Հայ-Ռուսական (Սլավոնական) Համալսարան

Ղալթաղչյան Հայկ Ցոլակի

ԵՐԿՄԱՍՆԻԿԱՅԻՆ ԵՎ ԲԱԶՄԱՄԱՍՆԻԿԱՅԻՆ ԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԳՆԴԱՅԻՆ ԵՎ ԱՔՍԻԱԼ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԿԵՏԵՐՈՒՄ

Ատենախոսություն

Ա.04.10 «Կիսահաղորդիչների ֆիզիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի համար

Գիտական ղեկավար՝
ֆ.-մ. գ. դ., պրոֆ.
Սարգսյան Հ. Ա.

ԵՐԵՎԱՆ - 2016

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ներածություն 3

Գլուխ 1. Երկէլեկտրոնային խառնուկային վիճակները գնդային ՔԿ-երում 20

1. 1. Էներգիայի գնահատումը անորոշությունների առնչության հիման վրա 20

1.2. Միջէլեկտրոնային փոխազդեցության էներգիայի որոշումը խոտորումների տեսության շրջանակներում 24

1.3. Փոխանակային փոխազդեցությունը պարաբոլական ՔԿ-ում 32

1.4. Երկէլեկտրոնային խառնուկը վերջավոր սահմանափակող պոտենցիալով գնդային ՔԿ-ում 37

Գլուխ 2. Մի քանի մասնիկային կլանումը ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ում 46

2.1. Մագնիսակլանումը ՔԿ-երում 46

2.2. Մեկէլեկտրոնային վիճակները ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ում 50

2.3. Մի քանի մասնիկային կլանումը ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ում 54

2.4. Մի քանի մասնիկային մագնիսակլանումը ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ում 61

Գլուխ 3. Դիամագնիսականությունը գլանային քվանտային համակարգերում 69

3.1. Դիամագնիսականությունը գլանային ՔԿ-ում} 69

3.2. Դիամագնիսականությունը գլանային քվանտային նանոշերտում . 77

Եզրակացություն 88

Գրականություն 91

Հրապարակված հոդվածների ցանկ 103

Շնորհակալական խոսք 104

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Քվանտային կետերը (ՔԿ) հանդիսանում են կիսահաղորդչային նանոկառուցվածքների այն յուրահատուկ դասը, որոնցում չափային քվանտացման երևույթներն արտահայտված են առավել ցայտուն կերպով [1-3]: Լիցքակիրների շարժման ամբողջովին քվանտացման շնորհիվ, վերջիններս չափազանց զգայուն են դառնում ՔԿ-ի չափերի և երկրաչափական ձևերի փոփոխության նկատմամբ: Այդ հանգամանքը թույլ է տալիս բավականաչափ ճկուն կերպով իրականացնել լիցքակիրների սպեկտրի կառավարումը տարբեր չափերի և երկրաչափությունների ՔԿ-երում: Սույն հանգամանքը հնարավոր է դարձնում դիտարկել ՔԿ-երը, ինչպես խոստումնալից թեկնածու նոր սերնդի կիսահաղորդչային սարքերի տարրային հենքի համար [4-11]: Զուտ կիրառական նշանակությունից բացի, ՔԿ-երն ունեն կարևոր ակադեմիական նշանակություն: Բանն այն է, որ այդ համակարգերում հնարավոր է փորձարարական եղանակով ստուգել քվանտային մեխանիկայի կարևորագույն դրույթները, որոնք ի սկզբանե ձևակերպվել են տեսական մոդելների շրջանակներում: Ասվածի վառ օրինակ է հանդիսանում գնդային համաչափությամբ ՔԿ-ում էլեկտրոնի վարքի խնդիրը, որը քաջ հայտնի ճշգրիտ լուծվող գնդային փոսի խնդիրն է [12,13]: ՔԿ-երում ընթացող ֆիզիկական պրոցեսները նկարագրելու համար չափազանց կարևոր խնդիր է հանդիսանում ուսումնասիրվող համակարգի հնարավորին չափով իրատեսական վերլուծական մոդելի կառուցումը: Հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ մասնիկների վարքը ՔԿ-երում նկարագրվում է ոչ-ռելյատիվիստական քվանտային մեխանիկայի շրջանակներում, անհրաժեշտ է լինում կառուցել շրյոդինգերյան համիլտոնիանը, որում պետք է արտացոլվեն մի կողմից ՔԿ-ի երկրաչափությունը, իսկ մյուս կողմից՝ ՔԿ-ի և նրան շրջապատող

միջավայրի բաղադրությունների ֆիզիկաքիմիական առանձնահատկությունները:

Մաթեմատիկական նկարագրության տեսանկյունից առավել հարմար համակարգեր են հանդիսանում գնդային համաչափությամբ ՔԿ-երը [14-19]: Նման համակարգերում Շրյոդինգերի հավասարման մեջ փոփոխականներն անջատվում են ոչ միայն մեկմասնիկային մոտավորության դեպքում, այլ նաև այն դեպքում, երբ ՔԿ-ի երկրաչափական կենտրոնում տեղադրված է խառնուկ [20-34]: Խառնուկային վիճակները գնդային ՔԿ-ում հետազոտված են բազմաթիվ աշխատանքներում: [20] աշխատանքում հեղինակների կողմից ճշգրիտ լուծվել է ջրածնանման դոնորի վիճակների խնդիրը ուղղանկյուն սահմանափակող պոտենցիալով գնդային քվանտային փոսում, ինչպես նաև ցույց է տրվել, որ ջրածնանման դոնորի կապի էներգիան բավական զգայուն է ՔԿ-ի չափայնության նկատմամբ: [21] աշխատանքում անվերջ սահմանափակող պոտենցիալով գնդային ՔԿ-ում և քվանտային լարում ջրածնանման խառնուկային վիճակների էներգիաների համար ստացվել են վերլուծական արտահայտություններ: Ցույց է տրվել, որ նշված ՔԿ-ի և քվանտային լարի շառավղի շատ մեծ արժեքների դեպքում համակարգի էներգիան ձգտում է զանգվածեղ կիսահաղորդչում ջրածնանման խառնուկի համապատասխան վիճակի էներգիային, իսկ երբ շառավիղը փոքրանում է համակարգի էներգիան անցնում է դրական արժեքների տիրույթ: Արդյունարար զանգվածի մոտավորության շրջանակներում [22] աշխատանքում ցույց է տրված, $GaAs$ - $(Ga,Al)As$ գնդային ՔԿ-ում ջրածնանման դոնորի կապի էներգիայի կախվածությունը դոնորի դիրքից տարբեր շառավիղների համար, ինչպես անվերջ, այնպես էլ վերջավոր սահմանափակող պոտենցիալների դեպքերում: [23] աշխատանքում հեղինակները նույն կառուցվածքի համար վարիացիոն եղանակով հաշվել են գնդային ՔԿ-ում մակերևութային դոնորների և ակցեպտորների կապի

էնեգիաներն անվերջ և վերջավոր բարձրությամբ սահմանափակող պոտենցիալների դեպքում, հաշվի առնելով նաև դիելեկտրական էկրանավորումը: Ցույց է տրվել, որ երբ հաշվի է առնվում էկրանավորումը, խառնուկի կապի էներգիան զգալիորեն աճում է, հատկապես ՔԿ-ի փոքր շառավիղների դեպքում: Հաշվի է առնված նաև այս կառուցվածքում դիէլեկտրիկ թափանցելիությունների տարբերությունը: Ցույց է տրված որ դիելեկտրական էկրանավորման ազդեցությունն ակցեպտորների վրա շատ ավելի մեծ է, քան դոնորների: [24] աշխատանքում արդյունարար զանգվածի մոտավորությամբ վարիացիոն եղանակով հաշվվել է մագնիսական դաշտում գնդային ՔԿ-ում կենտրոնից շեղված ջրածնանման դոնորի կապի էներգիան, ինչպես նաև ցույց է տրված, որ կապի էներգիան, տարբերվում է կենտրոնում տեղակայված դոնորի դեպքից, և կախված է մագնիսական դաշտում ջրածնանման դոնորի դիրքից և մագնիսական դաշտի մեծությունից: Վարիացիոն եղանակով արդյունարար զանգվածի մոտավորության շրջանակներում [25] աշխատանքում հաշվվել է պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով $GaAs$ գնդային ՔԿ-ում մակերևութային ջրածնանման խառնուկի կապի էներգիան: Ցույց է տրված, որ խառնուկի կապի էներգիան աճում է ՔԿ-ի չափերի փոքրացմանը զուգընթաց, ինչպես նաև կախված է խառնուկի դիրքից, և հասնում է առավելագույն արժեքի, երբ խառնուկը ՔԿ-ի կենտրոնում է: Հեղինակներն [26] աշխատանքում տեսականորեն ուսումնասիրել են խառնուկային վիճակները նեղգոտիական կիսահաղորդչային ՔԿ-ում՝ եռաչափ գնդային համաչափությամբ պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով: Երկգոտի Քեյնի մոդելի շրջանակներում ուսումնասիրվել է էլեկտրոնների վարքը, և ցույց է տրվել, որ ոչ պարաբոլայնությունը բերում է Շրյոդինգերի հավասարման մեջ արդյունարար օսցիլյատրոային պոտենցիալի, ինչպես նաև պարունակում է խոտորումներ հանդիսացող $1/r$-ին, r-ին և r^4-ին

համեմատական անդամներ: Խոտորումների տեսության շրջանակներում հաշվվել է այս անդամներին համապատասխանող էներգիայի ուղղումները: [27] աշխատանքում, ադիաբատական մոտավորության շրջանակներում ուսումնասիրվել են խառնուկային վիճակները պարաբոլական ՔԿ-ում ուժեղ արտաքին մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ: Ստացվել են վերլուծական արտահայտություններ խառնուկային համակարգի հիմնական լրիվ և կապի էներգիաների համար կախված մագնիսական դաշտի արժեքից և ՔԿ-ի չափերից:

Մեկէլեկտրոնային խառնուկային վիճակների հետ մեկտեղ ՔԿ-երում կարող են իրագործվել նաև երկէլեկտրոնային խառնուկային վիճակներ: Այս համակարգը էապես տարբերվում է մեկէլեկտրոնայինից, քանի որ էական դեր են սկսում խաղալ սպինային երևույթները [35-38]: [35] աշխատանքում հեղինակը, թվային անկյունագծայնացման եղանակով հետազոտել է կուլոնյան խառնուկային կենտրոնով երկէլեկտրոնային պարաբոլական ՔԿ-ը, որը գտնվում է համասեռ մագնիսական դաշտում: Ակցեպտորային խառնուկի ցածր մակարդակների համար, հաշվարկները ցույց են տվել, որ հիմնական վիճակում տեղի ունեն ինչպես օրբիտալ անկյունային մոմենտի L-անցումները, այնպես էլ սպինային անկյունային մոմենտի S-անցումները, որն որակապես նույն դեպքն է երբ բացակայում է խառնուկային կենտրոնը: Սակայն դոնորային խառնուկի դեպքում հիմնական վիճակում նման անցումներ չկան, և ամբողջովին տարբերվում է նաև էներգիայի սպեկտրը: [36] աշխատանքում հեղինակների կողմից ուսումնասիրվել է հարմոնիկ սահմանափակող պոտենցիալով գնդային ՔԿ-ում երկէլեկտրոնային կուլոնյան խառնուկային համակարգը: Ցույց է տրվել, որ թույլ չափային քվանտացման ռեժիմում խճճվածությունը զգալիորեն կապված է ակցեպտորային խառնուկային կենտրոնի առկայության հետ: [37] աշխատանքում ուսումնասիրվել են երկչափ գաուսյան պոտենցիալով երկէլեկտրոնային ՔԿ-ի էլեկտրոնային և

օպտիկական հատկությունները: Դիտարկվել է կուլոնյան խառնուկների առկայության ազդեցությունն այդ հատկությունների վրա: Ինչպես նաև քննարկվել է էլեկտրոնների խճճվածության կառավարման հնարավորությունը սահմանափակող պոտենցիալի պարամետրերի փոփոխության միջոցով: Ցույց է տրվել, որ խճճվածության աստիճանը հիմնականում պայմանավորված է խառնուկի դիրքով և լիցքի մեծությամբ: Ցույց է տրվել, որ համակարգի օսցիլյատորային ուժի մեծությունը՝ խառնուկի առկայության և նրա բնութագրիչների, հետևաբար նաև խճճվածության մասին, ինֆորմացիա է պարունակում: [38] աշխատանքում ճշգրիտ անկյունագծայնացման եղանակով ուսումնասիրվել են երկէլեկտրոնային խառնուկային վիճակները պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով ՔԿ-ում: Երկէլեկտրոն համակարգերին բնորոշ առանձնահատկություն է հանդիսանում էլեկտրոնների միջև փոխանակային փոխազդեցությունը: Սա մաքուր քվանտային երևույթ է, և կարելի է ցույց տալ, որ էլեկտրոնները ժամանակի ընթացքում կարող են միմյանց հետ փոխանակվել վիճակներով, և այդ ժամանակը որոշվում է փոխանակային ինտեգրալով [38]: Այս կապակցությամբ հետաքրքրություն է առաջանում ուսումնասիրել վիճակների փոխանակման երևույթը երկէլեկտրոնային խառնուկում, որը գտնվում է գնդային ՔԿ-ում, քանի որ փոփոխելով ՔԿ-ի շառավիղը, կարելի է կառավարել փոխանակային ինտեգրալը, և հետևաբար նաև, վիճակների փոխանակման ժամանակը:

Երկէլեկտրոնային խառնուկային վիճակների հետ մեկտեղ հետաքրքրություն է առաջանում ուսումնասիրել ՔԿ-երում մի քանի մասնիկային օպտիկական երևույթները: Մասնավորապես, խնդիրների հետաքրքիր դաս է հանդիսանում պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով ՔԿ-երում մի քանի մասնիկային էլեկտրոնային գազի կողմից երկարալիքային կլանման ուսումնասիրությունը [39-43]: Դա

պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ նման համակարգերում հնարավոր դարձավ ընդհանրացնել Կոնի թեորեմը ցածրչափային կիսահաղորդչային կառուցվածքների դեպքում: Թեորեմը կայանում է նրանում, որ էլեկտրոնային գազի ցիկլոտրոնային ռեզոնանսի հաճախությունը, երկարալիքային ազդեցության հետևանքով, կախված չէ գազում էլեկտրոնների քանակից [39]: Եթե այդ գազը տեղադրվի ՔԿ-ում, ապա անհրաժեշտություն կառաջանա հաշվի առնելու ՔԿ-ի սահմանափակող պոտենցիալի ազդեցությունը էլեկտրոնների վրա: [40, 41] աշխատանքներում ցույց է տրված, որ Կոնի ընդհանրացված թեորեմի հիմնավորման համար անհրաժեշտ է ՔԿ-ի սահմանակող պոտենցիալը մոտարկել պարաբոլականով: Այդ դեպքում դիտարկվող քվանտային փոսերն իրենցից ներկայացնում են «պարաբոլական ատոմներ», որոնցում լիցքակիրների սահմանափակող պոտենցիալը նկարագրվում է gr^2 օրենքով, ընդ որում r-ը կարող է լինել ինչպես երկչափ, այնպես էլ միաչափ և եռաչափ: Այսպիսի պոտենցիալի ընտրության ճշմարտացիությունը հաստատվել է հետագա փորձարարական ու տեսական հետազոտություններում [44-65]: Կոնի ընդհանրացված թեորեմի տեսական հիմնավորման հիմքում ընկած է պարաբոլական սահմանափակմամբ ցածրչափային համակարգի N-մասնիկային համիլտոնիանի չփոխազդող մասի ճշգրիտ անկյունագծայնացման հնարավորությունը: Ընդ որում, կարելի է ձևակերպել ավելի ընդհանուր խնդիր՝ Կոնի ընդհանրացված թեորեմի կիրառման հայտանիշների սահմանման մասին, առանց մասնավորեցնելու սահմանափակող պոտենցիալի ու լիցքակիրների միջև փոխազդեցության պոտենցիալի տեսքերը [66]: Պետք է նշել, որ ՔԿ-ի պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալի ձևավորումը պայմանավորված է ՔԿ-շրջակա միջավայր անցման սահմանի վրա պոտենցիալի թռիչքի ողորկությամբ: Հասկանալի է, որ համեմատաբար ցածր մակարդակների համար ՔԿ-ի

սահմանափակող պոտենցիալը առաջին մոտավորությամբ կարող է դիտարկվել, որպես պարաբոլական: Մյուս կողմից պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալ կարող է ձևավորվել ՔԿ-ի յուրահատուկ երկրաչափության շնորհիվ: Ասվածի ցայտուն օրինակն են հանդիսանում ուժեղ սեղմված կամ ձգված էլիպսարդային ՔԿ-երը [67-69]: Ելնելով ադիաբատական մոտավորությունից, և հաշվի առնելով ՔԿ-ի երկրաչափական առանձնահատկությունները, համակարգը կարելի է բաժանել "արագ" և "դանդաղ" ենթահամակարգերի, որտեղ "արագ" ենթահամակարգի էներգիան "դանդաղ" ենթահամակարգի համար հանդիսանում է արդյունարար պոտենցիալ էներգիա: Կարելի ցույց տալ [13], որ այն ունի պարաբոլական տեսք: Հետևաբար, կարելի է ենթադրել, որ նշված ՔԿ-երում որոշ պայմանների դեպքում կարող է իրագործվել Կոնի թեորեմը: [70, 71] աշխատանքներում ցույց են տրված ուժեղ սեղմված էլիպսարդային ՔԿ-ում մագնիսական դաշտի բացակայության և առկայության դեպքում Կոնի թեորեմի իրագործման պայմանները: Ելնելով վերը նշվածից, կարելի է ակնկալել, որ ուժեղ ձգված էլիպսարդային ՔԿ-երում էլիպսարդի ձգման ուղղությամբ կձևավորվի միաչափ պարաբոլական պոտենցիալ: Այդ առումով տվյալ խնդիրը համարժեք կլինի պարաբոլական քվանտային փոսում մի քանի էլեկտրոնային համակարգի կողմից երկարալիքային ճառագայթման կլանման խնդրին: Տվյալ խնդիրն առաջին անգամ ուսումնասիրվել է [43] աշխատանքում: Հեղինակները ցույց են տվել, որ պարաբոլական քվանտային փոսում երկարալիքային ճառագայթման կլանման և ցիկլոտրոնային ռեզոնանսի հաճախությունները կախված չեն փոսում միջէլեկտրոնային փոխազդեցությունից և էլեկտրոնների քանակից: Այսպիսով ուրույն հետաքրքրություն է առաջացնում ուժեղ ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ում մի քանի մասնիկային երկարալիքային կլանման ուսումնասիրությունը,

ինչպես մագնիսական դաշտի բացակայության, այնպես էլ առկայության դեպքերում:

