ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Թորոյան Սոֆիկ Զավենի

Π_π-ՃՇԳՐԻՏ ԵՎ Π_π-ԱՆԿԱԽ ՀԱՆԳՈՒՅՑՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա.01.07 "Հաշվողական մաթեմատիկա"
մասնագիտոնթյ ամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2016

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Тороян Софик Завеновна

О МНОЖЕСТВАХ Π_π-КОРРЕКТНЫХ И Π_π-НЕЗАВИСИМЫХ УЗЛОВ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.07 "Вычислительная математика"

ЕРЕВАН - 2016

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Ա. Հակոբյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Մ. Գ. Գրիգորյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Լ. Ռ. Ռաֆայելյան

Առաջատար կազմակերպություն ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2016թ.-ի դեկտեմբերի 23-ին ժ. 14^{30}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 “Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա” մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով Երևան 0025, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2016թ. նոյեմբերի 21-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար, ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Վ. Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук А. А. Акопян

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук М. Г. Григорян
кандидат физ.-мат. наук Л. Р. Рафаелян

Ведущая организация: Институт математики НАН РА

Защита состоится 23-го декабря 2016 г. в 14^{30} часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика ”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 21-го ноября 2016 г.

Ученый секретарь специализированного совета, доктор физ.-мат. наук

В . Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի արդիականությունը. Հաշվողական մաթեմատիկայի շատ խնդիրներում հաճախ անհրաժեշտ է լինում խնդրի ձևակերպման մեջ մտնող բարդ ֆունկցիաները փոխարինել ավելի պարզերով: Այս նպատակով կիրառվում են տարբեր եղանակներ: Առավել տարածված և վաղ առաջացած մեթոդներից է բազմանդամային միջարկումը կամ ինտերպոլյացիան: Ինտերպոլյացիա տերմինը ներմուծվել է դեռևս 1650-ականներին, Ջ. Ուոլիսի կողմից, և իրենից ներկայացնում է որևէ ֆունկցիայի' որոշ կետերում ընդունած արժեքների միջոցով այդ ֆունկցիայի մոտավոր արժեքների հաշվումը միջանկյալ կետերում: Բազմանդամային միջարկման դեպքում որպես միջարկիչ ֆունկցիաներ օգտագործվում են բազմանդամներ, այսինքն տրված են կետեր, պահանջվում է գտնել բազմանդամ, որի գրաֆիկը ճշգրիտ անցնում է այդ կետերով:

Մեկ փոփոխականի բազմանդամային միջարկման համար սպառիչ արդյունքներ ստացել են դեռևս Լագրանժը և Նյուտոնը, ընդ որում սկզբունքորեն տարբեր մոտեցումներով: Վերջին չորս-հինգ տասնամյակների ընթացքում մաթեմատիկայի շատ բաժիններում հետազոտությունների հիմնական ուղղությունը մի փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքից տեղափոխվեց մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքի: Բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդրի արդի ուսումնասիրությունը սկիզբ է առել 20-րդ դարի երկրորդ կեսից:

Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկման առաջին կարևոր արդյունքները ստացել են Բերզոլարին, Ռադոնը, ինչպես նաև Չանգը և Յաոն: Ներկայումս բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեջ կան շատ չլուծված կարևոր խնդիրներ: Մասնավորապես' լուծված չէ դեռևս 1982 թ.-ին Գասքայի և Մաեզթուի կողմից առաջադրված վարկածը, որը քննարկում ենք ատենախոսության մեջ:

Ներկայումս բազմանդամային միջարկումը մոտարկումների տեսության և հաշվողական մաթեմատիկայի կարևոր բաժիններից մեկն է: Այն լայնորեն օգտագործվում է կիրառական մաթեմատիկայի բազմաթիվ խնդիրներում: Բազմանդամային միջարկումը կարևոր դեր է կատարում միաչափ շատ խնդիրների, ինչպես օրինակ' թվային ինտեգրման, դիֆերենցման, ոչ գծային հավասարումների և դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր լուծման մեջ: Մի քանի փոփոխականի համապատասխան խնդիրներում հաճախ անհրաժեշտ է լինում բազմաչափ միջարկման կիրառությունը:

Բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդիրը սերտորեն առնչվում է հանրահաշվական երկրաչափության հետ, քանի որ դրա միակորեն լուծելիությունը հանգում է այն հարցին, թե արդյոք գոյություն ունի որոշակի աստիճանի հանրահաշվական կոր կամ մակերևույթ, որն անցնում է միջարկման բոլոր հանգույցներով:

Ատենախոսական աշխատանքի նպատակը և խնդիրները. Գասքա-Մաեզթուի վարկածի լուծման մեթոդների հետազոտությունը, երկու փոփոխականի բազմանդամային միջարկման համար հանգույցների անկախ և ճշգրիտ բազմությունների ուսումնասիրությունը, ինչպես նաև հարթության վրա դրանց բնութագրումը:

Հետազոտման օբյեկտը. Երկու փոփոխականի բազմանդամային տարածություններ, միջարկման ճշգրիտ բազմություններ, միջարկման անկախ բազմություններ, երկրաչափական բնութագրությամբ հանգույցների բազմություններ, հարթ հանրահաշվական կորեր, մաքսիմալ կորեր:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեթոդները: Օգտագործվել են նաև գծային հանրահաշվի և հանրահաշվական երկրաչափության որոշ մեթոդներ:

Գիտական նորությունը. Նոր ավելի պարզ ապացույցներ են գտնվել Գասքա-Մաեզթուի վարկածի մասնավոր դեպքերում, որոնք կարող են կիրառվել հետագա դեպքերի ուսումնասիրության համար, բնութագրվել են հարթության վրա որոշակի հզորությամբ անկախ հանգույցների բազմությունները, որոնցով անցնում են առնվազն երկու հանրահաշվական կորեր, գտնվել է հանրահաշվական կորը միակորեն որոշող անկախ հանգույցների նվազագույն քանակը:

Կիրառական նշանակությունը. Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքներն ունեն ինչպես տեսական, այնպես էլ' կիրառական նշանակություն: Վերը նշված արդյունքները վերաբերում են անկախ և ճշգրիտ բազմությունների բնութագրմանը, որոնք կարևոր դեր են կատարում բազմաչափ միջարկումների տեսության մեջ: Այդ արդյունքները կարող են կիրառվել բոլոր այն խնդիրներում, որոնց լուծման մեջ օգտագործվում է բազմաչափ բազմանդամային միջարկումը:

Պաշտպանությանը ներկայացվում են հետևյալ դրույթները.

