

ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ  
ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ղալթաղյան Հայկ Ցոլակի

Երկամասնիկային և բազմամասնիկային երևույթների ուսումնասիրությունը  
գնդային և արսիալ համաչափություններով քվանտային կետերում

Ա.04.10 – «Կիսահաղորդիչների ֆիզիկա» մասնագիտությամբ  
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական  
աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Ս Ա Գ Ի Դ

ԵՐԵՎԱՆ – 2016

---

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА  
ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Калтахчян Айк Цолакович

Исследование двухчастичных и многочастичных эффектов в квантовых  
точках со сферической и аксиальной симметриями

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико –  
математических наук  
по специальности 01.04.10 – “Физика полупроводников”

ЕРЕВАН – 2016

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայ-Ռուսական Համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝  
Ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր  
Հ.Ա. Սարգսյան, ՀՌՀ

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝  
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ,  
Ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր  
Ռ.Ս. Ավագյան, ԵՊՀ ֆիզիկայի ֆակուլտետ  
Ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր  
Կ.Ս. Ղամբարյան, ԵՊՀ ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետ

Առաջատար կազմակերպություն՝  
ՀՀ ԳԱԱ Ռադիոֆիզիկայի և էլեկտրոնիկայի  
ինստիտուտ

Ատենախոսության պաշտպանությունը տեղի կունենա 2016թ. հունիսի 24-ին, ժամը 15<sup>00</sup>-ին  
Երևանի պետական համալսարանի ֆիզիկայի 049 մասնագիտական խորհրդի նիստում:  
Հասցե՝ 0025, Երևան, Ա. Մանուկյան 1

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Սեղմագիրը ցրված է 2016թ. մայիսի 23-ին

Մասնագիտական խորհրդի  
գիտական քարտուղար  Ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ  
Վ.Պ. Բալանթարյան

Тема диссертации утверждена в Российско-Армянском университете

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор  
А.А. Саркисян, РАУ

Официальные оппоненты: член-корреспондент НАН РА  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
Р.М. Авагян, физический факультет ЕГУ  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
К.М. Гамбарян, радиофизический факультет ЕГУ

Ведущая организация: Институт радиофизики и электроники НАН РА

Защита диссертации состоится 24-го июня 2016г. в 15<sup>00</sup> часов на заседании  
специализированного совета по физике 049 Ереванского государственного университета  
по адресу: 0025, Ереван, ул. А. Манукяна 1

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 23-го мая 2016г.

Ученый секретарь  
специализированного совета  кандидат физ.-мат. наук, доцент  
В.П. Калантарян

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Актуальность исследования**

Квантовые точки (КТ) являются полупроводниковыми наноструктурами, в которых наиболее ярко выражены эффекты размерного квантования [1-3]. Это обстоятельство позволяет достаточно гибким образом управлять спектром энергии носителей заряда в таких системах, путем изменения размеров и геометрии КТ. Данное обстоятельство дает возможность рассматривать КТ как многообещающие кандидаты для элементной базы полупроводниковых устройств нового поколения [4-5]. Помимо чисто прикладного, КТ имеют также важное академическое значение. В таких системах можно экспериментально проверить важнейшие положения квантовой механики, которые изначально были сформулированы в рамках исключительно теоретических моделей. Ярким примером сказанного является задача о поведении электрона в сферически-симметричной КТ, которая является аналогом точно решаемой задачи сферически-симметричной квантовой ямы [6]. Важнейшей задачей описания физических процессов, происходящих в КТ, является построение правильной математической модели КТ. Так как поведение частиц в КТ описывается в рамках нерелятивистской квантовой механики, то возникает необходимость построения соответствующего шредингерского гамильтониана изучаемой системы, в котором должны отражаться с одной стороны геометрия КТ, а с другой физико-химические особенности состава КТ и окружающей ее среды.

С точки зрения математического описания, наиболее удобными системами являются КТ со сферической симметрией [7,8]. В подобных системах в уравнении Шредингера переменные разделяются не только в случае одночастичного приближения, но и в случае когда в геометрическом центре КТ расположена примесь. Примесные состояния в сферических КТ исследованы во многих работах. При этом наряду с одноэлектронными примесными состояниями в КТ могут реализоваться также двухэлектронные примесные состояния [9-12]. Такие системы значительно отличаются от одноэлектронных, так как здесь существенную роль начинают играть спиновые эффекты. Характерной особенностью двухэлектронных систем является наличие обменного взаимодействия между этими электронами. Это чисто квантовый эффект, и можно показать, что со временем электроны обмениваются состояниями. При этом, указанное время определяется обменным интегралом [12]. В этой связи

возникает интерес изучить обменные эффекты в двухэлектронной примесной системе, локализованной в сферической КТ, так как меняя радиус КТ можно управлять обменным интегралом и, следовательно, временем обмена состояниями между электронами.

Другим классом интересных задач, связанных с несколько-частичными эффектами в КТ, является исследование длинноволнового поглощения разряженным электронным газом в КТ с параболическим ограничивающим потенциалом [13-17]. Это обусловлено с тем обстоятельством, что в подобных системах стало возможным обобщение теоремы Кона в случае низкоразмерных полупроводниковых структур. Суть теоремы заключается в том, что частота циклотронного резонанса электронного газа, находящегося в магнитном поле, не зависит от межэлектронного взаимодействия [13]. Если этот газ локализовать в КТ, то возникнет необходимость учета влияния ограничивающего потенциала КТ. В работах [14-17] показано, что для обоснования обобщенной теоремы Кона необходимо для ограничивающего потенциала КТ взять параболическое приближение. Таким образом, наличие параболического ограничивающего потенциала является важнейшим критерием реализации обобщенной теоремы Кона. С другой стороны, хорошо известно, что в структурах с сильно вытянутой или же сплюснутой эллипсоидальной геометриями также возникают параболические потенциалы ограничения [6]. Поэтому, возникает интерес выявить критерии реализации обобщенной теоремы Кона в подобных КТ и, в частности, в сильно вытянутой эллипсоидальной КТ (СВЭКТ).

Параллельно с КТ, в последние годы, интенсивно изучаются наноструктуры обладающие слоистой сферической и цилиндрической геометриями. В таких системах одноэлектронные уровни можно управлять, меняя как внутренний радиус, так и внешний. При этом, полученные результаты имеют обобщающий характер. Из этих структур, путем предельных переходов могут быть реализованы как КТ, так и квантовые ямы и квантовые пленки. В связи с этим, вполне резонно исследовать термодинамические и магнитные свойства электронного газа, локализованного в подобных структурах.

Представленная диссертационная работа посвящена исследованию электронных, оптических и магнитных свойств двухчастичных и многочастичных

систем в КТ со сферической и аксиальной симметриями, а именно – сферических и цилиндрических КТ, а также СВЭКТ и цилиндрических нанослоях.