ՔԿ-երի ուսումնասիրությանը զուգահեռ վերջին տարիներին առանձնահատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում մասնիկների վարքի ուսումնասիրությունը շերտավոր նանոկառուցվածքներում: Այսպիսի համակարգերի երկրաչափական առանձնահատկությունը թույլ է տալիս ճկունորեն կառավարել դրանցում գտնվող լիցքակիրների էներգիայի մակարդակները, հետևաբար, նաև նրանց ֆիզիկական բնութագրիչները: Մասնավորապես, մեկէլեկտրոնային մակարդակները կարելի է կառավարել փոփոխելով ինչպես ներքին շառավիղը, այնպես էլ արտաքին: Ընդ որում ստացված արդյունքներն օղակաձև, ինչպես նաև շերտավոր (գլանային և գնդային) կառուցվածքների համար կրում են ընդհանուր բնույթ: Համապատասխան սահմանային անցման միջոցով կարելի է իրագործել ինչպես ՔԿ-ի, այնպես էլ քվանտային փոսի և քվանտային լարի դեպքերը: Նկ. 1-ում գլանային նանոշերտի դեպքում սխեմատիկորեն ներկայացված են նշված անցումները:

Այս համակարգերի ֆիզիկական հատկություններն ուսումնասրիվել են բազմաթիվ տեսական և փորձարարական աշխատանքներում [72-79]: Օղակաձև կիսահաղորդչային նանոկառուցվածքներն առաջին անգամ իրագործվել են [80] աշխատանքում, որտեղ նաև ստացվել են էլեկտրոնների հիմնական վիճակի ահարոնովբոհմյան օսցիլյացիաները: Գնդային նանոշերտի իրականացման մասին արձանագրվել է [81] աշխատանքում, որտեղ մշակվել են $ZnSe/InP/ZnS$-ից բաղկացած միջուկ/պատյան/պատյան կառուցվածքով ՔԿ-եր: Հեղինակներն [82] աշխատանքում ներկայացրել են քվանտային օղակների $InAsSbP$ քառակի խառնուրդների վրա հիմնված հեղուկ էպիտաքսիայի միջոցով աճեցման արդյունքները և ուսումնասիրել են այդ կառուցվածքների օպտոէլեկտրոնային և մագնիսաէլեկտրոնային հատկությունները:

Նկ. 1. Գլանային նանոշերտի սահմանային դեպքերը՝ քվանտային կետ, քվանտային թաղանթ, քվանտային լար

Նանոշերտի դեպքում, սահմանափակող պոտենցիալի առանձնահատկությունը կայանում է հետևյալում. պետք է հաշվի առնվի նանոկառուցվածքների անցումը միջավայր, թե ներքին, թե արտաքին սահմաններին: Ներքին սահմանի առկայությունը կարող է բերել էներգիական մակարդակների վերադասավորման, որն էլ կազդի ուսումնասիրվող նմուշի օպտիկական և այլ հատկությունների վրա [83]:

Գլանային ՔԿ-ի երկու եզրերի առկայությունը պահանջում է նաև մտցնել այնպիսի սահմանափակող պոտենցիալ, որով հաշվի կառնվի պոտենցիալի թռիչքը ներքին (R_1) և արտաքին (R_2) սահմանների վրա:

Նկ. 2. Քվանտային օղակի ուղղանկյուն սահմանափակող պոտենցիալը

Պարզագույն դեպքում սահմանափակող պոտենցիալը կարելի է մոտարկել շառավղային r կոորդինատից կախված ուղղանկյուն

անթափանց փոսի պոտենցիալով (նկ. 2): Ընդ որում, պետք է պահանջել, որ ալիքային ֆունկցիան լինի զրո և՛ R_1-ում, և՛ R_2-ում:

Այլ սահմանափակող պոտենցիալ քվանտային օղակների համար առաջարկվել է Չակրաբորտիի և Պիետիլայնենի աշխատանքներում [84, 85]: Նրանցում հեղինակները դիտարկել են մեկէլեկտրոնային և բազմաէլեկտրոնային վիճակներն երկչափ նանոօղակներում, և որպես սահմանափակող պոտենցիալ է օգտագործվել երկչափ շեղված օսցիլյատորի պոտենցիալը, որն ունի հետևյալ տեսքը (նկ. 3).

$$V_{conf}(r) = a(r - r_0)^2, \tag{1}$$

Նկ. 3. Քվանտային օղակի շեղված օսցիլյատորի սահմանափակող պոտենցիալը

որտեղ r_0-ն մինիմումի կետն է, իսկ a-ն փորձով որոշվող պարամետր է: Այս պոտենցիալի դեպքում Շրյոդինգերի հավասարումը վերլուծական

լուծում չունի, այդ պատճառով հեղինակներն օգտվել են թվային մեթոդներից օղակաձև նանոկառուցվածքներում ֆիզիկական երևույթները նկարագրելու համար:

Շերտավոր նանոկառուցվածքներում լիցքակիրների վարքը ուսումնասիրելու համար, [86] աշխատանքում առաջարկվել է քվանտային օղակի սահմանափակող պոտենցիալը մոտարկել այսպես կոչված «հրաբխանման» կամ Սմորոդինսկի-Վինտերնիցի պոտենցիալի [87] շառավղային նմանակով (նկ. 4), որն ընդհանուր դեպքում ունի հետևյալ տեսքը.

$$V_{conf}(r) = a r^2 + \frac{b(f)}{r^2}: \qquad (2)$$

Նկ. 4. Քվանտային օղակի Սմորոդինսկի-Վինտերնիցի սահմանափակող պոտենցիալի կտրվածքը

Եթե համարենք, որ $b(f) = const$, ապա այս պոտենցիալի եռաչափ պատկերը ներկայացված է նկ. 5-ում: Քանի որ, այս պոտենցիալը մինիմումի կետի նկատմամբ համաչափ չէ, հետևաբար, a և b պարամետրերի ճկուն կառավարումը թույլ է տալիս պոտենցիալի կտրվածքը հնարավորինս մոտեցնել իրականին: Կարևոր հանգամանք է հանդիսանում նաև այն, որ այսպիսի պոտենցիալը թույլ է տալիս քվանտային օղակի էներգիայի սպեկտրի համար ստանալ վերլուծական արտահայտություններ:

Նկ. 5. Քվանտային օղակի Սմորոդինսկի-Վինտերնիցի սահմանափակող պոտենցիալի եռաչափ պատկերը

Վերջին տարիներին հետաքրքրություն է առաջացել նաև ՔԿ-երում բազմաէլեկտրոն համակարգերի ջերմադինամիկական հատկությունների ուսումնասիրությունը: Մասնավորապես [88] աշխատանքում հետազոտվել են գաուսյան սահմանափակող պոտենցիալով $GaAs$ ՔԿ-ի ջերմունակությունն ու էնտրոպիան: Հեղինակները ցածր ջերմաստիճաններում յուրահատկություն են արձանագրել, որը նման է ջերմունակության Շոտկիի յուրահատկությանը: Աշխատանք [89]-ում հետազոտվել են գաուսյան պոտենցիալով ՔԿ-ում էլեկտրոնային գազի ընդհանուր մագնիսացվածությունը և մագնիսական ընկալունակությունը: Ցույց է տրվել, որ ցածր ջերմաստիճաններում և թույլ դաշտերում

համարակգը գտնվում է պարամագնիսական փուլում, իսկ բարձր ջերմաստիճաններում և ուժեղ դաշտերում գերակշռում է դիամագնիսական փուլը: Հեղինակներն [90] աշխատանքում ուսումնասիրել են անհամաչափ սահմանափակող պոտենցիալով գլանային ՔԿ-ի ջերմադինամիկական և մագնիսական հատկությունները: Մասնավորապես, ցույց է տրվել, որ ՔԿ-ում էլեկտրոնային գազը պարամագնիսական վարք է ցուցաբերում: Նշված աշխատանքներում ցուցադրված է ՔԿ-ի երկրաչափական պարամետրերի փոփոխության միջոցով էլեկտրոնային գազի ջերմադինամիկական և մագնիսական բնութագրիչների կառավարման հնարավորությունը: Այս առումով հետաքրքրություն է առաջանում ուսումնասիրել միջուկ/պատյան/պատյան շերտավոր նանոկառուցվածքներում տեղայնացված էլեկտրոնային գազի ջերմադինամիկական և մագնիսական հատկությունները, մասնավորապես գլանային ՔԿ-ի, քանի որ ներքին սահմանի առկայությունը հանդիսանում է վիճակների կառավարման լրացուցիչ լծակ:

Ներկայացվող ատենախոսությունը նվիրված է գնդային և աքսիալ համաչափություններով ՔԿ-երում երկմասնիկային և բազմամասնիկային համակարգերի էլեկտրոնային, օպտիկական և մագնիսական հատկությունների ուսումնասիրությանը: Մասնավորապես, ուսումնասիրվել են գնդային և գլանային ՔԿ-երը, ինչպես նաև ուժեղ ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ը (ՈւՁԷՔԿ) և գլանային նանոշերտը:

Հաստատուններ և բնութագրեր

Ներկայացվող աշխատանքում որպես միավորների համակարգ ընտրված է գաուսյան համակարգը: Ստորև (Աղ. 1) բերված են օգտագործված հիմնական ֆիզիկական հաստատուններն նշված համակարգում:

h , էրգ·վ	6.62607×10^{-27}	Պլանկի հաստատունը

$\hbar$, էրգ·վ	1.05457×10^{-27}	Պլանկի բերված հաստատունը
m_e, գ	9.10938×10^{-28}	Էլեկտրոնի զանգվածը
e, լ.է.մ.	4.80321×10^{-10}	Էլեկտրոնի լիցքը
k_B, էրգ/K	1.38066×10^{-16}	Բոլցմանի հաստատունը
c, սմ/վ	2.99792×10^{10}	Լույսի արագությունը

Աղյուսակ 1. Հիմնական ֆիզիկական հաստատունները գաուսյան համակարգում

Թվային հաշվարկները կատարված են $GaAs$ և $GaAs/GaAl_xAs_{1-x}$ կառուցվածքների համար: Աղ. 2-ում բերված են այս կառուցվածքների հիմնական բնութագրերը:

	$GaAs$	$GaAs/GaAl_xAs_{1-x}$
էլեկտրոնի արդյունարար զանգվածը		
m_e, գ	$0.067m_e$	$(0.067 + 0.083x)m_e$
դիելեկտրական թափանցելիությունը		
e	12.90	$12.90 - 2.84x$
Ռիդբերգի արդյունարար էներգիան		
Ry^*, էրգ	8.78×10^{-15}	$8.78 \times 10^{-15} + 1.5 \times 10^{-14}x$
Բորի արդյունարար շառավիղը		
a_B^*, սմ	10.2×10^{-7}	$10.2 \times 10^{-7} - 14.9 \times 10^{-7}x$

Աղյուսակ 2. $GaAs$ և $GaAs/GaAl_xAs_{1-x}$ կառուցվածքների բնութագրերը

Էներգիայի և երկարության անչափացումը կատարվում է, համապատասխանաբար, Ռիդբերգի արդյունարար էներգիայով

$$Ry^* = \frac{m^* e^4}{2\hbar^2 \varepsilon^2} \qquad (3)$$

և Բորի արդյունարար շառավղով

$$a_B^* = \frac{\hbar^2 e}{m e^2}, \qquad (4)$$

որտեղ e-ը նյութի դիէլեկտրական թափանցելիությունն է:

Ատենախոսության նպատակը

1. Գնդային ՔԿ-երում տեղայնացված երկէլեկտրոնային խառնուկային համակարգերում փոխանակային երևույթների ուսումնասիրությունը:
2. Ուժեղ ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ում Կոնի ընդհանրացված թեորեմի իրագործման պայմանների բացահայտումը, ինչպես մագնիսական դաշտի բացակայության, այնպես էլ առկայության դեպքերում:
3. Գլանային նանոշերտում տեղայնացված էլեկտրոնային գազի մագնիսական ընկալունակության բնույթի ուսումնասիրությունը:

Ատենախոսության հիմնական դրույթները

1. Պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով գնդային ՔԿ-ում տեղայնացված, երկէլեկտրոնային խառնուկի էլեկտրոնների միջև վիճակների փոխանակման ժամանակի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղի մեծացմանը զուգընթաց ունի հագեցող բնույթ:
2. Վերջավոր խորությամբ գնդային ՔԿ-ում տեղայնացված, երկէլեկտրոնային խառնուկի էլեկտրոնների միջև վիճակների փոխանակման ժամանակի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից ունի մինիմումի կետ, որը համապատասխանում է էլեկտրոններից մեկի քվանտային արտանետմանը ՔԿ-ից շրջապատող միջավայր:

3. ՈՒՁԷՔԿ-ի յուրահատուկ երկրաչափության շնորհիվ այդպիսի համակարգերում իրագործվում են Կոնի ընդհանրացված թեորեմի իրականացման պայմանները:
4. Չափային քվանտացման շնորհիվ, գլանային նանոշերտում տեղայնացված էլեկտրոնային գազի մագնիսացվածության կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից գրեթե գծային է, և որպես հետևանք, դիամագնիսական ընկալունակության կախվածությունն այդ դաշտի արժեքից թույլ է:

Ատենախոսության գիտական նորույթը

1. Հետազոտված են, վերջավոր ուղղանկյուն և պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով գնդային ՔԿ-երում տեղայնացված երկէլեկտրոնային խառնուկային համակարգերում ընթացող փոխանակային երևույթները:
2. Ուժեղ ձգված պտտման էլիպսարդի տեսք ունեցող ՔԿ-ում որոշված են Կոնի ընդհանրացված թեորեմի իրագործման պայմանները, ինչպես մագնիսական դաշտի բացակայության, այնպես էլ առկայության դեպքերում:
3. Ուսումնասիրվել են գլանային նանոշերտում տեղայնացված թույլ փոխազդող էլեկտրոնային գազի դիամագնիսական հատկությունները կախված մագնիսական դաշտի արժեքից և նանոշերտի երկրաչափական պարամետրերից:

ԳԼՈՒԽ 1. ԵՐԿԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ԽԱՌՆՈՒԿԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԸ ԳՆԴԱՅԻՆ ՔԿ-ԵՐՈՒՄ

1. 1. Էներգիայի գնահատումը անորոշությունների առնչության հիման վրա

Ինչպես վերը նշվեց, ՔԿ-ում երկէլեկտրոնային համակարգը կարելի է դիտարկել որպես արհեստական հելիումանման ատոմ, որի հատկությունները կարելի է կառավարել: Այս ենթագլխում դիտարկվում է պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով գնդային ՔԿ-ում երկէլեկտրոնային խառնուկային համակարգի վարքը (նկ. 1.1):

Նկ. 1.1. Երկէլեկտրոն խառնուկը գնդային ՔԿ-ում

ՔԿ-ի սահմանափակող պոտենցիալը դիտարկվում է որպես գնդային համաչափությամբ պարաբոլական փոս՝

$$V_{conf}(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}, \tag{1.1}$$

որտեղ m-ն էլեկտրոնի արդյունարար զանգվածն է, ω-ն՝ սահմանափակող պոտենցիալի հաճախությունը, որը համաձայն վիրիալի թեորեմի [91] որոշվում է

$$\omega \sim \frac{\hbar}{mR^2}, \tag{1.2}$$

բանաձևով, որտեղ R-ը ՔԿ-ի շառավիղն է:

Համակարգի համիլտոնիանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{2} \hat{H}_i + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tag{1.3}$$

որտեղ $\hat{H}_i$-ն մեկէլեկտրոնային համիլտոնիանն է, որն իրենից ներկայացնում է հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{conf}(r) - \frac{Ze^2}{\varepsilon r}, \tag{1.4}$$

որտեղ Ze-ն խառնուկի լիցքն է, ε-ը ՔԿ-ի նյութի դիէլեկտրական թափանցելիությունը, իսկ $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$-ն միջէլեկտրոնային փոխազդեցության էներգիան է՝

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{e^2}{\varepsilon\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right|}: \tag{1.5}$$

Համակարգի էներգիայի արժեքը կարելի է գնահատել ելնելով հետևյալ արտահայտությունից.

$$E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{m\omega^2 r_2^2}{2} - \frac{Ze^2}{\varepsilon r_1} - \frac{Ze^2}{\varepsilon r_2} + \frac{e^2}{\varepsilon\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right|}: \tag{1.6}$$

Նկատենք, որ մասնիկների վերադասավորումից էներգիայի արտահայտության (1.6) տեսքը չի փոխվում: Հետևաբար, r_1-ով և r_2-ով մինիմիզացիայի պայմանները՝

$$\frac{\P E}{\P r_1} = 0, \frac{\P E}{\P r_2} = 0 \qquad (1.7)$$

բավարարվում են $r_{\min}$-ի միևնույն արժեքի դեպքում: Հաշվի առնելով այս հանգամանքը, համարենք, որ էլեկտրոնները տեղակայված են տրամագծորեն [38], և $p_1 = p_2 = p$, $r_1 = r_2 = r$: Այժմ, էներրգիայի արժեքի գնահատման համար, կարելի է օգտվել կոորդինատի և իմպուլսի անորոշությունների Հայզենբերգի առնչությունից.

$$E(r) \sim \frac{\hbar^2}{mr^2} + mw^2r^2 - \frac{2Ze^2}{er} + \frac{e^2}{2er}: \qquad (1.8)$$

Էներգիայի մինիմիզացիայի պայմանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{dE(r)}{dr} = 0: \qquad (1.9)$$

Ներմուծելով անչափ մեծություններ՝

$$r_{rel} = \frac{r}{a_B^*}; R_{rel} = \frac{R}{a_B^*}, \qquad (1.10)$$

կստանանք հետևյալ հավասարումը

$$\frac{r_{rel}^4}{R_{rel}^4} + \left(Z - \frac{1}{4}r_{rel}\right) - 1 = 0: \qquad (1.11)$$

Հաշվի առնելով այս հավասարումը և տեղադրելով նրա մեջ $r_{rel}(R_{rel})$-ը, կարող ենք գտնել էներգիայի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից:

Այսպիսով՝

$$E_{min} \sim \frac{\hbar^2}{ma_B^{*2}}\left(\frac{1}{r_{rel}^2} + \frac{r_{rel}^2}{R_{rel}^4}\right) - \frac{e^2}{a_B^*}\left(Z - \frac{1}{4}r_{rel}\right)\frac{1}{r_{rel}}: \qquad (1.12)$$

Նկ. 1.2. Երկէլեկտրոնային խառնուկի հիմնական վիճակի էներգիայի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից ($Z = 2$):

