfying the interpolation conditions.

A polynomial $p \in \Pi_{\mathrm{n}}$ is called fundamental for the node $A \in \mathcal{X}$, if it vanishes at all the nodes of $\mathcal{X}$ but A. We say that the node of $\mathcal{X}$ uses a line, if the line is a factor in the fundamental polynomial of the node.

A special type of n–poised sets called GC_n sets are considered for which the n–fundamental polynomial of each node is a product of n linear factors. In other words GC_n sets are the sets each node of which uses exactly n lines.

A line ℓ is called k–node line for a node set $\mathcal{X}$ if it passes through exactly k nodes. An $(n+1)$–node line is called maximal line. In 1982 M. Gasca and J. I. Maeztu conjectured that every GC_n set possesses necessarily a maximal line. Till now the conjecture is confirmed to be true for $n \leq 5$. It is well–known that any maximal line $M$of $\mathcal{X}$is used by each node in $\mathcal{X} \backslash M$.

Now let us present our result concerning the usage of 2–node lines in n–poised sets. Let $\mathcal{X}$ be an n–poised set. Then any 2–node line is used at most by one node. Let us mention that in the case when $\mathcal{X}$ is a GC_n set this result is due to Carnicer, Gasca.

Next let us define the following sets: $\mathcal{X}_\ell$ is the subset of nodes of $\mathcal{X}$ which use the line ℓ, $\mathcal{N}_\ell$ is the subset of nodes of $\mathcal{X}$ which do not use the line ℓ and do notlie in ℓ.

In thist hesis we prove the following two statements concerning n–node and $(n-1)$–node lines in n–poised sets.

1. Let $\mathcal{X}$ be a n–poised set and ℓ be a line passing through exactly n nodes of $\mathcal{X}$. Then the following hold:

(i) $|\mathcal{X}_\ell| \leq \binom{n}{2}$;

(ii) If $|\mathcal{X}_\ell| \geq \binom{n-1}{2}$ then $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$. Moreover, $\mathcal{X}_\ell$ is an $(n-2)$–poised set and $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup M)$, where $M$is a maximal line such that$M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$;

(iii) If$\binom{n-1}{2} \geq |\mathcal{X}_\ell| \geq \binom{n-2}{2} + 2$ then $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$.Moreover, $\mathcal{X}_\ell$ is an $(n-3)$–poised set and $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \backslash (\ell \cup \beta)$, where $\beta \in \Pi_2$is a conic such that $\mathcal{N}_\ell = (\beta \backslash \ell) \cap \mathcal{X}$ and $|\mathcal{N}_\ell| = 2n$. Besides these $2n$ nodes the conicmay contain at most one extra node, which necessarily belongs to ℓ. Furthermore, if the conic β is reducible, i. e. $\beta = \ell_1 \ell_2$ then we have that $|\ell_i \cap \mathcal{X} \backslash \ell| = n, i = 1,2$*:*

2. Let $\mathcal{X}$ be a n–poised set and ℓ be a line passing through exactly $n-1$ nodes of $\mathcal{X}$, where $n \geq 3$. Then the following hold:

(i) $|\mathcal{X}_\ell| \leq \binom{n-1}{2}$;

(ii) If $|\mathcal{X}_\ell| \geq \binom{n-2}{2} + 3$ then $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$. Moreover, $\mathcal{X}_\ell$is an $(n-3)$–poised and $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \setminus (\ell \cup \beta)$, where $\beta \in \Pi_2$ is a conic such that$\beta \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$. Therefore, we have that $\mathcal{N}_\ell = \beta \cap \mathcal{X}$ and $|\mathcal{N}_\ell| = 2n+1$. Furthermore, if the conic β is reducible, i. e. $\beta = \ell_1 \ell_2$ then $n+1$ nodes of $\mathcal{N}_\ell$ lie on one line, say in ℓ_1, and the remaining n nodes lie on $\ell_2 \setminus \ell_1$.

One of the main results of the thesis is that if the Gasca–Maeztu conjecture is true then any n–node line of GC_n set $\mathcal{X}$is used either by exactly $\binom{n}{2}$ nodes or by exactly $\binom{n-1}{2}$ nodes. Moreover, the following hold:

(i) $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n}{2}$ if and only if there is a maximal line M such that $M \cap \ell \cap \mathcal{X} = \emptyset$. In this case, we have that $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \setminus (\ell \cup M)$. Hence it is a GC_{n-2}set.

(ii) $|\mathcal{X}_\ell| = \binom{n-1}{2}$ if and only if there are two maximal lines M', M'', such that $M' \cap M'' \cap \ell \in \mathcal{X}$. In this case, we have that $\mathcal{X}_\ell = \mathcal{X} \setminus (\ell \cup M' \cup M'')$. Hence it is a GC_{n-3} set.

At the end, we present a conjecture concerning any k–node line and prove it in some important cases.

The following main results are obtained in the thesis:

1. The number of nodes in an n–poised set, using a line passing through exactly 2 nodes of it, is determined.
2. A new property of n–poised and GC_n sets is proved.
3. A conjecture is proposed on the usage of k–node lines in GC_n sets where $2 \leq k \leq n$.
4. The conjecture is proved in some important cases.