### **Цель работы**

1. Исследование обменных эффектов в двухэлектронных примесных системах, локализованных в сферических КТ.
2. Выявление условия реализации обобщенной теоремы Кона в СВЭКТ, содержащих несколько-частичный электронный газ, как в отсутствие, так и при наличии магнитного поля.
3. Изучение характера диамагнитной восприимчивости электронного газа, локализованного в цилиндрическом нанослое.

### **Научная новизна**

1. Изучен характер зависимости времени обмена состояниями в двухэлектронной примесной системе, локализованной в сферической КТ с бесконечным и конечным ограничивающими потенциалами.
2. Выявлены критерии реализации обобщенной теоремы Кона в СВЭКТ, как в отсутствие, так и при наличии магнитного поля.
3. Изучены диамагнитные свойства электронного газа, локализованного в цилиндрическом нанослое в зависимости от величины приложенного магнитного поля, а также геометрических параметров нанослоя.

### **Научная и практическая ценность**

Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы для построения модельных гамильтонианов, описывающих КТ нетривиальной геометрии, а также постановки новых экспериментов, выявляющих электронные, оптические и магнитные характеристики КТ, обладающих сферической и аксиальной симметриями. Они могут быть полезны при конструировании полупроводниковых приборов нового поколения.

### **Основные научные положения, выносимые на защиту**

1. С ростом радиуса КТ время обмена состояниями между электронами двухэлектронной примеси, локализованной в сферической КТ с параболическим ограничивающим потенциалом, имеет насыщающий характер.
2. Время обмена состояниями между электронами двухэлектронной примеси, локализованной в сферической КТ конечной глубины, в зависимости от радиуса

КТ имеет точку минимума, которая соответствует квантовому выбросу одного из электронов из КТ в окружающую среду.

3. Благодаря специфической геометрии СВЭКТ в ней реализуются условия выполнения обобщенной теоремы Кона.
4. Для бoльцмановского электронного газа, локализованного внутри цилиндрического нанослоя, реализуется диамагнитная фаза, при этом намагниченность газа имеет линейную зависимость от величины приложенного магнитного поля.

### **Апробация работы**

Основные результаты диссертационной работы обсуждались на научных семинарах РАУ, а также докладывались на следующих научных конференциях и школах:

- Международная зимняя школа по физике полупроводников, Санкт-Петербург, Россия 27 февраля - 3 марта, 2015.
- 49-я Школа ПИЯФ по Физике Конденсированного Состояния, Санкт-Петербург, Зеленогорск, Россия, 16-21 марта 2015.
- 3rd International Symposium "Optics and its Applications" (OPTICS-2015) Yerevan - Ashtarak, Armenia October 1-5, 2015.
- Десятая годовичная научная конференция. РАУ. Ереван, Армения, 30 ноября – 4 декабря, 2015.
- XI International Symposium on Quantum Theory and Symmetries, Yerevan, Armenia, July 13-18, 2015.

### **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 5 работ и одна принята к печати в журнале «Ядерная физика». Список приводится в конце автореферата.

### **Структура и объем работы**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Текст изложен на 103 страницах и содержит 26 рисунков, 4 таблицы и 105 наименований литературы.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** дан обзор научной литературы, охватывающей тематику диссертационной работы. Представлены необходимые базовые понятия, относящиеся к физике двухчастичных и многочастичных систем, локализованных в полупроводниковых наноструктурах. Представлены цель диссертации и ее основные положения.

**Первая глава** диссертации посвящена исследованию двухэлектронных примесных состояний в сферических КТ. При этом в первом случае ограничивающий потенциал КТ аппроксимируется параболическим, а во втором – прямоугольным потенциалом конечной глубины.

**В параграфе 1.1** на основе соотношения неопределенностей Гейзенберга проводится оценка значения энергии двухэлектронной примеси, локализованной в центре КТ с параболическим ограничивающим потенциалом.

Энергия системы имеет вид:

$$E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{p_1^2}{2\mu} + \frac{p_2^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{\mu\omega^2 r_2^2}{2} - \frac{Ze^2}{\epsilon r_1} - \frac{Ze^2}{\epsilon r_2} + \frac{e^2}{\epsilon |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad (1)$$

где  $\mu$  – эффективная масса электрона,  $\epsilon$  – диэлектрическая постоянная полупроводника (для *GaAs*  $\epsilon = 12.9$ ),  $\omega$  – частота ограничивающего потенциала,  $Z$  – заряд примеси. Заметим, что, поменяв местами частицы, выражение для энергии не изменится, вследствие чего для оценок можно положить, что

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}, \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}. \quad (2)$$

Из условия минимизации энергии системы

$$\frac{dE(r)}{dr} = 0, \quad (3)$$

придем к уравнению четвертой степени для определения дистанции между электронами, которой соответствует минимум энергии

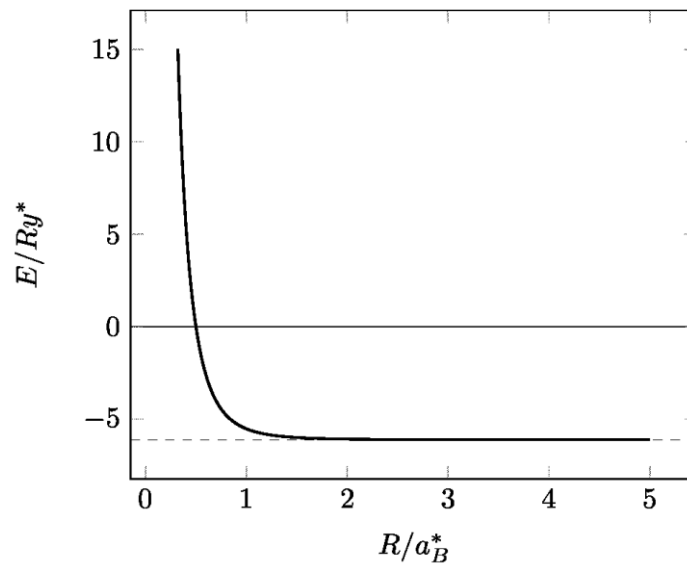
$$\frac{r_{rel}^4}{R_{rel}^4} + \left( Z - \frac{1}{4} \right) r_{rel} - 1 = 0, \quad (4)$$

где введены безразмерные величины

$$r_{rel} = \frac{r}{a_B^*}; R_{rel} = \frac{R}{a_B^*}, \quad (5)$$

где  $R$  – радиус КТ,  $a_B^*$  – эффективный радиус Бора.

Численное решение уравнения (4) позволяет получить зависимость энергии системы от радиуса КТ, которая представлена на рис. 1. Как следует из него, при малых значениях радиуса КТ, когда энергия размерного квантования больше энергии электрон-электронного взаимодействия, энергия системы положительна. С увеличением радиуса КТ, размерное квантование ослабляется и кулоновское взаимодействие становится существенным, в результате энергия принимает отрицательные значения.



