ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԹՈՐՈՅԱՆ ՍՈՖԻԿ ԶԱՎԵՆԻ

Π_n-ՃՇԳՐԻՏ ԵՎ Π_n-ԱՆԿԱԽ ՀԱՆԳՈՒՅՑՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ատենախոսություն

Ա.01.07 «Հաշվողական մաթեմատիկա»

մասնագիտությամբ

ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի

գիտական աստիճանի համար

Գիտական ղեկավար՝

ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր

Հ. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԵՐԵՎԱՆ 2016

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի արդիականությունը. Հաշվողական մաթեմատիկայի շատ խնդիրներում հաճախ անհրաժեշտ է լինում խնդրի ձևակերպման մեջ մտնող բարդ ֆունկցիաները փոխարինել ավելի պարզերով: Այս նպատակով կիրառվում են տարբեր մեթոդներ: Առավել տարածված և վաղ առաջացած մեթոդներից է բազմանդամային միջարկումը կամ ինտերպոլացիան: Ինտերպոլացիա տերմինը ներմուծվել է դեռևս 1650-ականներին, Ջ. Ուոլիսի կողմից, և իրենից ներկայացնում է որևէ ֆունկցիայի՝ որոշ կետերում ընդունած արժեքների միջոցով այդ ֆունկցիայի մոտավոր արժեքների հաշվումը միջանկյալ կետերում: Բազմանդամային միջարկման դեպքում որպես միջարկիչ ֆունկցիաներ օգտագործվում են բազմանդամներ, այսինքն՝ տրված են կետեր, պահանջվում է գտնել բազմանդամ, որի գրաֆիկը ճշգրիտ անցնում է այդ կետերով:

Մեկ փոփոխականի բազմանդամային միջարկման համար սպառիչ արդյունքներ ստացել են դեռևս Լագրանժը և Նյուտոնը, ընդ որում սկզբունքորեն տարբեր մոտեցումներով: Վերջին չորս-հինգ տասնամյակների ընթացքում մաթեմատիկայի շատ բաժիններում հետազոտությունների հիմնական ուղղությունը մի փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքից տեղափոխվեց մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքի: Բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդրի արդի ուսումնասիրությունը սկիզբ է առել 20-րդ դարի երկրորդ կեսից:

Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկման առաջին կարևոր արդյունքները ստացել են Բերզոլարին, Ռադոնը, ինչպես նաև Չանգը և Յաոն: Ներկայումս բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեջ կան շատ չլուծված կարևոր խնդիրներ: Մասնավորապես՝ լուծված չէ դեռևս 1982 թ.-ին Գասքայի և Մաեզթուի կողմից առաջադրված վարկածը, որը քննարկում ենք ատենախոսության մեջ:

Ներկայումս բազմանդամային միջարկումը մոտարկումների տեսության և հաշվողական մաթեմատիկայի կարևոր բաժիններից մեկն է: Այն լայնորեն օգտագործվում է կիրառական մաթեմատիկայի բազմաթիվ խնդիրներում:

Բազմանդամային միջարկումը կարևոր դեր է կատարում միաչափ շատ խնդիրների, ինչպես օրինակ՝ թվային ինտեգրման, դիֆերենցման, ոչ գծային հավասարումների և դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր լուծման մեջ: Մի քանի փոփոխականի համապատասխան խնդիրներում հաճախ անհրաժեշտ է լինում բազմաչափ միջարկման կիրառությունը:

Բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդիրը սերտորեն առնչվում է հանրահաշվական երկրաչափության հետ, քանի որ դրա միակորեն լուծելիությունը հանգում է այն հարցին, թե արդյոք գոյություն ունի որոշակի աստիճանի հանրահաշվական կոր կամ մակերևույթ, որն անցնում է միջարկման բոլոր հանգույցներով:

Ատենախոսական աշխատանքի նպատակը և խնդիրները. Գասքա-Մաեզթուի վարկածի լուծման մեթոդների հետազոտությունը, երկու փոփոխականի բազմանդամային միջարկման համար հանգույցների անկախ և ճշգրիտ բազմությունների ուսումնասիրությունը, ինչպես նաև հարթության վրա դրանց բնութագրումը:

Հետազոտման օբյեկտը. Երկու փոփոխականի բազմանդամային տարածություններ, միջարկման ճշգրիտ բազմություններ, միջարկման անկախ բազմություններ, երկրաչափական բնութագրությամբ հանգույցների բազմություններ, հարթ հանրահաշվական կորեր, մաքսիմալ կորեր:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեթոդները: Օգտագործվել են նաև գծային հանրահաշվի և հանրահաշվական երկրաչափության որոշ մեթոդներ:

Գիտական նորությունը. Նոր, ավելի պարզ ապացույցներ են գտնվել Գասքա-Մաեզթուի վարկածի մասնավոր դեպքերում, որոնք կարող են կիրառվել հետագա դեպքերի ուսումնասիրության համար, բնութագրվել են հարթության վրա որոշակի հզորությամբ անկախ հանգույցների բազմությունները, որոնցով անցնում են առնվազն երկու հանրահաշվական կորեր, գտնվել է հանրահաշվական կորը միակորեն որոշող անկախ հանգույցների նվազագույն քանակը:

Կիրառական նշանակությունը. Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքներն ունեն ինչպես տեսական, այնպես էլ կիրառական նշանակություն: Վերը նշված արդյունքները վերաբերում են անկախ և ճշգրիտ բազմությունների բնութագրմանը, որոնք կարևոր դեր են կատարում բազմաչափ միջարկումների տեսության մեջ: Այդ արդյունքները կարող են կիրառվել բոլոր այն խնդիրներում, որոնց լուծման մեջ օգտագործվում է բազմաչափ բազմանդամային միջարկումը:

Պաշտպանությանը ներկայացվում են հետևյալ դրույթները.

- Հարթության վրա k, $k < n$, աստիճանի հանրահաշվական կորը միակորեն որոշող Π_n–անկախ հանգույցների նվազագույն քանակի որոշումը:
- Π_n –անկախ հանգույցների որոշակի հզորության բազմությունների բնութա-գրումը, որոնցով անցնում են առնվազն երկու k, $k < n$, աստիճանի հանրահաշվական կորեր:
- Π_n–անկախ բազմության մեջ Π_k–անկախ հանգույցների նվազագույն քանակի գնահատականի ստացումը, որտեղ $k < n$:
- Π_n–ճշգրիտ բազմության ճիշտ 3 հանգույցներով անցնող ուղղի օգտագործում-ների քանակի բնութագրումը:
- Գասքա-Մաեզթուի վարկածի $n = 4$ դեպքի երկու նոր, պարզ ապացույցի ներկայացումը:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան. Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի Թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում և Հայկական Մաթեմատիկական Միության 2016 թվականի տարեկան նստաշրջանում:

Հրատարակությունները. Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են հինգ գիտական հոդվածներում և հետևյալ երկու կոնֆերանսների թեզիսներում՝ Հարմոնիկ անալիզ և մոտարկումներ VI Միջազգային կոնֆերանս, Ծաղկաձոր 2015, Հայկական Մաթեմատիկական Միության տարեկան նստաշրջան, 2016:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, չորս գլուխներից, ամփոփումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 30 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 99 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Աշխատանքը սկսվում է բազմանդամային միջարկման միաչափ դեպքի որոշ արդյունքների ներկայացմամբ:

Պարագրաֆ 1.1-ում ներկայացված են մեկ փոփոխականի բազմանդամների համար Լագրանժի միջարկման խնդիրը և դրա լուծման մեթոդները:

Նշանակենք π_n–ով մեկ փոփոխականի՝ փոքր կամ հավասար n աստիճանի իրական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը՝

$$\pi_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ : a_i \in \mathbb{R} \right\}:$$

π_n բազմանդամային տարածության չափողականությունը տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$dim\, \pi_n = n + 1:$$

Ներկայացնենք Լագրանժի միաչափ միջարկման խնդիրը. թվային առանցքի վրա տրված են իրարից տարբեր $x_0, x_1, \dots, x_m$ կետեր, տրված են նաև կամայական $c_0, c_1, , \dots, c_m$ արժեքներ: Պահանջվում է գտնել այնպիսի $p \in \pi_n$ բազմանդամ, որը կբավարարի հետևյալ պայմաններին.

$$p(x_i) = c_i, \ \ i = 0, 1, \dots, m \ : \tag{1.1}$$

Այս պայմաններն անվանում ենք միջարկման պայմաններ, p բազմանդամը՝ միջարկիչ բազմանդամ, իսկ $x_0, x_1, \dots, x_m$ կետերը՝ միջարկման հանգույցներ:

(1.1) պայմանները համարժեք են $n + 1$ անհայտներով գծային հավասարումների համակարգի, որտեղ անհայտները p բազմանդամի գործակիցներն են: Հաշվի առնելով այն, որ ունենք $m+1$ հավասարում՝ ստանում ենք, որ համակարգի, հետևաբար և միջարկման խնդրի, միակորեն լուծելիության անհրաժեշտ պայմանն է

$$m = n: \tag{1.2}$$

Այսուհետ կենթադրենք, որ այս պայմանը տեղի ունի:

Լագրանժի միջարկման խնդրի լուծման երկու հիմնական բանաձևեր կան՝ Լագրանժի և Նյուտոնի:

Թեորեմ 1.1.1 (Լագրանժ). *Յանկացած իրարից պարբեր $x_0, x_1, \dots, x_n$ հանգույցների և $c_0, c_1,, \dots, c_n$ արժեքների համար գոյություն ունի միակ $p \in \pi_n$ բազմանդամ այնպես, որ*

$$p(x_i) = c_i, \;\; i = 0, 1, \dots, n: \tag{1.3}$$

Լագրանժի բանաձևով լուծումը ներկայացնելու համար դիտարկենք ֆունդամենտալ բազմանդամները.

Սահմանում 1.1.2. *Կասենք, որ p_i^* բազմանդամը x_i, $0 \le i \le n$, հանգույցի ֆունդամենփալ բազմանդամն է π_n փարածությունում, եթե*

$$p_i^*(x_j) = \delta_{ji}\,, 0 \le j \le n,$$

որփեղ δ_{ji} –ն Կրոնեկերի սիմվոլն է:

Օգտագործելով x_i, $0 \le i \le n$, հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները, Լագրանժի միջարկման խնդրի միակ լուծումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ բանաձևով.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i p_i^*\,(x):$$

Անցնենք միջարկման խնդրի լուծման Նյուտոնի մեթոդին.

Թեորեմ 1.1.3 (Նյուտոն). *Յանկացած իրարից տարբեր $x_0, x_1, \dots, x_n$ հանգույցներով և $c_0, c_1, , \dots, c_n$ արժեքներով միջարկման խնդրի միակ լուծումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.*

$$p(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x - x_0) + \gamma_2(x - x_0)(x - x_1) + \ \dots + \gamma_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}),$$

որտեղ $\gamma_i,\ i = 0,1, \dots, n$ հաստատուններ են:

Նյուտոնի բանաձևում հաստատունները կարելի է ստանալ հաջորդաբար՝ միջարկման (1.3) պայմաններից:

Որպես Լագրանժի միջարկման խնդրի ընդհանրացում դիտարկում ենք պատիկ հանգույցներով միջարկումը, որը կոչվում է Հերմիթի միջարկում:

Տրված է հետևյալ պատիկ կամ կրկնվող հանգույցների բազմությունը.

$$\{t_0, t_1, \dots, t_n\} = \left\{ \begin{matrix} x_0, x_1, \dots, x_k \\ \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k \end{matrix} \right\} : \qquad (1.7)$$

Այս դեպքում դիտարկվող հանգույցների $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ բազմության մեջ կարող են լինել կրկնվող հանգույցներ: Ենթադրենք դրանց մեջ իրարից տարբեր են $x_0, x_1, \dots, x_k$ հանգույցները և դրանցից յուրաքանչյուրը (1.7) բազմության մեջ կրկնվում է համապատասխանաբար $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$ անգամ: Հետևաբար ունենք, որ

$$\sum_{i=0}^{k} \mu_i = n + 1:$$

Հերմիթի միջարկման խնդիրը ձևակերպվում է այսպես. տրված է պատիկ հանգույցների (1.7) բազմությունը և

$$C = \{c_{ij} :\ i = 0, \dots, k,\ \ j = 0, \dots, \mu_{i-1}\}$$

արժեքների բազմությունը: Պահանջվում է գտնել այնպիսի $p \in \pi_n$ բազմանդամ, որը կբավարարի հետևյալ պայմաններին.

$$p^{(j)}(x_i) = c_{ij}, \qquad i = 0, \dots, k,\ \ j = 0, \dots, \mu_{i-1} :$$

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1.1.5 (Հերմիթ). *Արժեքների ցանկացած C բազմության համար գոյություն ունի միակ $p \in \pi_n$ բազմանդամ այնպես, որ*

$$p^{(j)}(x_i) = c_{ij}, \qquad i = 0, \dots, k, \;\; j = 0, \dots, \mu_{i-1}:$$

Պարագրաֆ 1.2-ում դիտարկում ենք Լագրանժի երկչափ միջարկման խնդիրը:

Մեկ փոփոխականի դեպքում միջարկման խնդիրը ունի միակ լուծում հանգույցների ցանկացած բազմության և կամայական աստիճանի բազմանդամային տարածության համար՝ այն դեպքում, երբ տեղի ունի (1.2) անհրաժեշտ պայմանը: Բազմաչափ միջարկման ժամանակ առաջանում են որոշակի բարդություններ, քանի որ այս դեպքում միջարկման խնդրի միակորեն լուծելիությունը կախված է ոչ միայն հանգույցների քանակից, այլ նաև դրանց երկրաչափական փոխդասավորությունից: Հետևաբար, բազմաչափ միջարկման հիմնական խնդիրներից է միջարկման հանգույցների այնպիսի փոխդասավորությունների որոնումը, որոնց համար միջարկման խնդիրը միակորեն լուծելի է:

Նշանակենք Π_n–ով երկու փոփոխականի՝ փոքր կամ հավասար n գումարային աստիճան ունեցող իրական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը՝

$$\Pi_\mathrm{n} = \left\{ \sum_{i+j \le n} a_{ij} x^i y^j \, : \, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}:$$

Π_n բազմանդամային տարածության չափողականությունը տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$N \coloneqq N_n \coloneqq dim \Pi_n = \binom{n+2}{2}:$$

Դիտարկենք կետերի հետևյալ բազմությունը $\mathbb{R}^2$-ում.

$$\mathcal{X}_s = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_s, y_s)\}: \tag{1.4}$$

Ձևակերպենք Լագրանժի բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդիրը. տրված (1.4) կետերի բազմության և կամայական $c_1, c_2,, \ldots, c_s$ իրական թվերի համար գտնել այնպիսի $p \in \Pi_{\mathrm{n}}$ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$p(x_i, y_i) = c_i, \;\; i = 1, \ldots, s: \tag{1.5}$$

Սահմանում. 1.2.1. *Կասենք, որ միջարկման խնդիրը Π_n -ով և $\mathcal{X}_s = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_s, y_s)\}$ միջարկման հանգույցների բազմությամբ ճշգրիտ է կամ միակորեն լուծելի, եթե ցանկացած $c_1, c_2,, \ldots, c_s$ արժեքների համար գոյություն ունի միակ $p \in \Pi_n$ բազմանդամ, որը բավարարում է (1.5) պայմաններին:*

Այնպես ինչպես միաչափ դեպքում՝ ստանում ենք երկչափ միջարկման խնդրի միակորեն լուծելիության անհրաժեշտ պայմանը՝ $s = N$, այսինքն՝

$$\#\mathcal{X}_s = s = N = dim\Pi_n: \tag{1.6}$$

Սակայն, ի տարբերություն միաչափ դեպքի, (1.6) պայմանը բավարար չէ միջարկման խնդրի ճշգրտության համար: Երկչափ դեպքում ճշգրտությունն էապես կախված է ոչ միայն հանգույցների քանակից, այլ նաև դրանց երկրաչափական փոխդասավորությունից: Այսուհետ, երբ դիտարկենք միջարկման խնդրի ճշգրտությունը, կենթադրենք, որ (1.6) պայմանը տեղի ունի, այսինքն՝ հանգույցների բազմությունը կլինի $\mathcal{X} = \mathcal{X}_N$:

Պնդում 1.2.2. *Որպեսզի միջարկման խնդիրը Π_n–ով և $\mathcal{X}_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ հան-գույցներով լինի ճշգրիտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունենա հետևյալ պայմանը.*

$$p(x_i, y_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N \qquad \Longrightarrow \qquad p = 0 :$$

Այստեղից ստանում ենք.

Պնդում 1.2.3. *Միջարկման խնդիրը Π_n–ով և $\mathcal{X}_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ հանգույցներով կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $p \in \Pi_{\mathrm{n}}$, $p \neq 0$, բազմանդամ այնպիսին որ*

$$p(x_i, y_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N :$$

Այժմ համապատասխանեցնենք n գումարային աստիճանի p բազմանդամին $p(x,y)=0$ հավասարումով տրվող n աստիճանի հանրահաշվական կոր և պայմանավորվենք միևնույն տառը օգտագործել և՛ կորը, և՛ բազմանդամը նշանակելու համար: Հաշվի առնելով **Պնդում 1.2.3**-ը՝ ստանում ենք *երկչափ բազմանդամային միջարկման ճշգրտության երկրաչափական մեկնաբանությունը.*

Միջարկման խնդիրը Π_n–ով և $\mathcal{X}_N=\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^N$ հանգույցներով ոչ ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $\mathcal{X}_N$ բազմության բոլոր հանգույցներով անցնող n-րդ աստիճանի հանրահաշվական կոր:

Այժմ սահմանենք ֆունդամենտալ բազմանդամ երկչափ բազմանդամային միջարկման հանգույցների համար.

Սահմանում 1.2.4. *Կասենք, որ $p\in\Pi_n$ բազմանդամը $A\in\mathcal{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամն է, եթե*

$$p(A)=1\,,\qquad p(B)=0,\qquad \forall B\in\mathcal{X}\setminus\{A\}:$$

Հետագա շարադրանքում $A=(x_i,y_i)\in\mathcal{X},\ 0\le i\le N$, հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը կնշանակենք $p_A^*=p_i^*$:

Սահմանում 1.2.10. *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը Π_n-ճշգրիտ բազմություն է: Կասենք, որ $A\in\mathcal{X}$ հանգույցն օգտագործում է $q\in\Pi_k,\ k\le n$, կորը, եթե այն հանդիսանում է A հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամի արտադրիչ, այսինքն՝ $p_A^*=qr$, որտեղ $r\in\Pi_{n-k}$:*

Օգտվելով ֆունդամենտալ բազմանդամի սահմանումից՝ ունենք.

Պնդում 1.2.5. *Որպեսզի միջարկման խնդիրը Π_n–ով և $\mathcal{X}_N=\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^N$ հանգույցներով լինի ճշգրիտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\mathcal{X}_N$ բազմության բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունենան: Ավելին, այդ դեպքում ունենք Լագրանժի հետևյալ բանաձևը միջարկիչ բազմանդամի համար, որը բավարարում է (1.5) պայմաններին $s=N$ դեպքում.*

$$p(x,y)=\sum_{i=1}^{N}c_ip_i^*\,(x,y):$$

Անցնենք կետերի անկախ բազմությունների սահմանմանը.

Սահմանում 1.2.6. *$\mathcal{X}$ բազմությունը կանվանենք Π_n–անկախ, եթե $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունեն: Հակառակ դեպքում, երբ որևէ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ գոյություն չունի, $\mathcal{X}$ բազմությունը անվանում ենք Π_n–կախյալ:*

Բերենք, որոշ անկախ և կախյալ բազմությունների օրինակներ.

1. Ուղղի վրա գտնվող ցանկացած $n+2$ կետերի $\mathcal{X}$ բազմություն Π_n–կախյալ է:
2. Կամայական $n+1$ կետերի $\mathcal{X}$ բազմություն Π_n-անկախ է:

Տեղի ունի նաև

Պնդում 1.2.15. *Ցանկացած $n+2$ կետեր Π_n-անկախ են այն և միայն այն դեպքում, երբ չեն գտնվում մեկ ուղղի վրա:*

Այժմ ներկայացնենք.

Սահմանում 1.2.7. *Կասենք, որ միջարկման խնդիրը Π_n -ով և $\mathcal{X}_s = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{s}$, $s \le N$, հանգույցների բազմությամբ լուծելի է, եթե ցանկացած $c_1, c_2, , \ldots, c_s$ արժեքների համար գոյություն ունի $p \in \Pi_n$ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

$$p(x_i, y_i) = c_i, \; i = 1, \ldots, s: \quad (1.13)$$

Որպես միջարկման խնդրի հանգույցներ կարող ենք ընտրել անկախ հանգույցների բազմություն: Այդ դեպքում կունենանք.

Պնդում 1.2.8. *Միջարկման խնդիրը Π_n–ով և $\mathcal{X} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{s}$ հանգույցների բազմությամբ կլինի լուծելի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$ բազմությունը Π_n-անկախ է:*

Եթե **Պնդում 1.2.8**-ում հանգույցների քանակը հավասար է Π_n բազմանդամային տարածության չափողականությանը՝ $s = N$, ապա միջարկման խնդիրը միակորեն լուծելի է: Այլ խոսքերով, *միջարկման խնդիրը Π_n-ով և $\mathcal{X} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ հանգույցներով ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$-ը Π_n-անկախ է:*

Ճշգրիտ բազմության ֆունդամենտալ բազմանդամների մի հատկություն ձևակերպենք լեմմայի տեսքով:

Լեմմա 1.2.11. *Եթե միջարկման խնդիրը Π_n-ով և $\mathcal{X}_N$ բազմության հանգույցներով ճշգրիտ է, ապա ցանկացած $A \in \mathcal{X}_N$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ ճիշտ n–րդ աստիճանի բազմանդամ է՝ $deg\, p_A^* = n$, և այն չի կարող ունենալ պատիկ արտադրիչներ:*

Ներկայացնենք մի հայտնի արդյունք, որը օգտագործելու ենք հետագա շարադրանքում.

Պնդում 1.2.12. *Դիցուք տրված են $p \in \Pi_n$ բազմանդամը և l ուղիղը, և դիտարկենք իրարից տարբեր $n+1$ կետեր՝ (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$, l ուղղի վրա: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ երկու դրույթները.*

1. $p(x_i, y_i) = 0,\ i = 0, \dots, n \quad \Rightarrow \quad p|_l = 0$:
2. $p|_l = 0 \quad \Rightarrow \quad p = lq$, *որտեղ* $q \in \Pi_{n-1}$:

Պարագրաֆ 1.3-ում ներկայացվում են արդյունքներ, որոնք հետևում են այն փաստից, որ Վանդերմոնդի որոշիչը, այսինքն՝ **Սահմանում 1.2.1**-ով նկարագրվող գծային համակարգի գլխավոր որոշիչը, անընդհատ ֆունկցիա է $\mathcal{X}_s$ բազմության հանգույցներից:

Լեմմա 1.3.3 ([16]). *Դիցուք տրված է Π_n–անկախ $\mathcal{X}_s = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^s$ բազմությունը: Այդ դեպքում գոյություն ունի ε դրական թիվ այնպիսին, որ ցանկացած*

$$\mathcal{X}_s' = \{(x_i', y_i')\}_{i=1}^s$$

բազմություն, որտեղ հեռավորությունը համապատասխան (x_i', y_i') և (x_i, y_i) հանգույցների միջև փոքր է ε-ից բոլոր i-երի համար, ևս Π_n–անկախ է:

Ներկայացնենք նաև հետևյալ լեմման.

Լեմմա 1.3.2 ([20]). *Հանգույցների ցանկացած $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ բազմության համար հետևյալ երկու պնդումները համարժեք են.*

1. *Գոյություն ունի $\mathcal{X}$ բազմության Π_k–ճշգրիտ ենթաբազմություն:*
2. *Գոյություն չունի k–րդ աստիճանի կոր, որն անցնի $\mathcal{X}$–ի բոլոր հանգույցներով:*

Գլուխ 2.-ում ներկայացվում են ճշգրիտ բազմությունների հայտնի կոնստրուկցիաներ: Պարագրաֆ 1.2-ում պարզեցինք, որ բազմաչափ միջարկման դեպքում ոչ միշտ են ճշգրտության անհրաժեշտ պայմանին բավարարող բազմությունները ճշգրիտ: Այստեղ դիտարկում ենք մի քանի ճշգրիտ կոնստրուկցիաներ:

Պարագրաֆ 2.1-ում նկարագրում ենք Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիան ([5], [27]):

Սահմանում 2.1.1. *Կասենք, որ $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$, $\#\mathcal{X} = N = 1 + 2 + \cdots + (n+1)$, հանգույցների բազմությունը Բերզոլարի-Ռադոնի բազմություն (կարճ BR_n-բազմություն) է, եթե գոյություն ունեն այնպիսի $n+1$ ուղիղներ՝ $l_0, l_1, \ldots, l_n$, որ*

$n+1$ *հանգույցներ պատկանում են l_0-ին,*

n *հանգույցներ պատկանում են $l_1 \setminus l_0$ -ին,* (2.1)

$$\vdots$$

1 *հանգույց պատկանում է $l_n \setminus \{l_0 \cup l_1 \cup \ldots \cup l_{n-1}\}$:*

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը (տես օրինակ՝ [18]).

Թեորեմ 2.1.2. *Եթե $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$, $\#\mathcal{X} = N$, հանգույցների բազմությունը BR_n -բազմություն է, ապա այն Π_n-ճշգրիտ է:*

Ունենք նաև.

Պնդում 2.1.3 ([19]). *Դիտարկենք m ուղիղներ՝ $l_1, l_2, \ldots, l_m$, որտեղ $m \leq n$, և $(n+1) + n + \cdots + (n+2-m)$ հանգույցների այնպիսի $\mathcal{X}$ բազմություն, որի*

$$n+2-k \text{ հանգույցներ պատկանում են } l_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} l_j, \qquad k=1,\dots,m:$$

Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ի հանգույցներում զրոյացող ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ ներկայացումը.

$$p = l_1 \dots l_m q, \qquad \text{որտեղ} \quad q \in \Pi_{n-m}:$$

Պարագրաֆ 2.2-ում ներկայացնում ենք Չանգի և Յաոյի կողմից ներմուծված երկրաչափական բնութագրի պայմանը կամ GC_n երկրաչափական պայմանը ([12]), որը նշանակում է, որ $\mathrm{N} = \binom{n+2}{2}$ հանգույցներից կազմված $\mathcal{X}_{\mathrm{N}} \subset \mathbb{R}^2$ բազմության ցանկացած A հանգույցի համար գոյություն ունեն n հատ այնպիսի $l_1^A, \dots, l_n^A$ ուղիղներ, որ

$$\mathcal{X}_N \setminus \{A\} \subset l_1^A \cup \dots \cup l_n^A, \qquad \text{բայց} \quad A \notin l_1^A \cup \dots \cup l_n^A:$$

Սա համարժեք է հետևյալ սահմանմանը.

Սահմանում 2.2.1. *Կասենք, որ $\mathcal{X}_{\mathrm{N}} \subset \mathbb{R}^2$ բազմությունը բավարարում է GC_n երկրաչափական պայմանին, եթե յուրաքանչյուր $A \in \mathcal{X}_{\mathrm{N}}$ հանգույցի համար գոյություն ունի p_A^* ֆունդամենտալ բազմանդամ, որը կարելի է ներկայացնել գծային արտադրիչների արտադրյալի տեսքով, այսինքն՝ գոյություն ունեն $l_1^A, \dots, l_n^A$ ուղիղներ, այնպես որ*

$$p_A^* = l_1^A \dots l_n^A:$$

Այստեղից մասնավորապես ստանում ենք.

Թեորեմ 2.2.2. *GC_n երկրաչափական պայմանին բավարարող $\mathcal{X}_{\mathrm{N}}$ բազմությունը Π_n–ճշգրիտ է:*

Պարագրաֆ 2.3-ում ներկայացնում ենք GC_n պայմանին բավարարող Նյուտոնի ցանցը ([18]): Սահմանենք

$$\mathcal{X} = \{(j,k) \in \mathbb{N}_0^2 : j+k \le n\}:$$

Դիտարկենք ուղիղների երեք ընտանիքներ՝ $l_k^{(1)}$, $l_k^{(2)}$ և $l_k^{(3)}$, $k=0,\dots,n$, որտեղ յուրաքանչյուր $l_k^{(1)}$ ուղիղը տրվում է $x=k$ հավասարումով, $l_k^{(2)}$-ը՝ $y=k$ հավասարումով և $l_k^{(3)}$ -ը՝ $x+y=k$ հավասարումով: Այստեղ $\mathcal{X}$ բազմությունը բաղկացած է ուղիղների երեք ընտանիքների հատման կետերից՝

$$(j,k)=l_j^{(1)}\cap l_k^{(2)}\cap l_{j+k}^{(3)},$$

և յուրաքանչյուր կետի ֆունդամենտալ բազմանդամ ներկայացվում է հետևյալ տեսքով.

$$p_{(j,k)}^{*}=\prod_{i=0}^{j-1}l_i^{(1)}\prod_{i=0}^{k-1}l_i^{(2)}\prod_{i=0}^{n}l_i^{(3)}:$$

Պարագրաֆ 2.4-ում դիտարկում ենք GC_n երկրաչափական պայմանին բավարարող մեկ այլ կոնստրուկցիա, որը կոչվում է Չանգ-Յաոյի բնական ցանց [12]:

Սահմանում 2.4.1. *Կասենք, որ ուղիղները գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ, եթե դրանցից ցանկացած երկուսը հատվում են և ոչ մի երեքը չեն անցնում մեկ կետով:*

Այժմ սահմանենք.