1. Հարթության վրա fc, fc < *n,* աստիճանի հանրահաշվական կորը միակորեն որոշող ^ -անկախ հանգույցների նվազագույն քանակի որոշումը:
2. ^ -անկախ հանգույցների որոշակի հզորության բազմությունների բնութագրումը, որոնցով անցնում են առնվազն երկու fc, fc < *n,* աստիճանի հանրահաշվական կորեր:
3. սնկախ բազմության մեջ ^-անկախ հանգույցների նվազագույն քանակի գնահատականի ստացումը, որտեղ fc < *n:*
4. ^ ճշգրիտ բազմության ճիշտ 3 հանգույցներով անցնող ուղղի օգտագործումների քանակի բնութագրումը:
5. Գասքա-Մաեզթուի վարկածի *Ո* = 4 դեպքի երկու նոր, ավելի պարզ ապացույցների ներկայացումը:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան. Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի Թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում և Հայկական Մաթեմատիկական Միության 2016 թվականի տարեկան նստաշրջանում:

Հրատարակությունները. Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են հինգ գիտական հոդվածներում և հետևյալ երկու կոնֆերանսների թեզիսներում Հարմոնիկ անալիզ և մոտարկումներ VI Միջազգային կոնֆերանս, Ծաղկաձոր 2015, Հայկական Մաթեմատիկական Միության տարեկան նստաշրջան, 2016:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, չորս գլուխներից, ամփոփումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 30 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 99 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ Աշխատանքի առաջին գլուխը նվիրված է բազմաչափ բազմանդամային միջարկման և նրա հիմնական խնդրի ներկայացմանը:

Պարագրաֆ 1.1-ում ներկայացված են մեկ փոփոխականի բազմանդամների համար Լագրանժի միջարկման խնդիրը և դրա լուծման մեթոդները: Ներկայացվում է, որ միջարկման հանգույցների համապատասխան քանակի ապահովման դեպքում միջարկման խնդիրըը միակորեն լուծելի է և այդ լուծումը տրվում է Լագրանժի և Նյուտոնի բանաձևերի միջոցով:

Պարագրաֆ 1.2-ում դիտարկում ենք Լագրանժի երկչափ միջարկման խնդիրը: Նշանակենք Π_n -ով երկու փոփոխականի' n-ը չգերազանցող գումարային աստիճան ունեցող իրական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը.

^ = I ^ *aijX^iy^ : այյ £ Ջ*

Լ 1+7 <*Ո*

^ բազմանդամային տարածության չափողականությունը տրվում է

(Ո + 2\

= *N* = *ԺւաՈn* = Լ 2]

բանաձևով:

Դիտարկենք կետերի հետևյալ բազմությունը Ք²-ում.

X = X, = {(*!, (%շ,*yշ)* (;*Xտ,ջտ*)}: (1.4)

Ձևակերպենք Լագրանժի բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդիրը. տրված (1.4) կետերի բազմության և կամայական *Շշ, Շ*2,,..., *Շտ* իրական թվերի համար գտնել այնպիսի *p* £ ^ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

*?(*է,7ւ)* = Դ, է = 1, ■ ■■,S: (1.5)

Սահմանում 1.2.1. *Կասենք որ միջարկման խնդիրը Աn-ով ևX* = {(X;,7j)}ք=1 *միաջարկման հանգույցների բազմությամբ ճշգրիտ է, կամ միակորեն լուծելի, եթե ցանկացած շ1, շ*2,,..., *շs արժեքների համար գոյություն ունի միակ p* £ *Ոn բազմանդամ, որը բավարարում է (1.5) պայմաններին:*

Երկչափ միջարկման խնդրի միակորեն լուծելիության անհրաժեշտ պայմանն է.

#Xs = ա = N = մ£ռՍ„: (1.6)

Սակայն (1.6) պայմանը բավարար չէ միջարկման խնդրի ճշգրտության համար: Երկչափ դեպքում ճշգրտությունն էապես կախված է ոչ միայն հանգույցների քանակից, այլ նաև դրանց երկրաչափական փոխդասավորությունից:

Պնդում 1.2.2. *Որպեսզի միջարկման խնդիրը Ωn ով և* X;v = {(X;, *Yi)}ʲ[=1 հանգույցներով լինի ճշգրիտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած բ £ Ωn բազմանդամի համար տեղի ունենա հետևյալ պայմանը.*

,ջի = 0, £ = 1,2,..., *N* ^ *բ* = 0 :

Այստեղից ստանում ենք.

Պնդում 1.2.3. *Միջարկման խնդիրը Ωn-ով և* X;v = {(X;*, Yi)}ʲ[=1 հանգույցներով կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի բ* £ *Ωn, բ փ* 0, *բազմանդամ այնպիսին որ*

թOւ, 7:) = 0, £ = 1,2,..., *Ω:*

Այժմ *ո* գումարային աստիճանի p բազմանդամին համապատասխանեցնենք *բ&, ջ)* = 0 հավասարումով տրվող *ո* աստիճանի հանրահաշվական կոր: Պնդում 1.2.3-ից ստանում ենք *երկչափ բազմանդամային միջարկման ճշգրտության երկրաչափական մեկնաբանությունը.*

Միջարկման խնդիրը Սn-ով և XN = {(X;,*ջւ*)}ք=1 *հանգույցներով ոչ ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի X բազմության բոլոր հանգույցներով անցնող n-րդ աստիճանի հանրահաշվական կոր:*

Այժմ սահմանենք ֆունդամենտալ բազմանդամ երկչափ բազմանդամային միջարկման հանգույցների համար.

Սահմանում 1.2.4. *Կասենք որ բ* £ *Ωn բազմանդամը* ճ £ X *հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամն է, եթե*

ր(ճ) = 1 , ր(S) = 0, *VB £X*\{ճ}:

Հետագա շարադրանքում ճ = (X„*շէ) £* X, 0 < £ < *N,* հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը կնշանակենք *բ*| = p*:

Սահմանում 1.2.10. *Դիցուք X ը Ωn ճշգրիտ բազմություն է: Կասենք, որ* ճ £ X *հանգույցն օգտագործում է q £* , fc < *n, բազմանդամը, եթե այն հանդիսանում է ճ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամի արտադրիչ, այսինքն' բ*| = *qր, որտեղ ր £ Ωn-մ*

Պնդում 1.2.5. *Որպեսզի միջարկման խնդիրը Ωn ով և XN* = {(X,,7յ)}ք=1 *հանգույցներով լինի ճշգրիտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ XN բազմության բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունենան:*

Անցնենք կետերի անկախ բազմությունների սահմանմանը.