**Рис. 1.** Зависимость энергии (в эффективных ридбергах  $Ry^*$ ) двухэлектронной примеси в параболической КТ от радиуса КТ (в эффективных боровских радиусах  $a_B^*$ ).

**В параграфе 1.2** в рамках вариационного метода рассмотрена задача аналогичной предыдущей. Вычислена энергия взаимодействия электронов в заданной системе. Вариационная функция радиальной части берется в следующей форме:

$$\Psi_{ir}(\rho, \lambda) = C(\lambda) \exp\left(-\frac{\beta \rho^2}{\lambda}\right) \exp(-\lambda \rho), \quad (6)$$

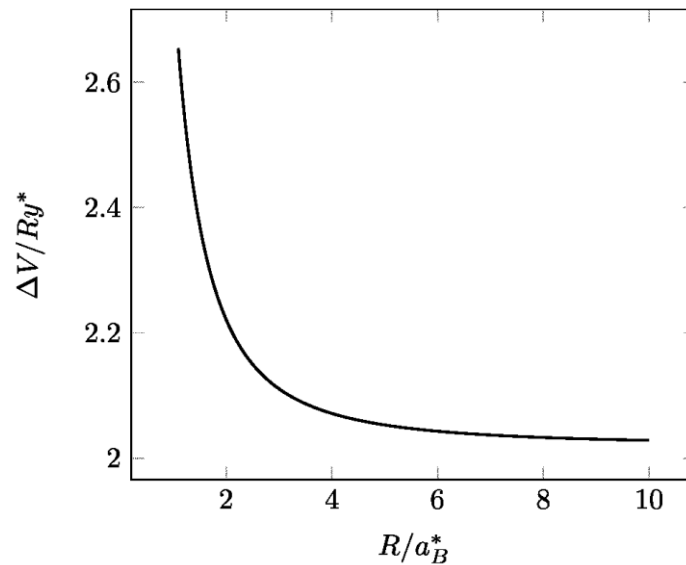
где  $\lambda$  – вариационный параметр,  $C(\lambda)$  – постоянная нормировки,  $\beta = \frac{\hbar \omega}{2Ry^*}$  – параметр описывающий потенциал ограничения.

Двухэлектронная волновая функция рассматривается как произведение одноэлектронных волновых функции.

Зависимость энергии электрон-электронного взаимодействия от радиуса КТ приведена на рис. 2. Как следует из него с увеличением радиуса значение энергии



взаимодействия уменьшается, и стремится к соответствующему значению энергии двухэлектронной примеси в массивном образце.



**Рис. 2.** Зависимость энергии взаимодействия электронов от радиуса КТ.

**В параграфе 1.3** в приближении Рассела–Саундерса вычислены кулоновская и обменная энергии двухэлектронной примеси в параболической КТ. Наличие спина приводит к необходимости симметризации волновой функции системы. В результате в системе возникают сугубо квантовые обменные эффекты, характеризующиеся обменным интегралом

$$A = \int \Psi_1^*(\mathbf{r}_1) \Psi_2^*(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \Psi_1(\mathbf{r}_2) \Psi_2(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (7)$$

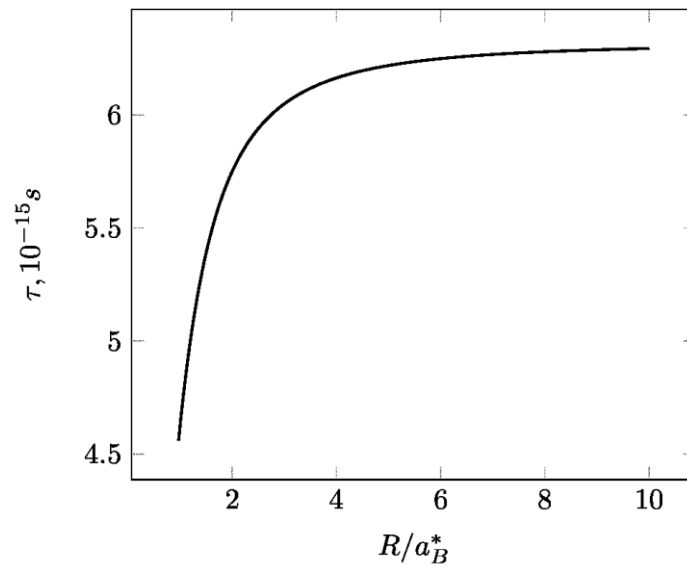
Наличие данного взаимодействия приводит к эффекту обмена состояниями между электронами. Время в течении которого происходит обмен состояниями, определяется соотношением

$$\tau = \frac{\pi \hbar}{2A}. \quad (8)$$

Меняя радиус КТ можно управлять временем обмена состояниями, так как интеграл  $A$  параметрически зависит от радиуса КТ.

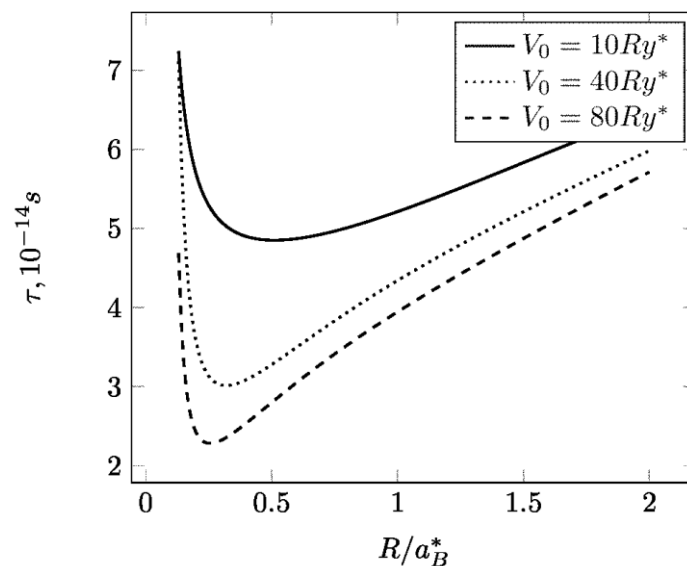
На рис. 3 приведена зависимость времени обмена состояниями от радиуса КТ. Из него следует, что с увеличением радиуса,  $\tau$  увеличивается, однако при больших радиусах наступает насыщение кривой зависимости  $\tau(R)$ , так как двухэлектронная система перестает чувствовать влияние стенок КТ, и значение  $\tau$  соответствует

значению времени обмена состояниями двухэлектронной примеси в массивном полупроводниковом образце ( $\tau \sim 6 \cdot 10^{-15}$  сек, в случае атома гелия  $\tau \sim 10^{-16}$  сек).