Այստեղ $\frac{\hbar^2}{ma_B^{*2}}$ և $\frac{e^2}{2a_B^*}$ մեծություններն ունեն էներգիայի չափողականություն և համապատասխանաբար հավասար են՝ $2Ry^*$-ի ու Ry^*-ի: Արդյունքում ստանում ենք նկ. 2-ում բերված կախվածությունը: Այն արտացոլում է համակարգի էներգիայի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից, որը մոնոտոն նվազում է, անցնելով դրական արժեքների տիրույթից բացասական արժեքների տիրույթ, ՔԿ-ի շառավղի աճին զուգընթաց: Բանն այն է, որ ՔԿ-ի շառավղի նվազմանը զուգընթաց պատի սահմանափակող ետմղման դրական էներգիան աստիճանաբար գերակշռում է խառնուկի կուլոնյան փոխազդեցության բացասական էներգիան, ինչի շնորհիվ համակարգի լրիվ էներգիան ընդունում է դրական արժեքներ: ՔԿ-ի շառավղի աճին զուգընթաց չափային

քվանտացման էներգիան նվազում է և համակարգի լրիվ էներգիան մոնոտոն նվազելով ձգտում է զանգվածեղ նմուշում երկարժեքային դոնորային խառնուկի էներգիայի արժեքին:

R, a_B^*	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
r_{min}, a_B^*	0.380	0.462	0.512	0.538	0.552	0.560	0.564	0.567

Աղյուսակ 1.1. r_{min} կախվածությունը ՔԿ R շառավղից

Աղյուսակ 1.1-ում բերված են r_{min}-ի որոշ արժեքները ՔԿ-ի R շառավղի տարբեր արժեքների համար, որոնք գնահատվել են անորոշությունների առնչության հիման վրա:

1.2. Միջէլեկտրոնային փոխազդեցության էներգիայի որոշումը խոտորումների տեսության շրջանակներում

Այժմ գնահատենք երկէլեկտրոնային խառնուկի էներգիան խոտորումների տեսության շրջանակներում: Սույն խնդրի առաջին քայլը հանդիսանում է վարիացիոն եղանակով մեկէլեկտրոնային խառնուկի նկարագրությունը պարաբոլական ՔԿ-ում:

Հաշվի առնելով խառնուկի գնդային համաչափությունը մեկէլեկտրոնային համակարգի ալիքային ֆունկցիան կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\Upsilon(r,q,f) = y(r)Y_{l,m}(q,f), \qquad (1.13)$$

որտեղ $y(r)$-ն ալիքային ֆունկցիայի շառավղային մասն է, $Y_{l,m}(q,f)$-ները գնդային հարմոնիկներն են, l-ն ու m-ը համապատասխանաբար անկյունային և ուղեծրային քվանտային թվերն են:

Ներմուծելով $r = \frac{r}{a_B^*}$ անչափ մեծությունը, համակարգի համիլտոնիանի շառավղային մասի համար [25] կստանանք.

$$\hat{H}_{rad} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} + b^2 r^2 - \frac{2Z}{r}, \qquad (1.14)$$

որտեղ $b = \frac{\hbar w}{2Ry^*}$-ը պարաբոլական սահմանափակող պոտեցիալի պարամետրն է:

Շառավղային մասի համար, որպես վարիացիոն ալիքային ֆունկցիա դիտարկենք հետևյալը.

$$y_{tr}(r,l) = C(l)\exp\left(-\frac{br^2}{l}\right)\exp(-lr), \qquad (1.15)$$

որտեղ l-ն վարիացիոն պարամետրն է, իսկ $C(l)$-ն նորմավորման հաստատունը: Մեկէլեկտրոնային էներգիայի և վարիացիոն l պարամետրի կախվածությունը b պարամետրից, կարելի է որոշել ելնելով հետևյալ առնչությունից.

$$I(l,b) = \frac{\left\langle Y^* \middle| \hat{H}_{rad} \middle| Y \right\rangle}{\left\langle Y^* \mid Y \right\rangle} \to \min, \qquad (1.16)$$

որի վերջնական տեսքը հետևյալն է.

$$I(l,b)=\frac{-2\sqrt{b}\left(2Zb+3bl+l^{3}\right)}{-2\sqrt{b}l+e^{\frac{l^{2}}{b}}\sqrt{p}\left(b+2l^{2}\right)Erfc\left(\frac{l}{\sqrt{b}}\right)}+$$

$$\frac{e^{\frac{l^{2}}{b}}\sqrt{p}\left(3b^{2}+2l^{4}+bl\left(4Z+7l\right)\right)Erfc\left(\frac{l}{\sqrt{b}}\right)}{-2\sqrt{b}l+e^{\frac{l^{2}}{b}}\sqrt{p}\left(b+2l^{2}\right)Erfc\left(\frac{l}{\sqrt{b}}\right)}: \qquad (1.17)$$

Մինիմիզացիայի (1.16) պայմանից՝ $Z=2$ դեպքի համար կարելի է ստանալ l_{min}-ի կախվածությունը պարաբոլական սահմանափակման b պարամետրից (նկ. 1.3), որը մոտարկվել է հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$l_{min}(b)=a_1+\frac{a_2}{a_3+b}, \qquad (1.18)$$

որտեղ a_1-ն, a_2-ն, a_3-ն որոշվում են թվային եղանակով՝ $a_1 \approx 1.17$, $a_2 \approx 0.89$, $a_3 \approx 1.09$ (դիտարկվել է $GaAs$ ՔԿ):

Նկ. 1.3. λ_{min}-ի կախվածությունը պարաբոլական սահմանափակող β պարամետրից ($Z = 2$):

Մինիմիզացիայի պայմանից կարելի է նաև գտնել մեկէլեկտրոնային էներգիայի կախվածությունը β պարամետրից: Հաշվի առնելով (1.2) առնչությունը, արդեն կարող ենք ստանալ էներգիայի կախվածությունը (նկ. 1.4) ՔԿ-ի շառավղից: Ինչպես երևում է նկարում, ուսումնասիրվող համակարգի էներգիան մոնոտոն նվազում է ՔԿ-ի շառավղի աճին զուգընթաց: Ինչը լիովին համընկնում է անորոշությունների առնչության հիման վրա ստացված արդյունքի հետ:

Նկ. 1.4. Երկէլեկտրոնային խառնուկի հիմնական վիճակի էներգիայի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից ($Z = 2$):

Երբ $Z = 1$, անցնելով $b \to 0$ (պարաբորլական սահմանափակումը վերանում է) սահմանի, կգանք ջրածնի հիմնական վիճակի ալիքային ֆունկցիային.

$$y(r) = C\exp(-r), \tag{1.19}$$

իրոք, այդ դեպքում կունենանք, որ

$$I(l,0) = (-2 + l)l, \tag{1.20}$$

և մինիմիզացիայի պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$\frac{dI(l,0)}{dl} = -2 + 2l \ : \tag{1.21}$$

Այսպիսով, $\frac{dI(l,0)}{dl} = 0$ պայմանից, ստացվում է, որ $l = 1$, որի դեպքում (1.15) ալիքային ֆունկցիան ճշգրիտ համընկնում է ջրածնի ատոմի հիմնական վիճակի ալիքային ֆունկցիայի հետ:

Այժմ հաշվենք ՔԿ-ում էլեկտրոնների փոխազդեցության էներգիայի ուղղումը խոտորումների տեսության շրջանակներում: Այն կորոշվի համաձայն

$$\Delta V = \langle 1s | V^{\text{էլ}} | 1s \rangle \qquad (1.22)$$

բանաձևի:

Հիմնական վիճակի մեկէլեկտրոնային ալիքային ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$\Psi_{1s}(r) = \frac{1}{2\sqrt{p}} y(r): \qquad (1.23)$$

Առաջին մոտավորությամբ, երկմասնիկային ալիքային ֆունկցիան կարելի է գրել որպես մեկմասնիկային ֆունկցիաների արտադրյալ.

$$\Phi_{1s}(r_1, r_2) = \frac{1}{4p} y(r_1) y(r_2): \qquad (1.24)$$

Այդ դեպքում էներգիայի ուղղումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\Delta V = \int \Phi_{1s}^2(r_1) \Phi_{1s}^2(r_2) V^{\text{էլ}} r_1^2 r_2^2 d\Omega_1 d\Omega_2 dr_1 dr_2 =$$

$$= \frac{e^2}{2ea_B^*} \int_0^\infty \int_0^\infty y^2(r_1) y^2(r_2) r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2 \int_0^p \frac{\sin q_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos q_1}} dq_1 : \qquad (1.25)$$

Օգտվելով հայտնի ինտեգրալից [92]

$$\int_0^p \frac{\sin q_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos q_1}} dq_1 = \begin{cases} \frac{2}{r_2}, & r_2 > r_1 \\ \frac{2}{r_1}, & r_2 < r_1 \end{cases}, \qquad (1.26)$$

կստանանք

$$\mathrm{D}V = \frac{e^2}{ea_B^*}\int_0^{\infty}\int_0^{r_1} y^2\left(l\left(b\right), b, r_1\right) y^2\left(l\left(b\right), b, r_2\right) r_1 r_2^2 dr_2 dr_1 +$$

$$+ \frac{e^2}{ea_B^*}\int_0^{\infty}\int_{r_1}^{\infty} y^2\left(l\left(b\right), b, r_1\right) y^2\left(l\left(b\right), b, r_2\right) r_1^2 r_2 dr_2 dr_1 : \qquad (1.27)$$

Նկատենք, որ $\frac{e^2}{ea_B^*}$-ն ունի էներգիայի չափողականություն և հավասար է $2Ry^*$:

Նկ. 1.5. Երկէլեկտրոնային խառնուկի միջէլեկտրոնային փոխազդեցության էներգիայի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից ($Z = 2$):

Թվային եղանակով (1.27) ինտեգրալի արժեքը որոշելով, կստանանք $\mathrm{D}V$ միջէլեկտրոնային փոխազդեցության էներգիայի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից (նկ. 1.5): Ինչպես երևում է ՔԿ-ի շառավղի աճին զուգընթաց փոխազդեցության էներգիան նվազում է:

Հաշվի առնելով այս արդյունքները, կարող ենք որոշել հիմնական վիճակի էներգիան խոտորումների տեսության շրջանակներում համաձայն

$$E = 2E_0 + \mathrm{D}V, \qquad (1.28)$$

բանաձևի, որտեղ E_0-ն մեկէլեկտրոնային էներգիան է:

Նկ. 1.6. Երկէլեկտրոնային խառնուկի հիմնական վիճակի էներգիայի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից ($Z = 2$), երբ միջէլեկտրոնային փոխազդեցության էներգիան՝ 1) հաշվի է առնված, 2) հաշվի չի առնված, 3) ստացվել է անորոշությունների առնչության հիման վրա:

Ինչպես երևում է նկ. 1.6-ից երկէլեկտրոնային համակարգի էներգիան մոնոտոն նվազում է դրական արժեքների տիրույթից անցնելով բացասական արժեքների տիրույթ ՔԿ-ի շառավղի աճին զուգընթաց: Քանի որ, մեծ շառավիղների դեպքում չափային քվանտացման էներգիան

նվազում է, համակարգի լրիվ էներգիան մոնոտոն կերպով ձգտում է զանգվածեղ նմուշում երկարժեքային դոնորային խառնուկի էներգիային:

1.3. Փոխանակային փոխազդեցությունը պարաբոլական ՔԿ-ում

Համաձայն Ռասլ-Սաունդերսի մոտավորության, երկէլեկտրոնային ալիքային ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել կոորդինատային (տրիպլետ կամ սինգլետ) և սպինային ալիքային ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով: Սինգլետ և տրիպլետ ալիքային ֆունկցիաների համար ունենք [93].

$$F\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s_{1z}, s_{2z}\right) = Y\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\right) c\left(s_{1z}, s_{2z}\right), \tag{1.29}$$

որտեղ $Y\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\right)$-ը ալիքային ֆունկցիայի կոորդինատային մասն է, իսկ $c\left(s_{1z}, s_{2z}\right)$-ը սպինայինը: Քաջ հայտնի է [94], որ երկէլեկտրոնային համակարգի սպինային ալիքային ֆունկցիան ներկայացվում է ինչպես՝

$$c_S = \begin{cases} a(1)a(2), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a(1)b(2) + a(2)b(1)\right\}, \\ b(1)b(2), \end{cases} \tag{1.30}$$

$$c_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a(1)b(2) - a(2)b(1)\right\}, \tag{1.31}$$

որտեղ

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

և

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}: \tag{1.33}$$

Հիմնական վիճակի A փոխանակային և Q կուլոնյան ինտեգրալները հավասար են [38].

$$A = \int \Psi^*_1(\mathbf{r}_1)\Psi^*_2(\mathbf{r}_2)\frac{e^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\Psi_1(\mathbf{r}_2)\Psi_2(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \qquad (1.34)$$

$$Q = \int \Psi^*_1(\mathbf{r}_1)\Psi_1(\mathbf{r}_1)\frac{e^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\Psi_2(\mathbf{r}_2)\Psi^*_2(\mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 : \qquad (1.35)$$

Ինչպես նշվեց ներածությունում, փոխանակային ինտեգրալի առկայությունը բերում է էլեկտրոնների միջև վիճակների փոխանակման [95]: Ենթադրենք ժամանակի $t = 0$ պահին, առաջին էլեկտրոնը գտնվում է n_1 վիճակում, իսկ երկրորդը n_2 վիճակում: Այդ դեպքում սկզբնական ալիքային ֆունկցիան կլինի.

$$\Psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[y_a(0) + y_s(0)\right] = y_{n_1}(1)y_{n_2}(2): \qquad (1.36)$$

y_s սիմետրիկ և y_a հակասիմետրիկ ալիքային ֆունկցիաներով նկարագրվող վիճակները ստացիոնար են, և նրանց էներգիաները, համապատասխանաբար, հավասար են

$$E_s = E + Q + A, \qquad (1.37)$$

$$E_a = E + Q - A : \qquad (1.38)$$

Հետևաբար y_s և y_a ալիքային ֆունկցիաների կախվածությունը ժամանակից տրվում է հետևյալ բանաձևերով.

$$y_s = y_s(0)e^{-\frac{i}{\hbar}(E+Q+A)t}, \qquad (1.39)$$

$$y_a = y_a(0)e^{-\frac{i}{\hbar}(E+Q-A)t} : \qquad (1.40)$$

Լրիվ ալիքային ֆունկցիան երբ $t > 0$, համարվում է նրանց համադրումը.

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[y_s(t) + y_a(t)\right] = \frac{1}{2}\left[y_{n_1}(1)y_{n_2}(2) + y_{n_2}(1)y_{n_1}(2)\right]e^{-\frac{i}{\hbar}(E+Q+A)t} +$$

$$+ \left[y_{n_1}(1)y_{n_2}(2) - y_{n_2}(1)y_{n_1}(2)\right]e^{-\frac{i}{\hbar}(E+Q-A)t} \tag{1.41}$$

$$= \left[y_{n_1}(1)y_{n_2}(2)\cos\frac{1}{\hbar}At - i\,y_{n_2}(1)y_{n_1}(2)\sin\frac{1}{\hbar}At\right]e^{-\frac{i}{\hbar}(E+Q)t} :$$

(1.41) բանաձևից երևում է, որ եթե $t = 0$ պահին 1 էլեկտրոնը գտնվում էր n_1 վիճակում, իսկ 2 էլեկտրոնը՝ n_2, ապա

$$t = \frac{p\hbar}{2A} \tag{1.42}$$

ժամանակահատվածում նրանք փոխանակվում են վիճակներով: Եվ

$$y_{n_2}(1)y_{n_1}(2)e^{-\frac{i}{\hbar}(E+Q)t} \tag{1.43}$$

ալիքային ֆունկցիան, ցույց է տալիս, որ առաջին էլեկտրոնը գտնվում է n_2 վիճակում, իսկ երկրորդը՝ n_1: $2t$ ժամանակահատվածում նրանք վերադառնում են սկզբանական վիճակներ, և այդպես շարունակ:

Այսպիսով, էլեկտրոնները փոխանակվում են վիճակներով t պարբերությամբ.

$$t = \frac{p\hbar}{2A} = \frac{p\hbar}{2}\frac{1}{\mathrm{D}V} : \tag{1.44}$$

ՔԿ-ի շառավղի աճին զուգընթաց վիճակների փոխանակման ժամանակն աճում է, քանի որ փոխանակային ինտեգրալի արժեքը նվազում է, թուլանում է նաև չափային քվանտացումը, հետևաբար խառնուկի կուլոնյան փոխազդեցությունը սկսում է զգալի դեր խաղալ էլեկտրոնների վիճակների փոխանակման պրոցեսում: Էլեկտրոնները սկսում են միմյանց թույլ "զգալ", հետևաբար, վիճակների փոխանակման հավանականությունը փոքրանում է: Սակայն, խառնուկի առկայության

դեպքում փոխանակման ժամանակի կախվածությունը գծային չէ (նկ. 1.7), ինչպես դա տեղի ունի առանց խառնուկի դեպքում (նկ. 1.8) [38]:

Նկ. 1.7. Պարաբոլական ՔԿ-ում էլեկտրոնների վիճակների փոխանակման τ ժամանակի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից խառնուկի առկայության դեպքում:

Նկ. 1.7-ում և նկ. 1.8-ում բերված են վիճակների փոխանակման ժամանակի կախվածությունները ՔԿ-ի շառավղից, համապատասխանաբար, խառնուկի առկայության և բացակայության դեպքերում: Երբ բացակայում է խառնուկը, վիճակների փոխանակման ժամանակը մոնոտոն աճում է ՔԿ-ի շառավղին զուգընթաց, քանի որ էկեկտրոնների միջև հեռավորությունը աճում է, և որպես հետևանք, փոխանակային ինտեգրալի արժեքը նվազում (Նկ. 1.8):

Նկ. 1.8. Պարաբոլական ՔԿ-ում էլեկտրոնների վիճակների փոխանակման τ ժամանակի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից խառնուկի բացակայության դեպքում:

Երբ ՔԿ կենտրոնում առկա է ջրածնանման խառնուկ, էլեկտրոնների տեղայնացումը շառավղի մեծ արժեքների դեպքում մեծամասամբ պայմանավորված է խառնուկի կուլոնյան ձգողական դաշտով (Նկ. 1.7): Արդյունքում, համակարգը նմանվում է զանգվածեղ կիսահաղորդչում երկարժեքային խառնուկին: Այսպիսով, վիճակների փոխանակման ժամանակի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից ունի հագեցող բնույթ (նկ. 1.7): Նկատենք, որ նշված ժամանակը կազմում է շուրջ $t \sim 10^{-14}$ վ: Երբ բացակայում է խառնուկային կենտրոնը [38] էլեկտրոնների միջև վիճակների փոխանակման ժամանակը զգալի փոքր է՝ $t \sim 10^{-10}$ վ: Վերջապես նշենք, որ հելիումի ատոմում այս ժամանակը $t \sim 10^{-16}$ վ կարգի մեծություն է:

1.4. Երկէլեկտրոնային խառնուկը վերջավոր սահմանափակող պոտենցիալով գնդային ՔԿ-ում

Այս ենթագլխում դիտարկվում է վերջավոր խորությամբ սահմանափակող պոտենցիալով գնդային ՔԿ-ում երկէլեկտրոնային դոնորային խառնուկի վարքը: Դիտարկվող համակարգի համիլտոնիանը տրվում է նույն (1.2) բանաձևով, սակայն այս դեպքում դիտարկում ենք վերջավոր V_0 բարձրությամբ սահմանափակող պոտենցիալը, որն ունի հետևյալ տեսքը.

$$V_{conf}(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}, \tag{1.45}$$

որտեղ R-ը ՔԿ-ի շառավիղն է:

Բացի այդ պետք է հաշվի առնել նաև ՔԿ-ում (m_1) և դրանից դուրս (m_2) էլեկտրոնի արդյունարար զանգվածների տարբերությունը (ՔԿ-ի նյութի և արտաքին նյութի դիէլեկտրական թափացելիությունների տարբերությունը չի դիտարկվում):

Այսպիսով՝

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{2} \hat{H}_i + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tag{1.46}$$

որտեղ $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$-ն էլեկտրոնների միջև փոխազդեցության էներգիան է՝

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{e^2}{\varepsilon |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}: \tag{1.47}$$

$\hat{H}_i$–ն մեկէլեկտրոնային խառնուկի համիլտոնիանն է, և ունի հետևյալ տեսքը.

$$\hat{H}_i = T(r_i) + V_{conf}(r_i) - \frac{Ze^2}{\varepsilon r_i}, \tag{1.48}$$

որտեղ $T^{€}$-ն կինետիկ էներգիայի օպերատորն է և տրվում է հետևյալ առնչությամբ՝

$$T^{€}(r_i) = \begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_i^2, & r_i < R \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_i^2, & r_i > R \end{cases} : \qquad (1.49)$$

Համակարգն ունի գնդային համաչափություն, հետևաբար մեկ մասնիկային ալիքային ֆունկցիան կունենա նույն (1.13) տեսքը.

$$\Psi(r,q,f) = y(r)Y_{l,m}(q,f): \qquad (1.50)$$

Տեղադրելով (1.50)-ը (1.48) համիլտոնիանով Շրյոդինգերի հավասարման մեջ և կատարելով նշանակումներ՝

$$r = \frac{r}{a_{B1}^*}, g = \frac{m_1}{m_2}, \qquad (1.51)$$

որտեղ $a_{B1}^* = \dfrac{\hbar^2 e}{m_1 e^2}$-ն Բորի արդյունարար շառավիղն է ներսի տիրույթի համար, կստանանք Շրյոդինգերի շառավղային հավասարումները ներքին և արտաքին տիրույթների համար.