Սահմանում 2.4.2 ([12]). *Դիցուք ունենք $n+2$ ուղիղներ, որոնք գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ: Այդ դեպքում ուղիղների բոլոր հնարավոր զույգերի հատման $\binom{n+2}{2}$ կետերը կազմում են Չանգ-Յաոյի բնական ցանց*:

Այս կոնստրուկցիայի յուրաքանչյուր $A\in\mathcal{X}$ հանգույց ընկած է ճիշտ 2 ուղիղների վրա: Հետևաբար $\mathcal{X}\setminus\{A\}$ հանգույցները պատկանում են մնացած n ուղիղներին: Այսպիսով, $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է GC_n պայմանին:

Գլուխ 3-ում դիտարկում ենք Գասքա-Մաեզթուի վարկածը (GM-վարկած [14]): Այն ապացուցված է միայն $n\le 5$ դեպքում: Այս գլխում ներկայացնում ենք ատենախոսության արդյունքներից երկուսը՝ վարկածի երկու նոր, պարզ ապացույցներ $n=4$ դեպքի համար, որոնցով նպատակ ունենք գտնել ընդհանուր դեպքի համար ապացույցի մեթոդ:

Պարագրաֆ 3.1-ում դիտարկում ենք մաքսիմալ ուղիղները, որոնք կարևոր դեր են կատարում Գասքա-Մաեզթուի վարկածի ուսումնասիրության ընթացքում:

Սահմանում 3.1.1. *Ուղիղը, որն անցնում է Π_n-ճշգրիտ $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ բազմության $n+1$ հանգույցներով, անվանում ենք մաքսիմալ ուղիղ $\mathcal{X}$ բազմության համար*:

Ստորև ներկայացնում ենք մաքսիմալ ուղիղների վերաբերյալ որոշ հայտնի արդյունքներ (տես օրինակ՝ [9], [11]):

Պնդում 3.1.4. *Դիցուք $\mathcal{X}$ հանգույցների բազմությունը Π_n -ճշգրիտ է: Այդ դեպքում, եթե l–ը մաքսիմալ ուղիղ է $\mathcal{X}$ բազմության համար, ապա $\mathcal{X} \setminus l$ բազմությունը Π_{n-1}-ճշգրիտ է:*

Դժվար չէ ստուգել մաքսիմալ ուղիղների հետևյալ երկու հիմնական հատկությունները.

Պնդում 3.1.6. *Π_n-ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար ճիշտ են հետևյալ դրույթները.*

1. *Կամայական երկու մաքսիմալ ուղիղներ հատվում են և դրանց հատման կետը հանգույց է $\mathcal{X}$-ից:*
2. *Ոչ մի երեք մաքսիմալ ուղիղներ չեն հատվում մի կետում:*

Այստեղից մասնավորապես ստանում ենք, որ մաքսիմալ ուղիղները գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ: Նշենք նաև, որ $\mathcal{X}$ *բազմության համար կարող են գոյություն ունենալ ամենաշատը $n+2$ մաքսիմալ ուղիղներ:*

Պնդում 3.1.5. *Դիցուք տրված է $\mathcal{X}$ բազմություն, որը բավարարում է GC_n պայմանին և ունի մաքսիմալ ուղիղ՝ l: Այդ դեպքում $\mathcal{X} \setminus l$ հանգույցների բազմությունը բավարարում է GC_{n-1} պայմանի:*

GC_n պայմանին բավարարող դիտարկված կոնստրուկցիաները Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի մասնավոր դեպքեր են: Գասքան և Մաեզթուն առաջարկել են վարկած, որը հանգում է այն բանին, որ GC_n պայմանին բավարարող ցանկացած բազմություն բավարարում է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիային: Պարագրաֆ 3.2-ում ներկայացնում ենք այդ վարկածը:

Վարկած ([14]). *Դիցուք $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ բազմությունը բավարարում է GC_n պայմանին: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$-ում կան $n+1$ համագիծ հանգույցներ:*

Այլ խոսքերով, Գասքա-Մաեզթուի վարկածի համաձայն ամեն մի GC_n բազմություն ունի մաքսիմալ ուղիղ:

Եթե վարկածը ճիշտ է $\mathcal{X}$ բազմության համար, ապա, **Պնդում 3.1.5**-ի համաձայն, հանելով մաքսիմալ ուղիղը՝ ստանում ենք, որ $\mathcal{X} \setminus l$ բազմության հանգույցները բավարարում են GC_{n-1} պայմանին: Նորից կիրառելով վարկածը՝ կունենանք, որ նոր $\mathcal{X} \setminus l$ բազմությունը ևս ունի մաքսիմալ ուղիղ, որը այս դեպքում n հանգույցներ է պարունակում: Շարունակելով այս գործընթացը՝ ստանում ենք, որ, եթե Գասքա-Մաեզթուի վարկածը ճիշտ է, ապա ցանկացած GC_n բազմություն բավարարում է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիային: Նշենք, որ այստեղ ներկայացնում ենք նաև $n = 3$ դեպքում վարկածի նոր ապացույց:

Պարագրաֆ 3.3-ում բերում ենք ատենախոսության երկու արդյունքներ՝ GM-վարկածի երկու ապացույց $n = 4$ դեպքի համար: Ապացույցներից մեկում ([3]) օգտագործել ենք [19] հոդվածում ներկայացված GM-վարկածի $n = 5$ դեպքի ապացույցի սխեման: Ապացույցը կատարում ենք հակասող ենթադրությամբ.

Ենթադրություն $\mathcal{A}$. *$\mathcal{X}$ բազմությունը GC_4-բազմություն է՝ առանց մաքսիմալ ուղղի:*

Այստեղ կիրառել ենք ուղիղների օգտագործումների քանակի համար արդյունքներ, որոնք տեղի ունեն, երբ ճիշտ է **Ենթադրություն $\mathcal{A}$**-ն: Դրանք ապացուցել ենք ատենախոսության մեջ և ներկայացնում ենք ստորև:

Լեմմա 3.3.2 ([18], [3]). *Դիցուք տեղի ունի **Ենթադրություն $\mathcal{A}$**-ն: Այդ դեպքում կամայական 2 կամ 3 հանգույցով անցնող ուղիղ կարող է օգտագործվել $\mathcal{X}$ բազմության ամենաշատը մեկ հանգույցի կողմից:*

Լեմմա 3.3.3 ([3]). *Դիցուք տեղի ունի **Ենթադրություն $\mathcal{A}$**-ն: Այդ դեպքում կամայական 4 հանգույցով անցնող $\tilde{l}$ ուղիղ կարող է օգտագործվել $\mathcal{X}$-ի ամենաշատը 3 հանգույցների կողմից: Եթե $\tilde{l}$-ն օգտագործվում է երեք հանգույցների կողմից, ապա վերջիններս օգտագործում են ևս երկու 4 հանգույցով անցնող ուղիղներ, ընդ որում միևնույն երկուսը:*

Իսկ երկրորդը հայտնի 5 ապացույցներից ամենակարճը և ամենապարզն է: Ներկայացնենք այս ապացույցում հիմնական արդյունքներից մեկը.

Լեմմա 3.3.6 ([29]). *Դիցուք տեղի ունի **ենթադրություն** $\mathcal{A}$-ն: Այդ դեպքում, եթե $A \in \mathcal{X}$ հանգույցն օգտագործում է 4-հանգույցով l ուղիղը, ապա $\mathcal{X}$-ում կան այդ ուղիղը օգտագործող ևս երկու հանգույցներ:*

Այս լեմմայով մենք ուժեղացնում ենք [7] հոդվածի արդյունքներից մեկը: Լեմման թույլ տվեց բավականին պարզեցնել ապացույցի սխեման:

Գլուխ 4-ում ներկայացնում ենք ատենախոսության մյուս արդյունքները. գտնում ենք $k,\ k < n,$ աստիճանի կորը միակորեն որոշող Π_n –անկախ հանգույցների նվազագույն քանակը, ինչպես նաև բնութագրում ենք Π_n –անկախ հանգույցներով որոշակի հզորության բազմություններ, որոնցով անցնում են առնվազն երկու $k,\ k < n,$ աստիճանի կորեր:

Պարագրաֆ 4.1-ում սահմանում ենք մաքսիմալ կորերը, որոնք Գլուխ 3-ում նկարագրված մաքսիմալ ուղիղների ընդհանրացումն են:

Նշանակենք

$$d \coloneqq d(n,k) \coloneqq \frac{k(2n+3-k)}{2}:$$

Հետևյալ պնդումը հանդիսանում է **Պնդում 1.2.12**-ի ընդհանրացում k աստիճանի հանրահաշվական կորերի համար.

Պնդում 4.1.6 ([28]). *Դիցուք q-ն $k,\ k \le n,$ աստիճանի հանրահաշվական կոր է՝ առանց պատիկ կոմպոնենտների, և $\mathcal{X} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{s} \subset q$ հանգույցների բազմությունը Π_n–անկախ է: Այս դեպքում $s \le d(n,k)$: Ավելին, $s = d(n,k)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$p \in \Pi_n, \quad p(x_i, y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, s \quad \Longrightarrow \quad p|_q = 0 \quad և \quad p = qr,\ r \in \Pi_{n-k}$$

Ստանում ենք, որ ամենաշատը $d(n,k)$ հանգույցներ $\mathcal{X}$ –ից կարող են պատկանել q կորին: Ելնելով սրանից՝ սահմանենք.

Սահմանում 4.1.8 ([28]). *Դիցուք տրված է Π_n–անկախ $s \geq d(n,k)$ հանգույցների $\mathcal{X}_s$ բազմություն: Եթե k, $k \leq n$, աստիճանի կորը անցնում է $\mathcal{X}_s$ –ի $d(n,k)$ հանգույցներով, ապա այն անվանում ենք մաքսիմալ k-րդ աստիճանի կոր $\mathcal{X}_s$ բազմության համար:*

Ներկայացնենք *մաքսիմալ կորերի բնութագիրը.*

Պնդում 4.1.9 ([28]). *Դիցուք $\mathcal{X}$ հանգույցների բազմությունը Π_n–ճշգրիտ է: Այդ դեպքում k, $k \leq n$ աստիճանի μ բազմանդամը մաքսիմալ կոր է $\mathcal{X}$–ի համար այն և միայն այն դեպքում, եթե այն օգտագործվում է $\mathcal{X} \setminus \mu$ բազմության ցանկացած հանգույցի կողմից:*

Ատենախոսության հիմնական արդյունքների ստացման ժամանակ օգտագործել ենք հետևյալ պնդումները.

Լեմմա 4.1.3 ([17]). *Կամայական Π_n-անկախ հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմություն կարելի է ընդլայնել մինչև Π_n–ճշգրիտ բազմություն:*

Պնդում 4.1.11. *Դիցուք σ –ն k, $k \leq n$, աստիճանի կոր է առանց պատիկ կոմպոնենտների և $\mathcal{X}_s \subset \sigma$ բազմությունը s հանգույցների Π_n–անկախ բազմություն է, որտեղ $s < d(n,k)$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}_s$ բազմությունը կարելի է ընդլայնել մինչև $d = d(n,k)$ հանգույցներով մաքսիմալ Π_n–անկախ $\mathcal{X}_d$ բազմություն՝ ընկած σ-ում:*

Պարագրաֆ 4.2-ում ներկայացնում ենք ատենախոսության մյուս արդյունքները:

Թեորեմ 4.2.2 ([23]). *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը Π_n-անկախ $\mathcal{K} := d(n,k-1)+2$ հանգույցների բազմություն է, որոնք գտնվում են k-րդ աստիճանի կորի վրա, $k \leq n$: Այդ դեպքում կորը նշված հանգույցներով որոշվում է միակորեն: Ավելին, գոյություն ունի Π_n-անկախ $\mathcal{K}-1$ հանգույցների այնպիսի $\mathcal{X}_1$ բազմություն, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի k-րդ աստիճանի կորեր:*

Ատենախոսության այս արդյունքը մասնավոր՝ $k = n-1$, դեպքի համար ներկայացված է առանձին, քանի որ խնդիրը այս դեպքում դիտարկել ենք նախապես.

Պնդում 4.2.1 ([4]). *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը Π_n-անկախ հանգույցների բազմություն է և որևէ $(n-1)$-րդ աստիճանի կոր անցնում է $\mathcal{X}$–ի $N-4$ հանգույցներով: Այդ դեպքում կորը որոշվում է միակորեն: Ավելին, գոյություն ունի Π_n-անկախ $N-5$ հանգույցների այնպիսի բազմություն, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի $(n-1)$-րդ աստիճանի կորեր:*

Թեորեմ 4.2.2-ից ստանում ենք երկու հետևանքներ, որոնք տալիս են գնահատական՝ տրված Π_n-անկախ բազմության մեջ Π_k-անկախ հանգույցների նվազագույն քանակի համար՝ կամայական $k \le n-1$ արժեքների դեպքում.

Հետևանք 4.2.3 ([23]). *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը Π_n-անկախ հանգույցների բազմություն է, $\#\mathcal{X} \ge d(n,k-1)+2$ և $k \le n-1$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ում կան Π_k-անկախ առնվազն $N_k - 1$ հանգույցներ, որտեղ $N_k = dim\, \Pi_k = \binom{k+2}{2}$:*

Հետևանք 4.2.4 ([23]). *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը Π_n-անկախ հանգույցների բազմություն է, $\#\mathcal{X} \le d(n,\ k-1)+2$ և $k \le n-1$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ –ում կան Π_k -անկախ առնվազն $\#\mathcal{X}-(n-k)(k-1)$ հանգույցներ:*

Այսպիսով, ըստ մեր ստացած արդյունքի (**Թեորեմ 4.2.2**), կամայական Π_n-անկախ $\mathcal{K} = d(n,k-1)+2$ հանգույցներ պարունակող բազմության համար գոյություն ունի այդ հանգույցներով անցնող ամենաշատը մեկ k-րդ աստիճանի կոր, մինչդեռ գոյություն ունեն Π_n-անկախ $\mathcal{K}-1$ հանգույցներով բազմություններ, որոնցով անցնում են առնվազն երկու k-րդ աստիճանի կորեր: Հենց այսպիսի հանգույցների բազմությունների բնութագրմանն է վերաբերում Պարագրաֆ 4.3-ի շարադրումը: Մասնավորապես ապացուցում ենք հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 4.3.1 ([24], [25]). *Տրված է Π_n-անկախ հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմություն, $\#\mathcal{X} = d(n,k-1)+1$ և $k \le n-1$: Այս դեպքում երկու տարբեր k–րդ աստիճանի կորեր կանցնեն $\mathcal{X}$ բազմության հանգույցներով այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$–ի բոլոր հանգույցները՝ բացի մեկից, գտնվեն $(k-1)$–րդ աստիճանի մաքսիմալ կորի վրա:*

Նշենք, որ ատենախոսության մեջ վերջին թեորեմից որպես հետևանք ստանում ենք **Թեորեմ 4.2.2**-ը:

Պարագրաֆ 4.4-ում ներկայացնում ենք **Թեորեմ 4.3.1**-ի կարևոր հետևանք՝ ճշգրիտ բազմության ճիշտ երեք հանգույցներով անցնող ուղղի օգտագործումների քանակի մասին:

Հետևանք 4.4.2 ([24], [30]). *Դիցուք* $\mathcal{X}$*–ը* Π_n*–ճշգրիտ բազմություն է,* $\#\mathcal{X} = \mathrm{N} = \binom{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}}$*,* l *ուղիղը օգտագործվում է* $\mathcal{X}$*–ի որևէ հանգույցի կողմից և անցնում է այդ բազմության ճիշտ երեք հանգույցներով: Այդ դեպքում* l*–ը կարող է օգտագործվել* $\mathcal{X}$*–ի կամ ճիշտ երեք, կամ ճիշտ մեկ հանգույցի կողմից: Ավելին, եթե այն օգտագործվում է ճիշտ երեք հանգույցների կողմից, ապա այդ հանգույցները համագիծ չեն:*

ԳԼՈՒԽ 1.

ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԱՅԻՆ ՄԻՋԱՐԿՈՒՄ

1.1 Միջարկում մեկ փոփոխականի բազմանդամներով

Նշանակենք π_n–ով մեկ փոփոխականի՝ փոքր կամ հավասար n աստիճանի իրական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը՝

$$\pi_n = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ : a_i \in \mathbb{R}\right\}:$$

π_n բազմանդամային տարածության չափողականությունը տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$dim\ \pi_n = n + 1:$$

Ներկայացնենք Լագրանժի միաչափ միջարկման խնդիրը. թվային առանցքի վրա տրված են իրարից տարբեր $x_0, x_1, \ldots, x_m$ կետեր, տրված են նաև կամայական $c_0, c_1, , \ldots, c_m$ արժեքներ: Պահանջվում է գտնել այնպիսի $p \in \pi_n$ բազմանդամ, որը կբավարարի հետևյալ պայմաններին.

$$p(x_i) = c_i,\ i = 0, 1, \ldots, m\ : \tag{1.1}$$

Այս պայմաններն անվանում ենք միջարկման պայմաններ, որոնելի $p \in \pi_n$ բազմանդամը՝ միջարկիչ բազմանդամ, իսկ $x_0, x_1, \ldots, x_m$ կետերը՝ միջարկման հանգույցներ:

Միջարկման խնդրի ուսումնասիրության ընթացքում քննարկվում է խնդրի միակորեն լուծելիությունը: Նշված (1.1) պայմանները համարժեք են $n+1$ անհայտներով գծային հավասարումների համակարգի, որտեղ անհայտները $p \in \pi_n$ բազմանդամի գործակիցներն են: Հաշվի առնելով այն, որ ցանկացած $c_i,\ i = 0, 1, \ldots, m,$

արժեքների համար ունենք $m+1$ հավասարում՝ ստանում ենք, որ համակարգի, հետևաբար և միջարկման խնդրի, միակորեն լուծելիության անհրաժեշտ պայմանն է

$$m = n: \tag{1.2}$$

Այսուհետ կենթադրենք, որ այս պայմանը տեղի ունի:

Ստորև ներկայացված է Լագրանժի թեորեմը միջարկման խնդրի միակորեն լուծելիության մասին.

Թեորեմ 1.1.1 (Լագրանժ). *Յանկացած իրարից փարբեր $x_0, x_1, \dots, x_n$ հան-գույցների և $c_0, c_1,, \dots, c_n$ արժեքների համար գոյություն ունի միակ $p \in \pi_n$ բազմանդամ այնպես, որ*

$$p(x_i) = c_i,\ i = 0, 1, \dots, n: \tag{1.3}$$

Լագրանժի միջարկման խնդրի լուծման երկու հիմնական բանաձևեր կան՝ Լագրանժի և Նյուտոնի: Լագրանժի բանաձևով լուծումը ներկայացնելու համար դիտարկում ենք ֆունդամենտալ բազմանդամները, որոնք կառուցվում են յուրաքանչյուր հանգույցի համար.

Սահմանում 1.1.2. *Կասենք, որ $p_i^* \in \pi_n$ բազմանդամը x_i , $0 \le i \le n$, հանգույցի ֆունդամենփալ բազմանդամն է, եթե*

$$p_i^*(x_j) = \delta_{ji}\ , 0 \le j \le n\ , \tag{1.4}$$

որփեղ δ_{ji}–ն Կրոնեկերի սիմվոլն է:

Այլ կերպ ասած, յուրաքանչյուր հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը մի բազմանդամ է π_n բազմանդամային տարածությունից, որը դիտարկվող հանգույցում ընդունում է մեկ արժեքը, իսկ այդ հանգույցից բացի մնացած հանգույցներում ընդունում է զրո արժեքը:

Օգտագործելով x_i , $0 \le i \le n$, հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները, Լագրանժի միջարկման խնդրի միակ լուծումը կարելի է ներկայացնել

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i p_i^* (x) \qquad (1.5)$$

բանաձևով:

Հաշվի առնելով, որ ֆունդամենտալ բազմանդամները կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$p_i^*(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k},$$

կստանանք Լագրանժի բանաձևը.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}:$$

Անցնենք միջարկման խնդրի լուծման Նյուտոնի մեթոդին.

Թեորեմ 1.1.3 (Նյուտոն). *Յանկացած իրարից պարբեր $x_0, x_1, \dots, x_n$ հանգույցներով և $c_0, c_1, , \dots, c_n$ արժեքներով միջարկման խնդրի միակ $p \in \pi_n$ լուծումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.*

$$p(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x - x_0) + \gamma_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \gamma_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \qquad (1.6)$$

որտեղ γ_i , $i = 0,1, \dots, n$, հաստատուններ են:

Նյուտոնի բանաձևում հաստատունները կարելի է ստանալ հաջորդաբար՝ միջարկման (1.3) պայմաններից:

Սահմանում 1.1.4. *Կասենք, որ $p \in \pi_n$ բազմանդամը f ֆունկցիայի միջարկիչ բազմանդամն է $x_0, x_1, \dots, x_n$ հանգույցներով, եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.*

1. $p \in \pi_n$,
2. $p(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \dots, n$:

Այս դեպքում էլ, երբ $c_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, Նյուտոնի բանաձևում γ_i, $i = 0,1, \dots, n$, հաստատունների բացահայտ տեսքը ստանալու համար կիրառվում են բաժանված տարբերությունները, որոնք սահմանվում են անդրադարձ առնչությունների միջոցով՝

$$[x_0]f = f(x_0),$$

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{[x_1, \dots, x_n]f - [x_0, \dots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}:$$

Այսպիսով, միջարկման խնդրի միակ լուծման Նյուտոնի բանաձևը ստանում ենք հետևյալ տեսքով.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \dots, x_i]f \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k):$$

Մինչ այժմ դիտարկում էինք իրարից տարբեր հանգույցներով միջարկման խնդիր: Այժմ դիտարկենք կրկնվող կամ պատիկ հանգույցների դեպքը: Ենթադրենք տրված է հետևյալ հանգույցների բազմությունը.

$$\{t_0, t_1, \dots, t_n\} = \begin{Bmatrix} x_0, x_1, \dots, x_k \\ \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k \end{Bmatrix} : \tag{1.7}$$

Այս դեպքում դիտարկվող կետերի $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ բազմության մեջ կարող են լինել կրկնվող հանգույցներ: Ենթադրենք դրանց մեջ իրարից տարբեր են $x_0, x_1, \dots, x_k$ հանգույցները և դրանցից յուրաքանչյուրը (1.7) բազմության մեջ կրկնվում է համապատասխանաբար $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$ անգամ: Հետևաբար ունենք, որ

$$\sum_{i=0}^{k} \mu_i = n + 1:$$

Միջարկման խնդիրը պատիկ հանգույցներով կամ Հերմիթի միջարկման խնդիրը ձևակերպվում է այսպես. տրված է պատիկ հանգույցների (1.7) բազմությունը և

$$C = \{c_{ij} : \ i = 0, \dots, k, \ \ j = 0, \dots, \mu_{i-1}\}$$

արժեքների բազմությունը: Պահանջվում է գտնել այնպիսի $p \in \pi_n$ բազմանդամ, որը կբավարարի հետևյալ պայմաններին.

$$p^{(j)}(x_i) = c_{ij}, \qquad i = 0, \dots, k, \;\; j = 0, \dots, \mu_{i-1} \;:$$

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1.1.5 (Հերմիթ). *Արժեքների ցանկացած C բազմության համար գոյություն ունի միակ $p \in \pi_n$ բազմանդամ այնպես, որ*

$$p^{(j)}(x_i) = c_{ij}, \qquad i = 0, \dots, k, \;\; j = 0, \dots, \mu_{i-1}:$$

Ինչպես տեսանք մի փոփոխականի դեպքում միջարկման խնդիրը ունի միակ լուծում հանգույցների ցանկացած բազմության և կամայական աստիճանի բազմանդամային տարածության համար այն դեպքում, երբ տեղի ունի (1.2) անհրաժեշտ պայմանը: Այդ լուծումը տրվում է հիմնական երկու՝ Լագրանժի (1.5) և Նյուտոնի (1.6) բանաձևերով: Ճշգրտության գաղափարը բնականորեն ընդհանրացվում է բազմաչափ բազմանդամային միջարկման համար: Սակայն բազմաչափ ընդհանրացման ժամանակ առաջանում են որոշակի բարդություններ, քանի որ այս դեպքում միջարկման խնդրի միակորեն լուծելիությունը կախված է ոչ միայն հանգույցների քանակից, այլ նաև դրանց երկրաչափական փոխդասավորությունից: Այսպիսով, բազմաչափ միջարկման հիմնական խնդիրներից է միջարկման հանգույցների այնպիսի փոխդասավորությունների որոնումը, որոնց համար միջարկման խնդիրն ունի միակ լուծում:

1.2 Միջարկում երկու փոփոխականի բազմանդամներով

Նշանակենք Π_n –ով երկու փոփոխականի՝ n-ը չգերազանցող գումարային աստիճանի իրական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը

$$\Pi_n = \Pi_n(R^2) = \left\{ \sum_{i+j \le n} a_{ij} x^i y^j \,:\, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}: \tag{1.8}$$

Հաշվենք (1.8) բազմանդամային տարածության չափողականությունը. m աստիճանի՝ $x^i y^j,\ i+j=m$, միանդամների քանակը $m+1$ է, հետևաբար

$$N \coloneqq N_n \coloneqq dim\Pi_n = 1+2+\cdots+(n+1) = \binom{n+2}{2}:$$

Դիտարկենք կետերի հետևյալ բազմությունը $\mathbb{R}^2$-ում.

$$\mathcal{X}_s = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_s,y_s)\}: \tag{1.9}$$

Ձևակերպենք Լագրանժի բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդիրը. տրված (1.9) բազմության և կամայական $c_1, c_2,, \dots, c_s$ իրական թվերի համար գտնել այնպիսի $p \in \Pi_n$ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$p(x_i,y_i) = c_i,\ i=1,\dots,s: \tag{1.10}$$

Այս խնդիրն անվանում ենք միջարկման խնդիր, $p \in \Pi_n$ բազմանդամը՝ միջարկիչ բազմանդամ, (1.10) պայմանները՝ միջարկման պայմաններ, իսկ $\mathcal{X}_s$ բազմությունը՝ միջարկման հանգույցների բազմություն:

Սահմանում 1.2.1. *Կասենք, որ միջարկման խնդիրը Π_n-ով և $\mathcal{X}_s = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_s,y_s)\}$ միջարկման հանգույցների բազմությամբ ճշգրիտ է կամ միակորեն լուծելի, եթե ցանկացած $c_1, c_2,, \dots, c_s$ արժեքների համար գոյություն ունի միակ $p \in \Pi_n$ բազմանդամ, որը բավարարում է (1.10) պայմաններին:*

Նկատենք, որ (1.10) պայմաններից յուրաքանչյուրից ստանում ենք գծային հավասարում և, ուրեմն, բոլոր պայմաններից կունենանք s գծային հավասարումների համակարգ՝ N անհայտներով, որոնք հանդիսանում են $p \in \Pi_n$ բազմանդամի գործակիցները: Հետևաբար, միջարկման խնդրի ճշգրտություն կունենանք այն դեպքում, երբ նշված գծային հավասարումների համակարգն ունենա միակ լուծում ցանկացած աջակողմյան $c_1, c_2,, \dots, c_s$ արժեքների համար: Այսպիսով, ինչպես միաչափ դեպքում՝ ստանում ենք, որ միակորեն լուծելիության անհրաժեշտ պայմանն է $s=N$, այսինքն՝

$$\#\mathcal{X}_s = s = N = dim\Pi_n: \tag{1.11}$$

Այսուհետ, երբ կդիտարկենք միջարկման խնդրի ճշգրտություն կամ, որ նույնն է, միակորեն լուծելիություն, կենթադրենք, որ (1.11) պայմանը տեղի ունի, այլ խոսքերով՝ որպես միջարկման հանգույցների բազմություն կդիտարկենք N հանգույցներով $\mathcal{X} = \mathcal{X}_N$ բազմություն:

Ճշգրտության անհրաժեշտ (1.11) պայմանից ստանում ենք մի կարևոր դիտարկում.

Ճշգրիտ երկչափ միջարկման հանգույցների քանակը որոշակի տեսքի թիվ պետք է լինի: Օրինակ 0 աստիճանի բազմանդամային տարածության համար հանգույցների քանակը 1 է, 1 աստիճանի համար՝ 3, 2 աստիճանի համար 6, և այլն, այսինքն՝ 0, 1, 2, 3, 4, … աստիճանի բազմանդամներով միջարկման համար պետք է վերցնել համապատասխանաբար 1, 3, 6, 10, 15, … հանգույց:

Սակայն, ի տարբերություն միաչափ դեպքի, բազմաչափ միջարկման խնդրի միակորեն լուծելիության համար միայն (1.11) պայմանը բավարար չէ: Դիտարկենք մի օրինակ: Դիցուք ունենք միջարկման խնդիր $\mathcal{X}_1 = \{(1,0),(2,0),(3,0)\}$ հանգույցների բազմությունով և $\Pi_1 = \{\alpha + \beta x + \gamma y \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ բազմանդամային տարածության համար: Միջարկման (1.10) պայմանները կունենան հետևյալ տեսքը.

$$\alpha + \beta = c_1,$$

$$\alpha + 2\beta = c_2,$$

$$\alpha + 3\beta = c_3,$$

Քանի որ γ–ի գործակիցն ամեն տեղ զրո է, մենք ստանում ենք ոչ թե 3×3, այլ 3×2 համակարգ, հետևաբար այս դեպքում միջարկման խնդիրը նշված հանգույցների բազմությամբ ճշգրիտ չէ: Այժմ դիտարկենք Π_1 –ով և $\mathcal{X}_2 = \{(1,1),(2,1),(3,3)\}$ հանգույցներով միջարկման խնդիր, որի համար (1.10) պայմաններն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\alpha + \beta + \gamma = c_1,$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = c_2,$$

$$\alpha + 3\beta + 3\gamma = c_3:$$

Ակնհայտ է, որ այսպիսի հանգույցների բազմության ընտրությամբ ունենք ճշգրտություն:

(1.10) և (1.11) պայմանների համադրմամբ ստանում ենք գծային հավասարումների համակարգ, որն, ինչպես հայտնի է, ունի միակ լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ համապատասխան համասեռ համակարգն ունի միակ զրոյական լուծում: Այստեղից ստանում ենք հետևյալ պնդումը.

Պնդում 1.2.2. *Որպեսզի միջարկման խնդիրը Π_n–ով և $\mathcal{X}_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ հան-գույցներով լինի ճշգրիտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունենա հետևյալ պայմանը.*

$$p(x_i, y_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, N \qquad \Rightarrow \qquad p = 0 \,:$$

Այստեղից ստանում ենք.