**Рис. 3.** Зависимость времени обмена состояниями между электронами двухэлектронной примеси от радиуса параболической КТ.

**В параграфе 1.4** изучена двухэлектронная примесь, локализованная в сферической КТ с ограничивающим потенциалом конечной глубины прямоугольного профиля. В рамках вариационного метода и теории возмущений вычислена энергия системы с учетом скачка эффективной массы электрона на границе КТ.



**Рис. 4.** Зависимости времени обмена состояниями между электронами от радиуса КТ с прямоугольным ограничивающим потенциалом конечной глубины, при разных значениях глубины  $V_0$ .

Получена зависимость времени обмена состояниями между электронами от радиуса КТ (рис. 4). Как видно из него, по сравнению с предыдущим случаем, кривая

имеет точку минимума, которая соответствует значению радиуса КТ при котором происходит квантовый выброс одного из электронов из точки в окружающую среду. Расстояние между электронами резко увеличивается и в результате этого уменьшается значение обменного интеграла. Таким образом,  $\tau$  растет.

**Вторая глава** диссертации посвящена исследованию поглощения длиноволнового излучения разряженным электронным газом, локализованным в сильно вытянутой эллипсоидальной КТ.

**В параграфе 2.1** представлена теория, предложенная А.В. Чапликом для описания парно взаимодействующего электронного газа в КТ с параболическим потенциалом. В рамках данной теории показано, что гамильтониан указанной системы можно представить в виде суммы двух гамильтонианов, один из которых описывает движение центра масс, а другой относительное движение электронов. Если на систему падает длиноволновое электромагнитное излучение, оператор которого имеет вид

$$H_{int} = e\mathbf{E}(t) \sum \mathbf{p}_k = e\mathbf{E}(t) \sqrt{N} \mathbf{R}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля,  $\mathbf{R}$  – координата центра масс, то как следует из выражения (9), этот оператор будет действовать только на центр масс системы. Иначе говоря, переходы, обусловленные длиноволновым излучением, будут иметь место независимо от электрон-электронного взаимодействия. Данное утверждение носит название обобщенной теоремы Кона.

**В параграфе 2.2** показано, что для описания поведения частицы в сильно вытянутой эллипсоидальной квантовой яме можно воспользоваться методом стационарной геометрической адиабатики, в рамках которой систему можно рассмотреть, как наложение быстрой и медленной подсистем. Такое представление показывает, что движение частицы вдоль большой полуоси (медленная подсистема) происходит в параболической квантовой яме. Поэтому, можно ожидать, что в подобных системах могут реализоваться условия для выполнения обобщенной теоремы Кона.

**В параграфе 2.3** рассмотрен электронный газ в СВЭКТ с непроницаемыми стенками. Гамильтониан системы имеет вид

$$H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^N (\hat{P}_{x_j}^2 + \hat{P}_{y_j}^2) + \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^N \hat{P}_{z_j}^2 + \sum_{j=1}^N \hat{V}_{conf}(x_j, y_j, z_j) + \hat{V}_{int}(z_1, z_2, \dots, z_N), \quad (10)$$

где потенциал ограничения КТ берется в следующей форме:

$$\hat{V}_{conf}(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \\ \infty, & \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} > 1 \end{cases}, a \ll b, \quad (11)$$

где  $a$  и  $b$  – соответственно малая и большая полуоси КТ. С учетом того, что  $a \ll b$ , можно предположить, что в плоскости  $XOY$  кулоновское взаимодействие между электронами значительно меньше, чем энергия размерного квантования каждой из частиц, поэтому волновая функция электронного газа представляется как произведение

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = F_{n_{\rho_1}, n_{\rho_2}, \dots, n_{\rho_N}}(\rho_1(z_1), \rho_2(z_2), \dots, \rho_N(z_N)) \chi_{n_{\rho_1}, n_{\rho_2}, \dots, n_{\rho_N}}(z_1, z_2, \dots, z_N), \quad (12)$$

где

$$F_{n_{\rho_1}, n_{\rho_2}, \dots, n_{\rho_N}}(\rho_1(z_1), \rho_2(z_2), \dots, \rho_N(z_N)) = \prod_{j=1}^N f_{n_{\rho_j}, m}(\kappa_{n_{\rho_j}, m} \rho_j(z_j)), \quad (13)$$

$f_{n_{\rho}, m} = C e^{im\phi} J_m(\kappa_{n_{\rho}, m} \rho(z))$  – одноэлектронная волновая функция в плоскости  $XOY$ ,

$\kappa_{n_{\rho}, m} = \sqrt{\frac{2\mu E_{n_{\rho}}}{\hbar^2}}$ ,  $J_m(x)$  – функция Бесселя первого рода,  $\chi_{n_{\rho_1}, n_{\rho_2}, \dots, n_{\rho_N}}(z_1, z_2, \dots, z_N)$  –

аксиальная волновая функция,  $n_{\rho} = 0; 1; 2; \dots; m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$  – радиальное и магнитное квантовые числа.

Здесь учтено, что каждый из электронов в плоскости  $XOY$ , находится в бесконечно глубокой двухмерной потенциальной яме круглого сечения с эффективным диаметром

$$d_{\rho_j}(z_j) = 2a \sqrt{1 - \frac{z_j^2}{b^2}}. \quad (14)$$

При таком подходе энергия парного взаимодействия будет зависеть только от  $z$ -координат системы

$$\hat{V}_{int}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N U(|z_i - z_j|). \quad (15)$$

Далее показано, что в  $z$ -направлении каждый из электронов находится в одномерной параболической яме, с частотой

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar \alpha_{1,0}}{\mu a b}, \quad (16)$$

где  $\alpha_{1,0}$  – нули функции  $J_m(x)$ . Таким образом в СВЭКТ, возникают условия для выполнения обобщенной теоремы Кона, аналогичные случаю параболической квантовой ямы [17].

**В параграфе 2.4** рассмотрена система, описанная в предыдущем параграфе, однако теперь уже при наличии аксиального магнитного поля. Показано, что для данного случая также могут реализоваться условия выполнения обобщенной теоремы Кона.

**Третья глава** диссертационной работы посвящена исследованию диамагнитных свойств бoльцмановского электронного газа, локализованного в цилиндрической КТ и цилиндрическом нанослое.