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dr^2} - \dfrac{2}{r}\dfrac{d}{dr} + \dfrac{l(l+1)}{r^2} - \dfrac{2Z}{r} - V_0 \Big] y(r) = \dfrac{E}{Ry^*} y(r), & r < R \\ -g\dfrac{d^2}{dr^2} - \dfrac{2g}{r}\dfrac{d}{dr} + \dfrac{gl(l+1)}{r^2} - \dfrac{2Z}{r} \Big] y(r) = \dfrac{E}{Ry^*} y(r), & r > R \end{cases} : \qquad (1.52)$$

որտեղ $Ry^* = \dfrac{m_1 e^4}{2\hbar^2 e^2}$-ը Ռիդբերգի արդյունարար էներգիան է ներսի տիրույթի համար:

Հիմնական վիճակի էներգիան հաշվելու համար, ինչպես նախորդ ենթագլխում, օգտվենք վարիացիոն եղանակից: Որպես վարիացիոն ֆունկցիա դիտարկենք հետևյալը.

$$y_{tr}(r,l)=\begin{cases} y_{tr}^{(in)}(r,l), & r<R \\ y_{tr}^{(out)}(r,l), & r>R \end{cases}, \qquad (1.53)$$

որտեղ l -ն վարիացիոն պարամետրն է, R -ը ՔԿ-ի շառավիղը,

$$y_{tr}^{(in)}(r,l)=\exp\left(-\frac{r}{lR}\right), \qquad (1.54)$$

$$y_{tr}^{(out)}(r,l)=C(l)\exp\left(-\frac{r}{l_{out}(l)R}\right): \qquad (1.55)$$

$l_{out}(l)$ կախվածությունը կարելի է հեշտությամբ ստանալ $r=R$ կետում ալիքային ֆունկցիայի անընդհատության՝

$$y_{tr}^{(in)}(r=R,l)=y_{tr}^{(out)}(r=R,l), \qquad (1.56)$$

և ԲենԴանիել-Դյուկի՝

$$\frac{1}{m_1}y_{tr}^{'(in)}(r=R,l)=\frac{1}{m_2}y_{tr}^{'(out)}(r=R,l), \qquad (1.57)$$

պայմաններից:

Հաշվի առնելով վերը նշվածը կստանանք.

$$l_{out}=gl\ : \qquad (1.58)$$

Տեղադրելով (1.58)-ը ալիքային ֆունկցիայի անընդհատության պայմանի մեջ, $C(\lambda)$-ի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը.

$$C(l)=\exp\left(\frac{r}{R}\frac{1-g}{lg}\right): \qquad (1.59)$$

Հաշվի առնելով արդյունարար զանգվածների տարբերությունը ($GaAs/GaAl_xAs_{1-x}$ ՔԿ-ի համար g-ն հավասար է 0.73-ի) համիլտոնիանը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} \hat{H}_{in} = -\dfrac{d^2}{dr^2} - \dfrac{2}{r}\dfrac{d}{dr} + \dfrac{l(l+1)}{r^2} - \dfrac{2Z}{r} - V_0, & r < R \\ \hat{H}_{out} = -g\dfrac{d^2}{dr^2} - \dfrac{2g}{r}\dfrac{d}{dr} + \dfrac{gl(l+1)}{r^2} - \dfrac{2Z}{r}, & r > R \end{cases} : \qquad (1.60)$$

l պարամետրը և հիմնական վիճակի էներգիան կարելի է որոշել մինիմիզացնելով հետևյալ ինտեգրալը.

$$I(l,R) = \frac{\int_0^R \Psi_{tr}^{(in)} \hat{H}_{in} \Psi_{tr}^{(in)} r^2 dr + \int_R^\infty \Psi_{tr}^{(out)} \hat{H}_{out} \Psi_{tr}^{(out)} r^2 dr}{\int_0^\infty \left|\Psi_{tr}\right|^2 r^2 dr} \to \min : \qquad (1.61)$$

Հաշվելով ինտեգրալ (1.61)-ը արդյունքում կստանանք հետևյալ վերլուծական արտահայտությունը.

$$I(l,R) = \frac{e^{-\frac{2}{l}}}{R^2 l^4}\left(2 - 2l + \Lambda + e^{\frac{2}{l}}\Lambda + 2R^2 V_0 l^2 + 2R\left(RV_0 - e^{\frac{2}{l}} Z l^3 - \left(e^{\frac{2}{l}} - 1\right)R^2 V_0 l^4 + g\left(-2 + 2l + \Lambda l^2\right)\right)\right), \qquad (1.62)$$

որտեղ $\Lambda = -1 - 2l - 2l^2$:

Մինիմիզացիայի պայմանից (1.61) կարելի է նաև ստանալ վարիացիոն l պարամետրի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից (նկ. 1.9): Նկատենք, որ ՔԿ-ի շառավղի զգալի մեծ արժեքների դեպքում վարիացիոն պարամետրը ասիմտոտիկ ձգտում է $l \to \frac{1}{R}$ կորին: Սա նշանակում է, որ անվերջ մեծ շառավիղների դեպքում, ալիքային ֆունկցիան ճշգրիտ համընկնում է զանգվածեղ նմուշի կուլոնյան ալիքային ֆունկցիայի հետ:

Այժմ խոտորումների տեսության շրջանակներում հաշվենք միջէլեկտրոնային փոխազդեցությամբ պայմանավորված էներգիայի ուղղումը, որը ստացվում է հետևյալ արտահայտությունից.

$$\mathrm{D}V = \langle \mathrm{Y}_{1s}(r) | \hat{V} | \mathrm{Y}_{1s}(r) \rangle : \qquad (1.63)$$

Երկմասնիկային կոորդինատային ալիքային ֆունկցիան, առաջին մոտավորությամբ, կարելի է ներկայացնել մեկէլեկտրոնային ֆունկցիաների արտադրյալով: Համաձայն Ռասըլ-Սաունդերսի մոտավորության, երկէլեկտրոնային ալիքային ֆունկցիան տրվում է կոորդինատային (տրիպլետ կամ սինգլետ) և սպինային ալիքային ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով:

Նկ. 1.9. Վարիացիոն պարամերտրի λ կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից ($Z = 2$)՝ (1) $V_0 = 10Ry^*$, (2) $V_0 = 40Ry^*$, (3) $V_0 = 80Ry^*$:

Հետևաբար, նախորդ ենթագլխում կատարված քայլերի տրամաբանությամբ, կստանանք հետևյալ արտահայտությունը էներգիայի ուղղման համար.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}V(R) = {} & \frac{e^2}{ea^*_{B1}} \int_0^{\infty} \int_0^{r_1} y^2\left(l(R), r_1\right) y^2\left(l(R), r_2\right) r_1 r_2^2 dr_2 dr_1 + \\
& \frac{e^2}{ea^*_{B1}} \int_0^{\infty} \int_{r_1}^{\infty} y^2\left(l(R), r_1\right) y^2\left(l(R), r_2\right) r_1^2 r_2 dr_2 dr_1 :
\end{aligned}
\tag{1.64}
$$

Նկ. 1.10. Վերջավոր խորությամբ գնդային ՔԿ-ում միջէլեկտրոնային էներգիայի ուղղման կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից ($Z = 2$)՝ (1) $V_0 = 10Ry^*$, (2) $V_0 = 40Ry^*$, (3) $V_0 = 80Ry^*$:

Նկ. 1.10-ում բերված են (1.64)-ի հաշվման արդյունքները: Ինչպես երևում է այդ նկարից միջէլեկտրոնային փոխազդեցության էներգիայի կորը ունի մաքսիմում, որը համապատասխանում է այն շառավղին, որի դեպքում ՔԿ-ից տեղի է ունենում էլեկտրոններից մեկի արտանետում: ՔԿ-ի շառավղի աճին զուգընթաց էներգիայի արժեքը նվազում է, քանի որ էլեկտրոնները սկսում են միմյանց "թույլ" զգալ:

Ստացված արդյունքները թույլ են տալիս հաշվել հիմնական վիճակի էներգիան երկէլեկտրոնային խառնուկի համար (նկ. 1.11):

$$E = 2E_0 + \mathrm{D}V, \qquad (1.65)$$

որտեղ E_0-ն մեկէլեկտրոնային էներգիան է, իսկ $\mathrm{D}V$ -ն միջէլեկտրոնային փոխազդեցությամբ պայմանավորված էներգիայի ուղղումը:

Ինչպես երևում է նկ. 1.11-ում, երկէլեկտրոնային համակարգի էներգիան մոնոտոն նվազում է ՔԿ-ի շառավղին աճին զուգընթաց՝ դրական արժեքների տիրույթից անցնելով բացասական արժեքների տիրույթ:

Նկ. 1.11. Վերջավոր խորությամբ գնդային ՔԿ-ի հիմնական վիճակի լրիվ էներգիայի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից ($Z = 2$)՝ (1) $V_0 = 10Ry^*$, (2) $V_0 = 40Ry^*$, (3) $V_0 = 80Ry^*$:

Քանի որ, չափային քվանտացման էներգիան նվազում է, համակարգի լրիվ էներգիայի արժեքը ձգտում է զանգվածեղ նմուշում երկարժեքային դոնորային խառնուկի էներգիայի արժեքին:

Նկ. 1.11-ը ցույց է տալիս, որ ՔԿ-ի համապատասխան R_0 շառավղի դեպքում երկէլեկտրոնային համակարգի էներգիայի արժեքը հավասարվում է պոտենցիալային փոսի V_0 բարձրությանը: Ուստի R_0-ից փոքր շառավիղների դեպքում էկեկտրոններից մեկն արտանետվում է ՔԿ-ից:

V_0, Ry	10	30	40	60	80
R_0, a_B^*	0.3894	0.3817	0.3626	0.3291	0.3032

Աղյուսակ 1.2. R_0-ի կախվածությունը պոտենցիալային փոսի V_0 բարձրությունից

Աղյուսակ 1.2-ում բերված են պոտենցիալային փոսի բարձրության տարբեր արժեքների դեպքում ՔԿ-ի շառավղի համապատասխան արժեքները: Այս հանգամանքը էապես ազդում է դիտարկվող համակարգում էլեկտրոնների միջև վիճակների փոխանակման ժամանակի վրա: Քանի որ, t-ն որոշվում է փոխանակային A ինտեգրալով, բնական է սպասել, որ էլեկտրոններից մեկի արտանետումը ՔԿ-ից կանդրադառնա $t\left(R\right)$ կախվածության վրա:

Նկ. 1.12-ում ցույց է տրված, վերջավոր խորությամբ գնդային ՔԿ-ում էլեկտրոնների միջև վիճակների փոխանակման ժամանակի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից: Ինչպես տեսնում ենք, կորն ունի մինիմում, որը ճիշտ համընկնում է աղյուսակ 1.2-ում բերված R_0 շառավղի արժեքների հետ: Դա նշանակում է, որ R_0-ից փոքր շառավիղների

դեպքում էլեկտրոնների փոխանակման ժամանակը սկսում է կտրուկ աճել, քանի որ միջէլեկտրոնային հեռավորությունը մեծանում է, և փոխանակային A ինտեգրալը նվազում է:

Նկ. 1.12. Վերջավոր խորությամբ գնդային ՔԿ-ում վիճակների փոխանակման ժամանակի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից ($Z=2$)՝ (1) $V_0=10Ry^*$, (2) $V_0=40Ry^*$, (3) $V_0=80Ry^*$:

ԳԼՈՒԽ 2. ՄԻ ՔԱՆԻ ՄԱՍՆԻԿԱՅԻՆ ԿԼԱՆՈՒՄԸ ԶԳՎԱԾ ԷԼԻՊՍԱՐԴԱՅԻՆ ՔԿ-ՈՒՄ

2.1. Մագնիսակլանումը ՔԿ-երում

Նախորդ գլխում մենք քննարկեցինք երկէլեկտրոնային համակարգում տեղի ունեցող պրոցեսները: Մյուս կողմից ՔԿ-ում կարող են իրագործվել մի քանի մասնիկային (մասնավորապես էլեկտրոնային) համակարգերում առանց խառնուկային կենտրոնի առկայության: Այս տիպի՝ մի քանի էլեկտրոնային արհեստական ատոմները օժտված են մի շարք հետաքրքրիր ֆիզիկական հատկություններով: Դրանցից մեկն է՝ պարաբոլական ՔԿ-ում երկարալիքային ճառագայթման կլանումը: Ինչպես ցույց է տրված [39-43] աշխատանքներում, նման համակարգերում սույն ճառագայթման ազդեցությամբ տեղի ունեցող անցումների հաճախությունները կախված չեն միջէլեկտրոնային փոխազդեցությունից: Այս պնդումը կրում է Կոնի ընդհանրացված թեորեմ անվանումը:

Կոնի հայտնի թեորեմը [39] պնդում է, որ համասեռ մագնիսական դաշտում գտնվող էլեկտրոնային գազում բարձրհաճախային էլեկտրամագնիսական ճառագայթման կլանման ռեզոնանսը տեղի է ունենում ցիկլոտրոնային հաճախությամբ և կախված չէ մասնիկների փոխազդեցության բնույթից, եթե վերջինս որոշվում է միայն մասնիկների կոորդինատների տարբերության մոդուլով: Այս արդյունքը ստացվել է տարածական համասեռ համակարգերի համար: Հալպերինը և այլոք [43] աշխատանքում, ցույց են տվել, որ այդպիսի երևույթ տեղի ունի նաև միաչափ պարաբոլական պոտենցիալում տեղայնացված էլեկտրոնային գազի դեպքում: Նշենք, որ սահմանափակող պոտենցիալի պարաբոլական մոտարկումը լավ արդյունքեր է տվել մի շարք տեսական [96,97] և փորձարարական աշխատանքներում [98-100]:

Այս ենթագլխում հետազոտվում է երկչափ ՔԿ-ը, որը գտնվում է իր հարթությանն ուղղահայաց մագնիսական դաշտում: Սահմանափակող պոտենցիալն ունի հետևյալ տեսքը.

$$V(\boldsymbol{\rho}) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}, \tag{2.1}$$

որտեղ m-ն արդյունարար զանգվածն է, իսկ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$-ն հեռավորություն է ՔԿ-ի կենտրոնից:

Այժմ հարկավոր է կիրառել մի մեթոդ, որը մի կողմից պետք է թույլ տա գտնել՝ $V(\boldsymbol{\rho})$ սահմանափակող պոտենցիալով, մագնիսական դաշտում գտնվող N-մասնիկանի համակարգի ճշգրիտ ռեզոնանսային հաճախությունները, իսկ մյուս կողմից նաև այդ հաճախություններին համապատասխան կլանման գծերի ինտենսիվությունները: Ընդ որում պետք է պարզել նաև պարաբոլական պոտենցիալում մասնիկների դինամիկայի առանձնահատկությունը, որի շնորհիվ օպտիկական անցումների հաճախությունները կախված չեն էլեկտրոնների միջև հեռավորությունից:

Համակարգի համիլտոնիանն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned} H = &-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial r_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{eB}{c}x_k\right) - \frac{\partial}{\partial y_k}\left(y_k\frac{eB}{2c}\right)\right) + \\ &\frac{m\omega^2}{2}\sum_{R} r_k^2 + \sum_{j<k} u(r_j - r_k), \end{aligned} \tag{2.2}$$

որտեղ որպես վեկտոր պոտենցիալ է դիտարկվել $A = \frac{1}{2}\mathbf{B}\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{B}$-ն մագնիսական դաշտի լարվածությունն է, $u(\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_k)$-ն էլեկտրոնների զույգ առ զույգ փոխազդեցության պոտենցիալը:

Այժմ $\boldsymbol{\rho}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ փոփոխականների փոխարեն ներմուծենք $\mathbf{R}$ և $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}$, որոնք հնարավորություն են տալիս առանձնացնել

զանգվածների կենտրոնի շարժումը և նորմավորված են հետևյալ կերպ [101].