Սահմանում 1.2.6. X *բազմությունը կանվանենքΩnանկախ, եթեX բազմության բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունեն:*

Հակառակ դեպքում, երբ որևէ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ գոյություն չունի, X բազմությունը անվանում ենք Ωn-կախյալ:

Նշենք, որ երբ բազմության ոչ մի հանգույց չունի ֆունդամենտալ բազմանդամ, այն անվանում ենք *էապես Ωn-կախյալ:*

Բերենք որոշ անկախ և կախյալ բազմությունների օրինակներ.

1. Ուղղի վրա գտնվող ցանկացած n + 2 կետերի *X* բազմություն էապես nn -

կախյալ է:

2. Ցանկացած n + 1 կետերի *X* բազմություն n_n-անկախ է:

Տեղի ունի նաև

Պնդում 1.2.15. *Ցանկացածս* + 2 *կետերU_n-անկախ են այն և միայն այն դեպքում, երբ չեն գտնվում մեկ ուղղի վրա:*

Սահմանում 1.2.7. *Կասենք որ միջարկման խնդիրը Ω_n-ով և X = {(x_t,* yj)}f=1, s < *N, հանգույցների բազմությամբ լուծելի է, եթե ցանկացածc_1, c_2,,..., c_s արժեքների համար գոյություն ունի* p *£ Ω_n բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

P0i, *yd = c_t, i = 1* s:

Ունենք

Պնդում 1.2.8. *Միջարկման խնդիրը Ω_n ով և X = {(x_t,* yi)}f=1 *հանգույցների բազմությամբ կլինի լուծելի այն և միայն այն դեպքում, երբ X բազմությունը Ω_n - անկախ է:*

Պարզ է, որ այստեղ S < *N* դեպքում միջարկման խնդրի լուծումը միակը չէ:

Ճշգրիտ բազմության ֆունդամենտալ բազմանդամների մի հատկություն ձևակերպենք լեմմայի տեսքով:

Լեմմա 1.2.11. *Եթե միջարկման խնդիրը U_n-ով և X_N բազմության հանգույցներով ճշգրիտ է, ապա ցանկացած A £ X_N հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը ճիշտ n-րդ աստիճանի բազմանդամ է deg p^*_A = n, և այն չի կարող ունենալ պատիկ արտադրիչներ:*

Ներկայացնենք մի հայտնի արդյունք, որը օգտագործում ենք հիմնական արդյունքների ստացման ժամանակ.

Պնդում 1.2.12. *Դիցուք տրված էp £ Ω_n բազմանդամ, I ուղիղ և դիտարկենք իրարից տարբեր n* + 1 *կետեր (x_t,yd, i* = 0,..., *n, I ուղղի վրա: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ երկու դրույթները.*

1. P0i,*yd* =0, *i = 0*................. *n* ^ p|; =0:

2 Pli =0 ^ p = *1q, որտեղq£Ω_n-Հ.*

Պարագրաֆ 1.3-ում ներկայացված են արդյունքներ, որոնք հետևում են այն փաստից, որ Վանդերմոնդի որոշիչը, այսինքն Սահմանում 1.2.1-ով նկարագրվող գծային համակարգի գլխավոր որոշիչը, անընդհատ ֆունկցիա է X_s բազմության հանգույցներից:

Լեմմա 1.3.3. *Դիցուք տրված է Ω_n -անկախ* X; = {(X,,*yi*)}p=1 *բազմությունը: Այդ դեպքում գոյություն ունի £ դրական թիվ այնպիսին, որ ցանկացած*

= {(Հ, 7:')}p=1

բազմություն, որտեղ հեռավորությունը (%p,*}/{) և* (X;, *yi) հանգույցների միջև փոքր է £ իցբոլոր* է*-երի համար, ևս Ω_n -անկախ է:*

Ներկայացնենք նաև հետևյալ լեմման.

Լեմմա 1.3.2. Հանգույցների ցանկացած X ^ *Ω^2բազմության համար հետևյալ երկու պնդումները համարժեք են.*

1. *Գոյություն ունի X բազմության U^-ճշգրիտ ենթաբազմություն:*
2. *Գոյություն չունի X-ի բոլոր հանգույցներով անցնող h-րդ աստիճանի կոր:*

Երկրորդ գլխում ներկայացված են ճշգրիտ բազմությունների հայտնի կոնստրուկցիաներ: Պարագրաֆ 1.2-ում պարզեցինք, որ բազմաչափ միջարկման դեպքում ոչ միշտ են ճշգրտության անհրաժեշտ պայմանին բավարարող բազմությունները ճշգրիտ: Այստեղ դիտարկում ենք ճշգրիտ հանգույցների մի քանի կոնստրուկցիաներ:

Պարագրաֆ 2.1-ում նկարագրում ենք Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիան:

Սահմանում 2.1.1. *Կասենք որ X ^ ^²,* *#X = N =* 1 + 2 + —+ (n + 1), *հանգույցների բազմությունը Բերզոլարի-Ռադոնի բազմություն, կամ 8Ջn բազմություն է, եթե գոյություն ունեն այնպիսի n +* 1 *ուղիղներ 1₀,1*₁,..., *1n, որ*

n + 1 *հանգույցներ պատկանում են 1₀-ին,*

n հանգույցներ պատկանում են 1₁ \ 1₀-ին,

1 հանգույց պատկանում է 1n \{(₀U կU ... U(n-1}:

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2.1.2. *8Ջn բազմությունը Ոn-ճշգրիտ է:*

Պարագրաֆ 2.2-ում ներկայացված է Չանգի և Յաոյի կողմից ներմուծված երկրաչափական բնութագրի պայմանը կամ *ՇՇn* երկրաչափական պայմանը[1], որը նշանակում է' *N =* ("+²) հանգույցներից կազմված Xɴ ^ ^² բազմության ցանկացած ճ հանգույցի համար գոյություն ունեն *n* հատ այնպիսի (ի,..., ուղիղներ, որ

^ « \ { ^ } ր ^ ւ U ...U *1%,* բայց ճ *<£ վ* U ...U *1%:*

Սա համարժեք է հետևյալ սահմանմանը.