Պնդում 1.2.3. *Միջարկման խնդիրը Π_n–ով և $\mathcal{X}_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ հանգույցներով կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $p \in \Pi_\mathrm{n}$, $p \neq 0$, բազմանդամ այնպիսին, որ*

$$p(x_i, y_i) = 0 \,, \qquad i = 1, 2, \dots, N \,:$$

Այժմ համապատասխանեցնենք n գումարային աստիճանի p բազմանդամին $p(x, y) = 0$ հավասարումով տրվող n -րդ աստիճանի հանրահաշվական կոր և պայմանավորվենք միևնույն տառը օգտագործել՝ և՛ կորը, և՛ բազմանդամը նշանակելու համար: Ուղիղները և դրանց համապատասխանող առաջին աստիճանի բազմանդամները սովորաբար նշանակում ենք l-ով:

Նշենք, որ ցանկացած $s < N$ կետերի համար գոյություն ունի n-րդ աստիճանի հանրահաշվական կոր, որն անցնում է այդ բոլոր հանգույցներով: Եվ իրոք, համապատասխան համասեռ գծային համակարգը կունենա N անհայտ և s հավասարում, որն էլ նշանակում է, որ համակարգը ունի ոչ զրոյական լուծում: Այս փաստից օգտվելով, ինչպես նաև հաշվի առնելով **Պնդում 1.2.3**-ը, ստանում ենք *երկչափ բազմանդամային միջարկման ճշգրտության երկրաչափական մեկնաբանությունը.*

Միջարկման խնդիրը Π_n–ով և $\mathcal{X}_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ հանգույցներով կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունենա n-րդ աստիճանի հանրահաշվական կոր, որն անցնի $\mathcal{X}_N$ բազմության բոլոր հանգույցներով:

Համանմանորեն ստանում ենք.

Π_n–ով և $\mathcal{X}_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ հանգույցներով միջարկման խնդիրը ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն չունի $\mathcal{X}_N$ բազմության բոլոր հանգույցներով անցնող n-րդ աստիճանի հանրահաշվական կոր:

Այս փաստը կօգտագործենք հետագայում:

Այժմ սահմանենք ֆունդամենտալ բազմանդամ երկչափ բազմանդամային միջարկման հանգույցների համար.

Սահմանում 1.2.4. *Կասենք, որ $p \in \Pi_n$ բազմանդամը $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամն է $\mathcal{X}$ բազմության նկատմամբ, եթե*

$$p(A) = 1\,, \qquad p(B) = 0, \qquad \forall B \in \mathcal{X} \setminus \{A\}:$$

Հետագա շարադրանքում $A = (x_i, y_i) \in \mathcal{X},\ 0 \leq i \leq N$, հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը կնշանակենք $p_A^* = p_i^* = p_{i,\mathcal{X}}^*$: Բացի այդ, կնշենք, թե որ բազմության նկատմամբ է դիտարկվում ֆունդամենտալ բազմանդամը այն դեպքերում, երբ կդիտարկենք մի քանի բազմություններ:

Նշենք նաև, որ որոշ դեպքերում ֆունդամենտալ կանվանենք նաև այն բազմանդամը, որը կզրոյանա A հանգույցից բացի դիտարկվող մնացած հանգույցներում և նշված հանգույցում զրոյից տարբեր արժեք կընդունի, քանի որ այն կտարբերվի A-ի ֆունդամենտալ բազմանդամից միայն հաստատուն արտադրիչով:

Պնդում 1.2.5. *Որպեսզի միջարկման խնդիրը Π_n–ով և $\mathcal{X}_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ հան-գույցներով լինի ճշգրիտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\mathcal{X}_N$ բազմության բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունենան: Ավելին, այդ դեպքում ունենք Լագրանժի հետևյալ բանաձևը միջարկիչ բազմանդամի համար, որը բավարարում է (1.10) պայմաններին՝ $s = N$ դեպքում.*

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{N} c_i p_i^* \,(x,y):$$

Նկատենք, որ Π_n –ճշգրիտ բազմության ֆունդամենտալ բազմանդամները միակն են, այդպիսով, ըստ **Պնդում 1.2.5**-ի, *եթե որևէ $\mathcal{X}_N = \{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{N}$ բազմության բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունեն, ապա դրանք միակն են*: Այս հատկությունը հետագայում հաճախ ենք օգտագործելու:

Այժմ ներմուծենք միջարկումների տեսության մի կարևոր հասկացություն.

Սահմանում 1.2.6. *$\mathcal{X}$ բազմությունը կանվանենք Π_n–անկախ, եթե $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունեն: Հակառակ դեպքում, երբ որևէ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ գոյություն չունի, $\mathcal{X}$ բազմությունը անվանում ենք Π_n–կախյալ:*

Սահմանում 1.2.7. *Կասենք, որ միջարկման խնդիրը Π_n-ով և $\mathcal{X}_s = \{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{s}$, $s \le N$, հանգույցների բազմությամբ լուծելի է, եթե ցանկացած $c_1, c_2, , \dots, c_s$ արժեքների համար գոյություն ունի $p \in \Pi_n$ բազմանդամ (ոչ անպայման միակը), որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

$$p(x_i,y_i) = c_i,\ i = 1,\dots,s: \tag{1.13}$$

Որպես միջարկման խնդրի հանգույցներ կարող ենք ընտրել անկախ հանգույցների բազմություն: Այդ դեպքում կունենանք.

Պնդում 1.2.8. *Միջարկման խնդիրը Π_n–ով և $\mathcal{X} = \{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{s}$ հանգույցների բազմությամբ կլինի լուծելի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$ բազմությունը Π_n-անկախ է:*

Ապացույց. Անհրաժեշտություն: Քանի որ խնդիրը լուծելի է, հետևաբար գոյություն ունի $p \in \Pi_n$ բազմանդամ, որը բավարարում է (1.13) պայմաններին: c_i արժեքներից մեկը կվերցնենք հավասար 1-ի, մյուսները 0 և այսպիսով կստանանք բոլոր (x_i,y_i), $i = 1,2,\dots,s$, կետերի ֆունդամենտալ բազմանդամները: Այսպիսով, $\mathcal{X}$ բազմությունը կլինի Π_n–անկախ:

Բավարարություն: Ունենք, որ $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներն ունեն ֆունդամենտալ բազմանդամներ՝ $\exists\, p_i^*(x,y) \in \Pi_n,\ \ i = 1,\dots,s$ ։ Այս դեպքում միջարկման խնդրի գոյությունը կարելի է ցույց տալ՝ դիտարկելով հետևյալ բանաձևը.

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{s} p(x_i,y_i)p_i^*(x,y) : \square$$

Եթե միջարկման հանգույցների քանակը վերցնենք հավասար Π_n բազմանդամային տարածության չափողականությանը, այսինքն՝ վերցնենք $s = N$, ապա կունենանք.

Պնդում 1.2.9. *Միջարկման խնդիրը Π_n-ով և $\mathcal{X} = \{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{N}$ հանգույցներով ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$-ը Π_n-անկախ է:*

Իրոք, անհրաժեշտությունն ակնհայտ է, քանի որ յուրաքանչյուր ֆունդամենտալ բազմանդամ միջարկիչ է:

Բավարարություն: Քանի որ գոյություն ունեն բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները, ապա միջարկման խնդրի լուծումը գոյություն ունի. այն կներկայացնենք հետևյալ բանաձևով.

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i,y_i)p_i^*(x,y):$$

Ինչպես հայտնի է հանրահաշվից $N \times N$ գծային համակարգը ցանկացած աջ մասի համար ունի միակ լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ այն կամայական աջ մասի համար ունի լուծում: Հետևաբար ներկայացված լուծումը միակն է և հանգույցների բազմությունը ճշգրիտ է:

Ֆունդամենտալ բազմանդամները կարող են նաև լինել վերածվող, այսինքն՝ իրենցից ներկայացնեն մի քանի՝ ավելի ցածր աստիճանի բազմանդամների արտադրյալ: Այդ դեպքում օգտագործում ենք հետևյալ սահմանումը.

Սահմանում 1.2.10. *Դիցուք* $\mathcal{X}$*-ը* Π_n*-ճշգրիտ բազմություն է: Կասենք, որ* $A \in \mathcal{X}$ *հանգույցն օգտագործում է* $q \in \Pi_k$, $k \leq n$, *կորը, եթե այն հանդիսանում է* A *հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամի արտադրիչ, այսինքն՝*

$$p_A^* = qr, \text{ որտեղ } r \in \Pi_{n-k}:$$

Ճշգրիտ բազմության ֆունդամենտալ բազմանդամների մի հատկություն ձևակերպենք լեմմայի տեսքով.

Լեմմա 1.2.11. *Եթե միջարկման խնդիրը* Π_n*-ով և* $\mathcal{X}$ *բազմության հանգույցներով ճշգրիտ է, ապա ցանկացած* $A \in \mathcal{X}$ *հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ ճիշտ* n*–րդ աստիճանի բազմանդամ է՝* $deg\, p_A^* = n$, *և այն չի կարող ունենալ պատիկ արտադրիչներ:*

Եվ իրոք, եթե տանենք $A \in \mathcal{X}$ հանգույցով կամայական l ուղիղ և ենթադրենք հակառակը՝ $deg\, p_A^* < n$, ապա $(p_A^* \cdot l) \in \Pi_\mathrm{n}$ բազմանդամը կզրոյանա $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներում, որը ըստ **Պնդում 1.2.3**-ի հակասում է $\mathcal{X}$ բազմության ճշգրտությանը: Իսկ եթե p_A^* բազմանդամը ունենա պատիկ արտադրիչներ, ապա դրանք դեն նետելով՝ կստանանք նախորդ դեպքը:

Ներկայացնենք մի հայտնի արդյունք, որն օգտագործելու ենք հետագա շարադրանքում: Այստեղ $p|_l$ -ով նշանակում ենք $p \in \Pi_\mathrm{n}$ բազմանդամի սահմանափակումը l ուղղի վրա:

Պնդում 1.2.12. *Դիցուք տրված են* $p \in \Pi_n$ *բազմանդամը և* l *ուղիղը, և դիտարկենք իրարից տարբեր* $n+1$ *կետեր* l *ուղղի վրա՝*

$$(x_i, y_i) \in l, \qquad i = 0, \dots, n:$$

Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ դրույթները.

1. $p \in \Pi_n$ *բազմանդամի՝* l *ուղղի* $n+1$ *կետերում զրո լինելուց հետևում է, որ այն զրո է ամբողջ* l *ուղղի վրա՝*
$$p(x_i, y_i) = 0, \qquad i = 0, \dots, n \qquad \Rightarrow \qquad p|_l = 0:$$

2. *Եթե $p \in \Pi_n$ բազմանդամը զրո է l ուղղի վրա, ապա l-ը արտադրիչ է p–ում, այսինքն՝*

$$p|_l = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p = lq, \qquad \text{որտեղ} \qquad q \in \Pi_{n-1}:$$

Ամբողջականության համար ներկայացնենք ապացույցը:

Ապացույց. *1.* Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, որ l ուղղի հավասարումն է

$$y = kx + b$$

և դիտարկենք հետևյալ բազմանդամը՝

$$r(x) = p(x, kx + b):$$

Պարզ է, որ վերջինս ոչ ավելի քան n աստիճանի՝ մի փոփոխականի բազմանդամ է և հանդիսանում է $p(x, y)$ բազմանդամի հետքը l ուղղի վրա:

Նկատենք, որ

$$p(x_i, y_i) = 0, \qquad \text{որտեղ} \quad (x_i, y_i) \in l, \qquad i = 0, \dots, n\,,$$

պայմանից հետևում է, որ

$$r(x_i) = 0, \qquad i = 0, \dots, n\,:$$

Այստեղ կիրառենք այն փաստը, որ, եթե n աստիճանի բազմանդամը ունի $n+1$ զրոներ, ապա այն նույնաբար զրո է և կստանանք.

$$r(x) \equiv 0, \quad \text{կամ որ նույնն է՝} \quad p|_l = 0:$$

Այժմ անցնենք *2.*-ի ապացույցին: Ունենք՝

$$p(x, kx + b) \equiv 0:$$

Ենթադրենք

$$p(x, y) = \sum_{i+j \le n} a_{ij} x^i y^j:$$

Այստեղից ստանում ենք

$$p(x,y) = p(x,y) - p(x,kx+b) =$$

$$= \sum_{i+j\le n} a_{ij}x^i[y^j - (kx+b)^j]: \qquad (1.12)$$

Այստեղ փակագծերում գրված արտահայտության համար կիրառելով հետևյալ նույնությունը.

$$\lambda^k - \mu^k = (\lambda - \mu)\sum_{i=0}^{k} \lambda^i \mu^{k-i},$$

կստանանք, որ (1.12)-ում քառակուսի փակագծերում գրվածը հավասար է զրո, երբ $j = 0$, և բաժանվում է $(y - (kx+b))$-ի վրա, երբ $j \ge 1$: □

Այս պնդման ընդհանուր տարբերակին կարելի է ծանոթանալ [15]-ում, որտեղ ներկայացված է արդյունքը՝ պատիկ հանգույցների դեպքում:

Նշենք նաև, որ պնդման *1.* կետի համաձայն երկու փոփոխականի բազմանդամի սահմանափակումը ուղղի վրա մի փոփոխականի բազմանդամ է: Ինչպես նաև, օգտագործելով *2.* կետի ապացույցը՝ ստանում ենք հետևյալը. եթե $p \in \Pi_n$ բազմանդամը զրոյանում է $y = s(x)$ բանաձևով տրվող հանրահաշվական կորի բոլոր կետերում, որտեղ $s(x)$–ը k-րդ աստիճանի մի փոփոխականի բազմանդամ է, ապա

$$p(x,y) = [y - s(x)]\, q(x,y), \qquad q \in \Pi_{n-k}:$$

Այժմ դիտարկենք մի քանի արդյունքներ, որոնք ներկայացնում են անկախ և կախյալ բազմությունների օրինակներ: Դրանցից առաջինը Սևերիի հայտնի թեորեմն է.

Թեորեմ 1.2.13 (Սևերի). *Ցանկացած $n+1$ կետերի $\mathcal{X}$ բազմությունը Π_n – անկախ է:*

Իրոք, կետերի բազմության անկախությունը ցույց տալու համար պետք է գտնել յուրաքանչյուր կետի համար ֆունդամենտալ բազմանդամ: Ֆիքսելով որևէ A կետ $\mathcal{X}$ բազմությունից՝ մնացած n կետերից յուրաքանչյուրով տանենք մեկական ուղիղ, որը չի անցնում A կետով: Ստացված ուղիղների արտադրյալը կլինի ֆունդամենտալ բազմանդամ A կետի համար:

Պնդում 1.2.14. *Ուղղի վրա գտնվող ցանկացած $n+2$ կետերի $\mathcal{X}$ բազմություն Π_n-կախյալ է:*

Այստեղ կարող ենք նշել, որ ոչ մի կետ $\mathcal{X}$ բազմությունից չունի ֆունդամենտալ բազմանդամ: Եվ իրոք, $\mathcal{X}$-ից ցանկացած A կետի համար ֆունդամենտալ բազման-դամը n–րդ աստիճանի բազմանդամ է և պետք է զրոյանա $\mathcal{X}$ բազմության A-ից բացի մնացած $n+1$ կետերում, որոնք գտնվում են մի ուղղի վրա, իսկ դա, ըստ **Պնդում 1.2.12**-ի, նշանակում է, որ բազմանդամը զրոյանում է ամբողջ ուղղի վրա, հետևաբար նաև A կետում, որը հակասություն է:

Պնդում 1.2.15. Ցանկացած $n+2$ *կետեր Π_n-անկախ են այն և միայն այն դեպքում, երբ չեն գտնվում մեկ ուղղի վրա:*

Ապացույց. Անհրաժեշտությունն ակնհայտ է, քանի որ ցանկացած $\mathrm{n}+2$ հանգույցներ ուղղի վրա Π_{n}-կախյալ են:

Բավարարություն. Առանձնացնենք որևէ A հանգույց: Մնացած $n+1$ կետերից կարող ենք ընտրել այնպիսի երկու կետեր, որոնցով անցնող ուղիղը չի անցնում A հանգույցով, հակառակ դեպքում բազմության բոլոր կետերը կգտնվեին մեկ ուղղի վրա և կստանայինք հակասություն: Այսպիսով, ընտրելով նշված երկու կետերը՝ դրանցով տանենք ուղիղ՝ l_1, մնացած $n-1$ հանգույցներից յուրաքանչյուրով տանենք մեկական ուղիղ, որը չի անցնի A հանգույցով՝ $l_2, l_3, \dots, l_n$: Այսպիսով, կամայական A հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ կարելի է գրել որպես նշված պայմաններին բավարարող n հատ $l_1, l_2, \dots, l_n$ ուղիղների արտադրյալ: □

Պնդում 1.2.16 ([13]). *Ոչ ավելի քան $2n+1$ հանգույցներ Π_n–անկախ են այն և միայն այն դեպքում, երբ դրանցից ոչ մի $(n+2)$-ը համագիծ չեն: Ավելին, անկա-*

խության դեպքում ցանկացած կետի ֆունդամենտալ բազմանդամ ուղիղների արտադրյալ է:

1.3 Անկախ հանգույցների շրջակայքերի վերաբերյալ

Այժմ դիտարկենք հարթության վրա s կետերի $\mathcal{X}_s = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_s, y_s)\}$ բազմություն: Կամայական (x_i, y_i) կետի համապատասխանեցնենք N –չափանի վեկտոր.

$$[x_i, y_i]_N := (1, x_i, y_i, \ldots, x_i{}^n, x_i{}^{n-1} y_i, \ldots, y_i{}^n):$$

$\mathcal{X}_s$ բազմության և Π_n տարածության համար Վանդերմոնդի մատրից՝ $V_n(\mathcal{X}_s)$, անվանում ենք այն մատրիցը, որի տողերը հանդիսանում են $\mathcal{X}_s$ բազմության կետերի N–վեկտորները.

$$V_n(\mathrm{X}_s) := \begin{pmatrix} [\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1]_N \\ [\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2]_N \\ \vdots \\ [\mathrm{x}_s, \mathrm{y}_s]_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \cdots & x_1^n & x_1^{n-1} y_1 & \cdots & y_1^n \\ 1 & x_2 & y_2 & \cdots & x_2^n & x_2^{n-1} y_2 & \cdots & y_2^n \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_s & y_s & \cdots & x_s^n & x_s^{n-1} y_s & \cdots & y_s^n \end{pmatrix}:$$

Հետևաբար $V_n(\mathcal{X}_s)$ –ը $s \times N$ մատրից է: Պարզվում է Վանդերմոնդի $V_n(\mathcal{X}_s)$ մատրիցն անմիջականորեն կապված է $\mathcal{X}_s$ բազմության Π_n–անկախության հետ:

Պնդում 1.3.1 ([17]). *$\mathcal{X}_s$ բազմությունը Π_n-անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}_s$–ին համապատասխանող N–վեկտորների բազմությունը գծորեն անկախ է:*

Ապացույց. Դիցուք $\mathcal{X}_s$ բազմությունը Π_n -անկախ է: Սա նշանակում է, որ համապատասխան միջարկման խնդիրը լուծելի է ցանկացած c_i, $i = 1, \ldots, s$, արժեքների համար: Հետևաբար, $\mathbb{R}^s$ տարածության ցանկացած $(c_1, c_2, \ldots, c_s)$ վեկտոր կարելի է ստանալ $V_n(\mathcal{X}_s)$ մատրիցի սյուների գծային կոմբինացիայով: Ստացվածը համարժեք է այն բանին, որ $V_n(\mathcal{X}_s)$ մատրիցի սյունային ռանգը հավասար է s-ի: Ուստի՝ $\mathcal{X}_s$ –ին համապատասխան N-վեկտորները գծորեն անկախ են: Պնդման հակառակ կողմի ապացույցը կատարվում է նույն դատողություններով՝ հակառակ ուղղությամբ: □

Հետագայում կօգտագործենք հետևյալ լեմման.

Լեմմա 1.3.2 ([20]). *Դիցուք* $\mathcal{X}$*-ը հանգույցների բազմություն է* $\mathbb{R}^2$*-ում: Այդ դեպքում հետևյալ երկու պնդումները համարժեք են.*

1. *Գոյություն ունի* $\mathcal{X}$ *բազմության* Π_k*–ճշգրիտ ենթաբազմություն:*
2. *Գոյություն չունի* k*–րդ աստիճանի կոր, որն անցնի* $\mathcal{X}$*–ի բոլոր կետերով:*

Եվ իրոք, *1.*–ից անմիջապես հետևում է *2.*-ը, քանի որ, համաձայն **Պնդում 1.2.2**–ի, գոյություն չունի Π_k–ճշգրիտ բազմության բոլոր հանգույցներով անցնող k-րդ աստիճանի հանրահաշվական կոր: Այժմ ենթադրենք՝ տեղի ունի *2.*-ը: $V_k(\mathcal{X})$ մատրիցի տերմիններով դա նշանակում է, որ $V_k(\mathcal{X})$-ի սյուները գծորեն անկախ են: Հետևաբար գոյություն ունի N_k–չափանի ոչ զրոյական մինոր: Այդ մինորի տողերն էլ որոշում են փնտրվող ենթաբազմությունը:

Ստորև առաջարկում ենք լեմմաներ, որոնք հետագայում օգտագործելու ենք: Դրանց ապացույցները հետևում են այն փաստից, որ Վանդերմոնդի որոշիչը անընդհատ ֆունկցիա է՝ $\mathcal{X}$ բազմության հանգույցներից

Լեմմա 1.3.3 ([16]). *Դիցուք տրված է* Π_n*–ճշգրիտ* $\mathcal{X}_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ *բազմությունը: Այդ դեպքում գոյություն ունի* ε *դրական թիվ այնպիսին, որ ցանկացած*

$$\mathcal{X}'_N = \{(x'_i, y'_i)\}_{i=1}^N$$

բազմություն, որտեղ հեռավորությունը համապատասխան (x'_i, y'_i) *և* (x_i, y_i) *հանգույցների միջև փոքր է* ε*-ից բոլոր* i*-երի համար, ևս* Π_n*–ճշգրիտ է:*

Այստեղից կարելի է ստանալ.

Լեմմա 1.3.4. *Դիցուք տրված է* Π_n*–անկախ* $\mathcal{X}_s = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^s$ *բազմությունը: Այդ դեպքում գոյություն ունի* ε *դրական թիվ այնպիսին, որ ցանկացած*

$$\mathcal{X}'_s = \{(x'_i, y'_i)\}_{i=1}^s$$

բազմություն, որտեղ հեռավորությունը (x'_i, y'_i) *և* (x_i, y_i) *հանգույցների միջև փոքր է* ε*-ից բոլոր* i*-երի համար, ևս* Π_n*–անկախ է:*

Ներկայացնենք ևս մի արդյունք, համաձայն որի ցանկացած վերջավոր $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ բազմության հանգույցները, ինչքան ասես փոքր չափով տեղաշարժելով, կարելի է վերածել անկախ հանգույցների բազմության, այսինքն՝ $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ կամայական կետերի բազմություն կարելի է մոտարկել հանգույցների անկախ բազմություններով: Ավելին, $\#\mathcal{X} = N$ հանգույցներով բազմությունը կարելի է մոտարկել հանգույցների ճշգրիտ բազմություններով:

Պնդում 1.3.5 ([1]). *Դիցուք տրված է* $\mathcal{X}_s = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{s}$, $s \leq N$, *բազմություն: Այդ դեպքում կամայական* ε *–ի համար,* $\varepsilon > 0$, *գոյություն ունի այնպիսի* Π_n *-անկախ* $Z_s = \{(x'_i, y'_i)\}_{i=1}^{s}$ *բազմություն, որի համար* (x'_i, y'_i) *և* (x_i, y_i) *հանգույցների միջև հեռավորությունը փոքր է* ε*-ից բոլոր* i*-երի համար:*

Եվ այս պնդումից անմիջապես բխում է.

Պնդում 1.3.6 ([1]). *Դիցուք տրված է* $\mathcal{X}_N = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ *բազմություն: Այդ դեպքում կամայական* ε*–ի համար,* $\varepsilon > 0$, *գոյություն ունի այնպիսի* Π_n*–ճշգրիտ* $Z_s = \{(x'_i, y'_i)\}_{i=1}^{N}$ *բազմություն, որի համար* (x'_i, y'_i) *և* (x_i, y_i) *հանգույցների միջև հեռավորությունը փոքր է* ε*-ից բոլոր* i*-երի համար:*

ԳԼՈՒԽ 2.

ՃՇԳՐԻՏ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Ինչպես արդեն նշվեց՝ բազմաչափ բազմանդամային միջարկման դեպքում միջարկման խնդրի միակորեն լուծելիությունը կախված է ոչ միայն հանգույցների քանակից, այլ նաև դրանց երկրաչափական փոխդասավորությունից: Նախորդ գլխում ներկայացվեց օրինակ, որտեղ բազմանդամային միջարկման խնդիրը ճշգրիտ չէր, չնայած որ հանգույցների քանակը ճշգրտության անհրաժեշտ պայմանին բավարարում էր. պատճառը դրանց փոխդասավորությունն էր հարթության վրա: Այս գլխում ներկայացնում ենք հանգույցների բազմության կառուցման մեթոդներ կամ կետերի կոնստրուկցիաներ, որոնց ընտրությամբ բազմաչափ միջարկումը ճշգրիտ է:

2.1 Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիա

Սահմանենք Բերզոլարիի [5] և Ռադոնի [27] կողմից ներմուծված կոնստրուկցիան (տես օրինակ՝ [18]).

Սահմանում 2.1.1. *Կասենք, որ* $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$, $\#\mathcal{X} = N = 1 + 2 + \cdots + (n+1)$ *հանգույցների բազմությունը Բերզոլարի-Ռադոնի բազմություն է կամ կրճատ՝* BR_n*-բազմություն է, եթե գոյություն ունեն այնպիսի* $n+1$ *ուղիղներ՝* $l_0, l_1, \ldots, l_n$, *որ*

$n+1$ *հանգույցներ պատկանում են* l_0*-ին,*

$$n \text{ հանգույցներ պատկանում են } l_1 \setminus l_0 \text{ -ին,} \tag{2.1}$$

$$\vdots$$

1 *հանգույց պատկանում է* $l_n \setminus \{l_0 \cup l_1 \cup \ldots \cup l_{n-1}\}$*:*

Ներկայացնենք նաև BR_n -բազմության հանգույցներով միջարկման խնդրի լուծելիությունը (տես օրինակ՝ [18]).

Թեորեմ 2.1.2. Եթե $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$, $\#\mathcal{X} = N = 1 + 2 + \cdots + (n+1)$ *հանգույցների բազմությունը* BR_n*-բազմություն է, ապա այն* Π_n*-ճշգրիտ է:*

Ապացույց. Դիցուք $\mathcal{X}$-ը BR_n-բազմություն է: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն (*2.1*) պայմաններին բավարարող $l_0, l_1, \dots, l_n$ ուղիղներ: Դիտարկենք որևէ $p \in \Pi_n$ բազմանդամ, որը զրոյանում է $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներում: Քանի որ p-ն զրոյանում է l_0-ի $n+1$ հանգույցներում, ապա, ըստ **Պնդում 1.2.12**-ի, տեղի ունի

$$p = l_0\, r, \qquad \text{որտեղ } r \in \Pi_{n-1}:$$

Այնուհետ, p-ն զրոյանում է l_1-ի n կետերում և, ըստ (2.1) պայմանների, դրանք չեն գտնվում l_0-ի վրա: Դա նշանակում է, որ այդ կետերում պետք է զրոյանա $r \in \Pi_{n-1}$ բազմանդամը: Այսպիսով, կրկին ըստ **Պնդում 1.2.12**-ի կստանանք՝

$$r = l_1 q, \qquad \text{որտեղ } q \in \Pi_{n-2}:$$

Ուստի

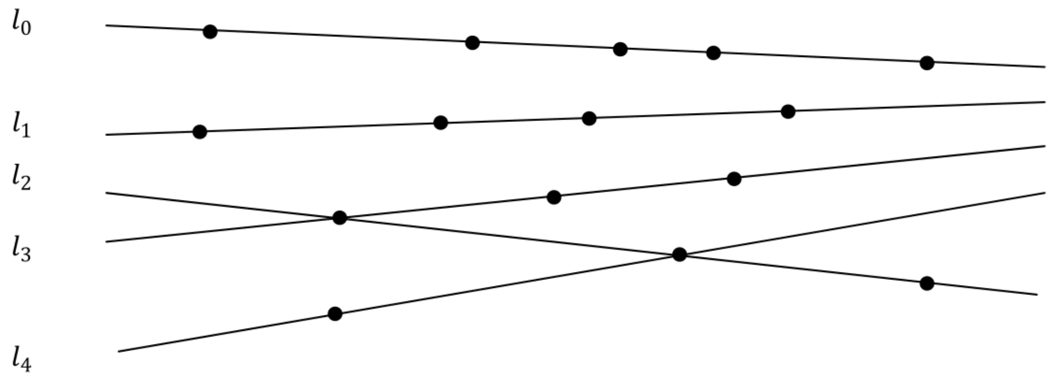
$$p = l_0\, l_1 q, \qquad \text{որտեղ } q \in \Pi_{n-2}:$$

Շարունակելով նույն դատողությունները՝ ի վերջո կստանանք.

$$p = l_0\, l_1 \dots l_{n-1}\, s\,, \qquad \text{որտեղ } s \in \Pi_0,$$

այսինքն՝ s-ը հաստատուն է: Քանի որ վերջին հանգույցը $\mathcal{X}$-ից չի պատկանում $l_0\, l_1 \dots l_{n-1}$ ուղիղներից ոչ մեկին, հետևաբար այդ հանգույցում p-ի զրոյանալուց հետևում է, որ $s = 0$, և ուրեմն $p \equiv 0$: Հաշվի առնելով **Պնդում 1.2.2**-ը՝ ստանում ենք՝ $\mathcal{X}$-ը Π_n-ճշգրիտ է: □

Գծագիր 2.1.1–ում ներկայացված 15 հանգույցների բազմությունը բավարարում է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիային, քանի որ հանգույցները դասավորված են 5՝ l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, ուղիղների վրա և բավարարում են (*2.1*) պայմաններին:



Գծագիր 2.1.1. Հանգույցների Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիա

n = 4 դեպքում

Թեորեմ 2.1.2-ի ապացույցից անմիջապես ստանում ենք հետևյալ երկու պնդումները ([19]).