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{N} \frac{r_k}{\sqrt{N}}, \mathbf{x}_1 = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{1 \cdot 2}}, \mathbf{x}_2 = \frac{r_1 + r_2 - 2r_3}{\sqrt{2 \cdot 3}}, \ldots,$$
$$\mathbf{x}_{N-1} = \frac{r_1 + r_2 + \ldots - (N-1) r_N}{\sqrt{(N-1) \cdot N}}. \qquad (2.3)$$

Այս (2.3) ձևափոխությունը հնարավորություն է տալիս $\hat{H}$ համիլտոնիանը բաժանել երկու մասի, որոնցից մեկը չի պարունակում $\sum u(\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_k)$ փոխազդեցությունը, իսկ մյուսը կախված չէ $\mathbf{R}$-ից: Այսպիսով, կարելի է գրել՝

$$\hat{H}(\mathbf{R}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}) = \hat{H}_0(\mathbf{R}) + \hat{H}'(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}),$$
$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{eB}{c} X \frac{\partial}{\partial Y} - Y \frac{\partial}{\partial X}\right) + \frac{m\tilde{w}^2 \mathbf{R}^2}{2}, \qquad (2.4)$$

որտեղ $\tilde{w} = \sqrt{w^2 + \frac{w_B^2}{4}}$-ն արդյունարար հաճախությունն է, $w_B = \frac{eB}{mc}$-ն ցիկլոտրոնային ռեզոնանսի հաճախությունն է, իսկ X-ն ու Y-ը $\mathbf{R}$ վեկտորի բաղադրիչներն են:

Ուստի, ալիքային ֆունկցիայի կոորդինատային մասն ունի $\Psi = y_{nm}(\mathbf{R}) f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$ տեսքը, որտեղ y_{nm}-ը մագնիսական դաշտում երկչափ իզոտրոպ օսցիլյատորի Շրյոդինգերի հավասարման լուծումն է, n-ն ու m-ը շառավղային և ազիմուտային քվանտային թվերն են, իսկ էներգիայի մակարդակները տրվում են հետևյալ կերպ [102].

$$E_{nm} = (2n + |m| + 1)\tilde{w} + \frac{w_c}{2} m; n = 0, 1, 2, \ldots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots : \qquad (2.5)$$

Նկանտենք, որ $y_{nm}(\mathbf{R})$ ալիքային ֆունկցիան բոլոր մասնիկների նկատմամբ համաչափ է, հետևաբար Պաուլիի սկզբունքը պետք է բավարարվի f ֆունկցիայի և սպինային բաղադրիչի հաշվին:

Դիպոլային մոտավորությամբ, էլեկտրամագնիսական դաշտի հետ փոխազդեցությունը բնութագրվում է $\hat{H}_{int} = e\mathbf{E}(t)e\ \boldsymbol{\rho}_k = e\mathbf{E}(t)\sqrt{N}\mathbf{R}$ համիլտոնիանով, որը չի պարունակում $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_N$ փոփոխականները: Հետևաբար, N -մասնիկային համակարգի օպտիկական կլանումը նույնն է ինչ երկչափ իզոտրոպ օսցիլյատորինը, որը գտնվում է $\sqrt{N}E$ լայնությով ալիքի դաշտում: $\mathrm{D}m = +1$ և $\mathrm{D}m = -1$ անցումների համապատասխան ռեզոնանսային հաճախություններն են՝ $\overset{\circ}{w} + \frac{w_c}{2}$ և $\overset{\circ}{w} - \frac{w_c}{2}$, այսինքն աջ և ձախ բևեռացված ալիքները կլանվում են տարբեր հաճախություններում: Յուրաքանչյուր գծի ինտենսիվությունը համեմատական է ՔԿ-ում մասնիկների N թվին, իսկ դրանց կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից տրվում են հետևյալ բանաձևերով (օսցիլյատորային ուժերի համար)

$$J_+ \sim \frac{\overset{\circ}{w} + \frac{w_c}{2}}{\overset{\circ}{w}}, J_- \sim \frac{\overset{\circ}{w} - \frac{w_c}{2}}{\overset{\circ}{w}}: \qquad (2.6)$$

Ինչպես երևում է վերը շարադրվածից, պարաբոլական պոտենցիալի առանձնահատկությունը կայանում է համակարգի սեփական մոդերում այնպիսի մոդի գոյության մեջ, որի դեպքում շարժումը տեղի է ունենում առանց ներքին ազատության աստիճանների գրգռման, որոնք նկարագրվում են $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_N$ կոորդինատներով: Եթե մասնիկների միջև փոխազդեցությունը կախված է միայն $\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_k$ տարբերությունից, ապա ազդեցությունը տվյալ մոդի վրա բացառվում է: Նկատենք, որ հենց այդ մոդով է պայմանավորված երկարալիքային էլեկտրամագնիսական

ճառագայման (ալիքի երկարությունը մեծ է ՔԿ-ի տրամագծից) կլանումը: $InSb$ ՔԿ-երում ինֆրակարմիր կլանման հայտնի փորձերում [100], ցույց է տրված, որ կլանման պիկը կախված չէ մասնիկների N թվից, ինչը համընկնում է վերը նշվածի հետ:

2.2. Մեկէլեկտրոնային վիճակները ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ում

ՔԿ-ի սահմանափակող պոտենցիալի պարաբոլական տեսքը կարող է պայմանավորված լինել տարբեր հանգամանքներով: Օրինակ՝ ՔԿ-շրջակա միջավայր սահմանի վրա բաղադրությունների դիֆուզիայով [103]: Այս պոտենցիալի իրագործումը նաև կարող է տեղի ունենալ ՔԿ-ի յուրահատուկ երկրաչափության շնորհիվ՝ մասնավորապես ուժեղ ձգված կամ սեղմված էլիպսարդային համաչափության շնորհիվ: Հիմնավորենք սույն պնդումը ուժեղ ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ի (ՈՒՁԷՔԿ) օրինակի վրա:

Դիտարկենք էլեկտրոնի շարժումը ՈՒՁԷՔԿ-ում: Սահմանափակող պոտենցիալը գլանային կոորդինատային համակարգում ունի հետևյալ տեսքը.

$$V_{conf}(r,z)=\begin{cases}0, & \dfrac{r^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}\le 1 \\ \infty, & \dfrac{r^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}>1\end{cases},\quad a=b, \tag{2.7}$$

որտեղ a-ն և b-ն ՈՒՁԷՔԿ-ի, համապատասխանաբար, փոքր և մեծ կիսառանցքներն են:

ՔԿ-ի երկրաչափական տեսքից հետևում է, որ մասնիկի շարժումը շառավղային ուղղությամբ ավելի ինտենսիվ է տեղի ունենում, քան z

ուղղությամբ: Այս հանգամանքը թույլ է տալիս կիրառել ադիաբատական մոտավորություն:

Համակարգի համիլտոնիանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial f^2}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_{conf}(r,z), \qquad (2.8)$$

և այն կարելի է ներկայացնել որպես "արագ" ($\hat{H}_1$) և "դանդաղ" ($\hat{H}_2$) ենթահամակարգերի համիլտոնիանների գումար.

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + V_{conf}(r,z), \qquad (2.9)$$

որտեղ

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial f^2}\right), \qquad (2.10)$$

$$\hat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}: \qquad (2.11)$$

Համակարգի ալիքային ֆունկցիան փնտրենք հետևյալ տեսքով.

$$\Psi(r,f,z) = y(r,f;z)c(z): \qquad (2.12)$$

Դանդաղ ենթահամակարգի z կոորդինատի ֆիքսված արժեքի դեպքում, մասնիկի շարժումը տեղայնացված է երկչափ շրջանային պոտենցիալային փոսում՝

$$R(z) = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{b^2}} \qquad (2.13)$$

արդյունարար փոփոխական շառավղով:

Արագ ենթահամակարգի համար Շրյոդինգերի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial f^2}\right)y(r,f;z) = E_{n_r,m}\,y(r,f;z), \qquad (2.14)$$

որը պետք է բավարարի հետևյալ սահմանային պայմանին

$$y\left(r,f;z\right)\Big|_{r=R(z)}=0: \qquad (2.15)$$

Համապատասխան ալիքային ֆունկցիան կարելի է փնտրել հետևյալ տեսքով

$$y\left(r,f;z\right)=e^{imf}f\left(r;z\right). \qquad (2.16)$$

Տեղադրելով (2.16)-ն արագ ենթահամակարգի Շրյոդինգերի հավասարման (2.14) մեջ, կստանանք Բեսսելի հավասարումը

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)f\left(r;z\right)=0, \qquad (2.17)$$

որտեղ $k=\sqrt{\dfrac{2mE_{n_r,m}}{\hbar^2}}$:

Այս հավասարումն ունի հետևյալ լուծումը

$$f\left(r;z\right)=CJ_m\left(kr\right), \qquad (2.18)$$

որտեղ $J_m\left(kr\right)$-ն Բեսսելի առաջին սեռի ֆունկցիան է, իսկ C-ն նորմավորման գործակիցը:

Հաշվի առնելով (2.15) սահմանային պայմանը, կարող ենք գտնել արագ ենթահամակարգի էներգիայի արժեքները

$$E_{n_r,m}\left(z\right)=\frac{\hbar^2a_{n_r+1,m}^2}{2mR\left(z\right)^2}, \qquad (2.19)$$

որտեղ $a_{k,m}>0$-ն Բեսսելի $J_m\left(a_{k,m}\right)$ ֆունկցիայի k-րդ արմատն է ըստ աճման կարգի, $n_r=0,1,2,\ldots$-ը շառավղային քվանտային թիվն է, իսկ $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$-ը մագնիսական քվանտային թիվը:

Էներգիայի ցածր մակարդակների դեպքում մասնիկը հիմնականում տեղայնացված է $\left|z\right|=a$ տիրույթում: Ուստի, $E_{n_r,m}\left(z\right)$-ն կարող ենք վերլուծել շարքի $z=0$ կետի շուրջ.

$$E_{n_r,m}(z) = \frac{\hbar^2 a^2_{n_r+1,m}}{2ma^2} + \frac{\hbar^2 a^2_{n_r+1,m}}{2mab} z^2 + \ldots : \qquad (2.20)$$

(2.20) արտահայտությունը՝ դանդաղ ենթահամակարգի համար գրված Շրյոդինգերի հավասարման մեջ, հանդիսանում է արդյունարար պոտենցիալ էներգիա.

$$\left\{ \hat{H}_2 + E_{n_r,m}(z) \right\} c(z) = E_{n_r,m,n_z} c(z), \qquad (2.21)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\hbar^2 a^2_{n_r+1,m}}{2ma^2} + \frac{\hbar^2 a^2_{n_r+1,m}}{2mab} z^2 \right] c(z) = E_{n_r,m,n_z} c(z): \qquad (2.22)$$

Այս արտահայտությունը, որոշ ձևափոխություններից հետո իրենից ներկայացնում է քվանտային օսցիլյատորի հավասարումը.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\hbar^2 a^2_{n_r+1,m}}{2mab} z^2 \right] c(z) = \left[E_{n_r,m,n_z} - \frac{\hbar^2 a^2_{n_r+1,m}}{2ma^2} \right] c(z), \qquad (2.23)$$

որի լուծումը տրվում է հետևյալ արտահայտությամբ.

$$c_{n_z}(z) = e^{-\frac{\hbar a_{n_r+1,m}}{mab}\frac{z^2}{2}} H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\hbar a_{n_r+1,m}}{mab}} z \right), \qquad (2.24)$$

որտեղ $H_n(z) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{p}}} e^{z^2} \frac{d^n e^{-z^2}}{dz^n}$-ն Էրմիտի n-րդ կարգի բազմանդամն է, $n_z = 0, 1, 2, \ldots$-ն առանցքային քվանտային թիվն է:

Այսպիսով համակարգի լրիվ էներգիայի և լրիվ ալիքային ֆունկցիայի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունները.

$$E_{n_r,m,n_z} = \frac{\hbar^2 a^2_{n_r+1,m}}{2ma^2} + \frac{\hbar^2 a^2_{n_r+1,m}}{2mab}\left(n_z + \frac{1}{2} \right), \qquad (2.25)$$

$$\Upsilon(r,f,z) = Ce^{mf} J_m(kr) e^{-\frac{\hbar a_{n_r+1,m}}{mab} \frac{z^2}{2}} H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\hbar a_{n_r+1,m}}{mab}} z\right): \qquad (2.26)$$

2.3. Մի քանի մասնիկային կլանումը ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ում

Նախորդ ենթագլխում ստացված արդյունքների հիման վրա կարող ենք ենթադրել, որ ՈւՁԷՔԿ մի քանի մասնիկային համակարգում կարող են իրագործվել Կոնի ընդհանրացված թեորեմի իրականացման պայմանները:

Դիտարկենք մի քանի մասնիկային էլեկտրոնային գազ, որը գտնվում է ՈւՁԷՔԿ-ում: Յուրաքանչյուր մասնիկի սահմանափակող պոտենցիալն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\hat{V}_{conf}(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \le 1 \\ \infty, & \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} > 1 \end{cases}, a = b, \qquad (2.27)$$

որտեղ a-ն և b-ն ՈՒՁԷՔԿ-ի, համապատասխանաբար, փոքր և մեծ կիսառանցքներն են: ՔԿ-ի երկրաչափական տեսքից հետևում է, որ մասնիկների շարժումը շառավղային ուղղությամբ շատ ավելի ինտենսիվ է տեղի ունենում, քան z-ուղղությամբ: Համակարգում դիտարկվում են զույգ առ զույգ փոխազդող N մասնիկներ: Համարենք, որ մասնիկների փոխազդեցությունը ՔԿ-ի պատերի հետ XOY հարթությունում այնքան ուժեղ է, որ այս ուղղությամբ կարելի է անտեսել միջմասնիկային փոխազդեցությունը: Այսպիսով էլեկտրոնների միջև $\hat{V}_{int}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$ փոխազդեցության օպերատորը ֆունկցիա է միայն z կոորդինատից, և

կախված է ՔԿ-ի z-ուղղությամբ մասնիկների փոխդասավորությունից՝ $\left|z_i - z_j\right| = \sqrt{\left(z_i - z_j\right)^2}$:

Հետևաբար, ուսումնասիրվող համակարգի համիլտոնիանը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\hat{H}\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right) = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{N}\left(\hat{p}_{x_j}^2 + \hat{p}_{y_j}^2\right) + \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{N}\hat{p}_{z_j}^2 + \sum_{j=1}^{N}\hat{V}_{conf}\left(x_j, y_j, z_j\right) + \hat{V}_{int}\left(z_1, z_2, \ldots, z_N\right), \tag{2.28}$$

որտեղ $\hat{\mathbf{p}}$-ն իմպուլսի օպերատորն է:

Այժմ հստակեցնենք նշված մոտավորությունների կիրառելիության հայտանիշը: Մի կողմից էլեկտրոնների վրա ազդում են կուլոնյան վանողական ուժերը, իսկ մյուս կողմից ՔԿ-ի պատերը: Այս դեպքում չափային քվանտացման էներգիան որոշվում է XOY հարթությունում յուրաքանչյուր էլեկտրոնի տեղայնացման տիրույթով: ՔԿ-ի երկրաչափությունից հետևում է, որ էլեկտրոնի էներգիան XOY հարթությունում որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$E_{n_{\boldsymbol{\rho}_j}}^{(\boldsymbol{\rho})}\left(z_j\right) \sim \frac{\hbar^2}{m d_{\boldsymbol{\rho}_j}^2\left(z_j\right)}: \tag{2.29}$$

Հետևաբար, միջէլեկտրոնային միաչափ փոխազդեցության կիրառելիության հայտանիշը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\hbar^2}{2m d_{\boldsymbol{\rho}_j}^2\left(z_j\right)} \;?\; \frac{e^2}{\sqrt{\left(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j\right)^2 + \left(z_i - z_j\right)^2}}, \tag{2.30}$$

i-ի և j-ի ցանկացած արժեքների դեպքում:

Զույգ առ զույգ փոխազդեցության դեպքում, փոխազդեցության $\hat{V}_{int}$ օպերատորը տրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\hat{V}_{int}\left(z_1, z_2, \ldots, z_N\right) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} U\left(\left|z_i - z_j\right|\right): \qquad (2.31)$$

Շրյոդինգերի հավասարումը դիտարկվող համակարգի համար հետևյալն է.

$$\hat{H}\Psi\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right) = E\Psi\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right): \qquad (2.32)$$

Ինչպես հետևում է (2.28) արտահայտությունից, ենթահամակարգի ֆիքսված z կոորդինատի դեպքում յուրաքանչյուր էլեկտրոն տեղայնացված է երկչափ շրջանային պոտենցիալային փոսում: Օգտվելով ադիաբատական մոտավորության տեսությունից, ալիքային ֆունկցիան կարելի է փնտրել այս տեսքով.

$$\Psi\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right) = \Phi_{n_{r_1}, n_{r_2}, \ldots, n_{r_N}}\left(r_1\left(z_1\right), r_2\left(z_2\right), \ldots, r_N\left(z_N\right)\right) \times c_{n_{r_1}, n_{r_2}, \ldots, n_{r_N}}\left(z_1, z_2, \ldots, z_N\right), \qquad (2.33)$$

այստեղ $\Phi_{n_{\rho_1}, n_{\rho_2}, \ldots, n_{\rho_N}}$-ը նկարագրում է արագ ենթահամակարգը, իսկ $c_{n_{\rho_1}, n_{\rho_2}, \ldots, n_{\rho_N}}$-ը՝ դանդաղը:

Ինչպես նշեցինք ֆիքսված z կոորդինատի համար՝ մասնիկի շարժումը տեղայնացված է երկչափ պոտենցիալային փոսում, որն ունի հետևյալ արդյունարար լայնությունը.

$$d_{\rho_j}\left(z_j\right) = 2a\sqrt{1 - \frac{z_j^2}{b^2}}: \qquad (2.34)$$

Մեկմասնիկային վիճակների ալիքային ֆունկցիան՝ XOY հարթությունում, ունի այս տեսքը.

$$f_{n_r, m} = Ce^{imf} J_m\left(k_{n_r, m}\rho\left(z\right)\right), \qquad (2.35)$$

որտեղ $k_{n_r, m} = \sqrt{\frac{2mE_{n_r}}{\hbar^2}}$, $n_r = 0; 1; 2, \ldots$, $m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.