Սահմանում 2.2.1. *Կասենք որ Xɴ բազմությունը բավարարում է ՇՇn երկրաչափական պայմանին, եթե* X;v-ի *յուրաքանչյուր ճ EX հանգույցի ը\ ֆունդա*

1 K. C. Chung, T. H. Yao, On lattices admitting unique Lagrange representations, - *SIAM J. Numer. Anal.* , 14 (1977), 735-753.

մենտալ բազմանդամ կարելի է ներկայացնել գծային արտադրիչների արտադրյալի տեսքով, այսինքն գոյություն ունեն 1η,..., 1^ այնպիսի ուղիղներ, որ.

pձ = *ւ ■■■ #:

Այսպիսով Պնդում 1.2.5-ից ստանում ենք.

Թեորեմ 2.2.2. *ՇՇn երկրաչափական պայմանին բավարարող* X *բազմությունը Ωn - ճշգրիտ է:*

Պարագրաֆ 2.3-ում ներկայացված է *ՇՇn* պայմանին բավարարող Նյուտոնի ցանցը:

Սահմանենք

X = {*(j,* fe) £ N2: *j +* fc < *n*}:

Դիտարկենք ուղիղների երեք ընտանիքներ ((1), ((2) և ((3), fe = 0,...,*Ω,* որտեղ ((1) ուղիղներից յուրաքանչյուրը տրվում է *X* = fe հավասարումով, կ. ք *j* = fc հավասարումով և ((3)-ը *X* + *p* = & հավասարումով: Այստեղ X բազմությունը բաղկացած է ուղիղների երեք ընտանիքների հատման կետերից

0', *) = p5 Ω *I:* (3)

7 " Դ "V +&'

և յուրաքանչյուր կետի ֆունդամենտալ բազմանդամ ներկայացվում է հետևյալ տեսքով.

7-1 *t-1* *n*

V, „= Ω'"Ω '"Ω '(S>:

1=0 I=0 I=0

Պարագրաֆ 2.4-ում դիտարկում ենք *ՇՇn* երկրաչափական պայմանին բավարարող մեկ այլ կոնստրուկցիա, որը կոչվում է Չանգ-Յաոյի բնական ցանց:

Սահմանում 2.4.1. Կասենք որ ուղիղները գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ, եթե ուղիղներից ցանկացած 2-ը հատվում են և ոչ մի 3-ը մի կետով չեն անցնում:

Անցնենք Չանգ-Յաոյի բնական ցանցի սահմանմանը.

Սահմանում 2.4.2. *Դիցուք ունենք n* + 2 *ուղիղներ, որոնք գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ: Այդ դեպքում ուղիղների բոլոր հնարավոր զույգերի հատման* (n+2) *կետերը կազմում են Չանգ-Յաոյի բնական ցանց :*

Այս կոնստրուկցիայի յուրաքանչյուր ճ £ X հանգույց ընկած է ճիշտ 2 ուղիղների վրա: Հետևաբար, X \ (ճ) հանգույցները պատկանում են մնացած *n* ուղիղներին: Այսպիսով, X բազմությունը բավարարում է *ՇՇn* պայմանին:

Աշխատանքի երրորդ գլուխը նվիրված է Գասքա-Մաեզթուի վարկածի (GM-վարկած) ուսումնասիրությանը: *ՇՇn* պայմանին բավարարող դիտարկված կոնստրուկացիաները Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի մասնավոր դեպքեր են: Գասքան և Մաեզթուն առաջարկել են վարկած, որը հանգում է հետևյալին. ցանկացած *ՇՇn* բազմություն բավարարում է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկ ցիային: Վարկածն ապացուցված է միայն n < 5 դեպքում: Մենք այս գլխում ներկայացնում ենք ատենախոսության երկու արդյունքներ վարկածի երկու նոր, պարզ ապացույց $\Omega = 4$ դեպքի համար:

Պարագրաֆ 3.1-ում սահմանում ենք մաքսիմալ ուղիղները, որոնք կարևոր դեր են կատարում *GM*-վարկածի ուսումնասիրության ընթացքում:

Սահմանում 3.1.1. *Ուղիղը, որն անցնում է U_n-ճշգրիտ X* ւ![2] *բազմության n* +1 *հանգույցներով, անվանում ենք մաքսիմալ ուղիղ X բազմության համար:*

Ստորև ներկայացնում ենք պնդումներ, որոնք նկարագրում են անկախ բազմության մեջ մաքսիմալ ուղիղների հատկությունները:

Պնդում 3.1.4. *Դիցուք X հանգույցների բազմությունը Ω_n ճշգրիտ է: Այդ դեպքում, եթե I -ը մաքսիմալ ուղիղ է X բազմության համար, ապա X \ I բազմությունը Ω_{n-1} ճշգրիտ է:*

Դժվար չէ ստուգել մաքսիմալ ուղիղների հետևյալ երկու հիմնական հատկությունները

Պնդում 3.1.6. *Ω_n ճշգրիտ X բազմության համար ճիշտ են հետևյալ դրույթները.*

1. *Կամայական երկու մաքսիմալ ուղիղներ հատվում են և դրանց հատման կետը հանգույց էX-ից:*
2. *Ոչ մի երեք մաքսիմալ ուղիղներ չեն հատվում մի կետում:*

Այստեղից, մասնավորապես, ստանում ենք, որ մաքսիմալ ուղիղները գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ: Նշենք նաև, որ *X բազմության համար կարող են գոյություն ունենալ ամենաշատը n + 2 մաքսիմալ ուղիղներ:*

Մաքսիմալ ուղիղները կարևոր նշանակություն ունեն նաև *$ՇՇ_n$* բազմությունների հատկությունների նկարագրման ժամանակ.