Պնդում 2.1.3. *Դիտարկենք m ուղիղներ՝ $l_1, l_2, \dots, l_m$, որտեղ $m \le n$ և $(n+1) + n + \dots + (n+2-m)$ հանգույցների այնպիսի $\mathcal{X}$ բազմություն, որի*

$$n+2-k \text{ հանգույցներ պատկանում են } l_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} l_j, \qquad k = 1, \dots, m:$$

Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ի հանգույցներում զրոյացող ցանկացած $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար տեղի ունի

$$p = l_1 \dots l_m q, \qquad \text{որտեղ} \quad q \in \Pi_{n-m}:$$

Պնդում 2.1.4. Դիտարկենք m *ուղիղներ՝* l_k, $k = 1, 2, \dots, m$, *որտեղ* $m \le n$, *և* $\mathcal{X}$ *բազմություն, որի* $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ *հանգույցները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.*

$$n_k \le n + 2 - k,$$

$$n_k \text{ հանգույցներ } \mathcal{X}-\text{ից պատկանում են } l_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} l_j, \qquad k = 1, \dots, m:$$

Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ բազմությունը Π_n–անկախ է:

2.2 GC_n երկրաչափական բնութագրի պայման

Ճշգրիտ հանգույցների բազմության հաջորդ կոնստրուկցիան ներկայացնելու համար նախ սահմանենք Չանգի և Յաոյի կողմից ներմուծված երկրաչափական բնութագրի պայմանը կամ GC ($Geometrical\ characterization$) պայմանը (տես [12]):

Սահմանում 2.2.1. *Կասենք, որ $\mathcal{X}_{\mathrm{N}} \subset \mathbb{R}^2$ բազմությունը բավարարում է GC_n երկրաչափական պայմանին, եթե յուրաքանչյուր $A \in \mathcal{X}_{\mathrm{N}}$ հանգույցի համար գոյություն ունի p_A^* ֆունդամենտալ բազմանդամ, որը կարելի է ներկայացնել գծային արտադրիչների արտադրյալի տեսքով, այսինքն՝ գոյություն ունեն $l_1^A, \dots, l_n^A$ ուղիղներ, այնպես որ*

$$p_A^* = l_1^A \dots l_n^A: \tag{2.2}$$

Այլ խոսքերով՝ այս պայմանի բավարարման դեպքում $N = \binom{n+2}{2}$ հանգույցներից կազմված $\mathcal{X}_{\mathrm{N}}$ բազմության ցանկացած A հանգույցի համար գոյություն կունենան n հատ այնպիսի $l_1^A, \dots, l_n^A$ ուղիղներ, որ

$$\mathcal{X}_N \setminus \{A\} \subset l_1^A \cup \dots \cup l_n^A, \qquad \text{բայց} \quad A \notin l_1^A \cup \dots \cup l_n^A:$$

Այսպիսով, ստանում ենք.

Թեորեմ 2.2.2. *GC_n երկրաչափական պայմանին բավարարող $\mathcal{X}$ բազմությունը Π_n–ճշգրիտ է:*

Հիշենք՝ երբ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը որպես արտադրիչ պարունակում է որևէ ուղիղ, ասում ենք, որ հանգույցն օգտագործում է այդ ուղիղը (Գլուխ 1, **Սահմանում 1.2.10**): Այսպիսով, հաշվի առնելով **Սահմանում 2.2.1**-ում դիտարկվող A հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամի (2.2) ներկայացումը, կարող ենք ասել, որ A-ն օգտագործում է $l_1^A, \dots, l_n^A$ ուղիղները:

Տեղի ունի հետևյալ լեմման.

Լեմմա 2.2.3. *Դիցուք $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է GC_n պայմանին և $\#\mathcal{X} = N$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ –ի յուրաքանչյուր հանգույցի համար գոյություն ունի n ուղիղների (միակ) բազմություն, որը պարունակում է $\mathcal{X}$-ի մնացած հանգույցները: Մասնավորապես, նշված ուղիղներից յուրաքանչյուրն անցնում է $\mathcal{X}$ բազմության առնվազն երկու հանգույցներով, որոնք չեն գտնվում մնացած ուղիղների վրա:*

Ապացույց. Քանի որ $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է GC_n պայմանին, ապա ըստ **Թեորեմ 2.2.2**-ի, $\mathcal{X}$-ը Π_n–ճշգրիտ է: Սա մասնավորապես նշանակում է, որ $\mathcal{X}$-ի բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները միակն են: Հետևաբար, ցանկացած $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի համար p_A^*-ն կազմող ուղիղների բազմությունը միակն է: Նշված ուղիղների քանակը պետք է հավասար լինի n-ի, հակառակ դեպքում p_A^*-ի աստիճանը n-ից պակաս կլինի, որը, ըստ **Լեմմա 1.2.11**-ի, հակասություն է:

Ֆունդամենտալ բազմանդամների միակությունից հետևում է նաև, որ այդ բազմանդամները կազմող յուրաքանչյուր ուղիղ պետք է պարունակի առնվազն երկու հանգույցներ, որոնք չեն գտնվում մնացած ուղիղների վրա, հակառակ դեպքում ուղիղը կարելի է պտտել (մեկ) հանգույցի շուրջ, որով այն անցնում է, և ստանալ մեկ այլ p_A^*: □

Ստորև ներկայացնում ենք ճշգրիտ հանգույցների հայտնի կոնստրուկցիաներ, որոնք բավարարում են GC_n պայմանին:

2.3 Նյուտոնի ցանց

Նյուտոնի ցանցը (տես օրինակ՝ [18]) ներկայացնելու համար սահմանենք

$$\mathcal{X} = \{(j,k) \in \mathbb{N}_0^2 : j + k \leq n\}$$

բազմությունը: Դիտարկենք ուղիղների երեք ընտանիքներ՝ $l_k^{(1)}$, $l_k^{(2)}$ և $l_k^{(3)}$, $k = 0, \dots, n$, որտեղ յուրաքանչյուր $l_k^{(1)}$ ուղիղ տրվում է $x = k$ հավասարումով, $l_k^{(2)}$ ուղիղ՝ $y = k$ հավասարումով և $l_k^{(3)}$ ուղիղ՝ $x + y = k$ հավասարումով: $\mathcal{X}$ բազմությունը բաղկացած է ուղիղների երեք ընտանիքների հատման կետերից՝

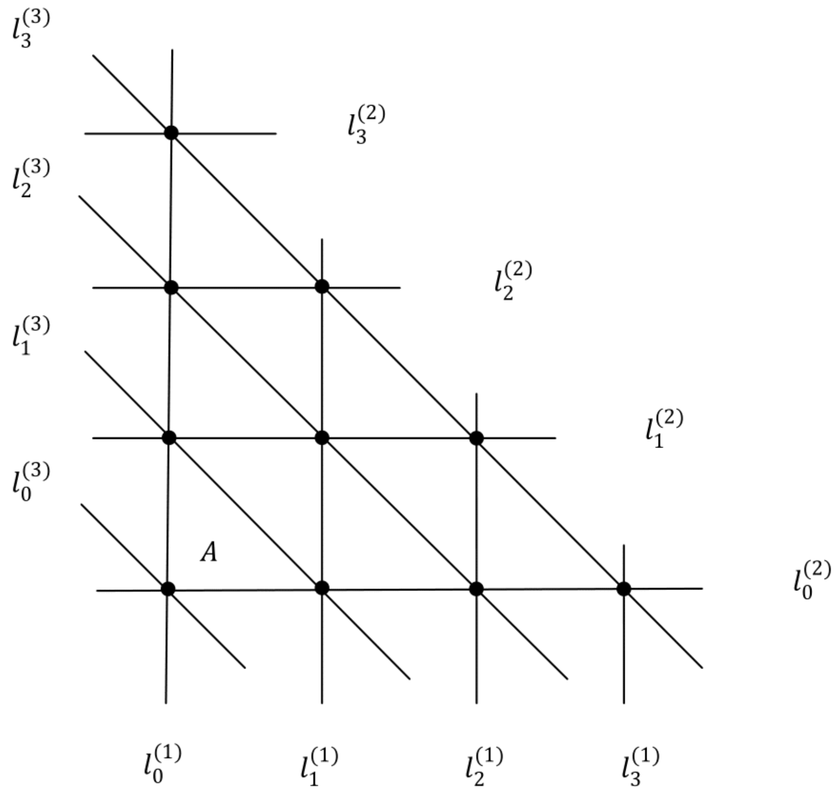
$$(j, k) = l_j^{(1)} \cap l_k^{(2)} \cap l_{j+k}^{(3)}:$$

Նյուտոնի կոնստրուկցիայում յուրաքանչյուր հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ տրվում է հետևյալ կերպ.

$$p^*_{(j,k)} = \prod_{i=0}^{j-1} l_i^{(1)} \prod_{i=0}^{k-1} l_i^{(2)} \prod_{i=0}^{n} l_i^{(3)}: \quad (2.3)$$

Այսպիսով, ստանում ենք, որ դիտարկվող $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է GC_n պայմանին:

Գծագիր 2.3.1-ում ներկայացված է Նյուտոնի ցանցի օրինակ:



Գծագիր 2.3.1. Նյուտոնի ցանց $n = 3$ դեպքում

Ըստ այս գծագրի կարող ենք ավելի պարզ դիտել (2.3) ֆունդամենտալ բազմանդամները կազմող ուղիղների խմբերը. յուրաքանչյուր հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ կազմված է (1), (2) և (3) ընտանիքներից ուղիղների արտադրյալից և օգտագործում է իրենից ձախ գտնվող (1) ընտանիքի բոլոր ուղիղները, (3) ընտանիքի՝ իրենից աջ գտնվող բոլոր ուղիղները և (2) ընտանիքի՝ իրենից ներքև գտնվող բոլոր ուղիղները:

2.4 Չանգ-Յաոյի բնական ցանց

Մինչ կոնստրուկցիայի շարադրմանն անցնելը ներմուծենք մի սահմանում.

Սահմանում 2.4.1. *Կասենք, որ իրարից տարբեր* $n+2$ *ուղիղներ գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ, եթե դրանցից ցանկացած երկուսը հատվում են և ոչ մի երեքը չեն անցնում մեկ կետով:*

Այժմ ներկայացնենք.

Սահմանում 2.4.2 ([13])**.** *Կասենք, որ* $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$, $\#\mathcal{X} = \binom{n+2}{2}$, *հանգույցների բազմությունը հանդիսանում է Չանգ-Յաոյի բնական ցանց, եթե գոյություն ունեն ընդհանուր դրության մեջ գտնվող այնպիսի* $n+2$ *ուղիղներ, որոնց բոլոր հնարավոր զույգերի հատման կետերը կազմում են* $\mathcal{X}$ *բազմության հանգույցները:*

Այսպիսով, կոնստրուկցիայի յուրաքանչյուր $A \in \mathcal{X}$ հանգույց ընկած է ճիշտ 2 ուղիղների վրա: Հետևաբար մնացած $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ հանգույցները պատկանում են մնացած n հատ ուղիղներին: Այստեղից ստանում ենք, որ $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է GC_n պայմանին:

Մասնավորապես տեղի ունի բնական ցանցերի համար Չանգ-Յաոյի թեորեմը, որը ներկայացնում ենք $\mathbb{R}^2$-ի համար.

Թեորեմ 2.4.3 ([12]). *Դիցուք տրված են* $l_1, l_2, \dots, l_{n+2}$ *ուղիղներ, որոնք գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ, այսինքն՝*

1. *ուղիղների ցանկացած զույգ ունի հատման կետ,*
2. *ուղիղների ոչ մի եռյակ մեկ կետում չի հատվում:*

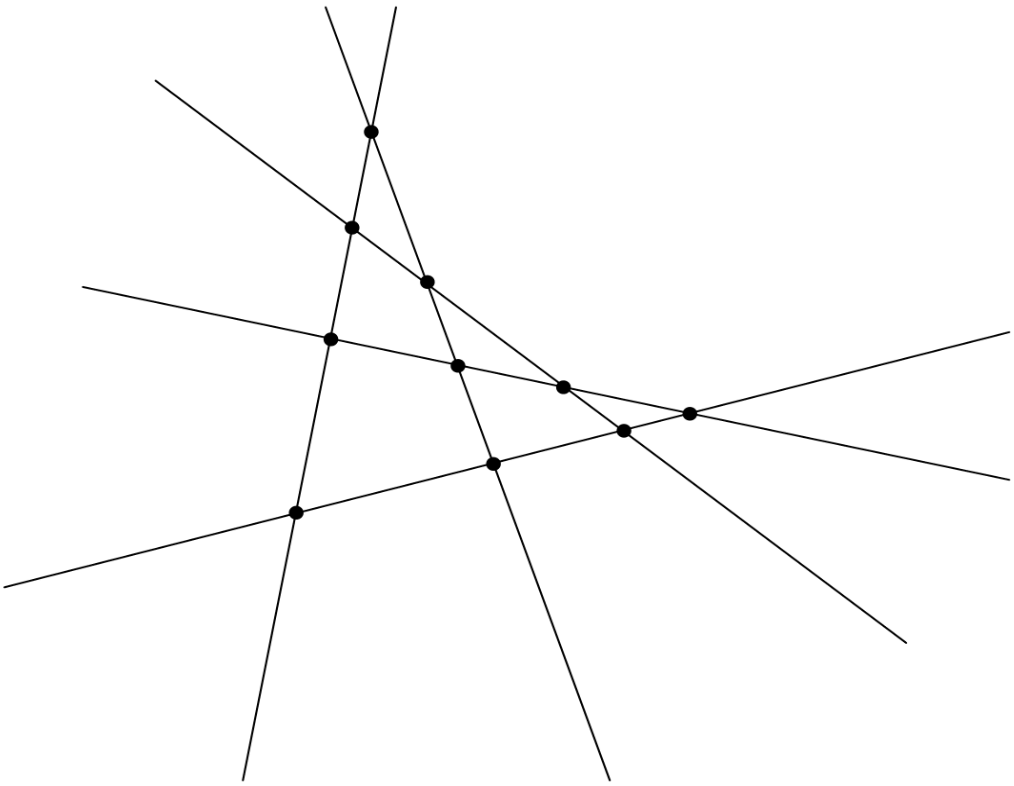
Այդ դեպքում ուղիղների բոլոր հնարավոր զույգերի հատման $\binom{n+2}{2}$ *կետերը կլինեն* Π_n-*ճշգրիտ:*

l_i և l_j ուղիղների հատման հանգույցի՝ (x_{ij}, y_{ij}), ֆունդամենտալ բազմանդամի համար ունենք հետևյալ բանաձևը.

$$p_{ij}^*(x,y) = \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i,j}}^{n+2} (A_k x + B_k y + C_k) \Bigg/ \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i,j}}^{n+2} \left(A_k x_{ij} + B_k y_{ij} + C_k\right),$$

որտեղ $A_k x + B_k y + C_k = 0$ l_k ուղղի հավասարումն է:

Գծագիր 2.4.1-ում բերված է հարթության վրա Չանգ-Յաոյի բնական ցանցի օրինակ:



Գծագիր 2.4.1 Չանգ-Յաոյի բնական ցանց $n = 3$ դեպքում

Վերջում նկատենք, որ Չանգ-Յաոյի կոնստրուկցիայի, ինչպես նաև Նյուտոնի ցանցի հիմքում ընկած է Լագրանժի բանաձևի ընդհանրացումը, որտեղ ֆունդամենտալ բազմանդամները գծային արտադրիչներով են ներկայացված, իսկ Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի հիմքում ընկած է Նյուտոնի բանաձևի ընդհանրացումը (տես օրինակ՝ [14]):

Նշենք նաև, որ Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի, Չանգ-Յաոյի երկրաչափական բնութագրի պայմանի և բնական ցանցի ընդհանրացումները կամայական հարթ հանրահաշվական կորերի դեպքի համար ներկայացված են [28] աշխատանքում:

ԳԼՈՒԽ 3.

ԳԱՍՔԱ-ՄԱԵԶԹՈՒԻ ՎԱՐԿԱԾԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Այժմ անցնենք երկչափ միջարկման մի վարկածի քննարկմանը: Գասքան և Մաեզթուն 1982 թվականին առաջարկեցին հետևյալ վարկածը.

Վարկած (GM-վարկած [14]). *Դիցուք $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ բազմությունը բավարարում է GC_n պայմանին: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$-ում կան $n+1$ համագիծ հանգույցներ:*

Այլ խոսքերով՝ եթե հարթության վրա տրված կամայական Π_n-ճշգրիտ կետերի բազմության բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները հանդիսանում են ուղիղների արտադրյալներ, ապա բազմության մեջ գոյություն ունեն $n+1$ համագիծ կետեր: Մինչ այժմ վարկածն ապացուցված է $n \leq 5$ աստիճանի բազմանդամային տարածությունների համար: Այս գլխում մենք ներկայացնում ենք $n=3$ դեպքի նոր ապացույց, 3.3 ենթաբաժնում ներկայացնում ենք ատենախոսության երկու արդյունքներ՝ $n=4$ դեպքում GM-վարկածի երկու պարզ ապացույցներ: Նոր, պարզ ապացույցներ որոնելով՝ նպատակ ունենք գտնել մեկ ընդհանրական մեթոդ՝ վարկածն ընդհանուր դեպքում ապացուցելու համար: Նշենք նաև, որ $n=5$ դեպքում ապացույցը տրված է [19]-ում:

Շարադրումը կսկսենք մաքսիմալ ուղիղների դիտարկումից, որոնք կարևոր դեր են կատարում Գասքա-Մաեզթուի վարկածի ուսումնասիրության ժամանակ:

3.1 Մաքսիմալ ուղիղներ

Սկսենք մաքսիմալ ուղիղներ սահմանումից ([8], [6]).

Սահմանում 3.1.1. *Ուղիղը, որն անցնում է Π_n-ճշգրիտ $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ բազմության $n+1$ հանգույցներով, անվանում ենք մաքսիմալ ուղիղ $\mathcal{X}$ բազմության համար:*

Մաքսիմալ ուղիղների հետ նախորդ գլխում արդեն գործ ենք ունեցել. Նյուտոնի ցանցում մաքսիմալ ուղիղները 3-ն են, օրինակ՝ *Գծագիր 2.3.1*-ում (Գլուխ 2) մաքսիմալ ուղիղներն են $l_3^{(3)}$, $l_0^{(1)}$, $l_0^{(2)}$, Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայում կա առնվազն մեկ մաքսիմալ ուղիղ, իսկ Չանգ-Յաոյի կոնստրուկցիայում բոլոր ուղիղներն են մաքսիմալ:

Պնդում 1.2.9-ից (Գլուխ 1) կարող ենք հետևություն անել, որ գոյություն չունի Π_n-ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության $(\mathrm{n}+1)$–ից ավելի հանգույց պարունակող ուղիղ: Այսպիսով, $(n+1)$-ը Π_{n}-ճշգրիտ բազմությունից հանգույցների մաքսիմալ քանակն է, որոնք կարող են գտնվել մեկ ուղղի վրա, այդ պատճառով էլ նշված քանակով հանգույցներով անցնող ուղիղն անվանում ենք մաքսիմալ ուղիղ: Կա նաև մաքսիմալ ուղիղների ընդհանրացումը՝ մաքսիմալ կորերը, որոնք կդիտարկենք չորրորդ գլխում:

GC_n բազմությունների հատկությունների հետազոտման ժամանակ առաջ է գալիս մի հարց. որոշակի ուղիղ դիտարկվող բազմության ո՞ր հանգույցների կողմից է օգտագործվում և ո՞ր հանգույցների կողմից՝ ոչ:

Այսպիսով միջարկման հանգույցների բազմության մեջ կառանձնացնենք ենթաբազմություն, որի հանգույցներն օգտագործում են նշված ուղիղը և հանգույցներ, որոնք չեն օգտագործում այն: Ելնելով սրանից՝ սահմանենք.

Սահմանում 3.1.2. *Տրված l ուղղի և $\mathcal{X}$ բազմության համար $\mathcal{N}_l$ –ը այն հանգույցների բազմությունն է $\mathcal{X}$-ից, որոնք չեն գտնվում l-ի վրա և չեն օգտագործում այն:*

Որպես օրինակ դիտարկենք Նյուտոնի ցանցը (տես Գլուխ 2, *Գծագիր 2.3.1).* ըստ (2.3) բանաձևի $l_1^{(3)}$ ուղիղը օգտագործվում է միայն A կետի կողմից, հետևաբար այդ ուղղի համար $\#\mathcal{N}_{l_1^{(3)}}=7$, և այդ յոթ կետերը $l_1^{(3)}$ ուղղից աջ գտնվող անկյունագծային ուղիղների վրա գտնվող բոլոր հանգույցներն են: Իսկ $l_3^{(3)}$ ուղիղն օգտագործվում է բոլոր այն հանգույցների կողմից, որոնք չեն գտնվում դրա վրա, հետևաբար $\mathcal{N}_{l_3^{(3)}}=\emptyset$:

Այսպիսի բազմությունների համար հայտնի է հետևյալ արդյունքը ([8]).

Թեորեմ 3.1.3 (Քարնիսեր և Գասքա). *Դիցուք $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է GC_n պայմանին և l-ը կամայական ուղիղ է: Այս պայմանների դեպքում տեղի ունի.*

1. *Եթե l ուղիղն անցնում է $\mathcal{X}$ բազմության ամենաշատը n կետերով, ապա $\mathcal{N}_l \neq \emptyset$ և $\mathcal{N}_l$ բազմությունը Π_{n-1}–կախյալ է: Ավելին, ոչ մի $A \in \mathcal{N}_l$ կետ չունի ֆունդամենտալ բազմանդամ՝ $p_A^* \in \Pi_{n-1}$:*
2. *l–ը մաքսիմալ ուղիղ է $\mathcal{X}$–ի համար այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{N}_l = \emptyset$:*

Հիշենք, որ եթե $\mathcal{X}$ բազմության որևէ մեկ հանգույց չունի n աստիճանի ֆունդամենտալ բազմանդամ՝ այդ բազմության նկատմամբ, ապա բազմությունն անվանում ենք Π_n-կախյալ (Գլուխ 1, **Սահմանում 1.2.6**): Այն բազմությունը, որի ոչ մի հանգույց չունի n աստիճանի ֆունդամենտալ բազմանդամ՝ այդ բազմության նկատմամբ, կանվանենք *էապես Π_n-կախյալ*: Օրինակ, մեկ ուղղի վրա գտնվող $n+2$ կետերի ցանկացած $\mathcal{X}$ բազմություն էապես Π_n -կախյալ է (**Պնդում 1.2.14**): Ըստ **Թեորեմ 3.1.3**-ի $\mathcal{N}_l$ բազմությունը էապես Π_{n-1}–կախյալ է, երբ l –ը մաքսիմալ ուղիղ չէ:

Թեորեմ 3.1.3-ից մասնավորապես ստանում ենք արդյունք, որը հետագայում հաճախ ենք օգտագործելու.

l ուղիղը $\mathcal{X}$ բազմության մաքսիմալ ուղիղ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն օգտագործվում է $\mathcal{X}$ բազմության՝ իրեն չպատկանող բոլոր հանգույցների կողմից:

Ստորև ներկայացնում ենք մաքսիմալ ուղիղների վերաբերյալ որոշ հայտնի արդյունքներ (տես օրինակ՝ [9], [11]):

Պնդում 3.1.4. *Դիցուք $\mathcal{X}$ հանգույցների բազմությունը Π_n -ճշգրիտ է: Այդ դեպքում, եթե l–ը մաքսիմալ ուղիղ է $\mathcal{X}$ բազմության համար, ապա $\mathcal{X} \setminus l$ բազմությունը Π_{n-1}-ճշգրիտ է:*

Իրոք, դիտարկվող l ուղիղը մաքսիմալ է, հետևաբար $\mathcal{X}$ բազմության ցանկացած հանգույց օգտագործում է այն: Այստեղից ստանում ենք, որ $\mathcal{X} \setminus l$ բազմության յուրաքանչյուր հանգույց ունի ֆունդամենտալ բազմանդամ՝ $\mathcal{X} \setminus l$ բազմության նկատմամբ և, քանի որ $\#(\mathcal{X} \setminus l) = \#\mathcal{X} - (n+1) = \binom{n+1}{2}$, ապա այն Π_{n-1}-ճշգրիտ է:

Մաքսիմալ ուղիղները կարևոր դեր են կատարում նաև GC_n բազմությունների ուսումնասիրության ժամանակ.

Պնդում 3.1.5. *Դիցուք տրված է $\mathcal{X}$ բազմություն, որը բավարարում է GC_n պայմանին և ունի մաքսիմալ ուղիղ՝ l: Այդ դեպքում $\mathcal{X} \setminus l$ հանգույցների բազմությունը բավարարում է GC_{n-1} պայմանին:*

Եվ իրոք, ֆիքսենք կամայական $A \in \mathcal{X}$ հանգույց և դիտարկենք դրա ֆունդամենտալ բազմանդամը՝ p_A^*-ն: Քանի որ l-ը մաքսիմալ ուղիղ է, ապա այն օգտագործվում է իրենից դուրս բոլոր հանգույցների կողմից, հետևաբար տեղի ունի.

$$p_A^* = lr, \qquad r \in \Pi_{n-1}:$$

Սա նշանակում է, որ $r \in \Pi_{n-1}$ բազմանդամը A հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամն է $\mathcal{X} \setminus l$ բազմության համար: Եվ քանի որ բազմությունը բավարարում է GC_n, ապա r-ը նույնպես $n-1$ ուղիղների արտադրյալ է:

Պնդում 3.1.6. *Π_n-ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար ճիշտ են հետևյալ դրույթները.*

1. *Կամայական երկու մաքսիմալ ուղիղներ հատվում են և դրանց հատման կետը հանգույց է $\mathcal{X}$-ից:*
2. *Ոչ մի երեք մաքսիմալ ուղիղներ չեն հատվում մի կետում:*

Ապացույց: *1.* Ենթադրենք հակառակը՝ $\mathcal{X}$ բազմության երկու մաքսիմալ ուղիղների՝ l_1, l_2-ի հատման կետը հանգույց չէ: Այս դեպքում մաքսիմալ ուղիղներից մեկը՝ օրինակ l_1-ը, հանելով՝ կստանանք, որ ըստ **Պնդում 3.1.4**–ի, $\mathcal{X}$-ի մնացած հանգույցները Π_{n-1}–ճշգրիտ են: Այս հանգույցներից $(n+1)$-ը պատկանում են l_2 ուղղին, որը հակասություն է, քանի որ Π_{n-1}-ճշգրիտ բազմության մեջ ամենաշատը n հանգույցներ կարող են լինել համագիծ:

2. Այս կետի ապացույցը անմիջապես հետևում է նախորդ կետից: Եթե երեք մաքսիմալ ուղիղներ՝ l_1, l_2, l_3, հատվեն մի կետում, ապա այդ կետը անպայմանորեն հանգույց պետք է լինի: Հեռացնենք $\mathcal{X}$ բազմությունից որևէ մի մաքսիմալ ուղիղ իր հանգույցներով, օրինակ՝ l_1-ը: Դուրս կգա նաև հատման կետը, որը հանգույց է, և կստանանք Π_{n-1}-ճշգրիտ $\mathcal{X} \setminus l_1$ բազմությունը, որում երկու մաքսիմալ ուղիղներ՝ l_2, l_3, հատվում են մի կետում, որը հանգույց չէ: □

Նշենք, որ **Պնդում 3.1.6**-ից մասնավորապես ստանում ենք, որ մաքսիմալ ուղիղները գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ (տես Գլուխ 2, **Սահմանում 2.4.1**):

Քննարկենք նաև, թե քանի մաքսիմալ ուղիղ կարող է ունենալ Π_n-ճշգրիտ բազմությունը:

Պնդում 3.1.7. *Π_n-ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար կարող են գոյություն ունենալ ամենաշատը $n+2$ մաքսիմալ ուղիղներ:*

Իրոք, եթե $\mathcal{X}$ բազմության համար գոյություն ունենային $n+3$ մաքսիմալ ուղիղներ, ապա դրանց բոլոր հնարավոր զույգերի հատման կետերը $\binom{n+3}{2}$ են և, ըստ **Պնդում 3.1.6–ի** *1.* կետի, դրանք բոլորը հանգույցներ են $\mathcal{X}$-ից: Սա հակասություն է, քանի որ Π_n-ճշգրիտ բազմության հանգույցների քանակը հավասար է $\binom{n+2}{2}$:

Որպես օրինակ նշենք՝ Գլուխ 2-ում ներկայացված Π_n-ճշգրիտ հանգույցների Չանգ-Յաոյի կոնստրուկցիան, որն ունի հնարավոր ամենաշատ քանակով մաքսիմալ ուղիղներ (տես *Գծագիր 2.4.1*): Բոլոր հայտնի կոնստրուկցիաների մեջ ամենաքիչ քանակով՝ 3, մաքսիմալ ուղիղներ կան Նյուտոնի ցանցում այն դեպքում, երբ GM-վարկածը ճիշտ է: Առհասարակ, եթե GM-վարկածը տեղի ունի, ապա այդ դեպքում կարող ենք ասել, որ ցանկացած GC_n-բազմություն կունենա առնվազն մեկ մաքսիմալ ուղիղ: Ավելին, հայտնի է հետևյալ արդյունքը (տես [10]).

Պնդում 3.1.8 (Քարնիսեր-Գասքա). Եթե GM-վարկածը ճիշտ է, ապա ցանկացած GC_n-բազմության համար գոյություն ունեն երեք մաքսիմալ ուղիղներ:

Ըստ **Պնդում 3.1.6**-ի *2.* կետի այս երեք մաքսիմալ ուղիղները չեն կարող հատվել, հետևաբար, ամեն հանգույց օգտագործում է առնվազն մեկ մաքսիմալ ուղիղ և նշված երեք մաքսիմալ ուղիղները կազմում են եռանկյուն, որի գագաթները հանգույցներ են $\mathcal{X}$-ից: Այստեղից որպես հետևություն ստանում ենք հետևյալը.