**В параграфе 3.1** в рамках бoльцмановского распределения рассмотрены магнитные свойства слабо взаимодействующего электронного газа, в цилиндрической КТ с параболическим ограничивающим потенциалом. Одночастичный спектр энергии данной системы имеет следующий вид [18]:

$$E_{n_\rho, m, n_z} = \hbar \Omega \left( n_\rho + \frac{|m|+1}{2} \right) + \hbar \omega_B \frac{m}{2} + \hbar \omega_z \left( n_z + \frac{1}{2} \right), \quad (17)$$

где  $\Omega = \sqrt{\omega_B^2 + (2\omega_\rho)^2}$ ,  $\omega_B = \frac{eB}{\mu c}$  – циклотронная частота,  $\omega_\rho \sim \frac{\hbar}{\mu R^2}$ ,  $\omega_z \sim \frac{\hbar}{\mu L^2}$  – частоты радиального и аксиального потенциалов ограничения,  $R$  – радиус сечения КТ,  $L$  – высота КТ,  $n_\rho, m, n_z$  – соответственно радиальное, магнитное и аксиальное квантовые числа.

Статистическая сумма дается как

$$Z = \sum_{n_z, n_\rho, m} \exp(-\beta E_{\rho, \phi, z}), \quad (18)$$

где  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ .

Важность рассмотрения этой модели заключается в том, что она является точно решаемой, и для статистической суммы получается аналитическое выражение

$$Z = \sum_{n_z, n_\rho, m} \exp(-\beta E_{\rho, \phi, z}) = \frac{1}{8} \operatorname{csch} \frac{\beta \hbar \omega_z}{2} f^-(\Omega) f^+(\Omega), \quad (19)$$

где  $f^\pm(\Omega) = \operatorname{sech} \frac{\beta \hbar (\Omega \pm \omega_B)}{4}$ .

На основе (19) получены аналитические выражения для средней энергии, намагниченности и диамагнитной восприимчивости электронного газа:

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\hbar \Omega}{4} (g^+(\Omega) + g^-(\Omega)) + \frac{\hbar \omega_B}{4} (g^+(\Omega) - g^-(\Omega)) + \frac{\hbar \omega_z}{2} \coth \frac{\beta \hbar \omega_z}{2} \quad (20)$$

$$\langle M \rangle = \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial Z}{\partial B} = -\frac{\mu_B}{4} \left[ \frac{\omega_B}{\Omega} (g^+(\Omega) + g^-(\Omega)) + (g^+(\Omega) - g^-(\Omega)) \right] \quad (21)$$

$$\langle \chi \rangle = \frac{\partial M}{\partial B} = \left( \frac{\mu_B}{4\Omega} \right)^2 \left\{ 4 \left( \frac{\omega_B^2}{\Omega} - \Omega \right) (g^+(\Omega) + g^-(\Omega)) - \beta (\Omega + \omega_B)^2 \left( \frac{(\Omega - \omega_B)^2}{(\Omega + \omega_B)^2} f^-(\Omega)^2 + f^+(\Omega)^2 \right) \right\} \quad (22)$$

где  $g^\pm(\Omega) = \tanh \frac{\beta \hbar (\Omega \pm \omega_B)}{4}$ .

**Во параграфе 3.2** рассмотрены диамагнитные свойства слабо взаимодействующего электронного газа, локализованного в цилиндрическом нанослое. В этом случае ограничивающий потенциал берется в следующей форме

$$\hat{V}_{conf}(\rho, z) = \hat{V}_1(\rho) + \hat{V}_2(z), \quad (23)$$

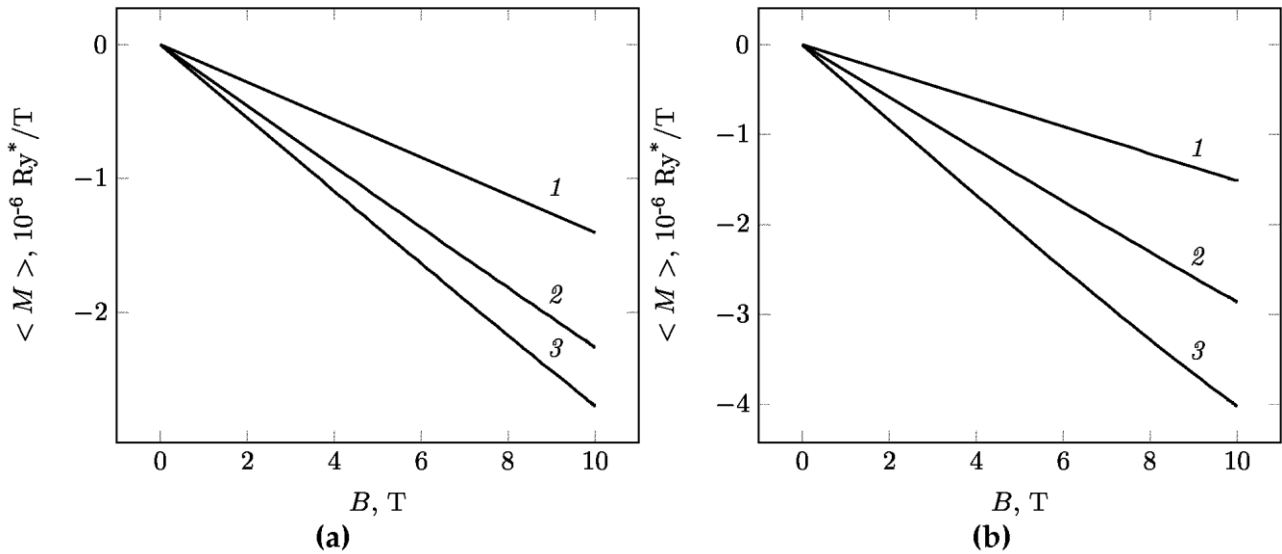
где

$$\hat{V}_1(\rho) = \begin{cases} 0, & R_1 < \rho < R_2 \\ \infty, & \rho \leq R_1, \rho \geq R_2 \end{cases}, \quad \hat{V}_2(z) = \frac{\mu \omega_z^2}{2} z^2, \quad (24)$$

где  $R_1$  и  $R_2$ , соответственно, внутренний и внешний радиусы КТ.