Մասնիկների համեմատաբար փոքր քանակի դեպքում կարող ենք համարել, որ էլեկտրոնների վիճակները XOY -հարթությունում միմյանցից անկախ են և, հետևաբար, համապատասխան ալիքային ֆունկցիան կլինի մեկմասնիկային ալիքային ֆունկցիաների արտադրյալը.

$$F_{n_{r_1},n_{r_2},\ldots,n_{r_N}}\left(r_1(z_1), r_2(z_2),\ldots, r_N(z_N)\right) = \prod_{j=1}^{N} f_{n_{r_j},m}\left(k_{n_{r_j},m} r_j(z_j)\right). \quad (2.36)$$

XOY հարթությունում համակարգի վիճակները բնութագրող էներգիայի սպեկտրի համար կունենանք

$$E^{(\rho)}_{n_{\rho_1},n_{\rho_2},\ldots,n_{\rho_N}}\left(z_1, z_2,\ldots, z_N\right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2 a^2_{n_j+1,m_j}}{2m d^2_{\rho_j}(z_j)}, \quad (2.37)$$

որտեղ a_{n_j+1,m_j} -ն Բեսսելի առաջին սեռի $J_m(k)$ ֆունկցիայի զրոներն են:

Տեղադրելով (2.33) արտահայտությունը (2.28) բանաձևի մեջ, և հաշվի առնելով (2.37)-ը, ադիաբատական մոտավորությամբ կունենանք

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\hbar^2 a^2_{n_j+1,m_j}}{2m d^2_{r_j}(z_j)} + \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{N} p^2_{z_j} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} U\left(\left|z_i - z_j\right|\right) c\left(z_1,\ldots,z_N\right) = E_{1,\ldots,N}\, c\left(z_1,\ldots,z_N\right), \quad (2.38)$$

հավասարումը:

Համաձայն (2.34) բանաձևի, երկչափ շառավիղը պարամետրորեն կախված է z_j փոփոխականից: Եթե էլեկտրոնների N քանակը փոքր է, իսկ չափային քվանտացումը XOY հարթությունում ուժեղ, ապա էլեկտրոնների մեծամասնությունը տեղայնացված է ՈՒՁԷՔԿ երկրաչափական կենտրոնում: ՔԿ կենտրոնում էլեկտրոնների տեղայնացման պայմանը մաթեմատիկորեն արտահայտվում է $z_j = b$ առնչությամբ: Հաշվի առնելով նշված անհավասարությունը, հետևյալ գումարը

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2 a^2_{n_j+1,m_j}}{2m d^2_{\rho_j}(z_j)}: \qquad (2.39)$$

վերլուծենք շարքի ըստ $\frac{z_j}{b}$-ի: Որոշ ձևափոխություններից հետո կգանք Շրյոդինգերի հետևյալ հավասարմանը.

$$\left(\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{N} p^2_{z_j} + \sum_{j=1}^{N} \frac{m W_j^2 z_j^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} U\left(\left|z_i - z_j\right|\right)\right) c(z_1,\ldots,z_N) = \left(E_{1,\ldots,N} - S_N^{(0)}\right) c(z_1,\ldots,z_N): \qquad (2.40)$$

որտեղ կատարվել են հետևյալ նշանակումները՝

$$S_N^{(0)} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2 a^2_{n_j+1,m_j}}{8ma^2}, \qquad (2.41)$$

$$W_j^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar a_{n_j+1,m_j}}{mab}\right)^2: \qquad (2.42)$$

Նկատենք մի կարևոր փաստ կապված ուսումնասիրվող համակարգի առանձնահատկության հետ: XOY հարթությունում սահմանափակող պոտենցիալի W_j հաճախությունը որոշվում է ՔԿ երկրաչափական պարամետրերից (մեծ և փոքր կիսառանցքներից), ինչպես նաև քվանտային n_{ρ_j} թվից: Այսպիսով, փոփոխելով ՔԿ չափերը կարելի է կառավարել ՔԿ սահմանափակող պոտենցիալի թեքությունը, ստեղծելուվ հնարավոր օպտիմալ պայմաններ ՔԿ կենտրոնում էլեկտրոնային գազը տեղայնացնելու համար:

Քանի որ XOY հարթությունում չափային քվանտացումն չափազանց ուժեղ է, հետևաբար բնական է համարել, որ էլեկտրոնները հարթության մեջ գտնվում են հիմնական վիճակներում՝

$n_{\rho_1} = n_{\rho_2} = \ldots = n_{\rho_N} = 0$, $m_{\rho_1} = m_{\rho_2} = \ldots = m_{\rho_N} = 0$: Ուստի, ω_j-երի համար կարող ենք գրել.

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_N = \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar a_{1,0}}{mab} : \tag{2.43}$$

Այսպիսով ստացվում է հետևյալ համիլտոնիանը.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{N} \hat{p}_{z_j}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \sum_{j=1}^{N} z_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} U\left(\left|z_i - z_j\right|\right) \tag{2.44}$$

որը համընկնում է [43] աշխատանքում քննարկվածի հետ:

Եթե այժմ ներմուծենք ծնման և ոչնչացման օպերատորներ՝

$$\hat{c}_z^{\pm} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{N} \left(z_j \mp \frac{i}{m\omega} \hat{p}_{z_j}\right) \tag{2.45}$$

ապա ուղղակի հաշվարկների միջոցով կարելի է ցույց տալ, որ տեղի են ունենում հետևյալ կոմուտացիոն առնչությունները [43].

$$\left[\hat{c}_{int}, \hat{c}_z^{\pm}\right] = 0, \tag{2.46}$$

$$\left[\hat{H}_0, \hat{c}_z^{\pm}\right] = \pm \hbar\omega \hat{c}_z^{\pm} : \tag{2.47}$$

որտեղ

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{N} \hat{p}_{z_j}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \sum_{j=1}^{N} z_j^2 : \tag{2.48}$$

Հաշվի առնելով (2.46) առնչությունը, փոխազդող մասնիկների (2.44) համիլտոնիանի համար կստանանք (2.47)-ին նման կոմուտացիոն առնչություն.

$$\left[\hat{H}, \hat{c}_z^{\pm}\right] = \pm \hbar\omega \hat{c}_z^{\pm} : \tag{2.49}$$

Եթե c_{n_z}-ը $\hat{H}$ օպերատորի սեփական ֆունկցիան է, որը համապատասխանում է E_{n_z} սեփական արժեքն է, ապա (2.49)

առնչությունից հետևում է, որ $\hat{C}_z^{\pm} c_{n_z}$ ֆունկցիան նույնպես $\hat{H}$ օպերատորի համար սեփական ֆունկցիա է, բայց արդեն այլ էներգիայով՝

$$\hat{C}_z^{\pm} c_{n_z} \to E_{n_z} + \hbar\omega: \qquad (2.50)$$

Այժմ ենթադրենք համակարգի վրա ընկնում է երկարալիքային էլեկտրամագնիսական ալիք՝ $\hat{e}_z E(t) = \hat{e}_z E_0 e^{-i\omega t}$ էլեկտրական բաղադրիչով: Համապատասխան խոտորման օպերատորը կարելի է գրել ինչպես.

$$\hat{H}_1 = -e\sum_{j=1}^{N} z_j E_0 e^{-i\omega t}: \qquad (2.51)$$

Ուղղակի հաշվարկներով կարելի է ցույց տալ [43], որ

$$\sum_{j=1}^{N} z_j = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{C}_z^{+} + \hat{C}_z^{-}\right): \qquad (2.52)$$

Դիտարկենք $\hat{H}_1$ օպերատորի ազդեցությունը $\hat{H}_0$ համիլտոնիանի $c_{n_z}^{(0)}$ սեփական ֆունկցիայի վրա: Քվանտային անցումների տեսությունից հայտնի է, որ $\hat{H}_1$-ի ազդեցությունը $c_{n_z}^{(0)}$-ի վրա կապում է $\hat{H}_0$ համիլտոնիանի $E_{n_z}^{(0)}$ վիճակը $E_{n_z}^{(0)} \pm \hbar\omega$ վիճակի հետ, որն էլ համապատասխանում է $\hat{C}_z^{\pm} c_{n_z}^{(0)}$-ի սեփական ֆունկցիային: Մյուս կողմից, հաշվի առնելով (2.52) բանաձևը, $\hat{H}_1$. օպերատորի ազդեցությունը c_{n_z} ֆունկցիայի վրա, կապում է (2.47) համիլտոնիանի E_{n_z} վիճակը $E_{n_z} \pm \hbar\omega$ վիճակի հետ: Այսպիսով, երկու դեպքերում էլ, էլեկտրոնային գազում, ինչպես միջէլեկտրոնային փոխազդեցության առկայության դեպքում, այնպես էլ այդ փոխազդեցության բացակայությամբ, երկարալիքային ճառագայթման ազդեցության տակ տեղի են ունենում դիպոլային

անցումներ միևնույն $\pm W$ հաճախությամբ, որն էլ հանդիսանում է Կոնի ընդհանրացված թեորեմի էությունը:

2.4. Մի քանի մասնիկային մագնիսակլանումը ձգված էլիպսարդային ՔԿ-ում

Այժմ ուսումնասիրենք մի քանի մասնիկային գազի վարքը ՈւՁԷՔԿ-ում, երբ համակարգի վրա կիրառված է արտաքին համասեռ մագնիսական դաշտ z առանցքի երկայնքով: Այս դեպքում համակարգի N -մասնիկային համիլտոնիանն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\hat{H}(1,2,\ldots,N) = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\mathbf{P}}_j - \frac{e}{c}\mathbf{A}_j\right)^2 + \hat{V}_{conf}(1,2,\ldots,N) + \hat{V}_{int}(1,2,\ldots,N), \quad (2.53)$$

որտեղ $\hat{V}_{conf}$-ն ՔԿ-ի սահմանափակող պոտենցիալը, $\hat{V}_{int}$-ը միջէլեկտրոնային փոխազդեցության էներգիան, $\hat{\mathbf{P}}$-ն իմպուլսի օպերատորը, $\mathbf{A}$-ն արտաքին մագնիսական դաշտի վեկտոր պոտենցիալը:

Յուրքանչյուր մասնիկի սահմանափակող պոտենցիալն ունի նույն (2.27) տեսքը: Այս դեպքում նույնպես միջէլեկտրոնային փոխազդեցությունը կնկարագրենք զույգ առ զույգ փոխազդեցության մոտավորությամբ.

$$\hat{V}_{int}(1,2,\ldots,N) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} U\left(\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\right|\right): \quad (2.54)$$

Մեր կողմից քննարկվող դեպքում կհամարենք, որ չափային քվանտացումը ՔԿ-ի XOY հարթության մեջ զգալիորեն ուժեղ է, ինչպես կուլոնյանից, այնպես էլ մագնիսականից, ուստի այստեղ նույնպես $\hat{V}_{int}(1,2,\ldots,N)$-ի համար կարող ենք գրել (2.31) արտահայտությունը.

$$\hat{V}_{int}(1,2,\ldots,N) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} U\left(\left|z_j - z_k\right|\right): \qquad (2.55)$$

Այս մոտավորությամբ յուրաքանչյուր էլեկտրոն XOY հարթությունում նկարագրվում է մեկմասնիկային ալիքային ֆունկցիայով, որը կհամապատասխանի անթափանց պատերով երկչափ շրջանային ՔԿ-ում էլեկտրոնի վարքին՝ աքսիալ մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում: Հաշվի առնելով վերը նշվածը, N -մասնիկային համիլտոնիանի համար կարող ենք գրել.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\mathbf{P}}_j - \frac{e}{c}\mathbf{A}_j\right)^2 + \sum_{j=1}^{N}\hat{V}_{conf}(\mathbf{r}_j) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} U\left(\left|z_j - z_k\right|\right): \qquad (2.56)$$

Էլեկտրոնը OZ առանցքից z հեռավորության վրա կատարում է "արագ" շարժում երկչափ շրջանաձև անվերջ բարձրությամբ քվանտային փոսում, որն ունի հետևյալ տրամագիծը.

$$d_{\rho}(z) = 2a\sqrt{1 - \frac{z^2}{b^2}}: \qquad (2.57)$$

Խնդիրը նորից կարող ենք քննարկել ադիաբատական մոտավորությամբ [13], համակարգի ալիքային ֆունկցիան ներկայացնելով հետևյալ տեսքով.

$$\Upsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = F_B\left(\boldsymbol{\rho}_1(z_1), \boldsymbol{\rho}_2(z_2), \ldots, \boldsymbol{\rho}_N(z_N)\right) c(z_1, z_2, \ldots, z_N), \qquad (2.58)$$

որտեղ B ինդեքսը ցույց է տալիս, որ խնդիրը քննարկվում է մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում:

Վեկտոր պոտենցիալի համար ընտրելով $\mathbf{A}_j = \left(0, 0, \frac{B r_j}{2}\right)$ տրամաչափությունը, որտեղ B -ն մագնիսական դաշտի լարվածությունն է, կապահովենք $div\mathbf{A}_j = 0$ պայմանը ցանկացած j -ի դեպքում:

Քանի որ XOY հարթությունում յուրաքանչյուր էլեկտրոնի կատարած շարժումը մյուսներից անկախ է, ապա կարող ենք գրել.

$$F_B\left(\boldsymbol{\rho}_1(z_1), \boldsymbol{\rho}_2(z_2), \ldots, \boldsymbol{\rho}_N(z_N)\right) = \mathop{\times}_{j=1}^{N} f_B\left(\boldsymbol{\rho}_j(z_j)\right), \tag{2.59}$$

որտեղ $f_B\left(\boldsymbol{\rho}_j(z_j)\right)$-ն հետևյալ մեկմասնիկային Շրյոդինգերի հավասարման լուծումն է

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\right) + \frac{\hbar w_B m}{2} + \frac{m w_B^2 r^2}{8} + V_{conf}^{2D}\left(r(z)\right)\right] f_B\left(r(z)\right) = E_{r(z)}^{2D} f_B\left(r(z)\right), \tag{2.60}$$

որտեղ $V_{conf}^{2D}\left(\boldsymbol{\rho}(z)\right)$-ը՝

$$V_{conf}^{2D}\left(\boldsymbol{\rho}(z)\right) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{\rho}(z) \le a\sqrt{1-\dfrac{z^2}{b^2}} \\ \infty, & \boldsymbol{\rho}(z) > a\sqrt{1-\dfrac{z^2}{b^2}} \end{cases}: \tag{2.61}$$

$V_{conf}^{2D}\left(\boldsymbol{\rho}(z)\right)$-ի տեսքից հետևում է, որ $f_B\left(\boldsymbol{\rho}(z)\right)$ ալիքային ֆունկցիան $\boldsymbol{\rho}(z) = a\sqrt{1-\dfrac{z^2}{b^2}}$ կետում պետք է հավասար լինի զրոյի: Հաշվի առնելով վերոնշյալը $f_B\left(\boldsymbol{\rho}(z)\right)$ ալիքային ֆունկցիայի համար կստանանք [104].

$$f\left(\boldsymbol{\rho}(z)\right) = C_{n_r,|m|}\, e^{-\frac{\boldsymbol{\rho}(z)^2}{4a_B^2}} \boldsymbol{\rho}(z)^{|m|}\, {}_1F_1\left(-b - \frac{|m|+1}{2}, |m|+1, \frac{\boldsymbol{\rho}(z)^2}{2a_M^2}\right), \tag{2.62}$$

որտեղ n_r-ն շառավղային քվանտային թիվն է, $a_M = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$-ն մագնիսական երկարությունը, $C_{n_r,|m|}$-ը նորմավորման հաստատունը, իսկ $b = \frac{E^{2D}_{\rho(z)}}{\hbar w_B} - \frac{m}{2}$:

$E^{2D}_{\rho(z)}$ էներգիայի սպեկտրի համար կստանանք [104].

$$E^{2D}_{\rho(z)}(z) = \hbar w_B \left(a_{n_r+1,|m|}(z) + \frac{|m| + m + 1}{2} \right), \tag{2.63}$$

որտեղ $a_{n_r+1,|m|}$-ը այլասերված հիպերերկրաչափական ${}_1F_1(a;b;x)$ ֆունկցիայի զրոներն են, որոնք ստացվել են հետևյալ պայմանից.

$${}_1F_1\left(-b(z) - \frac{|m| + 1}{2}, |m| + 1, \frac{r(z)^2}{2a_M^2} \right)\Bigg|_{\rho(z) = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{b^2}}} = 0, \tag{2.64}$$

իսկ

$$a_{n_r+1,|m|}(z) = b(z) - \frac{|m| + 1}{2}: \tag{2.65}$$

Հաշվի առնելով այն փաստը, որ էլեկտրոնների թիվը համեմատաբար փոքր է, կարող ենք համարել, որ ՔԿ սահմանափակող պոտենցիալի պատերի վանողության շնորհիվ էլեկտրոնները մեծամասամբ տեղայնացված են ՔԿ կենտրոնում և z_j կոորդինատն ունի փոքր արժեքներ: Օգտվելով (2.58-2.63)-երից, և $\Psi(1,2,\ldots,N)$ ալիքային ֆունկցիան տեղադրելով (2.56) համիլտոնիանով Շրյոդինգերի հավասարման մեջ

$$\hat{H}\Psi(1,2,\ldots,N) = E\Psi(1,2,\ldots,N), \tag{2.66}$$

$c\left(z_1, z_2, \ldots, z_N\right)$ ալիքային ֆունկցիայի համար կստանանք հետևյալ հավասարումը.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}c+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N}U\left(\left|z_j-z_k\right|\right)c=\left(E-\sum_{j=1}^{N}E^{2D}_{\rho_j(z)}\left(z\right)\right)c\ : \qquad (2.67)$$

Այժմ անդրադառնանք $E^{2D}_{\rho(z)}\left(z\right)$ երկչափ էներգիայի արտահայտությանը (2.63): Նկ. 2.1-ում ցույց է տրված $a_{n_r+1,|m|}\left(z\right)$-ի կախվածությունը z կոորդինատից: Ինչպես հետևում է նկարից կորն ունի մինիմում $z=0$ կետում: Ուստի, հաշվի առնելով z-ի փոքրությունը, $a_{n_r+1,|m|}\left(z\right)$-ը վերլուծենք Թեյլորի շարքի $z=0$ կետի շուրջ.

$$a_{n_r+1,|m|}\left(z\right)=a_{n_r+1,|m|}\left(0\right)+\left.\frac{d^2a_{n_r+1,|m|}}{dz^2}\right|_0\frac{z^2}{2}\ : \qquad (2.68)$$

Նկ. 2.1. $\alpha_{n_\rho+1,|m|}(z)$-ի կախվածությունը z կոորդինատից

Այստեղ $a_{n_r+1,|m|}(0)$-ները այլասերված հիպերերկրաչափական ${}_1F_1(a;b;x)$ ֆունկցիայի արմատներն են a կետում:

Հետևաբար $E^{2D}_{\rho(z)}(z)$ էներգիայի համար կունենանք.

$$E^{2D}_{\rho(z)}(z) \approx \hbar w_B \left(a_{n_r+1,|m|}(0) + \frac{d^2 a_{n_r+1,|m|}}{dz^2}\Big|_0 \frac{z^2}{2} + \frac{|m| + m + 1}{2} \right). \quad (2.69)$$

Այսպիսով (2.67) հավասարումը ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial z_j^2} + \sum_{j=1}^{N}\frac{m\omega_j(B)^2}{2} z_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} U(|z_j - z_k|) \right) c = \left(E - \sum_{j=1}^{N} E^{2D}_{\rho_j(z)}(0) \right) c, \quad (2.70)$$

որտեղ

$$\omega_j(B) = \sqrt{\frac{\hbar w_B}{m}\frac{d^2 a_{n_{r_j}+1,m_j}}{dz^2}\Big|_0}. \quad (2.71)$$