Եթե GM-վարկածը ճիշտ է, ապա ցանկացած GC_n-բազմություն պարունակում է $3n$ կետեր երեք մաքսիմալ ուղիղների վրա, և մնացած կետերը կազմում են GC_{n-3}-բազմություն:

Այժմ ներկայացնենք Քելի-Բախարախի թեորեմը (տես [13], [17])՝ երկու կորերի հատման կետերի բազմության անկախության մասին:

Թեորեմ 3.1.9 (Քելի-Բախարախ). *Դիցուք m և n աստիճանի երկու կորեր հատվում են ճիշտ mn կետերում: Այդ դեպքում հատման կետերի $\mathcal{X}$ բազմությունը Π_{m+n-2}–անկախ է և էապես Π_{m+n-3}-կախյալ է:*

Տանք այս արդյունքի նոր պարզ ապացույց՝ հիմնված միայն **Պնդում 2.1.3**-ի վրա, այն մասնավոր դեպքում, երբ թեորեմում նշված կորերն իրենցից ներկայացնում են ուղիղների արտադրյալ (տես [3]): Այս մասնավոր դեպքը կօգտագործենք հետագայում:

Ապացույց. Դիցուք $f = l_1 \dots l_m$ և $g = l'_1 \dots l'_n$ կորերը հատվում են ճիշտ mn տարբեր կետերում: Նշանակենք հատման կետերի բազմությունը $\mathfrak{X}$ –ով: Նախ ապացուցենք, որ $\mathfrak{X}$ բազմությունը Π_{m+n-2}–անկախ է:

Դիտարկենք հանգույցների երկու բազմություն. S_1 բազմություն՝ բաղկացած $1 + 2 + \cdots + (m-1)$ կետերից, որոնք ընտրված են այնպես, որ $(m-k)$ կետեր l_k ուղղի վրա են, $k = 1, \dots, m-1$; S'_1 բազմություն՝ բաղկացած $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ կետերից, որոնք ընտրված են այնպես, որ դրանցից $(n-k)$–ն l'_k ուղղի վրա են, $k = 1, \dots, n-1$: Պահանջենք, որ այս բոլոր կետերը չհանդիսանան դիտարկված երկու խումբ ուղիղների հատման կետեր: Նշանակենք $\mathcal{X}_1 \coloneqq \mathfrak{X} \cup S_1 \cup S'_1$:

Նախ ցույց տանք, որ $\mathcal{X}_1$ բազմությունը Π_{m+n-2}-ճշգրիտ է: Իսկապես, հաշվի առնելով այն, որ $N_k = \binom{k+2}{2} = 1 + 2 + \cdots + (k+1)$, ստանում ենք.

$$\#\mathcal{X}_1 = \#\mathfrak{X} + \#S_1 + \#S'_1 =$$

$$mn + N_{m-2} + N_{n-2} = N_{m+n-2}:$$

Այնուհետ, դիտարկենք կամայական $p \in \Pi_{m+n-2}$ բազմանդամ, որը զրոյանում է $\mathcal{X}_1$–ի հանգույցներում և օգտվելով **Թեորեմ 1.2.2**-ից՝ ցույց տանք, որ $p = 0$:

Կիրառենք **Պնդում 2.1.3**-ը և կստանանք՝ $p = l_1 \dots l_m q$, որտեղ $q \in \Pi_{n-2}$: Այնուհետ կիրառենք **Պնդում 2.1.3**-ը q–ի համար և կստանանք, որ $q = Cl'_1 \dots l'_{n-2}$, որտեղ $C = const$: Հետևաբար

$$p = Cl_1 \dots l_m l'_1 \dots l'_{n-2}:$$

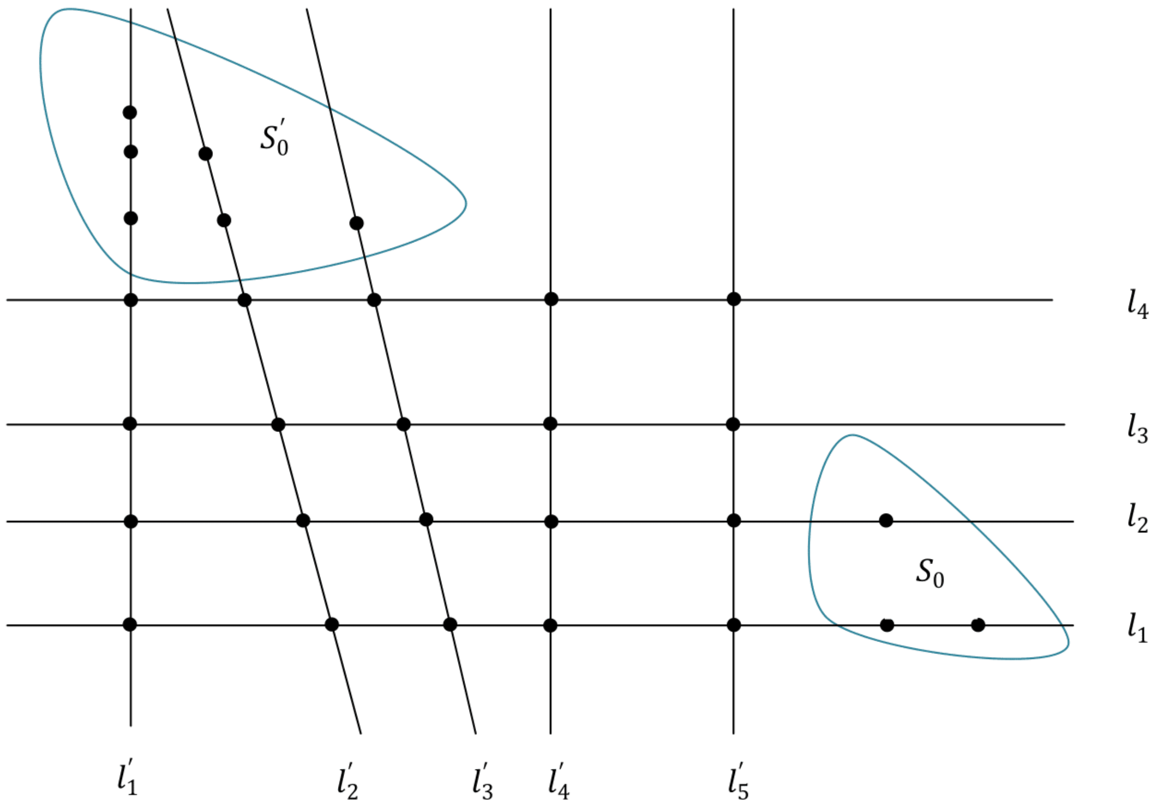
Չդիտարկվեց միայն l'_{n-1} ուղղի վրա գտնվող S'_1 բազմության մեկ կետը, որում p բազմանդամը զրոյանում է: Հաշվի առնելով այս փաստը՝ ստանում ենք, որ $C = 0$, հետևաբար $p = 0$:

Այսպիսով, $\mathcal{X}_1$ բազմությունը Π_{m+n-2}-ճշգրիտ է և, քանի որ $\mathfrak{T} \subset \mathcal{X}_1$, հետևաբար $\mathfrak{T}$ –ն Π_{m+n-2}-անկախ է:

Այժմ մնաց ցույց տալ, որ ոչ մի $M \in \mathfrak{T}$ կետ չունի $(m+n-3)$ աստիճանի ֆունդամենտալ բազմանդամ: Նշանակենք $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T} \setminus M$: Այսպիսով, անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ $\mathfrak{T}_0$–ում զրոյացող կամայական $p \in \Pi_{m+n-3}$ բազմանդամի համար տեղի ունի. $p(M) = 0$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, որ $M = l_m \cap l'_n$:

Նախորդ դեպքի նմանությամբ դիտարկենք հանգույցների երկու բազմություն. S_0 բազմություն՝ բաղկացած $1 + 2 + \dots + (m-2)$ կետերից, որոնք ընտրված են այն կերպ, որ $(m-1-k)$ կետեր l_k ուղղի վրա են, $k = 1, \dots, m-2$; S'_0 բազմություն՝ բաղկացած $1 + 2 + \dots + (n-2)$ կետերից, որոնք ընտրված են այնպես, որ դրանցից $(n-1-k)$–ը l'_k ուղղի վրա են, $k = 1, \dots, n-2$ (տես *Գծագիր 3.1.1*): Նորից պահանջենք, որ այս բոլոր կետերը չհանդիսանան դիտարկված երկու խումբ ուղիղների հատման կետեր: Նշանակենք $\mathcal{X}_0 \coloneqq \mathfrak{T}_0 \cup S_0 \cup S'_0$: Կատարելով նույն դատողությունները, ինչ նախորդ դեպքում՝ ստանում ենք, որ $\mathcal{X}_0$ բազմությունը Π_{m+n-3}-ճշգրիտ է:

Դիտարկենք կամայական $p \in \Pi_{m+n-3}$ բազմանդամ և ենթադրենք, որ այն զրոյանում է $\mathfrak{T}_0$ բազմության բոլոր հանգույցներում:



Գծագիր 3.1.1. S_0' և S_0 բազմությունները $m = 4, n = 5$.

Օգտագործելով Լագրանժի բանաձևը Π_{m+n-3}-ճշգրիտ $\mathcal{X}_0$ բազմության համար՝ կստանանք.

$$p(M) = \sum_{A \in \mathfrak{T}_0} p(A) p^*_{A,\mathcal{X}_0}(M) + \sum_{A \in S_0} p(A) p^*_{A,\mathcal{X}_0}(M) + \sum_{A \in S_0'} p(A) p^*_{A,\mathcal{X}_0}(M)$$

Քանի որ p–ն զրոյանում է $\mathfrak{T}_0$-ի բոլոր հանգույցներում, ապա հավասարման աջ կողմի առաջին գումարելին հավասար է զրոյի: Երկրորդ գումարելու մեջ մասնակցում են միայն $A \in S_0$ հանգույցների $p^*_{A,\mathcal{X}_0}(M)$ ֆունդամենտալ բազմանդամները, որոնք, ըստ **Պնդում 2.1.3**–ի, զրոյանում են բոլոր $l_1', \dots, l_n'$ ուղիղների վրա: Նույն դատողությունները կատարելով՝ ստանում ենք, որ երրորդ գումարելու ֆունդամենտալ բազմանդամներն էլ զրոյանում են $l_1, \dots, l_m$ ուղիղների վրա: Քանի որ $M = l_m \cap l_n'$, հետևաբար այս բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները զրոյանում են M կետում:

Այստեղից կարող ենք անել հետևություն, որ $\mathfrak{T}$ բազմության ոչ մի հանգույց չունի $(m + n - 3)$ աստիճանի ֆունդամենտալ բազմանդամ, ուստի այն էապես Π_{m+n-3}-կախյալ է: □

3.2 Գասքա-Մաեզթուի վարկածը

Այժմ ավելի մանրամասն դիտարկենք Գասքա-Մաեզթուի վարկածը, ըստ որի ցանկացած GC_n բազմություն $\mathcal{X}$ ունի մաքսիմալ ուղիղ՝ l: Իրականում, եթե վարկածը ճիշտ է, ապա, **Պնդում 3.1.5**-ի համաձայն, հանելով մաքսիմալ ուղիղը՝ ստանում ենք, որ $\mathcal{X} \setminus l$ բազմության հանգույցները բավարարում են GC_{n-1} պայմանին: Նորից կիրառելով վարկածը՝ կունենանք, որ նոր՝ $\mathcal{X} \setminus l$ բազմությունը ևս ունի մաքսիմալ ուղիղ, որը այս դեպքում n հանգույցներ է պարունակում: Այս գործընթացը շարունակելով՝ ստանում ենք, որ, եթե Գասքա-Մաեզթուի վարկածը ճիշտ է, ապա ցանկացած GC_n բազմություն բավարարում է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիային:

Կարելի է նկատել, որ Գլուխ 2-ում ներկայացված GC_n պայմանին բավարարող կոնստրուկցիաները՝ Չանգ-Յաոյի բնական ցանցն ու Նյուտոնի ցանցը, հանդիսանում են Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի մասնավոր դեպքեր: Այսպիսով, GM-վարկածը հանգում է այն բանին, որ GC_n պայմանին բավարարող ցանկացած բազմություն Բերզոլարի-Ռադոնի բազմություն է:

Վարկածը $n = 2$ դեպքում ակնհայտ է.

եթե $N_2 = 6$ հանգույցների բազմությունը GC_2 բազմություն է, ապա բազմության մեջ կան 3 կետեր, որոնք գտնվում են մեկ ուղղի վրա:

Եվ իսկապես, եթե 6 հանգույցները կազմում են GC_2 բազմություն, ապա ցանկացած հանգույց առանձնացնելու դեպքում մնացած 5-ը պետք է գտնվեն երկու ուղիղների վրա, հետևաբար, կան երեք համագիծ կետեր:

GM-վարկածը $n = 3$ դեպքում

Պնդում 3.2.2. *Դիցուք $N_3 = 10$ հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է GC_3 պայմանին: Այդ դեպքում գոյություն ունեն 4 հանգույցներ $\mathcal{X}$-ում, որոնք մի ուղղի վրա են:*

Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը՝ $\mathcal{X}$-ում չկան չորս համագիծ հանգույցներ: Այդ դեպքում կամայական կետի ֆունդամենտալ բազմանդամ կհանդիսանա երեք ուղիղների արտադրյալ, որոնցից յուրաքանչյուրն անցնում է $\mathcal{X}$-ի երեք հանգույցներով: Դիտարկենք կամայական $A \in \mathcal{X}$ հանգույց: $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ բազմության 9 հանգույցներից յուրաքանչյուրն օգտագործում է ուղիղ, որն անցնում է A-ով: Քանի որ բոլոր ուղիղները պարունակում են ճիշտ 3 հանգույց $\mathcal{X}$-ից, ապա A-ով անցնող՝ օգտագործվող ուղիղների թիվը ամենաշատը 4 է: Հակառակ դեպքում, եթե A-ով անցնեին 5 ուղիղներ, ապա հաշվելով այդ ուղիղների վրա հանգույցների քանակը և հաշվի առնելով, որ A հանգույցը ընդհանուր է բոլոր 5-ի համար՝ կստանայինք, որ $\mathcal{X}$-ում կան $5 * 2 + 1 = 11$ հանգույցներ:

Այսպիսով, ստանում ենք, որ A հանգույցով անցնող 4 ուղիղները օգտագործվում են $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ բազմության 9 հանգույցների կողմից: Հետևաբար, կա ուղիղ՝ l', որն օգտագործվում է 3 հանգույցների կողմից: Կիրառենք l'-ի համար **Թեորեմ 3.1.3**-ը և կունենանք՝ $|\mathcal{N}_{l'}| \leq 4$ և $\mathcal{N}_{l'}$-ը էապես Π_2-կախյալ է: Ըստ **Պնդում 1.2.15**-ի (Գլուխ 1)՝ 4 հանգույցներ Π_2-կախյալ են այն և միայն այն դեպքում, երբ համագիծ են: Պնդումն ապացուցված է: □

3.3 Գասքա-Մաեզթուի վարկածը $n = 4$ դեպքում

Գասքա-Մաեզթուի վարկածը $n = 4$ դեպքում առաջին անգամ ապացուցել է Ջ. Բուշը 1990 թվականին ([7]): Այս դեպքի այլ ապացույցներ կարելի է գտնել նաև [8]-ում և [18]-ում: Այս ենթաբաժնում մենք կներկայացնենք ատենախոսության արդյունքներից՝ GM-վարկածի $n = 4$ դեպքի երկու ապացույց: Առաջինում օգտագործել ենք [19] հոդվածում ներկայացված GM-վարկածի $n = 5$ դեպքի ապացույցի սխեման՝ $n = 4$ դեպքի համար: Այս արդյունքը ներկայացված է [3]-ում: Երկրորդը ([29])՝ հայտնի 5 ապացույցներից ամենակարճն ու ամենապարզն է:

Ստորև ներկայացնում ենք ապացույցները: Նախ ձևակերպենք.

Թեորեմ 3.3.1. *Դիցուք $N_4 = 15$ հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է GC_4 պայմանին: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$-ում գոյություն ունեն 5 հանգույցներ, որոնք մի ուղղի վրա են, այսինքն գոյություն ունի մաքսիմալ ուղիղ $\mathcal{X}$ բազմության համար:*

Երկու ապացույցներն էլ իրականացնում ենք՝ կատարելով հակասող ենթադրություն.

Ենթադրություն $\mathcal{A}$. *$\mathcal{X}$ բազմությունը GC_4 -բազմություն է՝ առանց մաքսիմալ ուղղի:*

Դիտարկենք կամայական $A \in \mathcal{X}$ կետ և նրա ֆունդամենտալ բազմանդամը: Քանի որ $\mathcal{X}$ բազմությունը բավարարում է GC_4 պայմանին, ապա p_A^* բազմանդամը իրենից ներկայացնում է չորս գծային արտադրիչների արտադրյալ՝

$$p_A^* = l_1 l_2 l_3 l_4:$$

Սա նշանակում է, որ $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ բազմության 14 հանգույցները ինչ-որ կերպ բաշխված են l_1, l_2, l_3, l_4 ուղիղների վրա: Այդ բաշխումը նկարագրելու համար ամեն l_i ուղղի վերագրենք մի թիվ՝ k_i, որը ցույց է տալիս այդ ուղղի վրա $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ բազմության հանգույցների քանակը: Հնարավոր է՝ որոշ հանգույցներ պատկանեն մի քանի ուղիղների. սա այն դեպքն է, երբ այդ հանգույցները երկու կամ ավելի l_i ուղիղների հատման կետեր են: Այս դեպքում, այնուամենայնիվ, մենք կհաշվենք այդպիսի հանգույցը միայն մեկ ուղղի համար, հետևաբար.

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 14:$$

Որպեսզի պարզ լինի, թե որ ուղղի համար ենք հաշվում հատման հանգույցը, դիտարկենք 4 ուղիղների կարգավորում՝ դասավորենք դրանք հաջորդականության մեջ: Նախ, ենթադրենք, որ դրանք դասավորված են այսպես՝ $S = (l_1, l_2, l_3, l_4)$, և առաջին՝ l_1 ուղղին վերագրենք k_1 թիվը՝ $k_1 = \#(l_1 \cap \mathcal{X})$: Ամեն հաջորդ l_i ուղղի վերագրենք k_i թիվը, որը, այս դեպքում, կնշի $\mathcal{X}$ բազմության այն հանգույցների քանակը, որոնք պատկանում են l_i ուղղին և չեն պատկանում S հաջորդականության մեջ l_i-ին նախորդող ուղիղներին: Արդյունքում ստանում ենք բաշխման հաջորդականությունը՝ (k_1, k_2, k_3, k_4):

Այսպիսով, մի քանի l_i ուղիղների հատման հանգույցը հաշվվում է այն ուղղի համար, որն առաջինն է հանդիպում S-ում: $\mathcal{X}$ բազմության հանգույցը անվանում ենք *առաջնային* այն ուղղի համար, որի համար այն հաշվվել է և *երկրորդային*՝ այն ուղիղների համար, որոնց ևս այն պատկանում է:

Լեմմա 2.2.3-ի համաձայն, ամեն օգտագործված ուղիղ անհրաժեշտաբար անցնում է առնվազն երկու առաջնային կետերով, հետևաբար, բոլոր $k_i \geq 2,\ i = 1, 2, 3, 4$:

Բաշխման հաջորդականություններից ընտրենք մաքսիմալը՝ լեքսիկոգրաֆիկ դասակարգմամբ: Այն կդառնա միակը և այն կլինի մոնոտոն նվազող՝ $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq k_4$:

Քանի որ, ըստ **Ենթադրություն $\mathcal{A}$**-ի, 5 հանգույցներով անցնող ուղիղ չունենք և յուրաքանչյուր ուղիղ անհրաժեշտաբար անցնում է առնվազն երկու հանգույցներով, ապա կստանանք երկու հնարավոր բաշխման հաջորդականություններ $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի համար՝ (4, 4, 4, 2), (4, 4, 3, 3): Հետագա շարադրանքը ավելի պարզ դարձնելու համար այս բաշխմանը համապատասխանող ուղիղների S հաջորդականության մեջ բաշխումները գրենք ուղիղների ինդեքսում: Առաջնային և երկրորդային հանգույցները տարբերելու համար պայմանավորվենք ճիշտ k առաջնային հանգույցներ պարունակող ուղիղները, որոնք երկրորդային հանգույցներով չեն անցնում, նշանակել $= k$ ինդեքսով, իսկ եթե ուղիղն անցնում է k առաջնային և նաև երկրորդային հանգույցներով, ապա դրան վերագրենք $\geq k$ ինդեքս:

Այսպիսով, կամայական $A \in \mathcal{X}$ հանգույցի p_A^* ֆունդամենտալ բազմանդամը կարող է ներկայացվել երկու տեսքով.

$$p_A^* = l_{=4} l'_{=4} l''_{=4} l_{\geq 2},\ p_A^* = l_{=4} l'_{=4} l_{\geq 3} l'_{\geq 3}: \tag{3.1}$$

Հաջորդիվ կքննարկենք հետևյալ խնդիրը. տրված է 2, 3 կամ 4-հանգույցով ուղիղ. բազմության քանի՞ հանգույցների կողմից կարող է այն օգտագործվել:

Ներկայացնենք Լեմմա՝ 2 կամ 3 հանգույցներով ուղիղների օգտագործումների քանակի մասին: Այս լեմման կարելի է գտնել [18]-ում: Ատենախոսության մեջ մենք բերում ենք մի փոքր ավելի կարճ ապացույց, որը տրված է [3]-ում:

Լեմմա 3.3.2. *Դիցուք տեղի ունի* ***ենթադրություն*** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *-ն: Այդ դեպքում կամայական 2 կամ 3-հանգույցով ուղիղ կարող է օգտագործվել $\mathcal{X}$ բազմության ամենաշատը մեկ հանգույցի կողմից:*

Ապացույց. Կատարենք հակասող ենթադրություն. ենթադրենք, $\tilde{l}$-ը 2 կամ 3-հանգույցով ուղիղ է և օգտագործվում է երկու $A, B \in \mathcal{X}$ հանգույցների կողմից: Դիտարկենք A կետի p_A^* ֆունդամենտալ բազմանդամը: Այն իրենից ներկայացնում է $\tilde{l}$-ի և ևս երեք ուղիղների արտադրյալ, որոնք պարունակում են $\mathcal{X} \setminus \left\{\tilde{l} \cup \{\mathrm{A}\}\right\}$ բազմության ≥ 11 հանգույցները՝ ներառյալ B–ն: Քանի որ, ըստ **ենթադրություն** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-ի, 5 հանգույցով անցնող ուղիղ չկա, ապա ստանում ենք.

$$p_A^* = \tilde{l} l_{=4} l'_{=4} l_{\geq 3}:$$

Այժմ պարզենք, թե ուղիղներից որ մեկին է պատկանում B –ն: Նախ ենթադրենք, որ B–ն պատկանում է 4–հանգույցով ուղիղներից որևէ մեկին, օրինակ՝ $l'_{=4}$-ին: Դիտարկենք B հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը: Ունենք, որ

$$p_B^* = \tilde{l} q, \text{որտեղ } q \in \Pi_3 \ : \qquad (3.2)$$

p_B^*-ն զրոյանում է $l_{=4}$–ի 4 հանգույցներում և $l'_{=4}$-ի 3 հանգույցներում (բացի B-ից) և ըստ (3.2)-ի դա տեղի ունի q-ի հաշվին: Հետևաբար, օգտվելով **Պնդում 2.1.3**-ից՝ ստանում ենք, որ q–ն զրոյանում է $l'_{=4}$ և $l_{=4}$ ուղիղների բոլոր հանգույցներում՝ ներառյալ B–ն: Ուրեմն p_B^*–ը զրոյանում է B–ում, որը հակասություն է:

Այժմ ենթադրենք, որ B–ն պատկանում է $l_{\geq 3}$ ուղղին: Կատարելով նույնպիսի դատողություններ՝ նորից ստանում ենք՝ q–ն զրոյանում է $l_{=4}$ ուղղի 4 հանգույցներում, $l'_{=4}$-ի $4 (\geq 3)$ հանգույցներում և $l_{\geq 3}$ ուղղի առնվազն 2 հանգույցներում: Հետևաբար, կրկին ըստ **Պնդում 2.1.3**-ի՝ q -ն զրոյանում է $l_{=4}, l'_{=4}$ և $l_{\geq 3}$ ուղիղների բոլոր հանգույցներում՝ ներառյալ B–ն: Սա նշանակում է, որ p_B^*–ը զրոյանում է B–ում, որը հակասություն է:

Այսպիսով, ստանում ենք՝ B-ն չի կարող պատկանել p_A^*-ի ոչ մի ուղղի: Այս հակասությունը ապացուցում է Լեմման: □

Այժմ ներկայացնենք հետևյալ լեմման 4-հանգույցով ուղղի օգտագործումների մասին.

Լեմմա 3.3.3 ([3]). *Դիցուք տեղի ունի **ենթադրություն** $\mathcal{A}$-ն: Այդ դեպքում կամայական 4-հանգույցով $\tilde{l}$ ուղիղ կարող է օգտագործվել $\mathcal{X}$-ի ամենաշատը 3 հանգույցների կողմից: Եթե $\tilde{l}$-ն օգտագործվում է երեք հանգույցների կողմից, ապա դրանք օգտագործում են ևս երկու 4-հանգույցով ուղիղներ, ընդ որում միևնույն երկուսը:*

Ապացույց. Ենթադրենք՝ 4-հանգույցով $\tilde{l}$ ուղիղը օգտագործվում է $A, B \in \mathcal{X}$ հանգույցների կողմից: Դիտարկենք A կետի ֆունդամենտալ բազմանդամը՝ p_A^*-ն: Այն իրենից ներկայացնում է $\tilde{l}$–ի և ևս երեք ուղիղների արտադրյալ, որոնք պարունակում են $\mathcal{X} \setminus \left\{\tilde{l} \cup \{\mathrm{A}\}\right\}$ բազմության 10 հանգույցները՝ ներառյալ B–ն: Ուրեմն p_A^*-ի համար կարող ենք ունենալ երկու հնարավոր ներկայացում.

$$p_A^* = \tilde{l} l_{=4} l'_{=4} l_{\geq 2}, \tag{3.3}$$

$$p_A^* = \tilde{l} l_{=4} l_{\geq 3} l'_{\geq 3}: \tag{3.4}$$

Դիտարկենք առաջին ներկայացումը՝ (3.3)-ը: **Լեմմա 3.3.2**-ի ապացույցում մենք արդեն ստացել ենք, որ այսպիսի իրադրությունում B–ն չի կարող պատկանել որևէ 4-հանգույցով ուղղի: Հետևաբար B–ն պետք է պատկանի $l_{\geq 2}$ ուղղին: Եթե գոյություն ունենար ևս մի հանգույց՝ C, որը ևս օգտագործեր $\tilde{l}$ ուղիղը, ապա կատարելով նույն դատողությունները, ինչ B-ի համար՝ կստանայինք, որ C-ն ևս պատկանում է $l_{\geq 2}$ ուղղին: Այսպիսով Լեմման ապացուցված է (3.3) դեպքում, քանի որ $l_{\geq 2}$ ուղղի մնացած հանգույցները (եթե կան) երկրորդային են և պատկանում են որևէ 4-հանգույցով ուղղի: Նշենք, որ այս դեպքում p_B^*-ն (p_A^*) օգտագործում է $\tilde{l}, l_{=4}, l'_{=4}$ ուղիղները և l_{AC} (l_{AB}) ուղիղը, որտեղ l_{AC}-ն A և C հանգույցները միացնող ուղիղն է: Ուստի A, B, C հանգույցները օգտագործում են միևնույն երեք 4-հանգույցով ուղիղները:

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ p_A^*–ը տրված է (3.4) տեսքով:

Եթե B-ն գտնվեր որևէ 3-հանգույցով ուղղի վրա, ապա, կիրառելով նույն դատողությունները, ինչ վերևում նշվեցին, նորից կստանայինք, որ p_B^*-ն զրոյանում է B հանգույցում: Հետևաբար B-ն պետք է պատկանի $l_{=4}$ ուղղին:

Այժմ պարզենք B կետի ֆունդամենտալ բազմանդամի տեսքը: Եթե այն տրված լինի (3.3) տեսքով, ապա Լեմմայի ապացույցի առաջին հատվածը նույնությամբ կկիրառենք A հանգույցի համար:

Մնում է դիտարկել այն դեպքը, երբ B հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամի տեսքն է

$$p_B^* = \tilde{l}\alpha_{=4}\alpha_{\geq 3}\alpha'_{\geq 3},$$

որտեղ $\alpha_{=4}, \alpha_{\geq 3}, \alpha'_{\geq 3} \in \Pi_1$: Փաստորեն ստանում ենք, թե՛ p_A^*-ն, թե՛ p_B^*-ն տրված են (3.4) տեսքով: Ավելին, ունենք նաև, որ A կետն էլ իր հերթին գտնվում է $\alpha_{=4}$ ուղղի վրա:

Այժմ տեսնենք, որ $\tilde{l}$–ից բացի այլ ուղիղներ չկան, որ օգտագործվեն A–ի և B-ի կողմից միաժամանակ: Իրոք, $\alpha_{=4}$ և $l_{=4}$ ուղիղները միակն են, որ պարունակում են համապատասխանաբար A և B կետերը: Այստեղից հետևում է, որ դրանք միաժամանակ օգտագործվող հնարավոր ուղիղներից չեն: Ուստի կատարենք հակասող ենթադրություն, այն է՝ գոյություն ունի ևս մի ուղիղ, որ միաժամանակ օգտագործվում է A և B կետերի կողմից: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $l'_{\geq 3} \equiv \alpha'_{\geq 3}$:

Այսպիսով ստացանք, որ

$$p_B^* = \tilde{l}\, l'_{\geq 3} q, \qquad \text{որտեղ} \quad q \in \Pi_2:$$

Այնուհետ, ըստ (3.4)–ի, q-ն զրոյանում է $l_{\geq 3}$–ի 3 հանգույցներում և $l_{=4}$-ի առնվազն 2 հանգույցներում (բացի B–ից և $l'_{\geq 3}$-ի հնարավոր երկրորդային հանգույցից): Հետևաբար, ըստ **Պնդում 2.1.3-ի,** ստանում ենք, որ q–ն զրոյանում է $l_{\geq 3}$ և $l_{=4}$ ուղիղների բոլոր կետերում՝ ներառյալ B–ն: Ուրեմն, p_B^*-ն զրոյանում է B–ում, որը հակասություն է:

Ամփոփելով բոլոր դատողությունները՝ ունենք, որ օգտագործվող ուղիղների $l_{=4}, l_{\geq 3}, l'_{\geq 3}$ և $\alpha_{=4}, \alpha_{\geq 3}, \alpha'_{\geq 3}$ եռյակները հատվում են $\mathcal{T} = \mathcal{X} \setminus \left\{\tilde{l} \cup \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}\right\}$ բազմության ճիշտ 9 հանգույցներում:

Եթե որևէ երրորդ կետ՝ C, օգտագործում է $\tilde{l}$–ը, ապա $C \in \mathcal{T}$ և

$$p_C^* = \tilde{l}r, \qquad \text{որտեղ } r \in \Pi_3:$$

Այժմ նշենք, որ r–ը հանդիսանում է C–ի երրորդ աստիճանի ֆունդամենտալ բազմանդամ՝ $\mathcal{T}$ բազմության նկատմամբ, որը հակասում է **Թեորեմ 3.1.9**-ին: Հետևաբար 4-հանգույցով $\tilde{l}$ ուղիղը այս դեպքում կարող է օգտագործվել ամենաշատը երկու անգամ:

Այսպիսով Լեմման ապացուցված է □

Անցնենք **Թեորեմ 3.3.1**-ի առաջին ապացույցին:

Ցույց տանք, որ $\mathcal{X}$–ում չկան երկրորդային հանգույցներ, ինչպես նաև չկան $\mathcal{X}$–ի ճիշտ երեք հանգույցներով անցնող ուղիղներ:

Ֆիքսենք որևէ $A \in \mathcal{X}$ կետ և դիտարկենք A –ով ու $\mathcal{X}$ բազմության այլ հանգույցով (կամ հանգույցներով) անցնող ուղիղները: Նշանակենք $n_m(A)$ –ով այն ուղիղների քանակը, որոնք անցնում են $\mathcal{X}$–ի ճիշտ m հանգույցներով՝ ներառյալ A–ն: Հաշվի առնելով այն փաստը, որ 5 հանգույցներով անցնող ուղիղ չունենք (**Ենթադրություն $\mathcal{A}$**)՝ ստանում ենք.

$$1n_2(A) + 2n_3(A) + 3n_4(A) = \#(\mathcal{X} \setminus \{A\}) = 14: \tag{3.5}$$

(3.5) առնչության մեջ՝ A հանգույցով անցնող ուղիղների միջոցով հաշվում ենք ֆիքսված A հանգույցից բացի մնացած $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ հանգույցների քանակը: $n_2(A)$ -ի գործակիցը 1 է, քանի որ 2 հանգույցով (այդ թվում նաև A-ով) անցնող ուղղի վրա բացի A-ից կա միայն մեկ հանգույց, $n_3(A)$-ի գործակիցը 2 է, քանի որ 3 հանգույցով (այդ թվում նաև A-ով) անցնող ուղղի վրա բացի A-ից կան երկու հանգույցներ, նույն կերպ նաև $n_4(A)$-ն:

Այժմ ապացուցենք հետևյալ արդյունքը (տես [19]):

Լեմմա 3.3.4. *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը GC_4 բազմություն է՝ առանց մաքսիմալ ուղղի: Այդ դեպքում տեղի ունի.*

1. *Ոչ մի ուղիղ չի անցնում $\mathcal{X}$ բազմության ճիշտ երեք հանգույցներով,*

2. *Միևնույն հանգույցի կողմից օգտագործված երկու ուղիղներ չեն հատվում $\mathcal{X}$–ի հանգույցում:*

Ապացույց. *1.* Ֆիքսենք $\mathcal{X}$ բազմության որևէ A կետ և դիտարկենք A–ով ու $\mathcal{X}$-ի այլ հանգույցով (հանգույցներով) անցնող բոլոր ուղիղները: Նշենք, որ $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ բազմության յուրաքանչյուր հանգույց պետք է օգտագործի A կետով անցնող առնվազն մեկ ուղիղ: Նշանակենք $M(A)$ –ով A կետով անցնող ուղիղների օգտագործումների գումարային քանակը: Փորձենք գնահատել $M(A)$–ն:

Քանի որ 14 հանգույցներից յուրաքանչյուրը A–ով անցնող առնվազն մեկ ուղիղ պիտի օգտագործի, հետևաբար 14 հանգույցների օգտագործումների գումարային քանակը պիտի լինի առնվազն 14: Մյուս կողմից, ըստ **Լեմմա 3.3.2**-ի և **Լեմմա 3.3.3**-ի, 2 և 3 հանգույցներով անցնող ուղիղները կարող են օգտագործվել ամենաշատը մեկ անգամ, իսկ 4 հանգույցով անցնող ուղիղը կարող է օգտագործվել ամենաշատը 3 անգամ, հետևաբար կստանանք հետևյալ առնչությունը.

$$14 \leq M(A) \leq 1n_2(A) + 1n_3(A) + 3n_4(A):$$

Համեմատելով սա (3.5)-ի հետ կարող ենք եզրակացնել, որ անհրաժեշտաբար

$$M(A) = 14 \quad \text{և} \quad n_3 = 0, \tag{3.6}$$

որտեղից էլ ստանում ենք, որ l-ը չի կարող անցնել ճիշտ երեք հանգույցներով:

2. Այժմ ենթադրենք, որ $B \in \mathcal{X}$ կետը օգտագործում է l_1, l_2 ուղիղները, որոնք երկուսն էլ անցնում են $A \in \mathcal{X}$ հանգույցով: Այս դեպքում $M(A)$ թիվը մեծանում է մեկով և մենք ստանում ենք $M(A) \geq 15$, որը հակասում է ապացուցված (3.6) արդյունքին: □

Վերոնշյալ **Լեմմա 3.3.4**-ի երկրորդ պնդումից ելնելով՝ ստանում ենք, որ $\mathcal{X}$–ում չկան երկրորդային հանգույցներ: Հետևաբար, ֆունդամենտալ բազմանդամների հնարավոր (3.1) ներկայացումները կստանան հետևյալ տեսքը.

$$p_A^* = l_{=4} l'_{=4} l''_{=4} l_{=2}, \tag{3.7}$$

$$p_A^* = l_{=4} l'_{=4} l_{=3} l'_{=3}: \tag{3.8}$$

Այնուհետ, օգտագործելով **Լեմմա 3.3.4**-ի պնդումներից առաջինը՝ ստանում ենք, որ $\mathcal{X}$-ի ոչ մի հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ չի կարող ունենալ (3.8) ներկայացումը: Մնում է դիտարկենք ֆունդամենտալ բազմանդամի հնարավոր վերջին՝ (3.7) ներկայացումը:

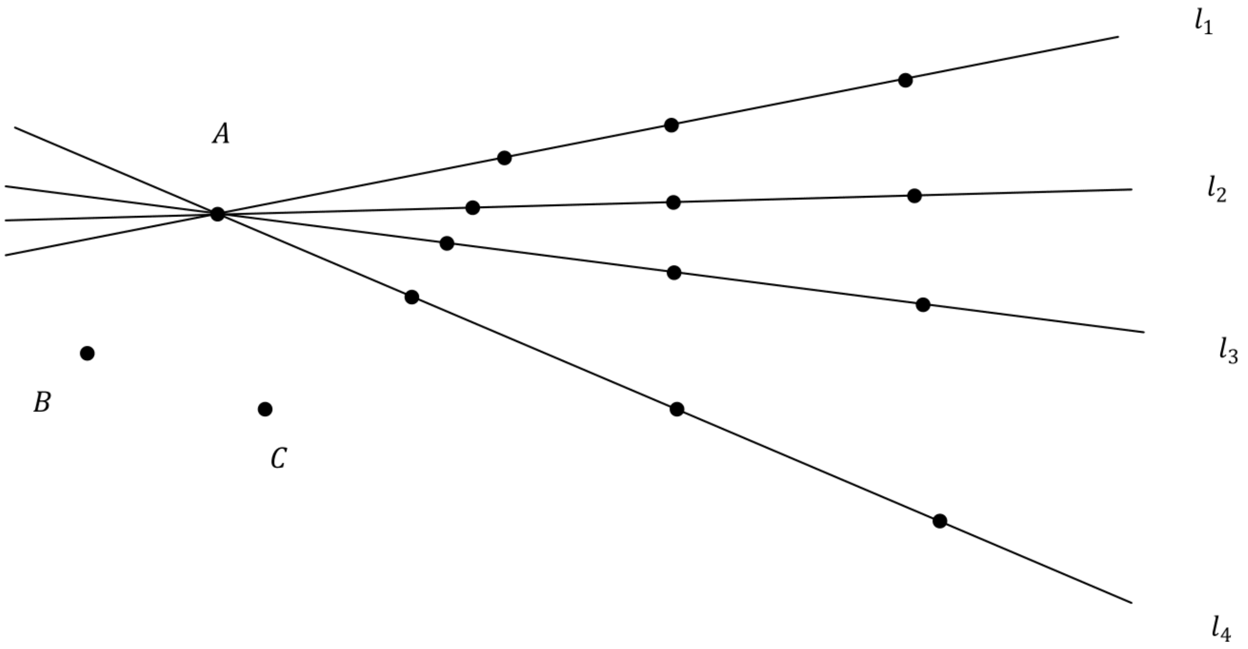
Այսպիսով, եթե ամփոփենք մեր արդյունքները, ստանում ենք հետևյալը. ունենք $\mathcal{X}$ բազմություն, որը բավարարում է GC_4 պայմանին, որում ըստ **Ենթադրություն $\mathcal{A}$**-ի, չկան 5 համագիծ հանգույցներ և բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամներն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$p_A^* = l_{=4} l'_{=4} l''_{=4} l_{=2}\,, \quad \forall A \in \mathcal{X}:$$

Այստեղից պարզ է դառնում, որ յուրաքանչյուր հանգույց օգտագործում է 4-հանգույցով երեք ուղիղ, հետևաբար կարող ենք եզրակացնել, որ $\mathcal{X}$–ում 4-հանգույցով ուղիղների օգտագործումների քանակը հավասար է $15 * 3 = 45$: Ըստ **Լեմմա 3.3.3**-ի՝ 4-հանգույցով ուղիղը կարող է օգտագործվել ամենաշատը երեք անգամ, հետևաբար, կան առնվազն $45 / 3 = 15$ իրարից տարբեր 4-հանգույցով ուղիղներ: Այս 4-հանգույցով ուղիղներն անցնում են ընդհանուր հաշվով $4 * 15 = 60$ հանգույցներով: Ունենք, որ $\#\mathcal{X} = 15$, որից հետևում է, որ $\mathcal{X}$ բազմության յուրաքանչյուր հանգույցով անցնում են միջինում չորս 4-հանգույցով ուղիղներ: Մյուս կողմից, հեշտությամբ ստանում ենք, որ $\mathcal{X}$–ի ոչ մի հանգույցով չեն կարող անցնել հինգ 4-հանգույցով ուղիղներ: Եվ իրոք, այդ դեպքում հաշվելով նշված ուղիղների վրա հանգույցների քանակը՝ ստանում ենք՝ $\mathcal{X}$–ը պետք է պարունակի առնվազն $16 = 5 * 3 + 1$ հանգույցներ, որն անհնար է:

Հետևաբար, կարող ենք եզրակացնել, որ $\mathcal{X}$–ի յուրաքանչյուր հանգույցով անցնում են ճիշտ չորս 4-հանգույցով ուղիղներ:

Դիտարկենք $A \in \mathcal{X}$ հանգույցը: Նշանակենք A–ով անցնող 4-հանգույցներով ուղիղները l_1, l_2, l_3, l_4: Նշանակենք B և C այն հանգույցները, որոնք դուրս են մնում այս ուղիղներից (տես *Գծագիր 3.3.1):*



Գծագիր 3.3.1. A-ով անցնող 4-հանգույցով ուղիղները

Տեսնենք, որ B–ն l_1, l_2, l_3, l_4 ուղիղներից ոչ մեկը չի օգտագործում: Ենթադրենք հակառակը՝ այդ ուղիղներից մեկը հանդիսանում է $p_{\boldsymbol{B}}^*$ բազմանդամի արտադրիչ, օրինակ՝ l_4-ը: Հաշվի առնելով **Լեմմա 3.3.4**-ի *2.* պնդումը՝ B-ն չի կարող օգտագործել l_1, l_2, l_3 ուղիղներից ոչ մեկը: Այնուհետ, C-ն և $[l_1 \cup l_2 \cup l_3] \setminus \{A\}$ բազմության ինը հանգույցները պետք է բաշխված լինեն B հանգույցի կողմից օգտագործվող մյուս երեք ուղիղների վրա: Ըստ (3.7)-ի՝ նշված ուղիղներից երկուսը պետք է լինեն 4-հանգույցով ուղիղներ և մեկը՝ 2-հանգույցով: 4-հանգույցով ուղիղներից յուրաքանչյուրը պետք է պարունակի A–ից տարբեր մեկական հանգույց l_1, l_2, l_3 ուղիղներից, և մեկ հանգույց՝ այդ ուղիղներից դուրս: Ստանում ենք հակասություն, քանի որ դրսում կա միայն մեկ հանգույց՝ C: Հետևաբար B–ն l_1, l_2, l_3, l_4 ուղիղներից ոչ մեկը չի օգտագործում: Ուրեմն A–ով անցնող միայն մեկ ուղիղ է մնում, որը կարող է B–ն օգտագործել. դա A և C հանգույցներով անցնող 2-հանգույցով ուղիղն է: Այնուհետ, B–ի օգտագործած մյուս երեք ուղիղները անցնում են $[l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4] \setminus \{A\}$ բազմության 12 հանգույցներով: Ուստի վերջին 12 հանգույցները դառնում են երկու խումբ ուղիղների հատման կետեր. մի խումբը երեք ուղիղներից բաղկացած, մյուս խումբը՝ չորս ուղիղներից (տես *Գծագիր*

3.3.1)։ Ըստ **Թեորեմ 3.1.9**-ի ստանում ենք, որ նշված 12 հանգույցները 4-կախյալ են։ Այս հակասությունն ապացուցում է **Թեորեմ 3.3.1**-ը։ □

Ներկայացնենք **Թեորեմ 3.3.1**-ի երկրորդ պարզ և ավելի կարճ ապացույցը։ Այս արդյունքը ներկայացված է [29]-ում։

Կատարենք մի հետևություն **Լեմմա 3.3.3**-ից։

Հետևանք 3.3.5. *Դիցուք* l*-ը 4-հանգույցով ուղիղ է և* $A, B, C \in \mathcal{X} \setminus l$ *հանգույցները օգտագործում են մեկ այլ՝* $\tilde{l}$ *ուղիղ։ Այդ դեպքում* A, B *և* C *հանգույցները օգտագործում են նաև* l*-ը։*

Եվ իրոք, A, B, C հանգույցներից յուրաքանչյուրի ֆունդամենտալ բազմանդամը գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$p^* = \tilde{l}r, \qquad r \in \Pi_3,$$

և քանի որ $r \in \Pi_3$ -ը անհրաժեշտաբար զրոյանում է l ուղղի 4 հանգույցներում, հետևաբար, ըստ **Պնդում 1.2.2**.-ի, այն պարունակում է l-ը։

Ներկայացնենք լեմմա, որով ուժեղացնում ենք Լեմմա 2-ը [7] աշխատանքից։

Լեմմա 3.3.6 ([29]). *Դիցուք տեղի ունի* ***ենթադրություն*** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-ն։ Այդ դեպքում, եթե* $A \in \mathcal{X}$ *հանգույցն օգտագործում է 4-հանգույցով* l *ուղիղը, ապա* $\mathcal{X}$*-ում կան այդ ուղիղն օգտագործող ևս երկու հանգույցներ։*

Ապացույց. A հանգույցը l ուղղի 4 հանգույցներին միացնող ուղիղները նշանակենք l_1, l_2, l_3 և l_4։ Դիտարկենք $\mathcal{X} \setminus (l \cup \{A\})$ բազմության որևէ հանգույց։ Այդ հանգույցի կողմից օգտագործված 4 ուղիղները անցնում են $l \cup \{A\}$ բազմության 5 հանգույցներով։ Ուստի, ուղիղներից մեկն անցնում է 5 հանգույցներից երկուսով և այն համընկնում է l_1, l_2, l_3, l_4 և l ուղիղներից մեկի հետ։ Այսպիսով, $\mathcal{X} \setminus l$ բազմության 11 հանգույցներից յուրաքանչյուրը օգտագործում է l, l_1, l_2, l_3, l_4 ուղիղներից մեկը։ Հետևաբար, $(\mathcal{X} \setminus l)$ -ում կան առնվազն երեք հանգույցներ, որոնք օգտագործում են միևնույն ուղիղը՝ նշված 5 ուղիղներից։ Նշանակենք այն $\tilde{l}$ -ով։ Հաշվի առնելով

Հետևանք 3.3.5-ը՝ կարող ենք ասել, որ հանգույցների միևնույն եռյակը օգտագործում է նաև l-ը: Ըստ **Լեմմա 3.3.3**–ի A հանգույցը նշված երեք հանգույցներից մեկն է: □

Դիտողություն 3.3.7. Նկատենք, որ $\tilde{l} \equiv l$: Իրոք, $\tilde{l}$-ը օգտագործվում է A-ի կողմից, և, հետևաբար, այն չի կարող համընկնել $l_i, i = 1,2,3,4,$ ուղիղներից ոչ մեկի հետ: Ինչպես նաև l, l_1, l_2, l_3, l_4 ուղիղներից յուրաքանչյուրը օգտագործվում է $\mathcal{X} \setminus (l \cup \{A\})$ բազմության 10 հանգույցներից ճիշտ 2-ի կողմից (հակառակ դեպքում, ըստ **Լեմմա 3.3.6**-ի ապացույցի, եթե որևէ ուղիղ օգտագործվի երեք կետերի կողմից, ապա A-ն դրանցից մեկը պիտի լինի): Ուստի, համաձայն **Լեմմա 3.3.3**-ի, l_1, l_2, l_3, l_4 ուղիղներից յուրաքանչյուրը 4-հանգույցով ուղիղ է: Նշենք նաև, որ այստեղից ստանում ենք՝ $\mathcal{X} \setminus l$ բազմության ցանկացած հանգույց օգտագործում է միայն մեկ ուղիղ $\{l, l_1, l_2, l_3, l_4\}$ բազմությունից:

Այսպիսով, **Լեմմաներ 3.3.2**-ից և **3.3.3**-ից ստանում ենք, որ $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամներն ունեն 4+4+4+2 բաշխում, այսինքն՝ (3.1)-ի առաջին դեպքը:

Դիցուք A հանգույցը օգտագործում է 4-հանգույցով l ուղիղը և l_1, l_2, l_3 , l_4 ուղիղները հանդիսանում են A հանգույցը l ուղղի 4 հանգույցներին միացնող ուղիղներ: **Լեմմա 3.3.6**-ի համաձայն l-ը օգտագործվում է նաև $B, C \notin l$ հանգույցների կողմից: A, B, C հանգույցները օգտագործում են ևս երկու 4-հանգույցով ուղիղներ, ընդ որում միևնույն ուղիղները: Նշանակենք դրանք l' և l'': Ցույց տանք, որ B և C հանգույցները չեն պատկանում l_1, l_2, l_3, l_4 ուղիղներից ոչ մեկին: Իսկապես, ենթադրենք հակառակը՝ B-ն գտնվում է l_1 ուղղի վրա: Այդ դեպքում, ըստ **Դիտողություն 3.3.7**-ի, C-ն 4-հանգույցով l_1, l_2, l_3, l_4 ուղիղներից ոչ մեկը չի օգտագործում, մինչդեռ **Լեմմա 3.3.3**-ի ապացույցից ունենք, որ C-ն պիտի օգտագործի A-ով և B-ով անցնող ուղիղը, որը, հետևաբար, համընկնում է l_1-ի հետ:

Ուստի $\mathcal{X} \setminus \{A, B, C\}$ բազմության 12 հանգույցները պատկանում են l_1, l_2, l_3 , l_4 ուղիղներին: Մյուս կողմից, այս 12 հանգույցները պատկանում են նաև l, l', l'' ուղիղներին, որտեղից կարող ենք եզրակացնել, որ նշված 12 հանգույցները հանդիսանում են l_1, l_2, l_3, l_4 ուղիղները l, l', l'' ուղիղների հետ հատման կետեր:

Ի վերջո դիտարկենք $p = l_1 l_2 l_3 l_4$ բազմանդամը: Որպես չորրորդ աստիճանի բազմանդամ p-ն զրոյանում է $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներում, բացի B-ից և C-ից: Ուստի այն պետք է լինի այս երկու հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամների գծային կոմբինացիա: Նշված երկու ֆունդամենտալ բազմանդամներն էլ զրոյանում են l, l', l'' ուղիղների վրա, հետևաբար, նույնը պետք է տեղի ունենա p բազմանդամի համար, ինչը հակասություն է:

Թեորեմ 3.3.1-ն ապացուցված է:

ԳԼՈՒԽ 4.

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՐԵՐԸ ՄԻԱԿՈՐԵՆ ՈՐՈՇՈՂ ՀԱՆԳՈՒՅՑՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Հայտնի է, որ Π_n –անկախ $N-1=(1/2)(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)-1$ հանգույցներ միակորեն որոշում են n-րդ աստիճանի կորը, որն անցնում է այդ հանգույցներով: Այս բաժնում ներկայացնում ենք ատենախոսության մյուս արդյունքները. ապացուցում ենք, որ կամայական $k,\ k\le n-1$, աստիճանի կորի վրա նվազագույն Π_n –անկախ հանգույցների քանակը, որոնք միակորեն որոշում են այդ կորը, հավասար է $\mathcal{K}:=(1/2)(k-1)(2n+4-k)+2$: Ավելի ճշգրիտ, $\mathcal{K}$ հատ Π_n–անկախ հանգույցների ցանկացած բազմության համար գոյություն ունի ամենաշատը մեկ $k,\ k\le n-1$, աստիճանի կոր, որն անցնում է այդ հանգույցներով, մինչդեռ գոյություն ունեն $\mathcal{K}-1$ հատ Π_n–անկախ հանգույցներով բազմություններ, որոնցով անցնում են առնվազն երկու $k,\ k\le n-1$, աստիճանի կորեր: Ներկայացնում ենք նաև այդպիսի բազմությունների պարզ բնութագրում: Մասնավորապես, ապացուցում ենք՝ եթե $k,\ k\le n-1$, աստիճանի երկու կորեր անցնում են $\mathcal{K}-1$ հզորության Π_n–անկախ $\mathcal{X}$ բազմության հանգույցներով, ապա $\mathcal{X}$-ի բոլոր հանգույցները, բացի մեկից, պատկանում են որևէ $(k-1)$-րդ աստիճանի (մաքսիմալ) կորի:

Այս բաժնում նշված արդյունքների ստացման ժամանակ կարևոր դեր են կատարել մաքսիմալ կորերը և դրանց մի քանի հատկությունները, որոնցից և սկսում ենք դիտարկումը:

4.1 Մաքսիմալ կորեր

Ելնելով ճշգրիտ բազմությունների սահմանումից և դրանց հատկություններից՝ կարելի է ասել, որ $\mathcal{X}_N$ բազմությունը Π_n–ճշգրիտ է այն և միայն դեպքում, երբ գոյություն չունի դրա բոլոր հանգույցներով անցնող n–րդ աստիճանի կոր (տես Գլուխ 1, **Պնդում 1.2.2**):

Պնդում 4.1.1. *Յանկացած $N-1$ հանգույց պարունակող $\mathcal{X}_{N-1}$ բազմության համար գոյություն ունի n–րդ աստիճանի կոր, որն անցնում է $\mathcal{X}_{N-1}$ բազմության բոլոր կետերով:*

Իսկապես, կորի գոյությունը բերվում է N անհայտով $N-1$ գծային հավասարումների համասեռ համակարգի լուծմանը, որտեղ անհայտները նշված n–րդ աստիճանի բազմանդամի գործակիցներն են:

Այստեղից ստանում ենք, որ հարթության վրա N հանգույցների բազմությունը, որտեղ

$$N = N_n = dim\Pi_n = \binom{n+2}{2},$$

Π_n-ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն Π_n-անկախ է (տես Գլուխ 1, **Պնդում 1.2.13**):

Ներկայացնենք Π_n-անկախ բազմությունների մի քանի հատկություններ, որոնք օգտագործում ենք:

Լեմմա 4.1.2 ([20]). *Դիցուք $\mathcal{X}$ բազմությունը Π_n–անկախ է և $A \notin \mathcal{X}$ հանգույցն ունի ֆունդամենտալ բազմանդամ $\mathcal{X} \cup \{A\}$ բազմության նկատմամբ: Այդ դեպքում հանգույցների $\mathcal{X} \cup \{A\}$ բազմությունը ևս Π_n–անկախ է:*

Իսկապես, ակնհայտ է, որ կամայական $B \in \mathcal{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը $\mathcal{Y} := \mathcal{X} \cup \{A\}$ բազմության նկատմամբ կարելի է ստանալ տրված p_A^* ֆունդամենտալ բազմանդամի և $\mathcal{X}$ բազմության նկատմամբ B–ի ֆունդամենտալ բազմանդամի գծային կոմբինացիայի միջոցով՝

$$p_{B,\mathcal{Y}}^* = p_{B,\mathcal{X}}^* - p_{B,\mathcal{X}}^*(A) \cdot p_{A,\mathcal{Y}}^*:$$

Ակնհայտորեն Π_n –ճշգրիտ բազմության ցանկացած ենթաբազմություն Π_n –անկախ է: Համաձայն հաջորդ լեմմայի կամայական Π_n–անկախ բազմություն հան-դիսանում է որևէ Π_n–ճշգրիտ բազմության ենթաբազմություն (տես օրինակ՝ [17]).

Լեմմա 4.1.3. *Կամայական Π_n-անկախ հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմություն կարելի է ընդլայնել մինչև Π_n–ճշգրիտ բազմություն:*

Ապացույց. Անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ գոյություն ունի այնպիսի A հանգույց, որ $\mathcal{X} \cup \{A\}$ բազմությունը լինի Π_n-անկախ: Ըստ **Պնդում 4.1.1**–ի՝ գոյություն ունի ոչ զրոյական $q \in \Pi_n$ բազմանդամ այնպիսին, որ $q|_{\mathcal{X}} = 0$: Այժմ, համաձայն **Լեմմա 4.1.2**-ի, մենք կարող ենք ընտրել փնտրվող A հանգույցը՝ միայն պահանջելով, որ $q(A) = 0$: Եվ իրոք, այդ դեպքում q–ն կդառնա A հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ $\mathcal{X} \cup \{A\}$ բազմության նկատմամբ: □

Նշանակենք $\mathcal{X}$ բազմության հանգույցներում զրոյացող ոչ ավելի քան n գումարային աստիճանի բազմանդամների տարածությունը

$$\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} = \{p \in \Pi_n\colon\ p|_{\mathcal{X}} = 0\}:$$

Ներկայացնենք հետևյալ հայտնի պնդումը (տես օրինակ՝ [17], [20]).

Պնդում 4.1.4. *Ցանկացած հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմության համար տեղի ունի*

$$dim\, \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} \geq N - \#\mathcal{X}:$$

Ավելին, այստեղ հավասարություն տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ բազմությունը Π_n–անկախ է:

Ապացույց. Դիցուք $\mathcal{X} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_s, y_s)\}$ բազմությունը Π_n–անկախ է, $s \leq N$: Օգտվելով **Պնդում 4.1.3**-ից՝ ընդլայնենք այն մինչև Π_n–ճշգրիտ $\mathcal{Z}$ բազմություն, $\#\mathcal{Z} = N$: Այս դեպքում կամայական n աստիճանի p բազմանդամ կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i, y_i) p_i^*(x, y), \qquad (4.1)$$

որտեղ $p_i^*(x,y)$-ը համապատասխան (x_i,y_i) հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամն է: Ցույց տանք, որ

$$p \in \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} \quad \Leftrightarrow \quad p(x,y) = \sum_{i=s+1}^{N} p(x_i,y_i)p_i^*(x,y):$$

Եթե $p \in \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}}$, ապա այն $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր կետերում զրոյանում է, հետևաբար (4.1) ներկայացման մեջ առաջին s գումարելիները չեն մասնակցում: Հետևաբար մի կողմը ապացուցված է:

Հակառակ կողմի ապացույցի համար դիտարկենք p բազմանդամը յուրաքանչյուր $(x_k,y_k) \in \mathcal{X}$, $k = 1,\dots,s$, կետում: Քանի որ $p_i^*(x_k,y_k) = 0$, $i = s+1,\dots,N$, ապա կարող ենք ասել, որ $p(x_k,y_k) = 0$, $k = 1,\dots,s$, հետևաբար $p \in \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}}$:

Այսպիսով ստանում ենք, որ $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{X}$ բազմության հանգույցները $\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}}$ տարածության բազիսն են կազմում, ուստի

$$dim\,\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} = \mathcal{Z} - \#\mathcal{X} = N - \#\mathcal{X}:$$

Եթե բազմությունը Π_n –անկախ չէ, այլ դրա ինչ-որ s_1, $s_1 < s$, հզորության ենթաբազմությունն է Π_n –անկախ, ապա, ըստ շարադրված ապացույցի, $\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}}$ բազմանդամային տարածության չափողականությունը կիջնի, հետևաբար կամայական $\mathcal{X}$ բազմության համար տեղի ունի.

$$dim\,\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} \geq N - \#\mathcal{X}: \square$$

Այստեղից անմիջապես ստանում ենք (տես օրինակ՝ [22]).