Պնդում 3.1.5. *Դիցուք տրված է X բազմություն, որը բավարարում է $ՇՇ_n$ պայմանին և ունի մաքսիմալ ուղիղ I: Այդ դեպքում X\l հանգույցների բազմությունը բավարարում է $ՇՇ_{n-1}$ պայմանին:*

Պարագրաֆ 3.2-ում ներկայացնում ենք

Վարկած (Գասքա-Մաեզթու)[2]. *ԴիցուքX* $\mathbb{R}^2$ *բազմությունը բավարարում է $ՇՇ_n$ պայմանին: Այդ դեպքում Xում կան n + 1 համագիծհանգույցներ:*

Այլ խոսքերով, Գասքա-Մաեզթուի վարկածի համաձայն ամեն մի *$ՇՇ_n$* բազմություն ունի մաքսիմալ ուղիղ:

Եթե վարկածը ճիշտ է *X* բազմության համար, ապա, Պնդում 3.1.6-ի համաձայն, հանելով մաքսիմալ ուղիղը ստանում ենք, որ *X* \ *I* բազմության հանգույցները բավարարում են *$ՇՇ_{n-1}$* պայմանին: Նորից կիրառելով վարկածը կունենանք, որ նոր *X* \ *I* բազմությունը ևս ունի մաքսիմալ ուղիղ, որը այս դեպքում *n* հանգույցներ է պարունակում: Այս գործողությունը շարունակելով ստանում ենք, որ եթե Գասքա-Մաեզթուի վարկածը ճիշտ է, ապա ցանկացած *$ՇՇ_n$* բազմություն բավարարում է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիային: Նշենք նաև, որ Գասքա- Մաեզթուի վարկածի նոր ապացույց $n = 3$ դեպքում:

Պարագրաֆ 3.3-ում բերում ենք ատենախոսության երկու արդյունքներ *GM*-վարկածի երկու ապացույց $\Omega = 4$ դեպքի համար: Նոր առավել պարզ և կարճ ապացույցներ փնտրելով նպատակ ունենք գտնել ընդհանուր դեպքի համար ապացուցման մեթոդ: Առաջին

2 M. Gasca, J. I. Maeztu, On Lagrange and Hermite interpolation in ffi", - Numer. Math. , 39 (1982), 1-14.

ապացույցում օգտագործել ենք *GM* -վարկածի *n* = 5 դեպքի ապացույցի [3] [4] սխեման: Նախ կատարում ենք հակասող ենթադրություն.

Ենթադրություն Ճ. *Xբազմությունը ՇՇ4 բազմություն է առանց մաքսիմալ ուղղի:*

Կիրառել ենք ուղիղների օգտագործումների քանակի համար արդյունքներ, որոնք ապացուցել ենք ատենախոսության մեջ և ներկայացնում ենք ստորև:

Լեմմա 3.3.2. *Դիցուք տեղի ունի Ենթադրություն Ճ -ն: Այդ դեպքում կամայական 2 կամ 3 հանգույցով անցնող ուղիղ կարող է օգտագործվել X բազմության ամենաշատը մեկ հանգույցի կողմից:*

Լեմմա 3.3.3. *Դիցուք տեղի ունի Ենթադրություն Ճ -ն: Այդ դեպքում կամայական 4 հանգույցով անցնող I ուղիղ կարող է օգտագործվել X-ի ամենաշատը 4 հանգույցների կողմից: Եթե 1-ն օգտագործվում է երեք հանգույցների կողմից, ապա դրանք օգտագործում են նաև երկու 4 հանգույցով անցնող ուղիղներ, ընդ որում միևնույն երկուսը:*

Նշենք նաև երկրորդ ապացույցի հիմնական արդյունքներից մեկը.

Լեմմա 3.3.6. *Դիցուք տեղի ունի ԵնթադրությունՃ-ն: ԵթեՃ EX հանգույցն օգտագործում է 4-հանգույցով I ուղիղը, ապա X-ում կան այդ ուղիղը օգտագործող ևս երկու հանգույցներ:*

Աշխատանքի չորրորդ գլխում ներկայացնում ենք ատենախոսության մյուս արդյունքները: Նշանակենք

3

4 H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann, The Gasca-Maeztu conjecture for n = 5, Numer. Math. 127 (2014), 685-713.

$d = d(n, k) = k \quad (2n + 3 - k)$

Այս գլխում մենք գտնում ենք ^ -անկախ հանգույցների նվազագույն քանակը, որոնցով կամայական *k, k <n* — 1, աստիճանի կոր որոշվում է միակորեն: Բնութագրում ենք ^ -անկախ *d(n, k* — 1) + 1 հանգույցներով բազմությունները, որոնցով անցնում են առնվազն երկու *k, k <n — 1,* աստիճանի կորեր, ինչպես նաև ներկայացնում ենք արդյունք 3 հանգույցով անցնող ուղիղների օգտագործումների մասին:

Պարագրաֆ 4.1-ում սահմանում ենք մաքսիմալ կորերը, որոնք Գլուխ 3-ում նկարագրված մաքսիմալ ուղիղների ընդհանրացումն են:

Հետևյալ պնդումը հանդիսանում է Պնդում 1.2.12-ի ընդհանրացում fc, fc *<n,* աստիճանի հանրահաշվական կորերի համար.

Պնդում 4.1.6. *Դիցուք զն* fc, fc *<n, աստիճանի հանրահաշվական կոր է առանց պատիկ կոմպոնենտների, և X =*)}ք=1 *q հանգույցների բազմությունը A_n-անկախ է: Այս պայմանների դեպքումտ < ճ(n,է): Ավելին, տ = ճ(n,*fc) *այն և միայն այն դեպքում, երբ*

,7է) = 0, (= 1 ւո ^ *p*|*q* =0 *և p = qp$_{n-h}$:*

Ստանում ենք, որ *q կորի վրա ծ(n, ե)-ից ավել հանգույցներ A_n-կախյալ են*´ Ելնելով սրանից սահմանենք.

Սահմանում 4.1.8. *Դիցուք տրված է Ωnանկախ տ > մ(n,ե) հանգույցների X,; բազմություն: Եթե* fc, *h < n , աստիճանի կորը անցնում է Xs ֊ի ճ(n, h) հանգույցներով, ապա այն անվանում ենք մաքսիմալ* fc *֊րդ աստիճանի կոր X,; բազմության համար:*

Ներկայացնենք *մաքսիմալ կորերի բնութագիրը* պնդումի տեսքով.

Պնդում 4.1.9.[4] *Դիցուք X հանգույցների բազմությունը Ω_n ճշգրիտ է: Այդ դեպքում* fc, fc *<n, աստիճանի օ բազմանդամը մաքսիմալ կոր էX-ի համար այն և միայն այն դեպքում, եթե այն օգտագործվում է X* | *օ բազմության ցանկացած հւսհգույցի կողմից:*

Ատենախոսության հիմնական արդյունքների ստացման ժամանակ օգտագործել ենք հետևյալ պնդումները.