Քանի որ XOY հարթությունում չափային քվանտացումը շատ ուժեղ է, ապա նախորդ ենթագլխում քննարկված խնդրին համանման, կենթադրենք, որ էլեկտրոնները XOY հարթության մեջ գտնվում են ամենացածր մակարդակներում, ուստի $m_1 = m_2 = \ldots = m_N = 0$ և $n_{r_1} = n_{r_2} = \ldots = n_{r_N} = 0$: Հետևաբար, կարող ենք գրել.

$$\omega(B) = \omega_1(B) = \omega_2(B) = \ldots = \omega_N(B) = \sqrt{\frac{\hbar w_B}{m}\frac{d^2 a_{1,0}}{dz^2}\Big|_0}. \quad (2.72)$$

Այսպիսով $c(z)$-ի համար ստացվում է հետևյալ հավասարումը.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_j^2}+\left(\frac{m\omega(B)^2}{2}\sum_{j=1}^{N} z_j^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} U\left(\left|z_j-z_k\right|\right)\right)\psi=\left(E-NE^{(0)}\right)\psi, \quad (2.73)$$

որտեղ

$$E^{(0)}=\hbar\omega_B\left(a_{1,0}(0)+\frac{1}{2}\right): \quad (2.74)$$

Վերջնականապես կգանք հետևյալ համիլտոնիանին.

$$\hat{H}(B)=-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}+\frac{m\omega(B)^2}{2}\sum_{j=1}^{N} z_j^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} U\left(\left|z_j-z_k\right|\right): \quad (2.75)$$

Ներմուծենք ծնման և ոչնչացման օպերատորները մագնիսական դաշտի առկայությամբ՝

$$\hat{b}_z^{\pm}(B)=\left(\frac{m\omega(B)}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{N}\left(z_j\mp\frac{i}{m\omega(B)}\hat{p}_{z_j}\right): \quad (2.76)$$

Այժմ համիլտոնիանը կարելի է ներկայացնել ինչպես

$$\hat{H}(B)=\hat{H}_0(B)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} U\left(\left|z_j-z_k\right|\right)=$$
$$\hbar\omega\left(\hat{b}_z^{+}(B)\hat{b}_z^{-}(B)+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} U\left(\left|z_j-z_k\right|\right), \quad (2.77)$$

որտեղ

$$\hat{H}_0(B)=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{N}\hat{p}_{z_j}^2+\frac{m\omega(B)^2}{2}\sum_{i=1}^{N} z_j^2: \quad (2.78)$$

Ուղղակի հաշվարկների միջոցով կարելի է ցույց տալ, որ տեղի են ունենում հետևյալ կոմուտացիոն առնչությունները [43].

$$\left[\hat{\psi}_{int},\hat{b}_z^{\pm}(B)\right]=\left[\hat{\psi}_{int},\hat{b}_z^{\pm}(B)\right]=0, \quad (2.79)$$

$$\left[H_0(B), \mathcal{E}_z^{\pm}(B)\right] = \pm \hbar W(B)\, \mathcal{E}_z^{\pm}(B): \qquad (2.80)$$

Հաշվի առնելով (2.79) առնչությունը, փոխազդող մասնիկների (2.77) համիլտոնիանի համար կստանանք (2.80)-ին նման կոմուտացիոն առնչություն.

$$\left[H(B), \mathcal{E}_z^{\pm}(B)\right] = \pm \hbar W(B)\, \mathcal{E}_z^{\pm}(B): \qquad (2.81)$$

Փաստորեն խնդիրը բերվում է նախորդ ենթագլխում քննարկված խնդրին, և, հետևաբար ակնհայտ է, որ այս դեպքում էլ էլեկտրոնային գազում, ինչպես միջէլեկտրոնային փոխազդեցության առկայության դեպքում, այնպես էլ այդ փոխազդեցության բացակայության դեպքում, երկարալիքային ճառագայթման ազդեցությամբ դիպոլային անցումները տեղի են ունենում միևնույն $\pm W(B)$ հաճախությամբ, և կախված չեն էլեկտրոնների N քանակից, որն էլ հանդիսանում է Կոնի ընդհանրացված թեորեմի էությունը:

ԳԼՈՒԽ 3. ԴԻԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ

3.1. Դիամագնիսականությունը գլանային ՔԿ-ում}

Ինչպես նշվեց ներածության մեջ, վերջին տարիներին աճել է հետաքրքրությունը, ՔԿ-երում բազմաէլեկտրոնային համակարգերի ջերմադինամիկական և մագնիսական բնութագրերի, ուսումնասիրության նկատմամբ: Ատենախոսության երրորդ գլուխը նվիրված է գլանային ՔԿ-ում և նանոշերտում տեղայնացված էլեկտրոնային գազի դիամագնիսական հատկությունների ուսունասիրությանը:

Նկ. 3.1. Հետազոտվող համակարգի սխեմատիկ դիագրամը:

Դիտարկենք մեկէլեկտրոնային վիճակները պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով գլանային ՔԿ-ում, որը գտնվում է մագնիսական դաշտում: Նշված համակարգի Շրյոդինգերի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{1}{2m}\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 y + V_{conf}(r,f,z)y = Ey : \tag{3.1}$$

Այստեղ $V_{conf}(r,f,z)$-ը ՔԿ-ի սահմանափակող պոտենցիալն է, որն ունի հետևյալ տեսքը.

$$V_{conf}(r,f,z) = \frac{mw_r^2}{2}r^2 + \frac{mw_z^2}{2}z^2, \tag{3.2}$$

որտեղ $w_r \sim \frac{\hbar}{mR_0^2}$-ն և $w_z \sim \frac{\hbar}{mL^2}$-ն, սահմանափակող պոտենցիալի, համապատասխանաբար, շառավղային և աքսիալ հաճախություններն են, իսկ R_0-ն գլանային ՔԿ-ի շառավիղն է, L-ը ՔԿ-ի բարձրությունը:

Ենթադրենք մագնիսական դաշտն ուղղված է գլանի առանցքի երկայնքով: Եթե վեկտոր-պոտենցիալը գլանային կոորդինատային համակարգում ընտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\mathbf{A} = \begin{cases} A_r = A_z = 0, A_f = \dfrac{Br}{2}, \end{cases} \tag{3.3}$$

որտեղ B-ն մագնիսական դաշտի լարվածությունն է, ապա Շրյոդինգերի հավասարումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial f^2}\right)y \\ &-\frac{i\hbar w_B}{2}\frac{\partial y}{\partial f}+\frac{mw_B^2 r^2}{8}y + V_{conf}(r,f,z)y = Ey : \end{aligned} \tag{3.4}$$

Հաշվի առնելով $V_{conf}^{\text{Є}}(r,f,z)$ պոտենցիալի տեսքը, համակարգի համապատասխան մեկմասնիկային ալիքային ֆունկցիան կարելի է փնտրել հետևյալ արտադրյալը.

$$y = f(r,f)c(z): \tag{3.5}$$

Տեղադրելով (3.4)-ը (3.5)-ի մեջ և օգտվելով փոփոխականների բաժանման մեթոդից՝ $f(r,f)$ և $c(z)$ ֆունկցիաների համար ստացվում են հետևյալ հավասարումները.

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial f^2}\right)-\frac{\hbar w_B}{2}\frac{\partial}{\partial f}+\frac{m w_B^2}{8}r^2+\frac{m w_r^2}{2}r^2\Bigg]f(r,f)=E_{n_r,m}f(r,f), \tag{3.6}$$

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{m w_z^2}{2}z^2\right]c(z)=E_{n_z}c(z): \tag{3.7}$$

Գլանի առանցքի ուղղությամբ շարժումը համապատասխանում է միաչափ ներդաշնակ օսցիլյատորի շարժմանը, ուստի, կարելի է միանգամից գրել.

$$c(z)=\sqrt{\frac{1}{n_z!\,2^{n_z}\sqrt{\pi a_z}}}\,e^{-\frac{z^2}{2a_z^2}}H_{n_z}\left(\frac{z}{a_z}\right), \tag{3.8}$$

$$E_{n_z}=\hbar w_z\left(n_z+\frac{1}{2}\right): \tag{3.9}$$

որտեղ $a_z=\sqrt{\frac{\hbar}{m w_z}}$-ն օսցիլյատորային երկարությունն է, $n_z=0,1,2,\ldots$ -ն աքսիալ քվանտային թիվը, իսկ H_{n_z}-ն Էրմիտի բազմանդամներն են:

Այժմ անցնենք (3.6) հավասարմանը: Հաշվի առնելով համակարգի գլանային համաչափությունը, $f(r,f)$ ալիքային ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել արտադրյալի տեսքով

$$f(r,f) = R(r)\frac{e^{mf}}{\sqrt{2p}}, \qquad (3.10)$$

որտեղ $R(r)$-ն շառավղային ալիքային ֆունկցիան է, իսկ m -ը վերը նշված մագնիսական քվանտային թիվն է:

Կատարելով $W=\sqrt{w_B^2+(2w_r)^2}$ նշանակումը, և (3.6)-ում տեղադրելով (3.10)-ը, շառավղային մասի համար կունենանք հետևյալ հավասարումը.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{m^2}{r^2}R\right) + \left(\frac{\hbar w_B m}{2} + \frac{mW^2}{8}r^2\right)R = E_{n_r,m}R : \qquad (3.11)$$

Այժմ ներմուծենք $x=\frac{r^2}{2a_M^2}$ անկախ փոփոխականը, որտեղ $a_M=\sqrt{\frac{\hbar}{mW}}$: (3.11)-ում կատարելով փոփոխականի փոխարինում, կգանք այլասերված հիպերերկրաչափական ${}_1F_1(a,b;x)$ ֆունկցիայի հավասարմանը.

$$xR'' + R'\left(-\frac{x}{4} + k - \frac{m^2}{4x}\right)R = 0, \qquad (3.12)$$

որտեղ՝

$$k = \frac{E_{n_r,m}}{\hbar W} - \frac{\hbar w_B m}{2} : \qquad (3.13)$$

Ստացված (3.12) հավասարման լուծումը տրվում է հետևյալ տեսքով.

$$R(x) = Ce^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{|m|}{2}} {}_1F_1\left(-k - \frac{|m|+1}{2}, |m|+1, x\right), \qquad (3.14)$$

որտեղ C -ն նորմավորման հաստատունն է:

Որպեսզի R ալիքային ֆունկցիան ամենուր լինի վերջավոր, պետք է պահանջենք, որ $k - \frac{|m|+1}{2}$ մեծությունը լինի ամբողջ ոչ բացասական թիվ, որը նշանակենք n_r -ով:

Այսպիսով շառավղային մասի համար վեջնական ալիքային ֆունկցիայի և էներգիայի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունները.

$$f(r,f) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{1}{a_M^{1+|m|}} \left(\frac{(|m|+n_r)!}{2^{|m|}\,|m|!\,n_r!}\right)^{\frac{1}{2}} e^{imf} e^{-\frac{r^2}{2a_M^2}} r^{|m|} {}_1F_1\left(-n_r, |m|+1, \frac{r^2}{2a_M^2}\right), \qquad (3.15)$$

$$E_{n_r,m} = \hbar W\left(n_r + \frac{|m|+1}{2}\right) + \hbar w_B \frac{m}{2}: \qquad (3.16)$$

Ուստի, լրիվ էներգիայի համար ստացվում է հետևյալ վերջնական արտահայտությունը

$$E_{n_r,m,n_z} = E_{n_r,m} + E_{n_z} = \hbar W\left(n_r + \frac{|m|+1}{2}\right) + \hbar w_B \frac{m}{2} + \hbar w_z\left(n_z + \frac{1}{2}\right): \qquad (3.17)$$

Ենթադրելով, որ էլեկտրոնային գազն ենթարկվում է Բոլցմանի բաշխմանը, վիճակագրական գումարի համար [105] կարող ենք գրել

$$Z = \sum_{n_z,n_r,m} \exp\left(-bE_{n_r,m,n_z}\right) \qquad (3.18)$$

որտեղ $b = \frac{1}{k_B T}$ -ն հակադարձ ջերմաստիճանն է:

Հետազոտվող համակարգի էներգիայի ընդհատ մակարդաների վիճակագրական գումարն արտահայտվում է եռակի գումարի միջոցով.

$$Z = \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \exp\left[-\beta\hbar\omega\left(n_r + \frac{|m|+1}{2}\right) + \hbar\omega_B \frac{m}{2} + \hbar\omega_z\left(n_z + \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$\sum_{n_r=0}^{\infty} \exp\left(-\beta\hbar\omega n_r\right) \sum_{n_z=0}^{\infty} \exp\left[-\beta\hbar\omega_z\left(n_z + \frac{1}{2}\right)\right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\beta\hbar\omega\frac{|m|+1}{2} + \omega_B \frac{m}{2}\right] = \frac{1}{8}\operatorname{csch}\frac{\beta\hbar\omega_z}{2} f^{-}(\omega) f^{+}(\omega), \tag{3.18}$$

որտեղ $f^{\pm}(\omega) = \operatorname{sech}\dfrac{\beta\hbar(\omega \pm \omega_B)}{4}$:

(3.19) արտահայտության միջոցով կարելի է հաշվել հետազոտվող համակարգի ջերմադինամիկական և մագնիսական պարամետրերը:

Նկ. 3.2. Պարաբոլական ՔԿ-ում միջին էներգիայի կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից, երբ $R_2 = 2a_B^*$ և երբ (1) $T = 300K$, (2) $T = 200K$, (3) $T = 100K$:

Նկ. 3.3. Պարաբոլական ՔԿ-ում միջին մագնիսացվածության կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից, երբ $R_2 = 2a_B^*$ և երբ (1) $T = 300K$, (2) $T = 200K$, (3) $T = 100K$:

Նկ. 3.4. Պարաբոլական ՔԿ-ում միջին մագնիսական ընկալունակության կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից, երբ $R_2 = 2a_B^*$ և երբ (1) $T = 300K$, (2) $T = 200K$, (3) $T = 100K$:

Միջին էներգիայի համար ունենք

$$\langle E\rangle = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial b} = \frac{\hbar\omega}{4}\left(g^{+}(\omega)+g^{-}(\omega)\right)+\frac{\hbar\omega_B}{4}\left(g^{+}(\omega)-g^{-}(\omega)\right)+\frac{\hbar\omega_z}{2}\coth\frac{b\hbar\omega_z}{2}, \qquad (3.20)$$

որտեղ $g^{\pm}(\omega)=\tanh\frac{b\hbar(\omega\pm\omega_B)}{4}$:

Հետևաբար, մագնիսացվածության համար կգրենք

$$\langle M\rangle = \frac{1}{bZ}\frac{\partial Z}{\partial B} = -\frac{\mu_B}{4}\left(\frac{\omega_B}{\omega}\left(g^{+}(\omega)+g^{-}(\omega)\right)+\left(g^{+}(\omega)-g^{-}(\omega)\right)\right), \qquad (3.21)$$

իսկ մագնիսական ընկալունակության համար կստանանք՝

$$\langle c\rangle = \frac{\partial\langle M\rangle}{\partial B} = \frac{\mu_B^2}{4\omega}\left(\frac{4\omega_B^2}{\omega}-\omega\right)\left(g^{+}(\omega)+g^{-}(\omega)\right)-b\left(\left(\omega-\omega_B\right)^2 f^{-}(\omega)^2+\left(\omega+\omega_B\right)^2 f^{+}(\omega)^2\right), \qquad (3.22)$$

որտեղ $\mu_B=\frac{\hbar e}{mc}$:

Նկ. 3.2-ում բերված է համակարգի միջին էներգիայի կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից, երբ շառավիղը հավասար է $R_0 = 2a_B^*$: Ինչպես երևում է, մագնիսական դաշտի աճին զուգընթաց էներգիան աճում է: Ընդ որում էներգիան ավելի արագ է աճում ցածր ջերմաստիճաններում ($T = 100K$, $T = 200K$), իսկ ջերմաստիճանի ավելի բարձր արժեքների դեպքում ($T = 300K$) աճը դանդաղում է: Ինչպես երևում է կախվածությունը գծային չէ, ինչը պայմանավորված է գլանային ՔԿ-ի սահմանափակող պոտենցիալի ազդեցությամբ: Նկատենք, որ ավելի բարձր ջերմաստիճաններում ($T = 300K$) էներգիայի կորն ավելի վերև է ընկած, քան ջերմաստիճանի համեմատաբար ավելի փոքր ($T = 100K$, $T = 200K$) արժեքների դեպքում:

Նկ. 3.3-ում բերված է էլեկտրոնային գազի միջին մագնիսացվածության կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից: Նկարից հետևում է, որ համակարգը ունի վառ արտահայտված դիամագնիսական հատկություններ, ընդ որում $M(B)$ կախվածությունները մոտ են գծայինին: Ջերմաստիճանի աճին զուգընթաց միջին մագնիսացվածությունը մոդուլով նվազում է, քանի որ մեծանում է մագնիսական մոմենտների ֆլուկտուացիաների ամպլիտուդը, այսինքն, մագնիսական մոմենտրները սկսում են միմյանցից անկախ քաոսային պտույտներ կատարել, և ընդհանուր կարգավորվածությունը թուլանում է:

Վերջապես, նկ. 3.4-ում ներկայացված են մագնիսական ընկալունակության կախվածությունները մագնիսական դաշտի B արժեքից: Քանի որ, c -ն սահմանվում է, ինչպես M -ի ածանցյալն ըստ B -ի, ապա հաշվի առնելով $M(B)$ համարյա գծային կախվածությունը, c -ի արժեքները թույլ են կախված դաշտի արժեքից: Համեմատաբար ավելի ցածր ջերմաստիճաններում ($T = 100K$ և $T = 200K$) նկատվում է մագնիսական ընկալունակության աճ կախված մագնիսական դաշտի արժեքից, որը վկայում է գծային օրենքից $M(B)$ կախվածության շեղոման մասին: Ջերմաստիճանի աճին զուգընթաց $c(B)$ կախվածությունը թուլանում է:

3.2. Դիամագնիսականությունը գլանային քվանտային նանոշերտում

Դիտարկենք մեկէլեկտրոնային վիճակները անվերջ խորը սահմանափակող պոտենցիալով գլանային քվանտային նանոշերտում, որը գտնվում է մագնիսական դաշտում:

Նկ. 3.5. Հետազոտվող համակարգի սխեմատիկ դիագրամը:

Նշված համակարգի Շրյոդինգերի հավասարումն ունի նույն (3.1) տեսքը, սակայն այս դեպքում, որպես սահմանափակող պոտենցիալ դիտարկվել է հետևյալը.

$$V_{conf}(r,z) = V_1(r) + V_2(z), \tag{3.23}$$

որտեղ՝

$$V_1(r) = \begin{cases} 0, & R_1 < r < R_2 \\ \infty, & r \le R_1, r \ge R_2 \end{cases}, \tag{3.24}$$

$$V_2(z) = \frac{m\omega_z^2}{2} z^2, \tag{3.25}$$

որտեղ R_1-ն ու R_2-ը նանոշերտի, համապատասխանաբար, ներքին և արտաքին շառավիղներն են, w_z-ը z-ուղղությամբ սահմանափակող պոտենցիալի հաճախությունը:

Ենթադրենք մագնիսական դաշտն ուղղված է գլանի առանցքի երկայնքով: Եթե դաշտի վեկտոր-պոտենցիալը ընտրենք նախորդ ենթագլխում բերված՝ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_r = A_z = 0, A_f = \dfrac{Br}{2} \end{pmatrix}$ տեսքով, ապա Շրյոդինգերի հավասարումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial f^2}\right)y-\frac{i\hbar w_B}{2}\frac{\partial y}{\partial f}+\frac{m w_B^2 r^2}{8}y+V(r,z)y=Ey: \tag{3.26}$$

Հաշվի առնելով V_{conf} պոտենցիալի տեսքը, համակարգի համապատասխան մեկմասնիկային ալիքային ֆունկցիան, ինչպես նախորդ ենթագլխում, այս դեպքում էլ կարելի է փնտրել հետևյալ արտադրյալի տեսքով.

$$y = f(r,f)c(z), \tag{3.27}$$

սակայն այս դեպքում ալիքային ֆունկցիայի վրա կդրվեն հետևյալ սահմանային պայմանները

$$y(R_1,f,z) = y(R_2,f,z) = 0: \tag{3.28}$$

Տեղադրելով (3.27)-ը (3.26)-ի մեջ և օգտվելով փոփոխականների բաժանման մեթոդից՝ $f(r,f)$ և $c(z)$ ֆունկցիաների համար, նախորդ ենթագլխի համանմանությամբ, կստանանք հետևյալ հավասարումները.