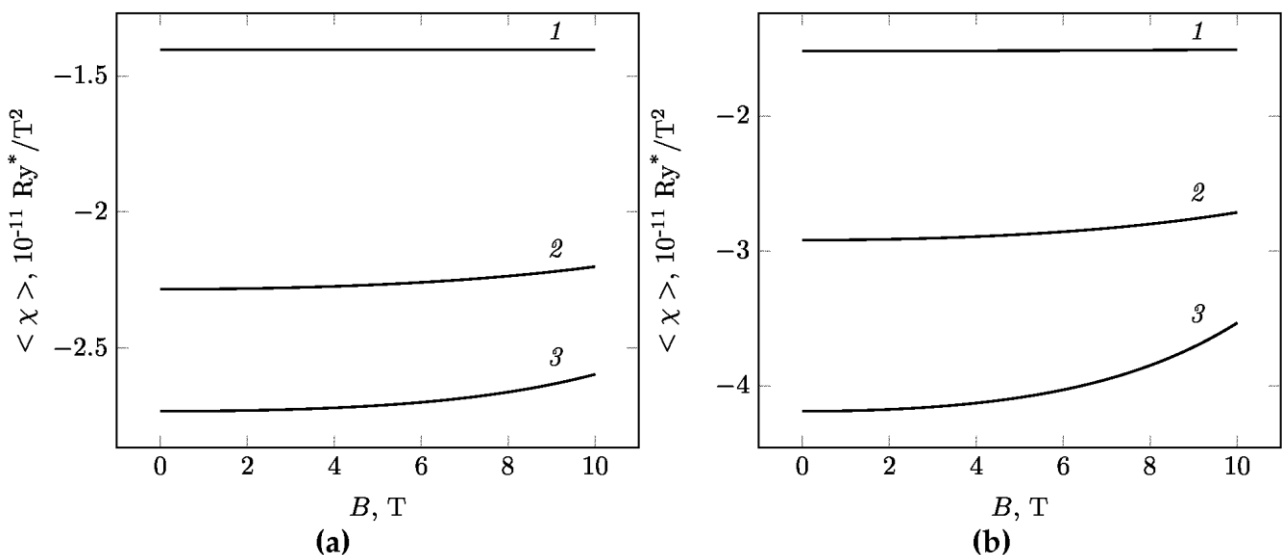
На рис. 5 приведены зависимости среднего значения намагниченности электронного газа от величины магнитного поля в случае нанослоя (рис. 5а) и цилиндрической КТ (рис. 5б) при разных температурах ( $T_1 = 300\text{К}$ ,  $T_2 = 200\text{К}$ ,  $T_3 = 100\text{К}$ ). Из него следует, что система имеет ярко выраженные диамагнитные свойства и при этом зависимости  $\langle M(B) \rangle$  близки к линейным. С ростом температуры средняя намагниченность по модулю убывает. В случае цилиндрической

КТ, аналогичные зависимости более чувствительны к изменению величины магнитного поля, так как в этом случае эффект размерного квантования ослабляется.



**Рис. 5.** Зависимости средней намагниченности электронного газа, локализованного в (а) цилиндрическом нанослое ( $R_1 = 0.5a_B^*$  и  $R_2 = 2a_B^*$ ) и (б) цилиндрической КТ ( $R_1 = 0a_B^*$  и  $R_2 = 2a_B^*$ ) от величины магнитного поля, при температурах (1) 300К, (2) 200К, (3) 100К.

На рис. 6а представлены зависимости магнитных восприимчивостей от величины магнитного поля  $B$  в случае цилиндрического наносля.



**Рис 6.** Зависимости средней магнитной восприимчивости электронного газа, локализованного в (а) цилиндрическом нанослое ( $R_1 = 0.5a_B^*$  и  $R_2 = 2a_B^*$ ) и (б) цилиндрической КТ ( $R_1 = 0a_B^*$  и  $R_2 = 2a_B^*$ ) от величины магнитного поля, при температурах (1) 300К, (2) 200К, (3) 100К.

Так как  $\langle \chi \rangle$  определяется как производная  $\langle M \rangle$  по  $B$ , то ввиду приблизительно линейной зависимости  $\langle M(B) \rangle$ , значения  $\langle \chi \rangle$  слабо зависят от величины поля. При более низких температурах ( $T_3 = 100\text{K}$  и  $T_2 = 200\text{K}$ ) наблюдается небольшой рост магнитной восприимчивости в зависимости от значений магнитного поля, что свидетельствует об отклонении зависимостей  $\langle M(B) \rangle$  от линейного закона при таких температурах. С ростом температуры  $\langle \chi(B) \rangle$  практически становится константой. Как следует из рис. 6b, в случае цилиндрической КТ зависимость  $\langle \chi(B) \rangle$ , по сравнению со случаем нанослоя, более ярко выраженная.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении кратко формулируем основные результаты и выводы диссертационной работы:

1. В рамках теории возмущений рассмотрена задача об энергетических уровнях двухэлектронной примеси, локализованной в сферической КТ с параболическим ограничивающим потенциалом. По аналогии с теорией атома гелия вычислены энергии триплетных и синглетных состояний. Спин учитывается в приближении Рассела-Саундерса. Результаты сравнены с оценкой энергии, которая определена на основе соотношений неопределенностей Гейзенберга, показано, что имеет место хорошая согласуемость полученных результатов.
2. Исследована зависимость времени обмена состояниями между электронами в двухэлектронной примесной системе, локализованной в параболической КТ. Показано, что при увеличении радиуса КТ это время растет, однако имеет характер насыщения, так как при больших радиусах влияние стенок становится несущественным и система становится аналогичной двухэлектронной примеси в массивном полупроводнике.
3. Изучена зависимость времени обмена состояниями между электронами в двухэлектронной примесной системе, локализованной в сферической КТ конечной глубины. Показано, что с уменьшением радиуса КТ это время сперва убывает, однако при квантовом выбросе одного из электронов из КТ расстояние между электронами увеличивается и время обмена состояниями начинает расти.



4. На основе адиабатического приближения рассмотрено поведение несколько-частичного электронного газа в СВЭКТ как в отсутствие, так и при наличии магнитного поля. Показано, что подобную систему можно представить в качестве наложения быстрой и медленной подсистем. При этом в направлении вытянутой оси КТ электронный газ локализуется в параболической квантовой яме. Как результат в системе возникают условия реализации обобщенной теоремы Кона, когда частоты резонансных частот поглощения не зависят от электрон-электронного взаимодействия.
5. Исследована диамагнитная восприимчивость больцманового электронного газа, локализованного в цилиндрической КТ с параболическим ограничивающим потенциалом. Получены аналитические выражения для термодинамической средней энергии, намагниченности, а также диамагнитной восприимчивости газа. Показано, что подобная система имеет ярко выраженные диамагнитные свойства. При этом зависимость намагниченности газа от величины магнитного поля близка к линейной.
6. В рамках больцманового распределения вычислены намагниченность и диамагнитная восприимчивость электронного газа, локализованного в цилиндрическом нанослое. Показано, что благодаря наличию внутреннего радиуса диамагнитная восприимчивость газа имеет более слабую зависимость от магнитного поля, по сравнению с цилиндрической КТ. При этом намагниченность газа, здесь также имеет приблизительно линейную зависимость от магнитного поля.

### СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. Chakraborty. Quantum Dots: A survey of the properties of artificial atoms. Elsevier, 1999.
2. D. Bimberg, M. Grundmann, and N. N. Ledentsov. Quantum dot heterostructures. John Wiley & Sons, 1999.
3. Է. Մ. Ղազարյան and Ս. Գ. Պետրոսյան. Կիսահաղորդչային նանոէլեկտրոնիկայի ֆիզիկական հիմունքները. ՌՅՅ Յրատարակչություն, 2005.
4. B. Herzog, N. Owschimikow, J.-H. Schulze, R. Rosales, Y. Kaptan, M. Kolarczik, T. Switaiski, A. Strittmatter, D. Bimberg, U. W. Pohl, and U. Woggon. Fast gain and

- phase recovery of semiconductor optical amplifiers based on submonolayer quantum dots. *Applied Physics Letters*, 107(20):201102, November 2015.
5. J. Wu, S. Chen, A. Seeds, and H. Liu. Quantum dot optoelectronic devices: lasers, photodetectors and solar cells. *Journal of Physics D Applied Physics*, 48:363001, September 2015.
  6. V. Galitski, B. Karnakov, and V. Kogan. *Exploring Quantum Mechanics: A Collection of 700+ Solved Problems for Students, Lecturers, and Researchers*. Oxford University Press, 1 edition, 2013.
  7. Z. Xiao, J. Zhu, and F. He. Magnetic field dependence of the binding energy of a hydrogenic impurity in a spherical quantum dot. *Journal of Applied Physics*, 79(12):9181-9187, 1996.
  8. E.M. Kazaryan, A.V. Meliksetyan, L.S. Petrosyan, and H.A. Sarkisyan. Impurity states of narrow-gap semiconductor parabolic quantum dot in the presence of extremely strong magnetic field. *Physica E: Lowdimensional Systems and Nanostructures*, 31(2):228 - 231, 2006.
  9. W. Xie. Impurity effect on low-lying spectra in a two-electron quantum dot with parabolic confinement. *Physica B: Condensed Matter*, 334(3-4):317-322, 2003.
  10. P. Kościk. Entanglement in s states of two-electron quantum dots with coulomb impurities at the center. *Physics Letters A*, 377(37):2393-2397, 2013.
  11. D. S Acosta Coden, R. H Romero, A. Ferrón, and S. S Gomez. Impurity effects in two-electron coupled quantum dots: entanglement modulation. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 46(6):065501, 2013.
  12. D.A. Baghdasaryan, E.M. Kazaryan, and H.A. Sarkisyan. Two-electron states and state exchange time control in parabolic quantum dot. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 58(0):67-72, 2014.
  13. W. Kohn. Cyclotron resonance and de haas-van alphen oscillations of an interacting electron gas. *Phys. Rev.*, 123:1242-1244, Aug 1961.
  14. P. A. Maksym and T. Chakraborty. Quantum dots in a magnetic field: Role of electron-electron interactions. *Physical Review Letters*, 65:108-111, July 1990.
  15. F. M. Peeters. Magneto-optics in parabolic quantum dots. *Phys. Rev. B*, 42:1486-1487, Jul 1990.

16. A. O. Govorov and A. V. Chaplik. Magnetoabsorption at quantum points. Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, 52:31, July 1990.
17. L. Brey, N. F. Johnson, and B. I. Halperin. Optical and magneto-optical absorption in parabolic quantum wells. Phys. Rev. B, 40:10647-10649, Nov 1989.
18. M.S. Atoyán, E.M. Kazaryan, and H.A. Sarkisyan. Direct interband light absorption in a cylindrical quantum dot in quantizing magnetic field. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Volume 22, Issue 4: 860-866, May 2004.

### **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

1. А. Ц. Калтахчян. Оценка энергии дивалентной примеси в параболической квантовой точке на основе соотношения неопределенностей. Вестник РАУ №2, 40-45, 2014.
2. D. A. Baghdasaryan, H. T. Ghaltaghchyan, E. M. Kazaryan, H. A. Sarkisyan. Two-electron impurity in the parabolic quantum dot: Uncertainty relation and perturbation approach. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 70, 52-57, 2015.
3. H. T. Ghaltaghchyan, D. B. Hayrapetyan, E. M. Kazaryan, H. A. Sarkisyan. Few-body absorption in prolate ellipsoidal quantum dot. Journal of Physics: Conference Series (Vol. 673, No. 1, p. 012012). IOP Publishing, 2016.
4. D. A. Baghdasaryan, H. T. Ghaltaghchyan, E. M. Kazaryan, H. A. Sarkisyan. Impurity with two electrons in the spherical quantum dot with finite confinement potential. Journal of Physics: Conference Series (Vol. 673, No. 1, p. 012018). IOP Publishing, 2016.
5. А.Ц. Калтахчян, Э.М. Казарян, А.А. Саркисян. Диамагнитная восприимчивость электронного газа в цилиндрическом нанослое. Известия НАН Армении, Физика, т.51, №2, с.218-226, 2016.
6. H. T. Ghaltaghchyan, D. B. Hayrapetyan, E. M. Kazaryan, H. A. Sarkisyan. Few-body magneto-absorption in prolate ellipsoidal quantum dot. Physics of Atomic Nuclei (принято к печати).

## Ամփոփագիր

Քվանտային կետերը (ՔԿ) հանդիսանում են կիսահաղորդչային նանոկառուցվածքների այն յուրահատուկ դասը, որոնցում չափային քվանտացման երևույթներն արտահայտված են առավել ցայտուն կերպով: Այդ հանգամանքը թույլ է տալիս բավականաչափ ճկուն կերպով իրականացնել և իցքակիրների սպեկտրի կառավարումը տարբեր չափերի և երկրաչափոլթյունների ՔԿ-երում: ՔԿ-երում ընթացող ֆիզիկական պրոցեսները նկարագրելու համար չափազանց կարևոր խնդիր է հանդիսանում ուսումնասիրվող համակարգի ճիշտ վերլուծական մոդելի կառուցումը:

Ներկայացվող ատենախոսուլթյունը նվիրված է գնդային և աքսիալ համաչափոլթյուններով քվանտային կետերում (ՔԿ) երկմասնիկային և բազմամասնիկային համակարգերի էլեկտրոնային, օպտիկական և մագնիսական հատկոլթյունների ուսումնասիրուլթյանը: Մասնավորապես, ուսումնասիրվել են գնդային և գլանային ՔԿ-երը, ինչպես նաև ուժեղ ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ը (ՈւՁԷՔԿ) և գլանային նանոշերտը:

### Յիմնական արդյունքները

1. Խոտորումների տեսուլթյան 2րջանակներում ուսումնասիրվել է պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով գնդային ՔԿ-ում տեղայնացված երկէլեկտրոնային խառնուկի էներգիական մակարդակների որոշման խնդիրը: Յելիումի ատոմի տեսուլթյան նմանուլթյամբ հաշվվել են տրիպլետ և սինգլետ վիճակների էներգիաները: Սպինը հաշվի է առնվել Ռասըլ-Սաուենդերսի մոտավորուլթյամբ: Արդյունքները համեմատվել են Յայգենբերգի անորոշուլթյունների առնչուլթյան հիման կատարված