Լեմմա 4.1.3. *Կամայական A_n-անկախ հանգույցների X բազմություն կարելի է ընդլայնել մինչև A_n-ճշգրիտ բազմություն:*

Պնդում 4.1.11. *Դիցուք օ ֊և* fc, fc *<n, աստիճանի կոր է առանց պատիկ կոմպոնենտների և X,; օ բազմությունը տ հանգույցների Ω_n֊անկախ բազմություն, որտեղ տ < ճ(n,ե): Այդ դեպքումX_m բազմությունը կարելի է ընդլայնել մինչև մ = մ(n, մ) հանգույցներով մաքսիմալ A_n-անկախX_d բազմություն ընկած օ-ում:*

Պարագրաֆ 4.2-ում գտնում ենք ^ -անկախ հանգույցների նվազագույն քանակը, որոնցով կամայական *է,* fc *<n — 1,* աստիճանի կոր որոշվում է միակորեն: Նախ ապացուցում ենք հետևյալ պնդումը, որը այս խնդրի լուծումն է fc = *n — 1* դեպքում:

Պնդում 4.2.1. *ԴիցուքXը A_n-անկախ հանգույցների բազմություն է և որևէ (n — 1)-րդ աստիճանի կոր անցնում էX-ի N — 4 հանգույցներով: Այդ դեպքում կորը* [5] *որոշվում է միակորեն: Ավելին, գոյություն ունի Ω_n -անկախ N —* 5 *հանգույցների այնպիսի բազմություն,*

5 L. Rafayelyan, Poised nodes set constructions on algebraic curves, - East J. on Approx., vol. 17, N3 (2011), 285-298.

որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի (n — 1)-րդ աստիճանի կորեր:

Ապա ներկայացնում ենք ընդհանուր դեպքում արդյունքը.

Թեորեմ 4.2.2. *Դիցուք X -ը Ωn -անկախ ΄Ծ: = մ(n,է — 1) + 2 հանգույցների բազմություն է, որոնք գտնվում են h-րդ աստիճանի կորի վրա,* fc *< n: Այդ դեպքում կորը նշված հանգույցներով որոշվում է միակորեն: Ավելին, գոյություն ունի Ωn - անկախ V — 1 հանգույցների այնպիսի X₁ բազմություն, որի բոլոր հանգույցներով անցնում են մեկից ավելի ե-րդ աստիճանի կորեր:*

Այս թեորեմից ստանում ենք երկու հետևանքներ, որոնք տալիս են զնահատական տրված ^ -անկախ բազմության մեջ ^ -անկախ հանգույցների նվազագույն քանակի համար կամայական fc *<n - 1* արժեքների դեպքում.

Հետևանք 4.2.3. *Դիցուք X ը Ωn -անկախ հանգույցներով բազմություն է, #X > մ (n, h* — 1) + 2 , *և* fc *<n — 1: Այդ դեպքում X ում կան անկախ առնվազն ^ — 1 հանգույցներ, որտեղ ^ = ժ1աΩh = (h+6):*

Հետևանք 4.2.4. *Դիցուք X ը Ωn -անկախ հանգույցների բազմություն է, #X < մ (n,* fc — 1) + 2 *և* fc *<n — 1: Այդ դեպքում X ում կան -անկախ առնվազն #X — (n —* fc)(fc — 1) *հանգույցներ:*

Այսպիսով կամայական ^-անկախ *Ը = ժ (n, է* — 1) + 2 հանգույցներ պարունակող բազմության համար գոյություն ունի այդ հանգույցներով անցնող ամենաշատը մեկ fc -րդ աստիճանի կոր, մինչդեռ գոյություն ունեն ^ -անկախ *Ը — 1* հանգույցներով բազմություններ, որոնցով անցնում են առնվազն երկու fc -րդ աստիճանի կորեր: Հենց այսպիսի հանգույցների բազմության բնութագրմանն է վերաբերում Պարագրաֆ 4.3-ը: Մասնավորապես ապացուցում ենք հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 4.3.1. *Տրված է Աn-անկախ հանգույցների X բազմություն, #X = Ը — 1 և* fc *<n — 1 : Այս դեպքում առնվազն երկու տարբեր* fc *րդ աստիճանի կորեր կանցնեն X բազմության հանգույցներով այն և միայն այն դեպքում, երբX ի բոլոր հանգույցները բացի մեկից, ընկած են (h —* 1) *րդ աստիճանի կորի վրա:*

Նշենք, որ վերջին թեորեմից որպես հետևանք ստանում ենք Թեորեմ 4.2.2-ը:

Պարագրաֆ 4.4-ում ներկայացնում ենք Թեորեմ 4.3.1-ի մի հետևանք ևս: ^ -անկախ կետերի բազմությունների հատկությունների ուսումնասիրման հարցում կարևոր դեր է կատարում այն հարցը, թե fc -հանգույցներով ուղիղը, fc <*n*, քանի կետերի կողմից կարող է օգտագործվել: Մինչ այժմ ընդհանուր արդյունք դեռ ստացված չէ: Այստեղ ներկայացնում ենք արդյունք 3-հանգույցներով ուղղի օգտագործումների վերաբերյալ:

Հետևանք 4.4.2. *Դիցուք X ը Ωn ճշգրիտ բազմություն է, #X* = N = (n+2), *I ուղիղը օգտագործվում էX-ի որևէ հանգույցի կողմից և անցնում է այդ բազմության ճիշտ երեք հանգույցներով: Այդ դեպքում 1-ը կարող է օգտագործվել X ի կամ ճիշտ*

6 V. H. Bayramyan, H. A. Hakopian, S. Z. Toroyan, On the uniqueness of algebraic curves, Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences, N1(2015), 3-7.

