ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ադամյան Ռուբեն Օհանի

ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՆԵՐԿՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄ ԵՎ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄ

Ա.01.09. «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2008

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Адамян Рубен Оганович

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ И РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ РАССКРАСКИ ГРАФОВ СРАВНЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09. “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван 2008

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր Ս.Ե. Մարկոսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր Յու.Մ. Մովսիսյան
	ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Ռ.Ն. Տոնոյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2008թ. հունիսի 10-ին, ժամը՝ 14^{00}-ին, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 "Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն" մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 375025, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2008թ. մայիսի 10-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук С.Е. Маркосян
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук Ю.М. Мовсисян
	кандидат физ.-мат. наук Р.Н. Тоноян
Ведущая организация:	Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Защита состоится 10-го июня 2008г. в 14^{00} часов на заседании специализированного совета 044 "Математическая кибернетика и математическая логика" ВАК, при ЕГУ по адресу: 375025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 10-го мая 2008г.

Ученый секретарь специализированного совета	кандидат физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի հրատապությունը: Գրաֆների ներկման և գրաֆում ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդիրները դիսկրետ մաթեմատիկայի ամենաշատ ուսումնասիրված խնդիրներից են: Սա պայմանավորված է նրանց սերտ կապով բազմաթիվ կիրառական խնդիրների հետ: Մասնավորապես՝ կարգավորումների տեսության մեջ տրված աշխատանքները նվազագույն քանակի աշխատողներով կատարելու կամ տրված քանակի աշխատողներով տրված աշխատանքներից առավելագույն քանակով աշխատանքները կատարելու խնդիրները, գերմեծ ինտեգրալային սխեմաների ֆիզիկական նախագծման մեջ տրված շղթաներն ուղեգծելու համար անհրաժեշտ ամենափոքր տարածքը գտնելու կամ տրված տարածքում տրված շղթաներից հնարավորինս ամենաշատն ուղեգծելու խնդիրները, ծրագրի արդյունավետ աշխատանքի համար պրոցեսորի ռեգիստրների անհրաժեշտ նվազագույն քանակը գտնելու կամ ռեգիստրների տրված քանակը հնարավորինս արդյունավետ օգտագործելու խնդիրները բերվում են ներկման խնդիրներին:

Գրաֆի մինիմալ ներկում և գրաֆում ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդիրները հայտնի և բավականաչափ լավ ուսումնասիրված $\mathcal{NP}$-դժվար խնդիրներ են: Այս խնդիրների համար նաև ուսումնասիրված է նրանց համար լավ մոտավոր ալգորիթմների գոյության հարցը և ապացուցված է, որ նրանց համար կամայական ֆիքսված շեղման գնահատական ունեցող մոտավոր ալգորիթմներ գտնելը նույնպես $\mathcal{NP}$-դժվար է:

Գրաֆի ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրում պահանջվում է այդ գրաֆում գտնել առավելագույն քանակով գագաթներ պարունակող ենթագրաֆ, որը q-ներկելի է: Այս խնդիրը հանդիսանում է գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմություն ($q = 1$) և մինիմալ ներկում ($q = \chi(G)$, որտեղ $\chi(G)$-ն G գրաֆի ներկման թիվն է) գտնելու խնդիրների ընդհանրացումը: Ուստի այն $q = 1$ և $q = \chi(G)$ դեպքերում $\mathcal{NP}$-դժվար է: Լևիսի և Յանակակիսի կողմից ապացուցված է, որ այն $\mathcal{NP}$-դժվար է նաև q-ի բոլոր $q = 1, 2, \ldots, \chi(G)$ արժեքների համար: Հայտնի է, որ ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը հեշտությամբ բերվում է ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդրին և հակառակը:

Ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆի q գույներից յուրաքանչյուրով ներկված գագաթները կազմում են անկախ բազմություն, այդ պատճառով ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը նաև անվանում են *q-ամենամեծ անկախ բազմություններ* (q-MIS, q-maximum independent sets) գտնելու խնդիր: Եթե դիտարկենք G-ի լրացում $\overline{G}$ գրաֆը, ապա G-ում ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելը համարժեք է $\overline{G}$-ում այնպիսի $K_1, K_2, \ldots, K_q$ լրիվ ենթագրաֆներ գտնելուն, որ $|\bigcup_{1\le j\le q} K_j|$-ն լինի հնարավորին չափով մեծ (քանի որ G-ի ցանկացած անկախ բազմության գագաթներով $\overline{G}$-ում ծնվում է լրիվ ենթագրաֆ): Այս խնդիրը *ամենամեծ q լրիվ ենթագրաֆներ գտնելու* խնդիրն է: Օրինակ, եթե G-ն տեղադրության գրաֆ է, ապա G-ում ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու համար ավելի նպատակահարմար է $\overline{G}$ գրաֆում (որը համեմատությունների գրաֆ է) լուծել ամենամեծ q լրիվ ենթագրաֆներ գտնելու խնդիրը: Քանի որ համեմատությունների գրաֆում այն լուծվում է ավելի պարզ ալգորիթմի միջոցով:

Առաջին անգամ ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը ձևակերպվել և էֆեկտիվորեն լուծվել է ինտերվալների գրաֆների համար: Հետագայում մշակվել են ալգորիթմներ այդ խնդրի լուծման համար եռանկյունացված (ֆիքսված q-ի դեպքում), համեմատությունների և կոհամեմատությունների գրաֆների դասերի համար: Կատարյալ գրաֆների դասի համար այս խնդիրի լուծումը կամայական q-ի դեպքում $\mathcal{NP}$-դժվար է, իսկ եթե q-ն համարենք ֆիքսված պարամետր, ապա դեռևս հայտնի չէ այդ խնդրի $\mathcal{NP}$-դժվար լինելը: Կատարյալ գրաֆները յուրահատուկ են նրանով, որ նրանց համար հայտնի են ամենամեծ անկախ բազմություն և նվազագույն քանակի գույներով ներկում գտնող բազմանդամային ալգորիթմներ: Շրջանագծի աղեղների գրաֆի համար գոյություն ունեն ամենամեծ անկախ բազմություն գտնող ալգորիթմներ, բայց մինիմալ ներկում գտնելու խնդիրը $\mathcal{NP}$-դժվար է: Հետևաբար քիչ հավանական է, որ կամայական q-ի դեպքում ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրի համար գոյություն ունենա բազմանդամային ալգորիթմ շրջանագծի աղեղների գրաֆների համար: Մինչ այժմ հայտնի են բազմանդամային ալգորիթմներ $q = 1$ և $q = 2$ դեպքերի համար, այսինքն ամենամեծ անկախ բազմություն և ամենամեծ երկկողմանի ենթագրաֆ գտնող ալգորիթմներ:

Տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆներում ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը հանդիսանում է q հատ անտիշղթաների ամենամեծ միավորումը գտնելու խնդիրը: Շղթաների և անտիշղթաների ամենամեծ միավորումը գտնելու խնդիրների ուսումնասիրման մեջ կենտրոնական տեղ է զբաղվում Գրին-Կլեյտմանի թեորեմը և նրա երկակի թեորեմը: Այնուհետև Ֆոմինը և Ֆրանկը ընդհանրացրել են Գրին-Կլեյտմանի թեորեմը և նրա երկակի թեորեմն ացիկլիկ կողմնորոշված գրաֆների համար, նրանց կողմից տրված ապացույցը հիմնված է գրաֆում պոտենցիալի գաղափարի և գրաֆում նվազագույն արժեքով շրջանառություն և հոսք գտնելու վրա: Այդ կոնստրուկտիվ ապացույցները թույլ են տալիս կառուցել տրված քանակով շղթաների և անտիշղթաների առավելագույն միավորումները գտնող բազմանդամային ալգորիթմներ:

Օպտիմալ (ամենամեծ) q-ներկելի ենթագրաֆի որոշ հատկություններ՝ կապված minimax հարաբերությունների հետ ուսումնասիրված են Բերժի և Կամերոնի աշխատանքներում:

Աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները: Աշխատանքի նպատակն է հետազոտել գրաֆում ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը, նրա համար գտնել ավելի արդյունավետ ու ավելի պարզ ճշգրիտ ալգորիթմներ և ավելի փոքր շեղման գնահատական ունեցող մոտավոր ալգորիթմներ: Աշխատանքում ուսումնասիրված է նաև համեմատությունների գրաֆների ամենամեծ անկախ բազմությունների ամենափոքր տրանսվերսալի հզորության և այդ տրանսվերսալը գտնելու հարցը:

Հետազոտման օբյեկտը: Աշխատանքի հետազոտման օբյեկտ են հանդիսանում q-ներկելի ենթագրաֆները և չհատվող ամենամեծ անկախ բազմությունների բազմությունները:

Հետազոտման մեթոդները: Աշխատանքում լայնորեն օգտագործված են գրաֆների տեսության մեթոդները, հատկապես, գրաֆում մաքսիմալ հոսք, նվազագույն արժեքով շրջանառություն գտնելու, գրաֆը նվազագույն քանակով շղթաների բաժանելու մեթոդները:

Արդյունքների գիտական նորությունը: Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են.

- Մաքսիմալ հոսք գտնելու ալգորիթմի վրա հիմնված և հետևաբար՝ գոյություն ունեցող ալգորիթմից ավելի արդյունավետ ալգորիթմի կառուցումը՝ $q = \omega - 2$ դեպքում (որտեղ ω-ն գրաֆի ամենամեծ լրիվ ենթագրաֆի գագաթների քանակն է) ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու համար,
- ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու համար ընդհանրացված ագահ ալգորիթմի կառուցումը և նրա համար շեղման գնահատականի գտնելը, որը լավացնում է սովորական ագահ ալգորիթմի համար հայտնի շեղման գնահատականը,
- համեմատությունների գրաֆների ամենամեծ անկախ բազմությունների տրանսվերսալային թվի և նրանց անկախության թվի հավասարության ապացույցը, ամենափոքր տրանսվերսալ գտնող ալգորիթմի կառուցումը:

Ատենախոսության բոլոր արդյունքները նոր են և ստացված են հեղինակի կողմից առաջին անգամ:

Ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը: Աշխատանքում ստացված արդյունքները ունեն կարևոր տեսական և գործնական նշանակություն: Արդեն նշել ենք ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրի մի քանի կիրառություններ, իսկ համեմատությունների գրաֆների ամենամեծ անկախ բազմությունների տրանսվերսալային թվի համար ստացված արդյունքը դիսկրետ մաթեմատիկայի՝ գոյության minimax տիպի արդյունքների դասին պատկանող հետաքրքիր արդյունք է:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան: Ատենախոսությունում ստացված արդյունքները զեկուցվել են Երևանի պետական համալսարանի դիսկրետ մաթեմատիկայի ամբիոնի, ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի սեմինարներում:

Հրապարակումները: Աշխատանքի թեմայով հրապարակվել է երեք աշխատանք, որոնց ցուցակը բերված է սեղմագրի վերջում:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը: Աշխատանքը բաղկացած է ցանկից, ներածությունից, չորս գլուխներից, ամփոփումից և օգտագործված գրականության ցանկից: Աշխատանքի ծավալն է 113 էջ՝ ներառյալ 163 անվանում պարունակող օգտագործված գրականության ցանկը:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ներածության մեջ հիմնավորված է ատենախոսության հրապապությունը և հակիրճ ներկայացված է ատենախոսության ամեն մի գլխի պարունակությունը:

Առաջին գլխում տրված է ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրի ֆորմալ սահմանումը, ապա բերված են նրա $\mathcal{NP}$-դժվարության և ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդրին համարժեք լինելու ապացույցները: Այնուհետև բերված են ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրի մի քանի կիրառություններ. յուրաքանչյուր կիրառության համար ցույց է տրված, թե ինչպես կարելի այդ խնդրի լուծումը հանգեցնել ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրին:

Այս գլխում սահմանված են ատենախոսության մեջ օգտագործվող գրաֆների՝ ինտերվալների, տեղադրության, համեմատությունների, կոհամեմատությունների, եռանկյունացված, շրջանագծի աղեղների և կատարյալ գրաֆների դասերը:

Սահմանում 1. $G = (V, E)$ *սովորական ոչ կողմնորոշված գրաֆը կանվանենք համեմատությունների* (comparability) *գրաֆ, եթե նրա գագաթները կարելի է փոխմիարժեք համապատասխանության մեջ դնել որևէ մասնակի կարգավորված բազմության էլեմենտների հետ այնպես, որ նրա երկու գագաթների միջև գոյություն ունենա կող այն և միայն դեպքում, եթե այդ գագաթներին համապատասխանող մասնակի կարգավորված բազմության էլեմենտները համեմատելի են:*

Յուրաքանչյուր գրաֆների դասի համար նշված են այդ դասի գրաֆները ճանաչող ալգորիթմների բարդությունները, ինչպես նաև այդ դասի համար ամենամեծ անկախ բազմություն, մինիմալ ներկում և ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնող բազմանդամային ալգորիթմների հայտնի լինելու փաստերը: Բերված են սահմանված գրաֆների դասերի միջև գոյություն ունեցող կապերը:

Ներկայացված է ինտերվալների գրաֆներում ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնող մի ալգորիթմ: Ապա ներկայացված են ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրի առանձնահատկությունները տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների համար և օգտվելով Գրին-Կլեյտմանի թեորեմի կոնստրուկտիվ ապացույցից՝ կառուցված է համեմատությունների գրաֆում ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնող բազմանդամային ալգորիթմ:

Երկրորդ գլխում ուսումնասիրված է ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնող մի ալգորիթմի օպտիմալության հարցն ու առաջարկված է ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնող օպտիմալ ալգորիթմ՝ $q = \omega - 2$ դեպքի համար, որտեղ ω-ն գրաֆի ամենամեծ լրիվ ենթագրաֆի գագաթների քանակն է:

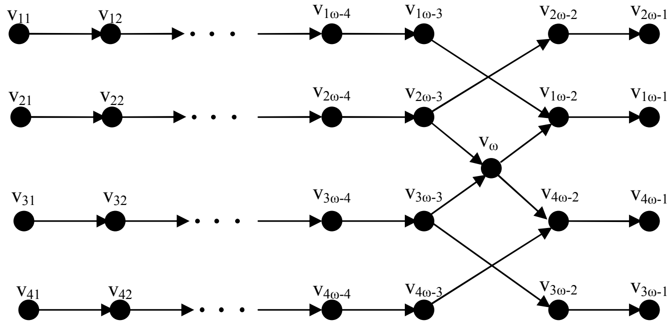
Առաջին հարցին պատասխանելու համար կառուցված է տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների ենթադաս, որի համար այդ ալգորիթմը չի գտնում ամենամեծ $\omega - 2$-ներկելի ենթագրաֆը (տե՛ս պատկեր 1):

$q = \omega - 2$ դեպքում ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու համար առաջարկված է հետևյալ ալգորիթմը:

Ալգորիթմ

Դիցուք տրված է G համեմատությունների գրաֆը:

1. G գրաֆը որևէ ձևով տրանզիտիվ կողմնորոշել, ապա ստացված $\vec{G}_\omega$ գրաֆը շերտավորել:



Պատկեր 1

2. Ավելացնելով s և t նոր գագաթներ՝ կառուցել N_ω ցանցը, ուր մասնակցում են շերտավորված $\vec{G}_\omega$ գրաֆի միայն հարևան շերտերի գագաթները միացնող աղեղները, իսկ s և t գագաթները միացված են համապատասխանաբար առաջին և վերջին շերտերի բոլոր գագաթներին:
3. N_ω ցանցում գտնել մինիմալ $s-t$ Y_ω գագաթային կտրվածք:
4. Կառուցել $\vec{G}_{\omega-1} = \vec{G}_\omega - Y_\omega$ փրանզիտիվ կողմնորոշված և շերտավորված գրաֆը:
5. $\vec{G}_{\omega-1}$ շերտավորված գրաֆից կառուցել $N_{\omega-1}$ ցանցը N_ω ցանցի կառուցմանը համանման ձևով:
6. $N_{\omega-1}$-ին ավելացնել հանված Y_ω գագաթները հետևյալ ձևով: Դիցուք $N_{\omega-1}$ ցանցում ունենք $X_0 = \{s\}, X_1, \ldots, X_{\omega-1}, X_\omega = \{t\}$ շերտերը: $y \in Y_\omega$ գագաթն ավելացնենք այն X_k և X_{k+1} շերտերի միջև, որ $\vec{G}_\omega - (Y_\omega \setminus \{y\})$ գրաֆում y-ին նախորդող բոլոր գագաթները գտնվեն $X_0, X_1, \cdots, X_k$ շերտերում, իսկ y-ին հաջորդող բոլոր գագաթները գտնվեն $X_{k+1}, \cdots, X_{\omega-1}, X_\omega$ շերտերում: Պարզ է, որ $\forall y \in Y_\omega$ գագաթի համար գոյություն ունի միակ k թիվ այնպիսին, որ y գագաթը կարելի է ավելացնել X_k և X_{k+1} շերտերի միջև:

   X_k և X_{k+1} շերտերի միջև ավելացված ամեն մի $y \in Y_\omega$ գագաթի հետ ավելացնել $\vec{G}_\omega$ գրաֆի այն աղեղները, որոնք y գագաթը կապում են X_k և X_{k+1} շերտերի գագաթների հետ: Ստացված ցանցը նշանակել $N^+_{\omega-1}$:
7. $N^+_{\omega-1}$ ցանցին ամեն $y_i \in Y_\omega$ գագաթի համար ավելացնել s_i և t_i գագաթները և $(s, s_i), \{(s_i, u) \;\big/\; u \in \Gamma y_i\}, (t_i, t), \{(v, t_i) \;\big/\; v \in \Gamma^{-1} y_i\}$ աղեղները: Ստացված ցանցը նշանակել $N^{++}_{\omega-1}$:
8. $N^{++}_{\omega-1}$-ում գտնել մինիմալ $s-t$ $Y_{\omega-1}$ գագաթային կտրվածք:

9. $Y_{\omega-1}$-ը տրոհել երկու մասի. $Y_{\omega-1} = Y'_{\omega-1} \cup Y_{st}$, որտեղ

$$Y_{st} = Y_{\omega-1} \cap \{s_i, t_i \Big/ y_i \in Y_\omega\}, \quad Y'_{\omega-1} = Y_{\omega-1} \setminus Y_{st}$$

Այնուհետև կառուցել $Y = Y'_{\omega-1} \cup Y'_\omega$ բազմությունը, որտեղ

$$Y'_\omega = \{y_i \in Y_\omega \Big/ \{s_i, t_i\} \cap Y_{st} \neq \emptyset\}$$

Ատենախոսությունում ցույց է տրված, որ $Y_\omega \cap Y_{\omega-1} = \emptyset$, և որ, եթե $Y_{st} \cap \{s_i, t_i\} \neq \emptyset$, ապա $|Y_{st} \cap \{s_i, t_i\}| = 1$: Հետևաբար $|Y'_\omega| = Y_{st}$, հետևաբար $|Y| = |Y_{\omega-1}|$:
$\vec{G}_{\omega-2} = \vec{G_\omega} - Y$ -ը կլինի ամենամեծ $\omega - 2$ -ներկելի ենթագրաֆը:

Ապացուցված է այս ալգորիթմի օպտիմալությունը և բերված են նրա աշխատանքը պարզաբանող օրինակներ:

Ալգորիթմի օպտիմալության ապացույցում էական դեր են խաղում ալգորիթմի ընթացքում կառուցվող $N^+_{\omega-1}$ և $N^{++}_{\omega-1}$ ցանցերի համար ապացուցված հետևյալ հատկությունները:

1. Եթե $N^{++}_{\omega-1}$ ցանցում գոյություն ունի $y \in Y_\omega$ գագաթ, որ $\Gamma^{-1}y = \{s\}$ կամ $\Gamma y = \{t\}$, ապա $y \in Y$:
2. $N^+_{\omega-1}$-ում գոյություն ունեն $|Y_\omega|$ հատ գագաթներով չհատվող ω երկարության շղթաներ, որոնցից յուրաքանչյուրն անցնում Y_ω-ի ճիշտ մեկ գագաթով:
3. $N^+_{\omega-1}$-ում գոյություն չունի y_i-ից y_j շղթա, որտեղ $y_i, y_j \in Y_\omega$ ու $y_i \neq y_j$:
4. $N^{++}_{\omega-1}$ ցանցում s-ից t գնացող ցանկացած շղթա կարող է անցնել ամենաշատը մեկ s_i կամ t_j գագաթով, այսինքն $N^{++}_{\omega-1}$ ցանցում s-ից t գնացող ցանկացած շղթա կարող է ունենալ ամենաշատը մեկ թռիչք:
5. $Y_\omega \cap Y_{\omega-1} = \emptyset$
6. Եթե $Y_{st} \cap \{s_i, t_i\} \neq \emptyset$, ապա $|Y_{st} \cap \{s_i, t_i\}| = 1$:
7. Եթե $y_i \in Y_\omega \setminus Y$, ապա s-ից y_i գնացող ցանկացած շղթա, ինչպես նաև y_i-ից t գնացող ցանկացած շղթա, պարունակում են գոնե մեկ գագաթ Y-ից:
8. Եթե $y_i \in Y \cap Y_\omega$, ապա կա՛մ s-ից y_i գնացող ցանկացած շղթա, կա՛մ y_i-ից t գնացող ցանկացած շղթա պարունակում է գոնե մեկ գագաթ $Y \setminus \{y_i\}$-ից,

Ատենախոսությունում առաջարկված ալգորիթմի արդյունավետությունը համեմատված է Գրին-Կլեյտմանի թեորեմի ապացույցից ստացվող ընդհանուր ալգորիթմի արդյունավետության հետ. ցույց է տրված, որ առաջարկված ալգորիթմի բարդությունը ըստ կարգի $\log n$ անգամ (որտեղ n-ը գրաֆի գագաթների քանակն է) փոքր է ընդհանուր ալգորիթմի բարդությունից, սա պայմանավորված է նրանով, որ մեր ալգորիթմը հիմնված է գրաֆում մաքսիմալ հոսք գտնելու ալգորիթմի վրա, իսկ ընդհանուր ալգորիթմը՝ նվազագույն արժեքով շրջանառություն գտնելու ալգորիթմի վրա:

Երրորդ գլխում առաջարկված է ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնող մոտավոր ալգորիթմ և գտնված է նրա առավելագույն հնարավոր շեղումն օպտիմալ ալգորիթմից:

Մինչ մոտավոր ալգորիթմի նկարագրումը այս գլխում սահմանված են մոտավոր ալգորիթմների հիմնական տեսակները, յուրաքանչյուր տեսակի համար բերված են օրինակներ, ու նշված է այդ տեսակի մոտավոր ալգորիթմների գոյության հնարավորությունն ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրի մասնավոր դեպք հանդիսացող ամենամեծ անկախ բազմություն և մինիմալ ներկում գտնելու խնդիրների համար: Այնուհետև ներկայացված է բազմանդամային ժամանակում հաշվարկվող մի մեծություն (Լովասի թետա ֆունկցիան), որը հանդիսանում է վերևից գնահատական գրաֆի խտության համար և ներքևից գնահատական՝ ներկման թվի համար, իսկ հետո դիտարկված է այդ մեծության մի ընդհանրացում, որը հանդիսանում է վերևից գնահատական ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆի գագաթների քանակի համար:

Ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու համար առաջարկված մոտավոր ալգորիթմն ունի մոտավոր բնույթ. այն իր յուրաքանչյուր քայլում (իտերացիայի ընթացքում) գտնում է ընթացիկ գրաֆի առավելագույն թվով իրար հետ չհատվող ամենամեծ անկախ բազմություններ: Այս ալգորիթմն անվանել ենք ընդհանրացված ագահ ալգորիթմ, ի տարբերություն այն ալգորիթմի, որն իր յուրաքանչյուր քայլում գտնում է ընթացիկ գրաֆի միայն մեկ ամենամեծ անկախ բազմություն, որը և անվանել ենք սովորական ագահ ալգորիթմ: Սովորական ագահ ալգորիթմը կարելի է կիրառել այնպիսի գրաֆների դասի վրա, որոնց համար գագաթների ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդիրն ունի էֆեկտիվ լուծում: Այդպիսին են, օրինակ, կապարյալ և շրջանագծի աղեղների գրաֆների դասերը: Իսկ ընդհանրացված ագահ ալգորիթմի համար անհրաժեշտ է, որ առավելագույն թվով ամենամեծ անկախ բազմություններ գտնելու խնդիրն ունենա էֆեկտիվ լուծում: Օրինակ՝ համեմատությունների և կոհամեմատությունների գրաֆների դասերի համար գտնված են առավելագույն թվով ամենամեծ անկախ բազմություններ գտնող ալգորիթմներ:

Ընդհանրացված ագահ ալգորիթմի նկարագրությունը հետևյալն է:

Ընդհանրացված ագահ ալգորիթմ

Դիցուք տրված է G սովորական գրաֆը և q բնական թիվը:

1. Վերցնել $G_1 = G, p = 1$:
2. G_p գրաֆում գտնել մաքսիմալ քանակով զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող ամենամեծ անկախ բազմություններ $I_{p1}, I_{p2}, \ldots, I_{pk_p}$:
3. Եթե $\sum_{i=1}^{p} k_i \geq q$, ապա որպես q-ներկելի ենթագրաֆ վերցնել

$$G' = G\left[\bigcup_{i=1}^{p-1}\bigcup_{j=1}^{k_i} I_{ij} + \bigcup_{j=1}^{m} I_{pj}\right]$$