Հետևանք 4.1.5. *Դիցուք $\mathcal{Y}$ –ը $\mathcal{X}$ բազմության մաքսիմալ Π_n –անկախ ենթաբազմությունն է, այսինքն՝ $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ բազմությունը Π_n–անկախ է և $\mathcal{Y} \cup \{A\}$ բազմությունը Π_n–կախյալ է ցանկացած $A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ հանգույցի համար: Այդ դեպքում տեղի ունի*

$$\mathcal{P}_{n,\mathcal{Y}} = \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}}: \tag{4.2}$$

Իրոք: Քանի որ $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, ապա ստանում ենք՝ $\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} \subset \mathcal{P}_{n,\mathcal{Y}}$: Այժմ ենթադրենք, որ $p \in \Pi_n$, $p|_{\mathcal{Y}} = 0$ և A-ն $\mathcal{X}$–ից որևէ հանգույց է: Այդ դեպքում $\mathcal{Y} \cup \{A\}$ բազմությունը Π_n–

կախյալ է և, հետևաբար, ըստ **Լեմմա 4.1.2**-ի, $p|_A = 0$ և A-ն չունի ֆունդամենտալ բազմանդամ $\mathcal{Y} \cup \{A\}$ բազմության նկատմամբ:

Հաշվի առնելով (4.2) առնչությունը և **Պնդում 4.1.4**-ը՝ ստանում ենք.

$$dim\, \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} = N - \#\mathcal{Y}, \qquad (4.3)$$

որտեղ $\mathcal{Y}$ –ը $\mathcal{X}$ բազմության որևէ մաքսիմալ Π_n–անկախ ենթաբազմություն է: Հետևաբար, $\mathcal{X}$ -ի բոլոր մաքսիմալ Π_n –անկախ ենթաբազմություններն ունեն միևնույն հզորությունը, որը նշանակում ենք $\mathcal{H}_n(\mathcal{X})$ և անվանում ենք $\mathcal{X}$ *բազմության Հիլբերտի* n*-ֆունկցիա:* Ուստի, համաձայն (4.3) առնչության, ստանում ենք.

$$dim\, \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} = N - \mathcal{H}_n(\mathcal{X}):$$

Համաձայն **Պնդում 1.2.12**-ի՝ ավելի քան $n+1$ համագիծ հանգույցներ չեն կարող Π_n--անկախ լինել: Օգտվելով անկախ հանգույցների այս հատկությունից մենք սահմանեցինք մաքսիմալ ուղիղներ: Այժմ նշանակենք

$$d \coloneqq d(n,k) \coloneqq N_n - N_{n-k} = \frac{k(2n+3-k)}{2}:$$

Հետևյալ հայտնի պնդումը հանդիսանում է **Պնդում 1.2.12**-ի ընդհանրացում k աստիճանի հանրահաշվական կորերի համար (տես օրինակ՝ [28]).

Պնդում 4.1.6. *Դիցուք q -ն k, $k \le n$, աստիճանի հանրահաշվական կոր է՝ առանց պատիկ կոմպոնենտների, և $\mathcal{X} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{s} \subset q$ հանգույցների բազմությունը Π_n–անկախ է: Այս դեպքում $s \le d(n,k)$: Ավելին, $s = d(n,k)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$p \in \Pi_n,\ \ p(x_i, y_i) = 0,\ \ i = 1, \dots, s \quad \Longrightarrow \quad p|_q = 0 \ \text{և}\ \ p = qr, \qquad (4.4)$$

որտեղ $r \in \Pi_{n-k}$:

Ամբողջականության համար ներկայացնենք ապացույցը:

Ապացույց. Դիտարկենք հետևյալ բազմանդամային տարածությունները

$$\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} = \{p \in \Pi_n : p|_{\mathcal{X}} = 0\}, \qquad \mathcal{V}_{n,k,q} = \{qr : r \in \Pi_{n-k}\}:$$

Ակնհայտ է, որ

$$\mathcal{V}_{n,k,q} \subseteq \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}}: \tag{4.5}$$

$\mathcal{X}$ բազմության Π_n–անկախությունից հետևում է, որ

$$dim\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} = dim\Pi_n - \#\mathcal{X} = dim\Pi_n - s: \tag{4.6}$$

Դժվար չէ նկատել, որ

$$dim\mathcal{V}_{n,k,q} = dim\Pi_{n-k}: \tag{4.7}$$

(4.5) առնչությունից ստանում ենք՝ $dim\mathcal{V}_{n,k,q} \leq dim\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}}$: Հետևաբար (4.6) և (4.7)-ից կստանանք $s \leq dim\Pi_n - dim\Pi_{n-k} = d(n,k)$:

Ենթադրենք, որ $s = d(n,k)$: Այս դեպքում (4.6) և (4.7)-ից կստանանք

$$dim\mathcal{V}_{n,k,q} = dim\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}}$$

և ուստի, հաշվի առնելով (4.5)-ը՝ ստանում ենք՝ $\mathcal{V}_{n,k,q} \equiv \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}}$, որը և նշանակում է, որ (4.4)-ը տեղի ունի:

Այժմ ենթադրենք, որ *(4.4)*-ը տեղի ունի: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ

$$\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{V}_{n,k,q}:$$

Հետևաբար և $\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} \equiv \mathcal{V}_{n,k,q}$,և ուրեմն $dim\mathcal{V}_{n,k,q} = dim\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}}$: Այսպիսով, հաշվի առնելով (4.6) և (4.7)-ը՝ ստանում ենք $s = d(n,k)$: □

Պնդում 4.1.6-ից, մասնավորապես, հետևում է կարևոր փաստ, որը օգտագործվում է հետագա շարադրանքում.

q կորի վրա $d(n,k)$-ից ավել հանգույցներ Π_n–կախյալ են:

Նկատենք, որ **Պնդում 4.1.6**–ում նշված կորը, որը պարունակում է Π_n-անկախ $d(n,k)$ հանգույցներ, չի կարող ունենալ պատիկ կոմպոնենտներ: Իրոք, հակառակ դեպքում պատիկ կոմպոնենտները դեն կնետենք այնպես, որ ամեն կոմպոնենտ ունենա 1 պատիկություն, և կստանանք Π_n-անկախ $d(n,k)$ հանգույցներով անցնող k-ից ցածր աստիճանի կոր, իսկ դա անհնար է:

Այժմ դիտարկենք վերը սահմանված $d(n,k)$ թիվը՝ տարբեր k-երի համար: Երբ $k = 1$ ունենք ուղիղ և $d(n,1) = n + 1$: Համաձայն **Թեորեմ 1.2.13**-ի (Գլուխ 1) կամայական $n + 1$ կետերի բազմություն Π_n–անկախ է, հետևաբար ուղղի վրա ցանկացած $n + 1$ հանգույցների բազմություն Π_n-անկախ է:

Երկրորդ աստիճանի կորերի համար, որոնց անվանում ենք կոնիկներ, ունենք $d(n,2) = 2n + 1$: Չվերածվող կոնիկի վրա ամենաշատը երկու կետ կարող է լինել մեկ ուղղի վրա (ուղիղը երկրորդ աստիճանի կորը կարող է հատել ամենաշատը երկու կետերում), հետևաբար **Պնդում 1.2.16**-ից ստանում ենք, որ մեկ չվերածվող կոնիկի վրա գտնվող կամայական $2n + 1$ հանգույցների բազմություն Π_n-անկախ է:

Երրորդ աստիճանի կորերի համար, որոնց անվանում ենք կուբիկներ, ունենք $d(n,3) = 3n$: Այս դեպքում (և նմանապես ավելի բարձր աստիճանի կորերի դեպքում) չվերածվող կուբիկի վրա գտնվող հանգույցների բազմությունները միշտ չէ, որ Π_n-անկախ են: Մասնավորապես, հայտնի է հետևյալ արդյունքը կուբիկ-ների վրա Π_n-անկախ՝ ոչ ավելի քան $3n$ հանգույցների մասին, որը տրված է [20]-ում:

Պնդում 4.1.7. *Դիցուք γ կուբիկի վրա տրված է $\mathcal{X}, \#\mathcal{X} \leq 3n$, բազմությունը: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ բազմությունը Π_n-կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը.*

1. *γ-ի ուղիղ կոմպոնենտը պարունակում է $n + 2$ հանգույցներ $\mathcal{X}$-ից, եթե γ-ն վերածելի է,*
2. *γ-ի կոնիկ կոմպոնենտը (վերածելի կամ ոչ) պարունակում է $2n + 2$ հանգույցներ $\mathcal{X}$-ից, եթե γ-ն վերածելի է,*
3. *$\#\mathcal{X} = 3n$ և գոյություն ունի $\sigma \in \Pi_n$ կոր այնպես, որ $\gamma \cap \sigma = \mathcal{X}$:*

Նշենք նաև, որ Π_n-անկախ հանգույցների բնութագրումը երրորդ և չորրորդ աստիճանի կորերի վրա տրված են [20], [21] և [26] աշխատանքներում:

Դիցուք $\mathcal{X}$-ը Π_n–ճշգրիտ հանգույցների բազմություն է և q–ն $k,\ k \le n,$ աստիճանի հանրահաշվական կոր է: Քանի որ $\mathcal{X}$-ի ցանկացած ենթաբազմություն Π_n–անկախ է, ապա, ըստ **Պնդում 4.1.6**-ի, ստանում ենք, որ ամենաշատը $d(n,k)$ հանգույցներ $\mathcal{X}$–ից կարող են պատկանել q կորին: Նշենք, որ սրա մասնավոր դեպքը, երբ q–ն ուղիղների արտադրյալ է, ապացուցված է [11]-ում:

Ելնելով վերոնշյալից՝ տանք հետևյալ սահմանումը ([28]).

Սահմանում 4.1.8. *Դիցուք տրված է Π_n–անկախ $s \ge d(n,k)$ հանգույցների $\mathcal{X}_s$ բազմություն: Եթե $k,\ k \le n,$ աստիճանի կորը անցնում է $\mathcal{X}_s$–ի $d(n,k)$ հանգույցներով, ապա այն անվանում ենք մաքսիմալ k–րդ աստիճանի կոր $\mathcal{X}_s$ բազմության համար:*

Ներկայացնենք *մաքսիմալ կորերի բնութագիրը* հետևյալ պնդումի տեսքով.

Պնդում 4.1.9 ([28]). *Դիցուք $\mathcal{X}$ հանգույցների բազմությունը Π_n–ճշգրիտ է: Այդ դեպքում $k,\ k \le n,$ աստիճանի q բազմանդամը մաքսիմալ կոր է $\mathcal{X}$–ի համար այն և միայն այն դեպքում, եթե այն օգտագործվում է $\mathcal{X} \setminus q$ բազմության ցանկացած հանգույցի կողմից:*

Եվ իրոք, անհրաժեշտությունը հետևում է **Պնդում 4.1.6**-ից: Բավարարությունը հետևում է Լագրանժի բանաձևից՝

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{N} p(x_i, y_i) p_i^*(x,y),$$

ըստ որի կամայական $p \in \Pi_n$ բազմանդամի համար, որը զրոյանում է $\mathcal{X} \cap q$ բազմության հանգույցներում, q-ն հանդիսանում է բաժանարար: Այժմ բավական է ևս մեկ անգամ կիրառել **Պնդում 4.1.6**-ը:

Դիտողություն 4.1.10. Քանի որ $d(n,n) = N - 1$, ապա **Պնդում 4.1.9**-ից ստանում ենք, որ Π_n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության յուրաքանչյուր ֆունդամենտալ բազմանդամ մաքսիմալ կոր է:

Այժմ ներկայացնենք մի պնդում, որը օգտագործելու ենք հետագա շարադրանքում.

Պնդում 4.1.11. *Դիցուք q –ն k, $k \leq n$, ասփիճանի կոր է՝ առանց պատիկ կոմպոնենտների, և $\mathcal{X}_s \subset q$ բազմությունը s հանգույցների Π_n–անկախ բազմություն է, որտեղ $s < d(n,k)$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}_s$ բազմությունը կարելի է ընդլայնել մինչև $d = d(n,k)$ հանգույցներով մաքսիմալ Π_n–անկախ $\mathcal{X}_d$ բազմություն՝ ընկած q-ում:*

Ապացույց. Բավական է ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի $A \in q \setminus \mathcal{X}_s$ կետ, որ $\mathcal{X}_{s+1} := \mathcal{X}_s \cup \{A\}$ բազմությունը Π_n –անկախ լինի: Ենթադրենք հակառակը՝ $\mathcal{X}_{s+1} = \mathcal{X}_s \cup \{A\}$ բազմությունը Π_n –կախյալ է ցանկացած $A \in q \setminus \mathcal{X}_s$ կետի դեպքում: Հետևաբար, համաձայն **Լեմմա 4.1.2**-ի, A կետը չունի ֆունդամենտալ բազմանդամ $\mathcal{X}_{s+1}$ բազմության նկատմամբ: Այլ կերպ ասած, տեղի ունի հետևյալը.

$$p \in \Pi_n \ \text{և} \ p|_{\mathcal{X}_s} = 0 \ \Rightarrow \ p(A) = 0, \qquad \forall A \in q:$$

Այստեղից կարող ենք անել հետևություն, որ

$$\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}_s} \subset \mathcal{P}_{n,q} = \{\sigma q : \sigma \in \Pi_{n-k}\}:$$

Այժմ, ըստ **Պնդում 4.1.4**-ի՝ ստանում ենք.

$$N_n - s = dim\,\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}_s} \leq dim\mathcal{P}_{n,q} = N_{n-k}:$$

Ուստի $s \geq d(n,k)$, որը հակասում է մեր պնդման ենթադրությանը: □

Եվ վերջապես ներկայացնենք հետևյալ հայտնի լեմման.

Լեմմա 4.1.12. *Դիցուք երկու տարբեր՝ ամենաշատը k-րդ աստիճանի կորեր անցնում են $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներով: Այդ դեպքում ցանկացած $A \notin \mathcal{X}$ հանգույցի համար գոյություն կունենա k –րդ աստիճանի կոր, որն անցնում է $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր կետերով և A-ով:*

Եվ իրոք, եթե տրված կորերն են q_1-ը և q_2-ը, ապա հեշտությամբ կարող ենք կառուցել ցանկալի կորը, որպես $c_1q_1 + c_2q_2$ գծային կոմբինացիա:

4.2 Հանրահաշվական կորը միակորեն որոշող հանգույցների նվազագույն քանակը

Նախորդ ենթաբաժնում ներկայացվեց, որ կամայական $N-1$ կետերով անցնում է n–րդ աստիճանի կոր: Դիցուք ունենք Π_n–ճշգրիտ $\mathcal{X}_N$ բազմություն: Հետևաբար, $\mathcal{X}_N$-ի կամայական $N-1$ հանգույցներով կանցնի միակ n–րդ աստիճանի կոր: Այլ խոսքերով՝ դա $\mathcal{X}_N$ բազմության վերջին հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամի միջոցով տրվող կորն է:

Այժմ դիտարկենք Π_n–ճշգրիտ $\mathcal{X}_N$ բազմության կամայական $N-2$ հանգույցներ: Այս դեպքում, արդեն, նշված հանգույցներով կանցնեն մեկից ավելի n–րդ աստիճանի կորեր, օրինակ $\mathcal{X}_N$-ի մնացած երկու հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամներին համապատասխանող կորերը: Հետևաբար, ստանում ենք, որ n–րդ աստիճանի կորը միակորեն որոշող Π_n-անկախ հանգույցների նվազագույն քանակը հավասար է $\mathrm{N}-1$:

Դիտարկենք այս խնդիրը ընդհանուր դեպքում: Մեզ հետաքրքրում է Π_n–անկախ հանգույցների նվազագույն քանակը, որոնցով կամայական $k,\ k \leq n-1$, աստիճանի կոր որոշվում է միակորեն:

Ներկայացնենք ատենախոսության արդյունքներից մեկը՝ նշված խնդրի լուծումը $k=n-1$ դեպքում: Այս արդյունքը ներկայացված է [4]-ում:

Պնդում 4.2.1. *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը այնպիսի Π_n-անկախ $N-4$ հանգույցների բազմություն է, որոնք գտնվում են $(n-1)$-րդ աստիճանի կորի վրա: Այդ դեպքում կորը որոշվում է միակորեն: Ավելին, գոյություն ունի Π_n-անկախ $N-5$ հանգույցների այնպիսի բազմություն, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի $(n-1)$-րդ աստիճանի կորեր:*

Ապացույց. Նախ բերենք Π_n-անկախ $N-5$ հանգույցների բազմության օրինակ, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի $(n-1)$-րդ աստիճանի կորեր: Դիտարկենք BR_n -բազմության (տես Գլուխ 2) մի մասը, որը պարունակում է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի առաջին $n-2$ ուղիղները. նշանակենք այդ ուղիղները $l_1, \dots, l_{n-2}$, իսկ դիտարկվող բազմությունը՝

$$\mathcal{X}' = BR_n \cap [l_1 \cup \ldots \cup l_{n-2}]:$$

Այսպիսով, $\mathcal{X}'$ բազմությունը բաղկացած է $\#\mathcal{X}' = (n+1) + n + (n-1) + \cdots + 4 = N - 6$ հանգույցներից: Այս բազմությանն ավելացնենք $A \in BR_n \setminus \mathcal{X}'$ հանգույց և կստանանք նոր $\mathcal{X}^*$ բազմություն՝ $\mathcal{X}^* := \mathcal{X}' \cup \{A\}$: Տեսնենք, որ $\mathcal{X}^*$-ը հանդիսանում է մեր ցանկալի բազմությունը:

Նախ $\#\mathcal{X}^* = N - 5$ և մյուս կողմից էլ $\mathcal{X}^*$-ը Π_n-ճշգրիտ BR_n-բազմության ենթաբազմություն է, հետևաբար, Π_n-անկախ է: Եվ վերջապես, դիտարկենք lq_{n-2} տեսքի $(n-1)$-րդ աստիճանի կորեր, որտեղ l–ը A–ով անցնող կամայական ուղիղ է, իսկ $q_{n-1} = l_1 \ldots l_{n-2}$: Այս բոլոր $(n-1)$-րդ աստիճանի կորերն անցնում են $\mathcal{X}^*$ բազմության բոլոր հանգույցներով, ուստի Թեորեմի երկրորդ հատվածն ապացուցված է:

Այժմ անցնենք Պնդման առաջին հատվածի ապացույցին: Ապացույցը կատարենք հակասող ենթադրությամբ. դիցուք $\mathcal{X}$–ը այնպիսի Π_n-անկախ $\mathrm{N}-4$ հանգույցների բազմություն է, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են երկու տարբեր $(n-1)$-րդ աստիճանի կորեր: Կիրառելով **Լեմմա 4.1.3**-ը՝ ընդլայնենք $\mathcal{X}$ բազմությունը մինչև Π_n-ճշգրիտ $\mathcal{X}_1$ բազմություն՝ ավելացնելով չորս հանգույցներ՝ B_1, B_2, B_3 և A: Ըստ **Լեմմա 4.1.12**-ի՝ գոյություն ունի յուրաքանչյուր B_i հանգույցով և $\mathcal{X}$-ի բոլոր հանգույցներով անցնող $p_i \in \Pi_{n-1}$ կոր, $i = 1, 2, 3$:

Նշանակենք B_i–ով և B_j-ով անցնող ուղիղը l_{ij}, $1 \le i \ne j \le 3$: Համաձայն **Լեմմա 1.3.3**-ի B_1, B_2, B_3 հանգույցները կարող ենք այնպես ընտրել, որ դրանք չգտնվեն մեկ ուղղի վրա և l_{12}, l_{23}, l_{13} ուղիղները չանցնեն $\mathcal{X}$–ի ոչ մի հանգույցով, այսինքն, կարող ենք ապահովել, որ

$$\mathcal{X} \cap l_{ij} = \emptyset, \; 1 \le i < j \le 3: \tag{4.8}$$

Այսպիսով, վերջին ավելացված հանգույցի՝ A-ի ֆունդամենտալ բազմանդամի համար ստանում ենք հետևյալ երեք ներկայացումները.

$$p_A^* = l_{23} p_1,$$

$$p_A^* = l_{13} p_2,$$

$$p_A^* = l_{12}p_3:$$

Իսկապես, պարզ է, որ նշված հավասարությունների աջ կողմի արտադրյալները այնպիսի ոչ զրոյական բազմանդամներ են Π_n բազմանդամային տարածությունից, որոնք զրոյանում են $\mathcal{X}_1 \setminus \{A\}$ բազմության բոլոր հանգույցներում: Մյուս կողմից, դրանք չեն զրոյանում A–ում, քանի որ $\mathcal{X}_1$ բազմությունը Π_n--ճշգրիտ է (տես Գլուխ 1, **Պնդում 1.2.2**):

Սակայն Π_n-ճշգրիտ բազմությունների ֆունդամենտալ բազմանդամները միակն են, իսկ l_{ij} ուղիղները տարբեր են, հետևաբար, անհրաժեշտաբար p_A^* բազմանդամը պետք է ունենա հետևյալ տեսքը.

$$p_A^* = l_{12}l_{23}l_{31}q \text{ , որտեղ } q \in \Pi_{n-3}:$$

Հաշվի առնելով (4.8)-ը՝ այս արդյունքից ստանում ենք, որ q-ն զրոյանում է $\mathcal{X}$–ի բոլոր հանգույցներում: Սա հակասություն է, քանի որ, համաձայն **Պնդում 4.1.6**-ի, Π_{n-3} բազմանդամային տարածությունից բազմանդամը կարող է զրոյանալ ամենաշատը $d(n, n-3) = N - 10$ Π_n-անկախ հանգույցներում: □

Անցնենք խնդրի ընդհանուր դեպքի քննարկմանը. [23] աշխատանքում մենք ստացել ենք կամայական k, $k \le n$, աստիճանի կորի համար հանգույցների նվազագույն թիվը, որոնցով կորը որոշվում է միակորեն: Այդ արդյունքը ներկայացնում ենք ստորև.

Թեորեմ 4.2.2 ([23]). *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը Π_n-անկախ $d(n, k-1) + 2$ հանգույցների բազմություն է, որոնք գտնվում են k-րդ աստիճանի կորի վրա, $k \le n$: Այդ դեպքում կորը նշված հանգույցներով որոշվում է միակորեն: Ավելին, գոյություն ունի Π_n-անկախ $d(n, k-1) + 1$ հանգույցների այնպիսի $\mathcal{X}_1$ բազմություն, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի k-րդ աստիճանի կորեր:*

Ապացույց. Սկսենք Թեորեմի առաջին պնդումից: Ապացույցը կատարում ենք հակասող ենթադրությամբ. ենթադրենք կան երկու կորեր՝ $\sigma, \sigma' \in \Pi_k$, որոնք անցնում են Π_n-անկախ $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր $d(n, k-1) + 2$ հանգույցներով:

Նախ կիրառենք **Պնդում 4.1.11**-ը և ընդլայնենք $\mathcal{X}$ բազմությունը մինչև մաքսիմալ Π_n -անկախ $\widetilde{\mathcal{X}} \subset \sigma$ բազմություն, որը կպարունակի $d(n\,,k)$ հանգույցներ: Պետք է σ կորի վրա ավելացնել $n-k[=d(n,k)-(d(\,n,k-1)+2)]$ հանգույցներ, որոնք կնշանակենք $A_1,\ldots,A_{n-k}$, և կունենանք՝

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{A_i\}_{i=1}^{n-k} \subset \sigma:$$

Արդյունքում, քանի որ σ կորի վրա ստանում ենք Π_n -անկախ $d(n,k)$ հանգույցներ, ապա կորը դառնում է k-րդ աստիճանի մաքսիմալ կոր՝ $\widetilde{\mathcal{X}}$ բազմության նկատմամբ:

Այնուհետ, ընտրենք $n-k$ իրարից տարբեր այնպիսի $l_1,\ldots,l_{n-k}$ ուղիղներ, որոնք անցնեն համապատասխանաբար $A_1,\ldots,A_{n-k}$ կետերով և չհանդիսանան σ կորի կոմպոնենտ (արտադրիչ):

Կառուցենք հետևյալ բազմանդամը.

$$p = \sigma' l_1 \ \ldots\ l_{n-k} \ \in \Pi_n:$$

Նշենք, որ p բազմանդամը զրոյանում է Π_n -անկախ $\widetilde{\mathcal{X}}$ բազմության բոլոր $d(n,k)$ հանգույցներում: Հետևաբար, ըստ **Պնդում 4.1.6**-ի այն ունի հետևյալ տեսքը.

$$p = \sigma q, \ \ q \in \Pi_{n-k}:$$

Ուստի ստանում ենք.

$$\sigma' l_1 \ \ldots\ l_{n-k} = \sigma q: \tag{4.9}$$

$l_1,\ldots,l_{n-k}$ ուղիղները σ կորի արտադրիչներ չեն, ուրեմն, համաձայն (4.9) առնչության, դրանք պետք է լինեն q կորի արտադրիչ, որն էլ նշանակում է, որ

$$q = c l_1 \ \ldots\ l_{n-k}, \qquad \text{որտեղ}\ \ c \neq 0:$$

Այսպիսով, ստանում ենք

$$\sigma' = c\sigma, \qquad c \neq 0,$$

կամ, որ նույնն է՝ σ' և σ կորերը համընկնում են:

Այժմ ապացուցենք Թեորեմի վերջին պնդումը. ցույց տանք, որ գոյություն ունի Π_n-անկախ $d(n,k-1)+1$ հանգույցների այնպիսի բազմություն, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի k-րդ աստիճանի կորեր, որտեղ $k \le n$:

Դիտարկենք BR_n բազմության մի մասը, որի հանգույցները գտնվում են BR_n կոնստրուկցիայի առաջին $k-1$ ուղիղների վրա.

$$\mathcal{X}_0 = BR_n \cap [l_1 \cup \ldots \cup l_{k-1}]:$$

Ունենք, որ $\mathcal{X}_0$ բազմությունը բաղկացած է $d(n,k-1) = (n+1) + n + (n-1) + \cdots + (n-k+3)$ հանգույցներից: Այս բազմությանն ավելացնելով $A \in BR_n \setminus \mathcal{X}_0$ հանգույց՝ կստանանք ցանկալի $\mathcal{X}_1$ բազմությունը, այսինքն՝ $\mathcal{X}_1 \coloneqq \mathcal{X}_0 \cup \{A\}$: Եվ իրոք, այժմ մենք ունենք, որ $\mathcal{X}_1$ բազմությունը Π_n-անկախ է, քանի որ այն Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիային բավարարող Π_n -ճշգրիտ բազմության ենթաբազմություն է, և $\#\mathcal{X}_1 = d(n,k-1)+1$: Եվ վերջում, դիտարկենք lq_{k-1} տեսքի k-րդ աստիճանի կորեր, որտեղ l–ը A–ով անցնող կամայական ուղիղ է և $q_{k-1} = l_1 \ldots l_{k-1}$: Մնում է նշել, որ այս բոլոր k-րդ աստիճանի կորերն անցնում են $\mathcal{X}_1$ բազմության բոլոր հանգույցներով: □

Այժմ ներկայացնենք **Թեորեմ 4.2.2**-ից երկու հետևանքներ: Առաջինը վերաբերում է կամայական $\ge d(n,k-1)+2$ հանգույցներով Π_n-անկախ բազմությանը (նշենք, որ այս դեպքում պարտադիր չէ, որ հանգույցները k-րդ աստիճանի կորի վրա լինեն, $k \le n-1$):

Հետևանք 4.2.3 ([23]). *Դիցուք $\mathcal{X}$-ը Π_n-անկախ հանգույցներով բազմություն է, $\#\mathcal{X} \ge d(n,k-1)+2$, և $k \le n-1$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$ –ում կան Π_k –անկախ առնվազն (N_k-1) կետեր, որտեղ $N_k = \binom{k+2}{2}$:*

Ապացույց. Նշենք, որ անհրաժեշտ է ապացուցել հետևյալը.

$$\mathcal{H}_k(\mathcal{X}) \ge N_k - 1:$$

Նախ ենթադրենք, որ գոյություն ունի k-րդ աստիճանի կոր σ, որն անցնում է $\mathcal{X}$–ի բոլոր հանգույցներով: Հետևաբար, **Թեորեմ 4.2.2**–ի համաձայն, ունենք.

$$dim\mathcal{P}_{k,\mathcal{X}} = 1:$$

Ուստի ստանում ենք, որ

$$\mathcal{H}_k(\mathcal{X}) = dim\Pi_k - dim\mathcal{P}_{k,\mathcal{X}} = dim\Pi_k - 1 = N_k - 1:$$

Այժմ ենթադրենք, որ գոյություն չունի k-րդ աստիճանի կոր, որ անցնի $\mathcal{X}$–ի բոլոր հանգույցներով: Համաձայն **Լեմմա 1.3.2**-ի, ունենք.

$$\mathcal{H}_k(\mathcal{X}) = N_k: \ \square$$

Հաջորդ լեմմայում դիտարկում ենք կամայական Π_n-անկախ $\leq d(n, k-1) + 2$ հանգույցների բազմություն:

Հետևանք 4.2.4 ([23]). *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը Π_n-անկախ հանգույցների բազմություն է, $\#\mathcal{X} \leq d(n,\ k-1) + 2$ և $k \leq n-1$: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ում կան առնվազն $\#\mathcal{X} - (n-k)(k-1)$ Π_k-անկախ հանգույցներ:*

Ապացույց. Նախ, կիրառելով **Լեմմա 4.1.3**–ը ընդլայնենք $\mathcal{X}$ բազմությունը մինչև Π_n -անկախ այնպիսի $\widetilde{\mathcal{X}}$ բազմություն, որի համար $\#\widetilde{\mathcal{X}} = d(n,\ k-1) + 2$: Ըստ **Հետևանք 4.2.3**-ի գոյություն ունի Π_k-անկախ $N_k - 1$ կետերի $\mathcal{Y} \subset \widetilde{\mathcal{X}}$ ենթաբազմություն: Վերջապես, հեռացնենք $\mathcal{Y}$–ից այն բոլոր կետերը, որոնք պատկանում են $\widetilde{\mathcal{X}} \setminus \mathcal{X}$ բազմությանը: Ակնհայտորեն ստացված բազմությունը Π_k-անկախ է և պարունակում է առնվազն

$$N_k - 1 - \left(\#\widetilde{\mathcal{X}} - \#\mathcal{X}\right) = \#\mathcal{X} - (n-k)(k-1)$$

հանգույցներ: $\square$

Այսպիսով, երկու հետևանքների արդյունքում ստանում ենք Π_n -անկախ բազմության մեջ Π_k -անկախ հանգույցների նվազագույն քանակի համար գնահատական:

4.3 Π_n-անկախ հանգույցներով անցնող հանրահաշվական կորերի միակությունը

Այսպիսով, **Թեորեմ 4.2.2**-ում ստացանք, որ կամայական բազմության համար, որը պարունակում է Π_n-անկախ $\mathcal{K} := d(n, k-1) + 2$ հանգույցներ, գոյություն ունի այդ հանգույցներով անցնող ամենաշատը մեկ k, $k \leq n$, աստիճանի կոր, մինչդեռ գոյություն ունեն Π_n -անկախ $\mathcal{K} - 1$ հանգույցներով բազմություններ, որոնցով անցնում են առնվազն երկու k-րդ աստիճանի կորեր: Հենց այսպիսի հանգույցների բազմությունների բնութագրմանն է վերաբերում հետագա շարադրումը:

Թեորեմ 4.3.1 ([24], [25]). *Տրված է Π_n-անկախ հանգույցների $\mathcal{X}$ բազմություն, $\#\mathcal{X} = d(n, k-1) + 1$ և $k \leq n-1$: Այս դեպքում երկու տարբեր k–րդ աստիճանի կորեր կանցնեն $\mathcal{X}$ բազմության հանգույցներով այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$–ի բոլոր հանգույցները՝ բացի մեկից, գտնվեն $(k-1)$–րդ աստիճանի մաքսիմալ μ կորի վրա:*

Ապացույց. Սկսենք հակառակ կողմի ապացույցից: Դիցուք $\mathcal{X}$–ի $d(n, k-1)$ հանգույցներ գտնվում են $(k-1)$–րդ աստիճանի μ կորի վրա: Հետևաբար, ինչպես նշված է Թեորեմի ձևակերպման մեջ, μ կորը մաքսիմալ է և $\mathcal{X}$-ի բոլոր հանգույցները՝ բացի մեկից, պատկանում են այդ կորին: Նշանակենք այդ հանգույցը A–ով՝ $A \notin \mu$:

Այժմ ենթադրենք, որ l_1-ը և l_2-ը A հանգույցով անցնող երկու տարբեր ուղիղներ են: Հետևաբար, հեշտ է տեսնել, որ $l_1\mu$ և $l_2\mu$ կորերը երկու տարբեր k-րդ աստիճանի կորեր են, որոնք անցնում են $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներով:

Այժմ անցնենք Թեորեմի ուղիղ կողմի ապացույցին (ապացուցենք «անհրաժեշտություն» կողմը): Դիցուք երկու k–րդ աստիճանի կորեր՝ σ_1 և σ_2, անցնում են Π_n–անկախ $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներով և $\#\mathcal{X} = d(n, k-1) + 1$: Ընտրենք այնպիսի $B \notin \mathcal{X}$ կետ, որը կբավարարի հետևյալ երեք պայմաններին.