երեք, կամ ճիշտ մեկ հանգույցի կողմից: Ավելին, եթե այն օգտագործվում է ճիշտ երեք հանգույցների կողմից, ապա այդ հանգույցները համագիծ չեն:

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները.
Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

1. Գտնվել է fc, fc < n — 1, աստիճանի հանրահաշվական կորը միակորեն որոշող Ω_n անկախ հանգույցների նվազագույն քանակը:
2. Բնութագրվել են ^ անկախ հանգույցների որոշակի հզորության բազմություններ, որոնցով անցնում են առնվազն երկու fc, fc < n — 1, աստիճանի հանրահաշվական կորեր:
3. Գտնվել է ^ անկախ բազմության մեջ ^ անկախ հանգույցների նվազագույն քանակի գնահատական ցանկացած fc < n արժեքներ համար:
4. Տրվել է ^ ճշգրիտ բազմության ճիշտ 3 հանգույցներով անցնող ուղղի օգտագործումների քանակի բնութագրումը:
5. Ներկայացվել է Գասքա-Մաեզթուի վարկածի Ω = 4 դեպքի երկու նոր, կարճ և պարզ ապացույց:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրատարակված աշխատությունների ցանկը. [7] [2] [8] [9] [10] [11] [12]

7 V. H. Bayramyan, H. A. Hakopian, S. Z. Toroyan, A simple proof of the Gasca,- Maeztu conjecture for $n = 4$, Jaen J. Approx. 7(1) (20015), 137-147.

8 H. A. Hakopian, S. Z. Toroyan, On the uniqueness of algebraic curves passing through n-independent nodes, New York J. Math. 22 (2016), 441-452.

9 H.Hakopian, S. Toroyan, On algebraic curves passing through n -independent nodes, Armenian Mathematical Union, Annual Session 2016, Dedicated to the 110th Anniversary of Artashes Shahinyan, Abstracts, p. 62.

10 H. A. Hakopian, S. Z. Toroyan, On the minimal number of nodes uniquely determining algebraic curves, Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences, N3 (2015), 17-22.

11 S. Z. Toroyan, On a conjecture in bivariate interpolation, Proceedings of YSU, Physical and Mathematical Sciences, N1 (2016), pp. 30-34.

12 S. Z. Toroyan, On some factorization properties of poised and independent sets of nodes, International Conference in Harmonic Analysis and Approximations, VI, 2015, Abstracts, p. 87.

РЕЗЮМЕ

Полиномиальная интерполяция является одним из основных предметов в теории приближений и численного анализа. Термин интерполяция введен Джоном Уоллисом в 1655 году. Полное решение задачи одномерной полиномиальной интерполяции был получен Лагранжом и Ньютоном. Задача многомерной полиномиальной интерполяции является гораздо более сложной, чем ее одномерный аналог. Существование и единственность решения задачи зависят не только от количества узлов интерполяции, но также от их распределения.

Обозначим через Π_n пространство полиномов двух переменных суммарной степенью не больше чем n. Имеем следующее: $N := \dim \Pi_n = \binom{n+2}{2}$. Множество узлов $\mathcal{X}$ называется Π_n-корректным, если задача интерполяции однозначно разрешаема для $\mathcal{X}$ и Π_n. Мы назовем полином $p \in \Pi_n$ фундаментальным для узла $A \in \mathcal{X}$, если он обращается в ноль во всех узлах $\mathcal{X}$, кроме A. Следовательно, фундаментальный полином является кривой степени n, проходящей через все узлы $\mathcal{X}$, кроме одного.

Чанг и Яо ввели условие геометрической характеризации *(GC)* [K. C. Chung, T. H. Yao, On lattices admitting unique Lagrange representations, - *SIAM J. Numer. Anal.* , 14 (1977), 735-753.]. Множество узлов $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2, \#\mathcal{X} = \binom{n+2}{2}$, удовлетворяет условию геометрической характеризации для Π_n, или кратко GC_n, если для любого узла $A \in \mathcal{X}$ существуют такие n прямые, которые проходят через все узлы $\mathcal{X} \setminus \{A\}$, и не проходят через A. Другими словами, $\mathcal{X}$ - множество GC_n , если все фундаментальные полиномы $\mathcal{X}$ являются произведениями линейных множителей. Будем говорить, что узел $A \in \mathcal{X}$ использует прямую (кривую), если эта прямая (кривая) является множителем фундаментального полинома узла A. Следовательно, во множествах GC_n любой узел использует n прямых.

Прямая, содержащая $n+1$ узлов Π_n -корректного множества $\mathcal{X}$, называется максимальной. Максимальные прямые играют важную роль в исследовании GC множеств. В 1982 году Гаска и Маэзту представили гипотезу [M. Gasca and J. I. Maeztu, On Lagrange and Hermite interpolation in , Numer. Math., 39, (1982), 1-14], утверждающую, что каждое GC_n множество имеет максимальную прямую. До настоящего времени гипотеза доказана только для $n < 5$. В диссертации мы приводим два доказательства гипотезы для $n = 4$. Новые, более простые доказательства помогают в исследовании общего доказательства гипотезы.

Далее, мы приводим определение максимальных кривых, которые являются обобщением максимальных прямых. Алгебраическая кривая степени $k, k < n$, называется максимальной, если она содержит ровно $(1/2)k(2n-k+3)$ узлов Π_n- корректного множества. Максимальность означает, что кривая проходит через возможно максимальное количество Π_n-независимых узлов.

Множество узлов $\mathcal{X}$ называется Π_n-независимым, если все его узлы имеют фундаментальные полиномы. В противном случае, если какой-то узел не имеет фундаментальный полином, то множество называется Π_n-зависимым. Фундаментальные

полиномы узлов линейно независимы. Следовательно, необходимым условием для П„ - независимости является следующее: #X < (ⁿ+²).

Известно, что для любого множества *X,* мощностью *N* — 1, существует кривая степени *п,* проходящая через все его узлы. Допустим, имеем П„-корректное множество X. Тогда мы можем заключить, что через любые *Ы* — 1 узлы множесвта X проходит единственная кривая степени *п.* Эта кривая определяется фундаментальным полиномом отсутствующего узла. Далее, через любые *N* — 2 узлы множества X проходят больше чем одна кривые степени *п;* например, кривые, определяемые фундаментальными полиномами отсутствующих двух узлов. Следовательно, минимальное число П„ - независимых узлов, однозначно определяющих кривую степени *п,* равно *N* — 1.

В диссертации мы рассматриваем эту задачу для кривой любой степени *к, к < п* — 1. Мы доказываем следующее:

Теорема. *Минимальное число $П_п$ -независимых узлов, однозначно определяющих кривую степени к, к <п — 1, равно*

$$V = (1/2)\ (к - 1)\ (2п + 4 - к) + 2.$$

Или, точнее, для любого П„-независимого множества, мощностью *V,* существует не более, чем одна кривая степени *к, к <п* — 1, проходящая через все его узлы, в то время, как существуют $П_п$-независимые множества мощностью Ъ — 1, через которые проходят по крайней мере две такие кривые. Отметим, что изначально была рассмотрена задача в случаи $к = п - 1$.