   գրաֆը, որտեղ $\sum_{i=1}^{p-1} k_i + m = q$, և ավարտել ալգորիթմի աշխատանքը, հակառակ դեպքում կառուցել $G_{p+1} = G_p - \bigcup_{j=1}^{k_p} I_{pj}$ գրաֆը, վերցնել $p = p+1$ և անցնել 2-րդ քայլին:

Այս ալգորիթմի համար գտնված է նրա առավելագույն հնարավոր շեղումն օպտիմալ ալգորիթմից: Ստացված գնահատականի խսկության ապացույցից հետևում է, որ այդ գնահատականը ճիշտ է նաև սովորական ագահ ալգորիթմի համար, ուստի այս արդյունքը լավացնում է սովորական ագահ ալգորիթմի համար Նարաշիմհանի կողմից ստացված շեղման գնահատականը:

Թեորեմ 1. *Ընդհանրացված ագահ ալգորիթմով ստացված ենթագրաֆի գագաթների քանակի շեղումն ամենամեծ ենթագրաֆի գագաթների քանակից չի գերազանցում* $1+1/(e-1)$*, այսինքն այն հանդիսանում է* $1+1/(e-1)$*-ալգորիթմ:*

Այս թեորեմի ապացույցից անմիջապես ստացվում է հետևյալ հետևանքը, որը թույլ է տալիս ստանալ ավելի լավ շեղման գնահատական, եթե հայտնի է, թե քանի քայլ է կատարել ընդհանրացված ագահ ալգորիթմը:

Հետևանք 1. *Եթե ընդհանրացված ագահ ալգորիթմի աշխատանքի ընթացքում ալգորիթմի 2-րդ քայլը կատարվել է ընդամենը* p *անգամ (այսինքն ալգորիթմն ավարտել է իր աշխատանքը՝ կատարելով ընդամենը* p *իտերացիա), ապա ստացված* q*-ներկելի ենթագրաֆի գագաթների քանակը փոքր է ամենամեծ* q*-ներկելի ենթագրաֆի գագաթների քանակից ամենաշատը* $\frac{1}{1-(1-1/p)^p}$ *անգամ:*

Ընդհանրացված ագահ ալգորիթմի շեղման գնահատականի մասին թեորեմի ապացույցից օգտվելով՝ կառուցված է գրաֆների դաս, որոնց համար ընդհանրացված ագահ ալգորիթմի շեղումն ինչքան ասես մոտ է ստացված շեղման գնահատականին, որտեղից հետևում է, որ ստացված շեղման գնահատականը հնարավոր չէ լավացնել:

Այս գլխի վերջում ուսումնասիրված է ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրի՝ ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդրին համարժեք լինելու փաստի օգտագործման հնարավորությունն ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրի համար ճշգրիտ ու մոտավոր ալգորիթմներ կառուցելու համար:

Չորրորդ գլխում ուսումնասիրված է համեմատությունների գրաֆում ամենամեծ անկախ բազմությունների տրանսվերսալային և անկախության թվերի հավասարության հարցը. ապացուցված է, որ նրանք հավասար են, և կառուցված է համեմատությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների ամենափոքր տրանսվերսալը կառուցող ալգորիթմ ու գնահատված է նրա բարդությունը:

Գլխի սկզբում տրված են բազմությունների ընտանիքի տրանսվերսալի և նրա հետ առնչվող գաղափարների սահմանումները:

Սահմանում 2. *Դիցուք* $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$*-ն* X *բազմության ենթաբազմությունների ընտանիք է: Կասենք, որ* $T \subseteq X$ *բազմությունը հանդիսանում է* $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *բազմությունների ընտանիքի տրանսվերսալ, եթե* $A_i \cap T \neq \emptyset, i = 1, \ldots, n$*: Ամենափոքր տրանսվերսալի հզորությանն անվանում են տրանսվերսալային թիվ:*

Որոշ աշխատանքներում, տրանսվերսալ ասելով, հասկանում են փարբեր ներկայացուցիչների համակարգ: Բայց այս սեղմագրում տրանսվերսալը կհասկանանք վերևում սահմանված իմաստով:

Այս գլխում հիմնավորված է ամենափոքր տրանսվերսալը գտնելու խնդրի $\mathcal{NP}$-դժվարությունը, ապա տրված է տրանսվերսալային հիպերգրաֆի սահմանումը և բերված են նրա հիմնական կիրառությունները:

Այնուհետև ներկայացված է Մարկոսյանի կողմից առաջարկված համեմատությունների գրաֆում առավելագույն քանակով զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող ամենամեծ անկախ բազմություններ գտնող հետևյալ ալգորիթմը (այս և մյուս ալգորիթմների նկարագրության մեջ գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմություններին կանվանենք α-բազմություններ):

Ալգորիթմ

Դիցուք տրված է G համեմատությունների գրաֆը:

1. G գրաֆը տրանզիտիվ կողմնորոշել:
2. G-ն բաժանել մինիմալ քանակով իրար հետ չհատվող լրիվ ենթագրաֆների $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\alpha$, $Q_i = \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{k_i}^i\}, i = 1, 2, \ldots, \alpha$:
3. Վերցնել $S = \{x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^\alpha\}$:
4. Եթե ընթացիկ $S = \{x_{p_1}^1, x_{p_2}^2, \ldots, x_{p_\alpha}^\alpha\}$ բազմության գագաթների միջև գոյություն ունի աղեղ, ապա անցնել 5-րդ քայլին, հակառակ դեպքում անցնել 6-րդ քայլին
5. Դիցուք $(x_{p_i}^i, x_{p_j}^j)$ աղեղ է S-ի գագաթների միջև: Եթե $p_i+1 \leq k_i$, ապա վերցնել $S = (S \setminus \{x_{p_i}^i\}) \cup \{x_{p_i+1}^i\}$ և անցնել 4-րդ քայլին, հակառակ դեպքում ավարտել ալգորիթմի աշխատանքը:
6. $S = \{x_{p_1}^1, x_{p_2}^2, \ldots, x_{p_\alpha}^\alpha\}$ բազմությունը վերցնել որպես հերթական α-բազմություն: Եթե $p_i + 1 \leq k_i, i = 1, 2, \ldots, \alpha$, ապա վերցնել $S = \{x_{p_1+1}^1, x_{p_2+1}^2, \ldots, x_{p_\alpha+1}^\alpha\}$ և անցնել 4-րդ քայլին, հակառակ դեպքում ավարտել ալգորիթմի աշխատանքը:

Մանրամասնորեն ապացուցված է այս ալգորիթմի կոռեկտությունն ու օպտիմալությունը, և գնահատված է նրա բարդությունը: Այս ալգորիթմը նկարագրված է այս գլխում, քանի որ այն կենտրոնական դեր է խաղում համեմատությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների տրանսվերսալային թվի գնահատման մեջ և ամենափոքր տրանսվերսալը կառուցող ալգորիթմում:

Բազմությունների ընտանիքի տրանսվերսալային և անկախության թվերի հավասարության խնդիրը (հարցը) դիսկրետ մաթեմատիկայի հիմնարար խնդիրներից է: Նույն տիպի հարցի են պատասխանում, օրինակ, Մենգերի, Դիլվորտի, Քյոնիգի հայտնի թեորեմները:

Թեորեմ 2. *Համեմատությունների գրաֆի համար ամենամեծ անկախ բազմությունների ընտանիքի ամենափոքր տրանսվերսալի գագաթների* *քանակը հավասար է զույգ առ զույգ չհատվող ամենամեծ անկախ բազմությունների առավելագույն քանակին:*

Այս թեորեմի ապացույցն ունի կոնստրուկտիվ բնույթ, որը թույլ է տալիս կառուցել $O(n + mn^{1/2})$ կարգի՝ ամենափոքր տրանսվերսալ գտնող ալգորիթմ, որտեղ n-ը գրաֆի գագաթների քանակն է, իսկ m-ը՝ կողերի:

Ալգորիթմ

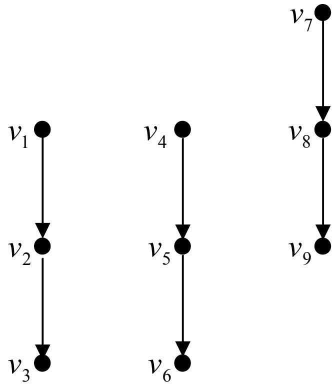
Դիցուք տրված է G համեմատությունների գրաֆը:

1. G գրաֆը տրանզիտիվ կողմնորոշել:
2. G-ն բաժանել մինիմալ քանակով իրար հետ զույգ առ զույգ չհատվող լրիվ ենթագրաֆների $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\alpha$, $Q_i = \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{k_i}^i\}, i = 1, 2, \ldots, \alpha$:
3. Համեմատությունների գրաֆում առավելագույն քանակով զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող α-բազմություններ գտնող ալգորիթմի միջոցով գտնել $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ առավելագույն քանակով զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող α-բազմություններ: Այդ ալգորիթմի 1-ին և 2-րդ քայլերը պետք չէ կատարել, քանի որ այս ալգորիթմի 1-ին և 2-րդ քայլերում դա արդեն արվել է:
4. Շրջել G գրաֆի բոլոր աղեղների ուղղությունները: Արդյունքում նորից կունենանք տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆ:
5. Վերցնել $k = m$ և $S = \{x_{k_1}^1, x_{k_2}^2, \ldots, x_{k_\alpha}^\alpha\}$:
6. Կատարել առավելագույն քանակով α-բազմություններ գտնող ալգորիթմի 4-ից 5-րդ քայլերը մինչև $S = \{x_{p_1}^1, x_{p_2}^2, \ldots, x_{p_\alpha}^\alpha\}$-ը դառնա անկախ բազմություն:
7. Վերցնել $Y_k \cap S$-ից որևէ v գագաթ (ըստ թեորեմ 2-ի $Y_k \cap S \neq \emptyset$), ենթադրենք՝ $v = x_{p_j}^j$:
8. v գագաթն ավելացնել կառուցվող տրանսվերսալին:
9. Եթե $k = 1$, ապա ավարտել ալգորիթմի աշխատանքը, հակառակ դեպքում վերցնել $k = k - 1$, $S = \{x_{p_1}^1, \ldots, x_{p_j - 1}^j, \ldots, x_{p_\alpha}^\alpha\}$ և անցնել 6-րդ քայլին:

Անկախության և տրանսվերսալային թվերի հավասարության մասին ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ համեմատությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների հատումների գրաֆն ունի α-ծածկույթ, այսինքն այն կարելի է ծածկել α հատ լրիվ ենթագրաֆներով, որտեղ α-ն այդ հատումների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմության չափն է:

Չնայած, որ α-բազմությունների հատումների գրաֆն ունի α-ծածկույթ, այն կատարյալ չէ: Քանի որ, եթե վերցնենք պատկեր 2-ի համեմատությունների գրաֆը, ապա $S_1 = \{v_1, v_4, v_8\}, S_2 = \{v_2, v_4, v_7\}, S_3 = \{v_2, v_5, v_9\}, S_4 = \{v_3, v_5, v_9\}, S_5 = \{v_3, v_6, v_8\}$ անկախ բազմություններով հատումների գրաֆում ծնված ենթագրաֆը 5 երկարությամբ ցիկլ է:

Գլխի վերջում բերված է մենզերյան հիպերգրաֆի սահմանումը և ապացուցված է հետևյալ թեորեմը:



Պատկեր 2

Սահմանում 3. *$H = (V, \mathcal{E})$ հիպերգրաֆը կանվանենք մենգերյան, եթե H-ի ցանկացած H' զուգահեռացման անկախ կողերի առավելագույն քանակը հավասար է գագաթների մինիմալ քանակին, որոնք ծածկում են բոլոր կողերը:*

Թեորեմ 3. *Դիցուք $G = (V, E)$-ն համեմատությունների գրաֆ է: $H = (V, \mathcal{E})$ հիպերգրաֆը, որտեղ $\mathcal{E}$-ն G գրաֆի α-բազմությունների բազմությունն է, մենգերյան հիպերգրաֆ է:*

Հիմնական դրույթներն ու եզրահանգումները

Աշխատանքում ուսումնասիրված է գրաֆում ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը, նրա համար ավելի արդյունավետ ու ճշգրիտ ալգորիթմների կառուցման հարցը, և համեմատությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների ամենափոքր տրանսվերսալի հզորության հարցը:

Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են.

1. Համեմատությունների գրաֆների համար $q = \omega - 2$ դեպքում ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնող ավելի արդյունավետ ալգորիթմի կառուցումը,
2. Ամենամեծ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու համար ընդհանրացված ագահ ալգորիթմի առաջարկումը և նրա շեղման գնահատումը,
3. Սովորական ագահ ալգորիթմի համար հայտնի շեղման գնահատականի լավացումը,
4. Համեմատությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների տրանսվերսալային և անկախության թվերի հավասարության ապացույցը,

5. Համեմատությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների ամենափոքր տրանսվերսալ գտնող ալգորիթմի կառուցումը:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրատարակված աշխատությունների ցանկը

1. **Р.О. Адамян и С.Е. Маркосян**, Алгоритм нахождения максимального q-хроматического подграфа, *Известия национальной академии наук Армении, Математика*, vol. 41, no. 3, pp. 12–25, 2006, [English translation: R. O. Adamyan and S. E. Markosyan. "An algorithm for maximal q-colorable subgraph of comparability graph". Journal of Contemporary Mathematical Analysis, vol. 41, no. 3, pp. 10–23, 2006].

2. **Ռ.Օ. Ադամյան**, Ընդհանրացված ագահ ալգորիթմի շեղումը q-ներկման խնդրի համար, *Երևանի պետական համալսարանի գիտական տեղեկագիր, բնական գիտություններ*, vol. 2, pp. 53–57, 2007.

3. **R. O. Adamyan** and **S. E. Markosyan**, Transversal and independence numbers of maximum independent sets of comparability graphs, *Information Technologies and Management*, vol. 6, pp. 66–74, 2007.

Адамян Рубен Оганович

Исследование задач и разработка алгоритмов раскраски графов сравнения

Резюме

Диссертационная работа посвящена изучению задач q-раскраски графов сравнения и построению точных и приближенных алгоритмов для нахождения максимального q-хроматического подграфа. Задачи раскраски графов одни из самых изученных задач дискретной математики.

В задаче нахождения максимального q-хроматического подграфа требуется найти q-раскрашиваемый подграф, содержащий наибольшее возможное количество вершин. Эта задача является обобщением задач нахождения наибольшего независимого множества и минимальной раскраски графа.

В диссертации также изучена проблема мощности минимального трансверсаля множества наибольших независимых множеств графа сравнения.

В работе получены следующие основные результаты

1. Построен более эффективный алгоритм для нахождения максимального q-хроматического подграфа в графе сравнения при $q = \omega - 2$, где ω - число вершин наибольшего полного подграфа.
2. Построен обобщенный жадный алгоритм для нахождения максимального q-хроматического подграфа и найдено его отклонение от оптимального алгоритма.
3. Улучшена оценка отклонения обычного жадного алгоритма для той же задачи q-раскраски.
4. Доказано равенство чисел трансверсальности и независимости множества наибольших независимых множеств графа сравнения.
5. Предложен алгоритм для нахождения минимального трансверсаля множества наибольших независимых множеств графа сравнения.

Ruben Adamyan

Study and construction of coloring algorithms for comparability graphs