(1) $\mathcal{X} \cup \{B\}$ բազմությունը Π_n–անկախ է,

(2) B–ն չի պատկանում ոչ մի ուղղի, որը կանցնի $\mathcal{X}$-ի հանգույցների որևէ զույգով,

(3) B–ն չի պատկանում σ_1 և σ_2 կորերից ոչ մեկին:

Տեսնենք, որ միշտ կարելի է գտնել այդպիսի կետ: Իսկապես, նախ ընդլայնենք Π_n–անկախ $\mathcal{X}$ բազմությունը: Ըստ **Լեմմա 4.1.3-ի** կարող ենք ընտրել այնպիսի $B' \notin \mathcal{X}$ կետ, որի համար (1) պայմանը կբավարարվի: Այնուհետ, **Լեմմա 1.3.4**-ի համաձայն, գոյություն ունի այնպիսի ε դրական թիվ, որ ընտրված B' կետի ε շրջակայքի բոլոր կետերը կբավարարեն (1) պայմանին: Եվ վերջապես այս շրջակայքից կարելի է ընտրել այնպիսի B կետ, որը չի պատկանի $\mathcal{X}$-ի հանգույցների զույգով անցնող ոչ մի ուղղի և չի պատկանի σ_1 և σ_2 կորերից ոչ մեկին: Այսպիսով, (1), (2) և (3) պայմանները բավարարված են:

Այնուհետ, համաձայն **Լեմմա 4.1.12**–ի, ստանում ենք, որ գոյություն ունի $\mathcal{Y} := \mathcal{X} \cup \{B\}$ բազմության բոլոր հանգույցներով անցնող k –րդ աստիճանի կոր: Նշանակենք այդ կորը σ–ով: Քանի որ B կետն ընտրել ենք այնպես, որ բավարարվի (3) պայմանը, ապա σ կորը կլինի տարբեր σ_1 և σ_2 կորերից: Նշենք, որ σ-ն անցնում է $d(n, k-1)$-ից ավել հանգույցներով, ուստի այն k աստիճանի կոր է և չունի պատիկ արտադրիչներ:

Հաջորդիվ, օգտագործելով **Պնդում 4.1.11**–ը, ընդլայնենք $\mathcal{Y}$ բազմությունը՝ մինչև մաքսիմալ Π_n –անկախ $\mathcal{Z} \subset \sigma$ բազմություն: Նշենք՝ քանի որ մաքսիմալ Π_n – անկախ բազմությունը k-րդ աստիճանի կորի վրա ունի ճիշտ $d(n, k)$ հանգույցներ, մենք պետք է $\mathcal{Y}$-ին ավելացնենք

$$d(n, k) - (d(n, k-1) + 2) = n - k$$

հանգույց: Նշանակենք դրանք $C_1, \dots, C_{n-k}$, և կունենանք

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Y} \cup \{C_i\}_{i=1}^{n-k} = \mathcal{X} \cup \{B\} \cup \{C_i\}_{i=1}^{n-k}:$$

Այսպիսով, σ -ն, $\deg \sigma = k$, դառնում է մաքսիմալ կոր՝ $\mathcal{Z}$ բազմության նկատմամբ:

Դիտարկենք այնպիսի $n-k-1$ ուղիղներ՝ $l_1, l_2, \dots, l_{n-k-1}$, որոնք անցնում են համապատասխանաբար $C_1, C_2, \dots, C_{n-k-1}$ կետերով. այստեղից կհետևի, որ $l_1, l_2, \dots, l_{n-k-1}$ ուղիղները տարբեր են: Պահանջենք նաև, որ այս ուղիղներից ոչ մեկը չլինի σ կորի կոմպոնենտ: Եվ վերջում, նշանակենք $\tilde{l}$–ով այն ուղիղը, որն անցնում է B կետով և ավելացված վերջին C_{n-k} հանգույցով:

Կառուցենք հետևյալ բազմանդամը

$$\sigma_1\, \tilde{l}\, l_1 l_2 \dots l_{n-k-1}:$$

Նկատենք, որ այն n–րդ աստիճանի բազմանդամ է և զրոյանում է $\mathcal{Z} \subset \sigma$ բազմության բոլոր $d(n,k)$ հանգույցներում: Հետևաբար, ըստ **Պնդում 4.1.6**–ի, այն որպես արտադրիչ պետք է պարունակի σ կորը.

$$\sigma_1\, \tilde{l}\, l_1 l_2 \dots l_{n-k-1} = \sigma q\,,\ q \in \Pi_{n-k}: \qquad (4.10)$$

Իրարից տարբեր $l_1, l_2, \dots, l_{n-k-1}$ ուղիղներն ընտրել ենք այնպես, որ $\sigma \in \Pi_k$ կորի արտադրիչ չհանդիսանան, հետևաբար, դրանք $q \in \Pi_{n-k}$ կորի արտադրիչները պետք է լինեն: Ուստի

$$q = l_1 l_2 \dots l_{n-k-1}\, l', \qquad \text{որտեղ } l' \in \Pi_1:$$

Համադրելով սա (4.10)-ի հետ՝ ստանում ենք.

$$\sigma_1 \tilde{l} = \sigma l':$$

Եթե $\tilde{l}$ և l' ուղիղները համընկնեին, ապա σ_1 և σ կորերը ևս կհամընկնեին, որը հնարավոր չէ (σ-ն ստացել ենք այնպես, որ տարբեր լինի σ_1 և σ_2 կորերից): Հետևաբար $\tilde{l}$ ուղիղը $\sigma \in \Pi_k$ կորի արտադրիչն է.

$$\sigma = \tilde{l}\, r, \qquad r \in \Pi_{k-1}:$$

Այժմ դիտարկենք վերջին հարաբերությունն ավելի մանրամասն: Ցանկանում ենք ցույց տալ, որ $(k-1)$-րդ աստիճանի r կորն անցնում է $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցներով՝ բացի մեկից: Եվ իրոք, σ-ն զրոյանում է $\mathcal{X}$-ի բոլոր $d(n,k-1)+1$ հանգույցներում: Ուրեմն այս բազմության հանգույցները բաշխված են r–ի և $\tilde{l}$–ի վրա: Սակայն $\tilde{l}$ ուղիղն անցնում է B կետով, և հետևաբար, ըստ (2) պայմանի, այն կարող է անցնել $\mathcal{X}$-ի ամենաշատը մեկ հանգույցով: Այսպիսով, r–ն անցնում է $\mathcal{X}$–ի առնվազն $d(n,k-1)$ հանգույցներով և, ուրեմն, այն $(k-1)$–րդ աստիճանի մաքսիմալ կոր է: Մյուս կողմից, **Պնդում 4.1.6**–ի համաձայն, $(k-1)$-րդ աստիճանի կորը կարող է անցնել Π_n –անկախ ամենաշատը $d(n,k-1)$ հանգույցներով: Արդյունքում, եզրակացնում ենք, որ r–ը անցնում է $\mathcal{X}$–ի ճիշտ $d(n,k-1)$ հանգույցներով: □

Նշենք, որ Π_n –անկախ $d(n,k-1)+1$ հանգույցներով կամայական $\mathcal{X}$ բազմության համար, որտեղ $k \le n-1$, ունենք.

$$dim\mathcal{P}_{k,\mathcal{X}} \le 2,$$

որտեղ հավասարություն տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցները, բացի մեկից, գտնվում են $(k-1)$-րդ աստիճանի մաքսիմալ կորի վրա:

Իրոք, եթե

$$dim\mathcal{P}_{k,\mathcal{X}} \ge 2,$$

ապա **Թեորեմ 4.3.1.**-ի համաձայն՝ մենք ունենք, որ $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցները, բացի մեկից, գտնվում են $(k-1)$-րդ աստիճանի մաքսիմալ μ կորի վրա: Այժմ, համաձայն **Պնդում 4.1.6**-ի, ունենք, որ

$$\mathcal{P}_{k,\mathcal{X}} = \{\, \alpha\mu : \ \alpha \in \Pi_1, \qquad \alpha(A) = 0 \,\},$$

որտեղ $A \in \mathcal{X}$ հանգույցը μ կորից դուրս հանգույցն է: Ուստի ստանում ենք.

$$dim\mathcal{P}_{k,\mathcal{X}} = dim\{\ \alpha : \alpha \in \Pi_1 , \alpha(A) = 0 \,\} = 2:$$

Թեորեմ 4.3.1-ից անմիջապես ստանում ենք **Թեորեմ 4.2.2**-ը: Ձևակերպենք այն որպես հետևանք:

Հետևանք 4.3.2 ([24]). *Դիցուք $\mathcal{X}$ -ը Π_n-անկախ $d(n,k-1)+2$ հանգույցների բազմություն է: Այդ դեպքում $\mathcal{X}$–ի բոլոր հանգույցներով անցնող միայն մեկ k-րդ աստիճանի կոր կարող է գոյություն ունենալ, $k \le n$:*

Ապացույց. Նկատենք, որ $k = n$ դեպքը ակնհայտ է, քանի որ

$$d(n,n-1)+2 = N-1:$$

Այժմ ենթադրենք, որ $k \le n-1$: Ընտրենք որևէ $A \in \mathcal{X}$ հանգույց և դիտարկենք $\mathcal{Y} := \mathcal{X} \setminus \{A\}$ բազմությունը: Եթե գոյություն ունենա միայն մեկ k–րդ աստիճանի կոր, որն անցնի $\mathcal{Y}$ –ի բոլոր հանգույցներով, ապա նույնը տեղի ունի նաև $\mathcal{X}$-ի համար և ապացույցն ավարտված է: Հետևաբար ենթադրենք կան $\mathcal{Y}$ բազմության բոլոր հանգույցներով անցնող առնվազն երկու կորեր: Այդ դեպքում, ըստ **Թեորեմ 4.3.1**–ի, $\mathcal{Y}$ բազմության մեկից բացի բոլոր հանգույցները պատկանում են $(k-1)$–րդ աստիճանի μ_{k-1} կորի: Նշանակենք կորին չպատկանող հանգույցը B-ով: Ուստի, $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր կետերը, բացի A–ից և B-ից, գտնվում են μ_{k-1} կորի վրա: Այժմ **Թեորեմ 4.1.6**-ի համաձայն, $\mathcal{X}$-ի բոլոր հանգույցներով անցնող կամայական k-րդ աստիճանի կոր պետք է ունենա հետևյալ տեսքը.

$$p = l\mu_{k-1}, \qquad \text{որտեղ} \quad l \in \Pi_1:$$

Եվ վերջապես նկատենք, որ l ուղիղն անցնում է A և B կետերով և, հետևաբար, որոշվում է միակ ձևով: Ուստի, p -ն ևս որոշվում է միակ ձևով: □

Բերենք մի օրինակ, որի վրա ակնառու կլինեն մեր ստացած արդյունքները: Դիտարկենք **Թեորեմ 4.2.2**-ը և **4.3.1**-ը $k = 2$ դեպքում: Արդյունքում ստանում ենք.

2-րդ աստիճանի կորը միակորեն որոշող Π_n-անկախ հանգույցների նվազագույն քանակը հավասար է $n+3$: Այսինքն՝ ցանկացած Π_n-անկախ $n+3$ հանգույցների համար գոյություն ունի միակ 2-րդ աստիճանի կոր, որն անցնում է այդ հանգույցներով, մինչդեռ կան Π_n-անկախ $n+2$ հանգույցներ, որոնցով անցնում են առնվազն երկու 2-րդ աստիճանի կորեր:

Π_n-անկախ $n+2$ հանգույցներով կանցնեն մեկից ավելի 2-րդ աստիճանի կորեր այն և միայն այն դեպքում, երբ հանգույցներից $(n+1)$–ը գտնվեն մաքսիմալ ուղղի վրա, իսկ մեկը մնա այդ ուղղից դուրս:

4.4 3-հանգույցներով ուղիղների օգտագործումների քանակը

Գասքա-Մաեզթուի վարկածն ուսումնասիրելիս (Գլուխ 3) տեսանք, որ Π_n-անկախ հանգույցների բազմությունների հատկությունների ուսումնասիրման հարցում կարևոր դեր է կատարում այն հարցը, թե k-հանգույցներով ուղիղը, $k \leq n$, քանի՞ հանգույցների կողմից կարող է օգտագործվել: Մինչև այժմ ընդհանուր արդյունք դեռ ստացված չէ: $k=2$ դեպքի համար [10]-ում ապացուցված է, որ GC_n բազմության կամայական 2 հանգույցով անցնող ուղիղ կարող է օգտագործվել այդ բազմության միայն մեկ հանգույցի կողմից՝ այն դեպքում, երբ Գասքա-Մաեզթուի վարկածը ճիշտ է n–ը չգերազանցող բոլոր աստիճանների համար: [2]-ում զեկուցվել է, որ այս արդյունքը տեղի ունի ցանկացած ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար: Թերևս, ճշգրիտ բազմությունների համար այն անմիջապես հետևում է **Թեորեմ 4.3.1**-ից, որը և ներկայացնում ենք ստորև.

Հետևանք 4.4.1. *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը Π_n–ճշգրիտ բազմություն է, $\#\mathcal{X}=N=\binom{n+2}{n}$, և l ուղիղը անցնում է այդ բազմության ճիշտ երկու հանգույցներով: Այդ դեպքում l–ը կարող է օգտագործվել $\mathcal{X}$–ի ամենաշատը մեկ հանգույցի կողմից:*

Եվ իսկապես: Եթե ենթադրենք հակառակը, այն է՝ կան երկու հանգույցներ, նշանակենք դրանք $A,B\in\mathcal{X}$, որոնք օգտագործում են l ուղիղը, ապա դրանց ֆունդամենտալ բազմանդամները կունենան հետևյալ տեսքը.

$$p_A^*=lq_1,\ \ p_B^*=lq_2,$$

և $q_1q_2\in\Pi_{n-1}$ կորերը կանցնեն $\mathcal{Y}:=\mathcal{X}\setminus\{l\cup\{A,B\}\}$ բազմության $N-4$ հանգույցներով, որն ըստ **Թեորեմ 4.3.1**-ի հակասություն է:

Ընդհանուր դեպքում ենթադրում ենք, որ Π_n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության համար, որտեղ $\#\mathcal{X}=\mathrm{N}=\binom{n+2}{n}$, ճիշտ է այսպիսի պնդում.

Հիպոթեզ. *Դիցուք l ուղիղը անցնում է Π_n–ճշգրիտ $\mathcal{X}$ բազմության ճիշտ k հանգույցներով: Այդ դեպքում l–ը կարող է օգտագործվել $\mathcal{X}$–ի $\le\binom{k}{2}$ հանգույցների կողմից:*

Հաջորդիվ ներկայացնենք արդյունք՝ ճիշտ երեք հանգույցներով անցնող ուղղի համար: Արդյունքը ապացուցել ենք [24]-ում:

Հետևանք 4.4.2 ([24], [30]). *Դիցուք $\mathcal{X}$–ը Π_n–ճշգրիտ բազմություն է, $\#\mathcal{X}=N$, l ուղիղը օգտագործվում է $\mathcal{X}$–ի որևէ հանգույցի կողմից և անցնում է այդ բազմության ճիշտ երեք հանգույցներով: Այդ դեպքում l–ը կարող է օգտագործվել $\mathcal{X}$–ի կամ ճիշտ* *երեք, կամ ճիշտ մեկ հանգույցի կողմից: Ավելին, եթե այն օգտագործվում է ճիշտ երեք հանգույցների կողմից, ապա այդ հանգույցները համագիծ չեն:*

Ապացույց. Դիցուք $l \cap \mathcal{X} = \{A_1, A_2, A_3\}$: Ենթադրենք նաև՝ կան երկու հանգույցներ $B, C \in \mathcal{X}$, որոնք օգտագործում են l ուղիղը.

$$p_B^* = lq_1,\ p_C^* = lq_2,$$

որտեղ $q_1, q_2 \in \Pi_{n-1}$:

Երկու՝ q_1, q_2, բազմանդամներն էլ զրոյանում են $\mathcal{Y} := \mathcal{X} \setminus \{A_1, A_2, A_3, B, C\}$ բազմության $N-5$ հանգույցներում: Նկատենք, որ $N-5 = d(n, n-2)+1$: Ուստի, ստանում ենք, որ այս $N-5$ հանգույցները միակորեն չեն որոշում դրանցով անցնող $(n-1)$–րդ աստիճանի կորը: Համաձայն **Թեորեմ 4.3.1**–ի, դա կարող է տեղի ունենալ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունենա $\mathcal{Y}$ բազմության $N-6$ հանգույցներով անցնող $(n-2)$–րդ աստիճանի մաքսիմալ μ_{n-2} կոր և մնացած մեկ հանգույցը լինի այդ կորից դուրս: Նշանակենք կորից դուրս հանգույցը D–ով: Քանի որ μ_{n-2}-ը մաքսիմալ կոր է $\mathcal{X}$ բազմության նկատմամբ, ապա, ստանում ենք, որ այն D հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամի արտադրիչ է (**Պնդում 4.1.9**)՝

$$p_D^* = \mu_{n-2} q, \qquad \text{որտեղ } q \in \Pi_2:$$

q-ն երկրորդ աստիճանի բազմանդամ է և պետք է զրոյանա երեք՝ $A_1, A_2, A_3 \in l$, հանգույցներում: Հետևաբար (ըստ **Պնդում 1.2.12**, *1* կետի)

$$q = ll', \qquad \text{որտեղ} \quad l' \in \Pi_1:$$

Ուստի, D-ն ևս օգտագործում է l ուղիղը.

$$p_D^* = \mu_{n-2} ll', \quad l' \in \Pi_1:$$

Այսպիսով, ստանում ենք այսպիսի արդյունք.

եթե $\mathcal{X}$ բազմության երկու հանգույցներ՝ B և C, օգտագործում են l ուղիղը, ապա $\mathcal{X}$-ում կա երրորդ հանգույց՝ D, որը ևս օգտագործում է այն, և

$$\mathcal{Y}' := \mathcal{X} \setminus \{A_1, A_2, A_3, B, C, D\}$$

բազմության բոլոր հանգույցները գտնվում են $(n-2)$–րդ աստիճանի μ_{n-2} մաքսիմալ կորի վրա.

$$\mathcal{Y}' \subset \mu_{n-2}: \tag{4.11}$$

Հաջորդիվ, ցույց տանք, որ գոյություն չունի l ուղիղն օգտագործող չորրորդ հանգույցը: Կապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք, որ $\mathcal{X}$-ում B, C, D հանգույցներից բացի գոյություն ունի նաև E հանգույց, որն օգտագործում է l–ը: Եվ, իհարկե, ունենք որ $E \in \mathcal{Y}'$:

Այնուհետ, B և E հանգույցներն օգտագործում են l ուղիղը, հետևաբար, ապացույցի նախորդ հատվածում մեր ստացած արդյունքը այս երկու հանգույցների համար կիրառելով՝ ստանում ենք, որ գոյություն ունի l-ը օգտագործող $F \in \mathcal{X}$ հանգույց (այս հանգույցը հնարավոր է համընկնի C և D հանգույցներից մեկի հետ, հնարավոր է՝ ոչ), և

$$\tilde{\mathcal{Y}} \coloneqq \mathcal{X} \setminus \{A_1, A_2, A_3, B, E, F\}$$

բազմության բոլոր հանգույցները գտնվում են $(n-2)$–րդ աստիճանի $\tilde{\mu}_{n-2}$ մաքսիմալ կորի վրա: Ունենք նաև, որ

$$p_E^* = \tilde{\mu}_{n-2} l l'', \;\; l'' \in \Pi_1: \tag{4.12}$$

Այժմ նկատենք, որ և՛ μ_{n-2}, և՛ $\tilde{\mu}_{n-2}$ կորերը անցնում են $\mathcal{Z} \coloneqq \mathcal{X} \setminus \{A_1, A_2, A_3, B, C, D, E, F\}$ բազմության բոլոր հանգույցներով, որտեղ $\#\mathcal{Z} \geq N-8$:

Կիրառելով **Թեորեմ 4.2.2**–ը $k = n-2$ դեպքում՝ ստանում ենք՝ $N - 8 = d(n, n-3) + 2$ հանգույցներ որոշում են դրանցով անցնող $(n-2)$–րդ աստիճանի կորը միարժեքորեն: Հետևաբար μ_{n-2} և $\tilde{\mu}_{n-2}$ կորերը համընկնում են:

Այսպիսով, հաշվի առնելով (4.11) և (4.12)-ը, ստանում ենք, որ p_E^* բազմանդամը զրոյանում է $\mathcal{Y}'$–ի բոլոր հանգույցներում, որը հակասություն է, քանի որ $E \in \mathcal{Y}'$:

Այժմ ապացուցենք, որ եթե l ուղիղը օգտագործվում է ճիշտ երեք հանգույցների կողմից, ապա այդ հանգույցները համագիծ չեն: Դիցուք երեք հանգույցներ՝ $B, C, D \in \mathcal{X}$ օգտագործում են l ուղիղը: Ինչպես ստացել էինք վերևում

$$\mathcal{Y}' \coloneqq \mathcal{X} \setminus \{A_1, A_2, A_3, B, C, D\}$$

բազմության հանգույցները գտնվում են $(n-2)$–րդ աստիճանի μ_{n-2} մաքսիմալ կորի վրա: Կատարենք հակասող ենթադրություն. ենթադրենք B, C, D հանգույցները պատկանում են l_1 ուղղի: Այդ դեպքում ունենք, որ $\mathcal{X}$ բազմության բոլոր հանգույցները գտնվում են n աստիճանի $\mu l l_1$ կորի վրա: Սակայն, ըստ **Պնդում 1.2.2**-ի (Գլուխ 1), Π_n–ճշգրիտ բազմության հանգույցները չեն կարող գտնվել որևէ n–րդ աստիճանի կորի վրա: Ստանում ենք հակասություն: □

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

ԹՈՐՈՅԱՆ ՍՈՖԻԿ ՋԱՎԵՆԻ

Π_n-ՃՇԳՐԻՏ ԵՎ Π_n-ԱՆԿԱԽ ՀԱՆԳՈՒՅՑՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- Գտնվել է հարթության վրա $k,\ k \leq n-1$, աստիճանի հանրահաշվական կորը միակորեն որոշող Π_n–անկախ հանգույցների նվազագույն քանակը:
- Բնութագրվել են Π_n–անկախ հանգույցների որոշակի հզորության բազմություններ, որոնցով անցնում են առնվազն երկու $k,\ k \leq n-1$, աստիճանի հանրահաշվական կորեր:
- Գտնվել է Π_n–անկախ բազմության մեջ Π_k–անկախ հանգույցների նվազագույն քանակի գնահատական՝ ցանկացած $k < n$ արժեքների համար:
- Տրվել է Π_n–ճշգրիտ բազմության ճիշտ 3 հանգույցներով անցնող ուղղի օգտա-գործումների քանակի բնութագրումը:
- Ներկայացվել է Գասքա-Մաեզթուի վարկածի $n = 4$ դեպքի երկու նոր, կարճ և պարզ ապացույց:

Վերջում իմ խորին երախտագիտությունն եմ հայտնում իմ գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր Հ.Ա.Հակոբյանին:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] **G. S. Avagyan, L. R. Rafayelyan**, Approximation by poised sets of nodes, *Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences*, (2012), no. 1, 60-62.

[2] **V. Bayramyan,** On the usage of 2-node lines in n–poised sets, International Conference. *Harmonic Analysis and Approximations, VI,* (Tsaghkadzor, Armenia, 2015), Abstracts, p.18.

[3] **V. Bayramyan, H. Hakopian, S. Toroyan**, A simple proof of the Gasca-Maeztu conjecture for $n = 4$, *Jaen J. Approx.,* 7 (2015), no. 1, 137-147.

[4] **V. H. Bayramyan, H. A. Hakopian, S. Z. Toroyan**, On the uniqueness of algebraic curves, *Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences*, (2015), no. 1, 3-7.

[5] **L. Berzolari,** Sulla determinazione di una curva o di una superficie algebrica e su alcune questioni di postulazione, *Lomb. Ist Rend.,* 47 (1914), 556-564.

[6] **C. de Boor,** Multivariate polynomial interpolation: conjectures concerning GC-sets, *Nimer. Algorithms*, 45 (2007), 113-125.

[7] **J. R. Busch,** A note on Lagrange Interpolation in $\mathbb{R}^2$, *Un. Mat. Argentina*, 36 (1990), 33-38.

[8] **J. M. Carnicer and M. Gasca**, A conjecture on multivariate polynomial interpolation, *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. (Esp.) Ser. A Mat.*, 95 (2001), 145-153.

[9] **J. M. Carnicer and M. Gasca**, Classification of bivariate configurations with simple Lagrange interpolation formulae, *Advances in computational Mathematics*, 20 (2004), 5-16.

[10] **J. Carnicer and M. Gasca,** On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation, *Curve and Surface Design* (Saint-Malo 2002) 21-30, Mod. Methods Math., *Nashbaro Press, Brentwood, TN,* 2003.

[11] **J. M. Carnicer and M. Gasca**, Planar configurations with simple Lagrange interpolation formulae, *Mathematical methods for curves and surfaces* (Oslo 2000), 55-62, Innov. Appl. Math., *Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN,* 2001.

[12] **K. C. Chung, T. H. Yao,** On lattices admitting unique Lagrange representations, *SIAM J. Numer. Anal.,* 14 (1977), 735-743.

[13] **D. Eisenbud, M. Green, J. Harris,** Cayley-Bacharach Theorems and Conjectures, *Bull. Amer. Math. Soc., (N. S.),* 33, (1996), no. 3, 295-324.

[14] **M. Gasca and J. I. Maeztu,** On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^{n}$, *Numer. Math.,* 39 (1982) 1-14.

[15] **H. Hakopian**, On a Class of Hermite Interpolation Problem, *Adv. Comput. Math.,* 12 (2000), 303-309.

[16] **H. Hakopian**. On the regularity of multivariate Hermite interpolation, *J. Approx. Theory,* 105 (2000), no.1, 1-18.

[17] **H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann,** Vandermonde matrices for intersection points of curves, *Jaen J. Approx.,* 1 (2009), no. 1, 67–81.

[18] **H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann,** A new proof of the Gasca-Maeztu conjecture for $n = 4$, *J. Approx. Theory,* 159 (2009), 224-242.

[19] **H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann,** The Gasca-Maeztu conjecture for $n = 5$, *Numer. Math.,* 127 (2014), no. 4, 685-713.

[20] **H. Hakopian, A. Malinyan**, Characterization of n-independent sets with no more than $3n$ points, *Jean J. Approx.,* 4 (2012), no. 2, 121-136.

[21] **H. Hakopian, A. Malinyan**, On n-independent sets located on quartics, Proceedings of the YSU, *Physical and Mathematical Sciences,* (2013), no 1, 6-12.

[22] **H. Hakopian and G. Mushyan**, On multivariate segmental interpolation problem, *J.Comp. Sci. & Appl. Math.,* 1 (2015), 19-29.

[23] **H. A. Hakopian, S. Z. Toroyan**, On the minimal number of nodes uniquely determining algebraic curves, *Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences,* (2015), no. 3, 17-22.

[24] **H. Hakopian, S. Toroyan**, On the uniqueness of algebraic curves passing through n-independent nodes, *New York J. Math.,* 22 (2016), 441-452.

[25] **H. Hakopian, S. Toroyan**, On algebraic curves passing through n-independent nodes, Armenian Mathematical Union, Annual Session 2016, Dedicated to the 110th Anniversary of Artashes Shahinyan, Abstracts, p. 62.

[26] **A. Malinyan**, Characterization of n-independent sets of $\leq 3\mathrm{n}$ points in $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$*, Вестник РАУ. Серия физико-математические и естественные науки ,* (2013), no. 1, 3-15.

[27] **J. Radon**, Zur mechanischen Kubatur, *Monatsh. Math.,* 52 (1948), 286-300.

[28] **L. Rafayelyan**, Poised nodes set constructions on algebraic curves, *East J. on Approx.*, 17 (2011), no. 3, 285-298.

[29] **S. Z. Toroyan,** On a conjecture in bivariate interpolation, *Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences,* (2016), no. 1, 30-34.

[30] **S. Toroyan**, On some factorization properties of poised and independent sets of nodes, International Conference. *Harmonic Analysis and Approximations, VI,* (Tsaghkadzor, Armenia, 2015), Abstracts, p. 87.