Далее, мы представляем характеристику $П_п$-независимых множеств мощностью Ъ — 1, через которые проходят по крайней мере две кривые степени *к.*

Теорема. *Пусть X —* $П_п$ *-независимое множество узлов, с мощностью #X =* Ъ — 1. *Тогда через любые узлы множества X проходят по крайней мере две кривые степени к тогда и только тогда, когда все узлы X, кроме одного, принадлежат максимальной кривой степени к — 1.*

Мы доказываем, что из этого результата вытекает вышеуказанная Теорема.

Мы также представляем приложение к гипотезе Гаска-Маэзту. Мы доказываем, что прямую, используемой в *X* и проходящую через три узла множества X, используют или ровно три узла или ровно один узел из X.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Получено минимальное число $П_п$ -независимых узлов, однозначно определяющих алгебраическую кривую степени *к, к < п.*
2. Охарактеризованы множества $П_п$-независимых узлов, с определенной мощностью, через которые проходят как минимум две алгебраические кривые степени *к, к < п.*
3. Получена оценка минимального числа $П_к$-независимых узлов в $П_п$-независимом множестве.
4. Получено число узлов $П_п$-корректного множества, узлы которго используют прямую, проходящую через 3 узлов этого множества.
5. Получены две новые простые и короткие решения гипотезы Гаска-Маэзту, для $п = 4$.

The polynomial interpolation is one of the main subjects of Numerical Analysis and Approximation Theory. The term interpolation was introduced by J. Wallis in 1655. The complete solution for the univariate interpolation was given by Lagrange and Newton. The multivariate interpolation is much more complicated than its univariate counterpart. The uniqueness and existence of interpolating polynomial depend not only on the number of nodes, but also on the configuration of nodes.

Denote the space of bivariate polynomials of total degree at most *n* by n_n. We have that *N*: = *dim* n_n = ("+^{2}). A set of nodes X is called n„-poised if the interpolation problem is unisolvent for X and n„. We call a polynomial p £ n_n fundamental for the node *A* £ X, if it vanishes at all the nodes of X but 4. Therefore, a fundamental polynomial is an algebraic curve of degree n running through all nodes of X but one.

Chung and Yao introduced the condition of geometric characterization (GC) [K. C. Chung, T. H. Yao, On lattices admitting unique Lagrange representations, - *SIAM J. Numer. Anal.,* 14 (1977), 735-753.]. A set of nodes X c R^2,#X = ("+^{2}) is said to satisfy the geometric characterization for n„, or briefly GC„, if for any node *A* £ X there are n lines passing through all the nodes of X\4, which do not pass through 4. In other words X is a GC„ set if all the fundamental polynomials of the set X are products of linear factors. We say that the node *A* £ X uses a line (curve), if the line (curve) is a factor in the fundamental polynomial of the node 4. Therefore, in GC„ set any node uses n lines.

A line containing n + 1 nodes of n„-poised set X is called a maximal line. Maximal lines play an important role in investigation of GC sets. In 1982 Gasca and Maeztu conjectured that any GC„ set possesses a maximal line [M. Gasca and J. I. Maeztu, On Lagrange and Hermite interpolation in R^{fc} , Numer. Math., 39, (1982), 1-14]. Till now it was only proved for n < 5. In the thesis we bring two short and simple proofs of the conjecture for the case n = 4. New simple proofs are helpful for further investigation of the conjecture.

Next we bring the definition of maximal curves, which are the generalizations of maximal lines. We call maximal an algebraic curve of degree fc, *k* < *n,* if it passes through exactly (1/2)fc(2n — fc + 3) nodes from a n„-poised set X. The maximality means that the curve passes through maximal possible number of n„-independent nodes

A set of nodes X is called n„ -independent if all its nodes have fundamental polynomials. Otherwise, if a node has no fundamental polynomial, then it is called n„- dependent. Fundamental polynomials are linearly independent. Therefore a necessary condition of n„-independence of X is #X < N.

It is well known that for any set X of cardinality N — 1 there exists a curve of degree n passing through all its nodes. Suppose we have a n_n-poised set X. Then we can conclude readily, that through any N — 1 nodes of X there pass a unique curve of degree n. This curve is given by the fundamental polynomial of the missing node. Next, through any N — 2 nodes of X there pass more than one curve of degree n; for example the curves given by the fundamental polynomials of the two missing nodes. Thus we have that the minimal number of n_n-independent nodes determining uniquely the curve of degree n equals to $N-1$.

In the thesis we consider this problem in the case of curve of arbitrary degree k, $k<n-1$. We prove the following

Theorem. *The minimal number of n_n-independent nodes determining uniquely the curve of degree k, $k<n-1$, equals*

$$V=(1/2)(k-1)(2n+4-k)+2.$$

Or, more precisely, for any n_n-independent set of cardinality V there is at most one curve of degree k, $k<n-1$, passing through its nodes, while there are n_n-independent node sets of cardinality $V-1$ through which pass at least two such curves. Let us mention that initially the case $k=n-1$ of the above described problem was considered.

Then we bring a characterization of the case when at least two curves of degree k pass through the nodes of a n_n-independent node set of cardinality $V-1$. Namely, we prove:

Theorem. *Given a n_n-independent set X of cardinality $\#X=V-1$. Then there are two curves of degree k, $k<n-1$, passing through all the nodes of X if and only if all its nodes but one belong to a maximal curve of degree $k-1$.*

We show that this result yields the above mentioned Theorem.

We also present an application to the Gasca-Maeztu conjecture. We show that a used line passing through exactly three nodes of the node set X is used either by exactly one or by exactly three nodes from X.

The following main results are obtained in the thesis:

1. The minimal number of n_n-independent nodes, uniquely determining the algebraic curve of degree k, $k<n$, is obtained.
2. The sets of n_n-independent nodes of certain cardinality, through which pass at least two algebraic curves of degree k, $k<n$, are characterized.
3. An estimate for the minimal number of n_k-independent nodes in a n_n-independent node set is obtained, where $k<n$.
4. The number of nodes in a n_n-poised set, using a line passing through exactly 3 nodes of it, is obtained.
5. Two new simple and short proofs of the Gasca-Maeztu conjecture for $n=4$ are obtained.