գնահատականի հետ, և ցույց է տրվել, որ ստացված արդյունքները միմյանց հետլավ համաձայնեցված են:

2. Ուսումնասիրվել է պարաբոլական թԿ-ում տեղայնացված երկելեկտրոնային խառնուկային համակարգում էլեկտրոնների միջև վիճակների փոխանակման ժամանակի կախվածությունը թԿ-ի շառավղից: Ցույց է տրվել, որ թԿ-ի շառավղի աճին զուգընթաց այդ ժամանակն աճում է, սակայն ունի հագեցող բնույթ, քանի որ մեծ շառավղիների դեպքում պատերի ազդեցությունը դառնում է աննշան, և համակարգը վերածվում է զանգվածեղ կիսահաղորդչում գտնվող երկելեկտրոնային խառնուկի:
3. Հետազոտվել է վերջավոր խորությամբ սահմանափակող պրտենցիալով գնդային թԿ-ում տեղայնացված եկրելեկտրոնային խառնուկային համակարգում էլեկտրոնների միջև վիճակների փոխանակման ժամանակի կախվածությունը թԿ-ի շառավղից: Ցույց է տրվել, որ թԿ-ի շառավղի նվազմանը զուգընթաց, այդ ժամանակը նախ նվազում է, սակայն երբ էլեկտրոններից մեկն արտանետվում է թԿ-ից, էլեկտրոնների միջև հեռավորությունը մեծանում է և վիճակների փոխանակման ժամանակը սկսում է աճել:
4. Ադիաբատական մոտավորության հիման վրա դիտարկվել է ՈւՁԷԹԿ-ում մի քանի մասնիկային էլեկտրոնային գազը, ինչպես արտաքին ուժեղ դաշտի առկայության, այնպես էլ բացակայության դեպքերում: Ցույց է տրվել, որ նման համակարգը կարելի է ներկայացնել որպես արագ և դանդաղ ենթահամակարգերի համադրում: Ընդ որում թԿ-ի առանցքի ձգման ուղղությամբ էլեկտրոնային գազը տեղայնացված է պարաբոլական փոսում: Արդյունքում, համակարգում ի հայտ են գալիս Կոնի ընդհանրացված թեորեմի իրագործման պայմանները, երբ երկարալիքային կլանման

ռեզոնանսային հաճախությունները միջէլեկտրոնային փոխազդեցությունից կախված չեն:

5. Ուսու մնասիրվել է պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով գլանային ՔԿ-ում տեղայնացված էլեկտրոնային գազի դիամագնիսական ընկալունակությունը: Ձերմադիսամիկական միջին էներգիայի, մագնիսացվածություն և դիամագնիսական ընկալունակության համար ստացվել են վերլուծական արտահայտություններ: Տույց է տրվել, որ նման համակարգն ունի վառ արտահայտված դիամագնիսական հատկություններ: Ընդ որում, գազի մագնիսացվածություն կախվածությունն մագնիսական դաշտի արժեքից մոտ է գծայինին:
6. Բոլցմանի բաշխման շրջանակներում հաշվվել են գլանային նանոշերտում տեղայնացված էլեկտրոնային գազի մագնիսացվածությունը և դիամագնիսական ընկալունակությունը: Տույց է տրվել, որ շնորհիվ ներքին շառավղի առկայության գազի դիամագնիսական ընկալունակությունը ավելի թույլ կախվածությունն ունի մագնիսական դաշտից, քան ՔԿ-ի դեպքում: Ընդ որում գազի մագնիսացվածությունը դաշտի արժեքից, այս դեպքում նույնպես, ունի գրեթե գծային կախվածություն:

## SUMMARY

The quantum dots (QDs) are the unique class of semiconductor nanostructures, in which quantum confinement effects are expressed most brightly. This allows to control the energy spectrum of charge carriers in QD more flexible by changing the size and the geometry of QD. It is important to notice, that in such systems it is possible to experimentally check the basics of quantum mechanics which have initially been formulated within exclusively theoretical models. For example, the problem of the electron behavior in spherical QD is the analog of precisely solvable spherically symmetric quantum well problem. The most important task when describing the physical processes in the QDs is the creation of the correct mathematical model of considered system. As the behavior of particles in QD are described within the nonrelativistic quantum mechanics, there is a need to create the corresponding Schrodinger Hamiltonian of the system, where the geometry of QD need to be considered on the one hand, and physical and chemical properties of QD and its surrounding environment components on the other.

The presented dissertation is devoted to the investigation of electronic, optical and magnetic properties of two-particle and multi-particle systems in the quantum dots (QD) with spherical and axial symmetries. Particularly, have been investigated spherical and cylindrical QDs, strongly prolate ellipsoidal QD (SPEQD) and cylindrical nanolayer.

### **Main results**

1. In the framework of perturbation theory studied the problem of two-electron impurity levels in the spherical QD with the parabolic confinement potential. Similar to the theory of Helium atom, calculated the energies of the triplet and singlet states. Spin is carried out in the Russell-Saunders approximation. The results are compared with the estimation of energy calculated within the framework of Heisenberg uncertainty relations, and have been shown that the results are very consistent.
2. The electrons state exchange time dependence on QD radius in the spherical QD with parabolic confinement was investigated. It has been shown that with the increase of QD radius, this time, has also been increased, but has a saturating character, as the

wall impact becomes insignificant at large radii and the system has turned into the two-electron impurity in a bulk semiconductor.

3. Studied the electrons state exchange time dependence on QD radius of two electron impurity system localized in the spherical QD with finite height confinement potential. It has been shown that with the decrease of QD radius, this time, has been decreased as well, but when the one of electrons emitted from QD, the distance between the electrons became large, and as a result the states exchange time increased.
4. On the base of adiabatic approximation considered few body electron gas localized in SPEQD, with and without the presence of an external magnetic field. It has been shown that the system could be presented as a combination of fast and slow subsystems. Moreover, in the direction of the long axis the electron gas was localized in the parabolic well. As a result, in the system conditions occurred for the implementation of generalized Kohn's theorem, when the absorption resonance frequencies are independent from electron-electron interaction.
5. The diamagnetic susceptibility of electron gas localized in the cylindrical QD with the parabolic confinement potential has been studied. The analytical expressions have been obtained for the mean thermodynamic energy, magnetization and diamagnetic susceptibility. It has been shown that the system has pronounced diamagnetic properties. Wherein the gas magnetization dependence on magnetic field value is close to linear.
6. In the Boltzmann distribution framework calculated magnetization and diamagnetic susceptibility of electron gas localized in the cylindrical nanolayer. It has been shown that the diamagnetic susceptibility dependence on a magnetic field was weak due to the presence of internal radius, then it was in the case of QD. Moreover, the magnetization of gas here also has a linear dependence on magnetic field value.