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial f^2}\right]-\frac{i\hbar w_B}{2}\frac{\partial}{\partial f}+\frac{m w_B^2 r^2}{8}+V_1(r)\Big]f(r,f)=E_{n_r,m}f(r,f),$$

(3.29)

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+V_2(z)\right]c(z)=E_{n_z}c(z), \qquad (3.30)$$

հետևյալ սահմանային պայմաններով՝

$$f(R_1,f)=f(R_2,f)=0: \qquad (3.31)$$

Գլանի առանցքի ուղղությամբ շարժումը, այս դեպքում էլ, համապատասխանում է միաչափ ներդաշնակ օսցիլյատորի շարժմանը, ուստի, z-ուղղությամբ ալիքային ֆունկցիայի և էներգիայի արտահայտությունները կունենան նույն (3.8) և (3.9) տեսքերը:

Հաշվի առնելով համակարգի գլանային համաչափությունը, $f(r,f)$ ալիքային ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել ինչպես

$$f(r,f)=R(r)\frac{e^{imf}}{\sqrt{2p}}: \qquad (3.32)$$

Տեղադրելով (3.32)-ը (3.29)-ի մեջ, $R(r)$-ի համար կստանանք հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[R''+\frac{1}{r}R'-\frac{m^2}{r^2}R+\left(E_r-\frac{m w_B^2 r^2}{8}+\frac{\hbar w_B m}{2}\right)R\right]=0, \qquad (3.33)$$

և սահմանային պայմանները կընդունեն հետևյալ տեսքերը՝

$$R(R_1)=R(R_2)=0: \qquad (3.34)$$

Կատարելով $r^2=\left(\frac{2\hbar}{m w_B}z\right)$ փոփոխականի փոխարինում, R-ի համար կստանանք

$$zR'' + R' + \left(-\frac{z}{4} + k + \frac{m^2}{4z}\right)R = 0, \qquad (3.35)$$

որտեղ $k = \dfrac{E_{n_r,m}}{\hbar w_B} - \dfrac{m}{2}$:

Այս հավասարման համապատասխան լուծումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$R(r) = r^{|m|} e^{-\frac{r^2}{2a_M^2}} \left\{ C_1 {}_1F_1\left(-k - \frac{|m|+1}{2}, |m|+1, \frac{r^2}{2a_M^2}\right) + C_2 U\left(-k - \frac{|m|+1}{2}, |m|+1, \frac{r^2}{2a_M^2}\right) \right\}, \qquad (3.36)$$

որտեղ C_1-ն ու C_2-ը նորմավորման գործակիցներն են, $a_M = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m w_B}} = \sqrt{\dfrac{\hbar c}{eB}}$-ն մագնիսական երկարությունն է, իսկ ${}_1F_1(a,b;z)$-ն և $U(a,b;z)$-ն համապատասխանաբար, առաջին և երկրորդ սեռի այլասերված հիպերերկրաչափական ֆունկցիաներն են:

Էներգիայի սպեկտրը կստանանք, հաշվի առնելով (3.34) սահմանային պայմանները և լուծելով հետևյալ տրանսցենդենտ հավասարումը՝

$$\begin{vmatrix} {}_1F_1\left(-k - \frac{|m|+1}{2}, |m|+1, \frac{R_1^2}{2a_M^2}\right) & U\left(-k - \frac{|m|+1}{2}, |m|+1, \frac{R_1^2}{2a_M^2}\right) \\ {}_1F_1\left(-k - \frac{|m|+1}{2}, |m|+1, \frac{R_2^2}{2a_M^2}\right) & U\left(-k - \frac{|m|+1}{2}, |m|+1, \frac{R_2^2}{2a_M^2}\right) \end{vmatrix} = 0: \qquad (3.37)$$

Ակնհայտ է, որ եթե տեղի ունի (3.37)-ը, ապա այլասերված հիպերերկրաչափական ֆունկցիաների առաջին արգումենտները

կախված են $|m|$-ից, և, համապատասխանաբար, $\frac{R_1^2}{2a_M^2}$-ից ու $\frac{R_2^2}{2a_M^2}$-ից, իսկ m-ի նշանից կախված չեն: Հետևաբար ներմուծենք՝

$$a_{n_r+1,|m|} = k - \frac{|m|+1}{2}, \tag{3.38}$$

որտեղ շառավղային $n_r = 0;1;j$ քվանտային թիվը ֆիքսված m-ի դեպքում աճման կարգով համարակալում են $a_{n_r+1,|m|}$-ները՝ $0 > a_{1,|m|} > a_{2,|m|} > j$: Ուստի, $E_{n_r,m}$-ի համար կստանանք.

$$E_{n_r,m} = \hbar w_B \left(a_{n_r+1,|m|} + \frac{|m|+m+1}{2} \right): \tag{3.39}$$

Այսպիսով, մեկմասնիկային ալիքային ֆունկցիայի և համապատասխան էներգիայի սպեկտրի համար կունենանք

$$y(r,f,z) = C_{n_r,|m|} e^{-\frac{r^2}{2a_M^2}} r^{|m|} \left[C_{11} F_1\left(-k - \frac{|m|+1}{2}, |m|+1, \frac{r^2}{2a_M^2}\right) + C_2 U\left(-k - \frac{|m|+1}{2}, |m|+1, \frac{r^2}{2a_M^2}\right) \right] \sqrt{\frac{1}{n_z!\,2^{n_z}\sqrt{pa_z}}}\, e^{-\frac{z^2}{2a_z^2}} H_{n_z}\left(\frac{z}{a_z}\right), \tag{3.40}$$

$$E_{n_r,m,n_z} = \hbar w_B \left(a_{n_r+1,|m|} + \frac{|m|+m+1}{2} \right) + \hbar w_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right): \tag{3.41}$$

Ենթադրելով, որ էլեկտրոնային գազն ենթարկվում է Բոլցմանի բաշխմանը, վիճակագրական գումարի համար կարող ենք գրել

$$Z = \sum_{n_z,n_r,m} \exp\left(-bE_{n_z,n_r,m}\right) \tag{3.42}$$

որտեղ $b = \frac{1}{k_B T}$-ն հակադարձ ջերմաստիճանն է:

Հետազոտվող համակարգի էներգիայի ընդհատ մակարդաների վիճակագրական գումարն արտահայտվում է եռակի գումարի միջոցով.

$$Z = \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \exp\left(-b\left(E_{n_r,m} + \hbar w_z\left(n_z + \frac{1}{2}\right)\right)\right) =$$

$$\sum_{n_z=0}^{\infty} \exp\left(-b\hbar w_z\left(n_z + \frac{1}{2}\right)\right) \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-bE_{n_r,m}\right) = \qquad (3.43)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{csch}\frac{b\hbar w_z}{2} \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-bE_{n_r,m}\right):$$

Կրկնակի գումարի հաշվարկը n_r-ով և m-ով կատարվում է թվային եղանակով: (3.43) արտահայտության միջոցով կարելի է հաշվել հետազոտվող համակարգի ջերմադինամիկական և մագնիսական պարամետրերը՝ $\langle E \rangle$, $\langle M \rangle$, $\langle c \rangle$:

Նկ. 3.6a-ում բերված է համակարգի միջին էներգիայի կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից, երբ ներքին շառավիղը հավասար է $R_1 = 0.5a_B^*$, իսկ արտաքինը՝ $R_2 = 2a_B^*$: Ինչպես երևում է, նշված մոդելի համար նույնպես, մագնիսական դաշտի աճին զուգընթաց էներգիան աճում է: Ընդ որում էներգիայի աճն այստեղ էլ աննշան է: Բարձր ջերմաստիճաններում ($T = 300K$) էներգիայի կորը նույնպես ավելի վերև է ընկած, քան ջերմաստիճանի համեմատաբար ավելի փոքր ($T = 200K$) արժեքների դեպքում: Ինչպես երևում է էներգիայի կախվածությունը մագնիսական դաշտից բավականին թույլ է: Նկ. 3.6b-ում բերված է ՔԿ-ի դեպքը, երբ $R_1 = 0$, քանի որ այս դեպքում չափային քվանտացմումը թուլանում է (ներքին սահմանը բացակայում է), էներգիան ավելի զգայուն է մագնիսական դաշտի նկատմամբ:

(a) $R_1 = 0.5a_B^*$, $R_2 = 2a_B^*$

(b) $R_1 = 0$, $R_2 = 2a_B^*$

Նկ. 3.6. Գլանային նանոշետում էլեկտրոնային գազի միջին էներգիայի կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից, երբ $T = 200K$ (ներդիր), $T = 300K$:

(a) $R_1 = 0.5a_B^*$, $R_2 = 2a_B^*$

(b) $R_1 = 0$, $R_2 = 2a_B^*$

Նկ. 3.7. Գլանային նանոշետում էլեկտրոնային գազի միջին մագնիսացվածության կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից, երբ (1) $T = 300K$, (2) $T = 200K$, (3) $T = 100K$:

(a) $R_1 = 0.5a_B^*$, $R_2 = 2a_B^*$

(b) $R_1 = 0$, $R_2 = 2a_B^*$

Նկ. 3.8. Գլանային նանոշետում էլեկտրոնային գազի միջին մագնիսական ընկալունակության կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից, երբ (1) $T = 300K$, (2) $T = 200K$, (3) $T = 100K$:

Նկ. 3.7a-ում բերված է նանոշերտում էլեկտրոնային գազի միջին մագնիսացվածության կախվածությունը մագնիսական դաշտի արժեքից: Նկարից հետևում է, որ նանոշերտի դեպքում նույնպես համակարգն ունի վառ արտահայտված դիամագնիսական հատկություններ, ընդ որում այստեղ էլ $M(B)$ կախվածությունները մոտ են գծայինին: Ջերմաստիճանի աճին զուգընթաց միջին մագնիսացվածությունը մոդուլով նվազում է: Նկ. 3.7b-ում բերված է ՔԿ-ի դեպքը, և ինչպես երևում է, կախվածությունն ավելի զգայուն է մագնիսական դաշտի նկատմամբ, քանի որ չափային քվանտացումն ավելի թույլ է:

Վերջապես, նկ. 3.8a-ում ներկայացված են մագնիսական ընկալունակության կախվածությունները մագնիսական դաշտի B արժեքից: Քանի որ, ինչպես վերը նշվեց, c-ն սահմանվում է որպես M-ի ածանցյալն ըստ B-ի, ապա հաշվի առնելով $M(B)$ համարյա գծային կախվածությունը, c-ի արժեքները թույլ են կախված դաշտի արժեքից: Համեմատաբար ավելի ցածր ջերմաստիճաններում ($T = 100K$ և $T = 200K$) նկատվում է մագնիսական ընկալունակության համանման ոչ մեծ աճ կախված մագնիսական դաշտի արժեքից, որը վկայում է $M(B)$ կախվածության շեղումը գծային օրենքից: Ջերմաստիճանի աճին զուգընթաց $c(B)$-ն գործնականում մնում է հաստատուն: Իսկ ՔԿ-ի դեպքում (նկ. 3.8b) ավելի ցայտուն է արտահայտվում $c(B)$ կախվածությունը, քանի որ բացակայում է ներքին սահմանը, և չափային քվանտացումը թուլանում է:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

1. Խոտորումների տեսության շրջանակներում ուսումնասիրվել է պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով գնդային ՔԿ-ում տեղայնացված երկէլեկտրոնային խառնուկի էներգիական մակարդակների որոշման խնդիրը: Հելիումի ատոմի տեսության նմանությամբ հաշվվել են տրիպլետ և սինգլետ վիճակների էներգիաները: Սպինը հաշվի է առնվել Ռասել-Սաունդերսի մոտավորությամբ: Արդյունքները համեմատվել են Հայզենբերգի անորոշությունների առնչության հիման կատարված գնահատականի հետ, և ցույց է տրվել, որ ստացված արդյունքները միմյանց հետ լավ համաձայնեցված են:

2. Ուսումնասիվել է պարաբոլական ՔԿ-ում տեղայնացված երկէլեկտրոնային խառնուկային համակարգում էլեկտրոնների միջև վիճակների փոխանակման ժամանակի կախվածությունը ՔԿ-ի շառավղից: Ցույց է տրվել, որ ՔԿ-ի շառավղի աճին զուգընթաց այդ ժամանակն աճում է, սակայն ունի հագեցող բնույթ, քանի որ մեծ շառավիղների դեպքում պատերի ազդեցությունը դառնում է աննշան, և համակարգը վերածվում է զանգվածեղ կիսահաղորդչում գտնվող երկէլեկտրոնային խառնուկի:

3. Հետազոտվել է վերջավոր խորությամբ սահմանափակող պոտենցիալով գնդային ՔԿ-ում տեղայնացված եկրէլեկտրոնային խառնուկային համակարգում էլեկտրոնների միջև վիճակների փոխանակման ժամանակի կախվածությունը

ՔԿ-ի շառավղից: Ցույց է տրվել, որ ՔԿ-ի շառավղի նվազմանը զուգընթաց, այդ ժամանակը նախ նվազում է, սակայն երբ էլեկտրոններից մեկն արտանետվում է ՔԿ-ից, էլեկտրոնների միջև հեռավորությունը մեծանում է և վիճակների փոխանակման ժամանակը սկսում է աճել:

4. Ադիաբատական մոտավորության հիման վրա դիտարկվել է ՈւՁԷՔԿ-ում մի քանի մասնիկային էլեկտրոնային գազը, ինչպես արտաքին դաշտի առկայության, այնպես էլ բացակայության դեպքերում: Ցույց է տրվել, որ նման համակարգը կարելի է ներկայացնել որպես արագ և դանդաղ ենթահամակարգերի համադրում: Ընդ որում ՔԿ-ի առանցքի ձգման ուղղությամբ էլեկտրոնային գազը տեղայնացված է պարաբոլական փոսում: Արդյունքում, համակարգում ի հայտ են գալիս Կոնի ընդհանրացված թեորեմի իրագործման պայմանները, երբ երկարալիքային կլանման ռեզոնանսային հաճախությունները միջէլեկտրոնային փոխազդեցությունից կախված չեն:

5. Ուսումնասիրվել է պարաբոլական սահմանափակող պոտենցիալով գլանային ՔԿ-ում տեղայնացված էլեկտրոնային գազի դիամագնիսական ընկալունակությունը: Ջերմադինամիկական միջին էներգիայի, մագիսացվածության և դիամագնիսական ընկալունակության համար ստացվել են վերլուծական արտահայտություններ: Ցույց է տրվել, որ նման համակարգն ունի վառ արտահայտված դիամագնիսական հատկություններ: Ընդ որում, գազի մագնիսացվածության

կախվածություն մագնիսական դաշտի արժեքից մոտ է գծայինին:

6. Բոլցմանի բաշխման շրջանակներում հաշվվել են գլանային նանոշերտում տեղայնացված էլեկտրոնային գազի մագնիսացվածությունը և դիամագնիսական ընկալունակությունը: Ցույց է տրվել, որ շնորհիվ ներքին շառավղի առկայության գազի դիամագնիսական ընկալունակությունը ավելի թույլ կախվածություն ունի մագնիսական դաշտից, քան ՔԿ-ի դեպքում: Ընդ որում գազի մագնիսացվածությունը դաշտի արժեքից, այս դեպքում նույնպես, ունի գրեթե գծային կախվածություն:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] T. Chakraborty. *Quantum Dots: A survey of the properties of artificial atoms*. Elsevier, 1999.

[2] D. Bimberg, M. Grundmann, and N. N Ledentsov. *Quantum dot heterostructures*. John Wiley & Sons, 1999.

[3] Է. Մ. Ղազարյան and Ս. Գ. Պետրոսյան. *Կիսահաղորդչային նանոէլեկտրոնիկայի ֆիզիկական հիմունքները*. ՌՀՀ Հրատարակչություն, 2005.

[4] B. Herzog, N. Owschimikow, J.-H. Schulze, R. Rosales, Y. Kaptan, M. Kolarczik, T. Switaiski, A. Strittmatter, D. Bimberg, U. W. Pohl, and U. Woggon. Fast gain and phase recovery of semiconductor optical amplifiers based on submonolayer quantum dots. *Applied Physics Letters,* 107(20):201102, November 2015.

[5] J. Wu, S. Chen, A. Seeds, and H. Liu. Quantum dot optoelectronic devices: lasers, photodetectors and solar cells. *Journal of Physics D Applied Physics,* 48:363001, September 2015.

[6] H. Mohammadpour. Quantum dot resonant tunneling FET on graphene. *Physica E Low-Dimensional Systems and Nanostructures,* 81:91—95, July 2016.

[7] X. Jehl, Y.-M. Niquet, and M. Sanquer. Single donor electronics and quantum functionalities with advanced CMOS technology. *Journal of Physics Condensed Matter,* 28(10):103001, March 2016.

[8] A. A. Lyamkina, K. Schraml, A. Regler, M. Schalk, A. K. Bakarov, A. I. Toropov, S. P. Moshchenko, and M. Kaniber. Monolithically integrated single quantum dots coupled to bowtie nanoantennas. *ArXiv e-prints,* March 2016.

[9] A. C. Betz, M. L. V. Tagliaferri, M. Vinet, M. Brostrom, M.

Sanquer, A. J. Ferguson, and M. F. Gonzalez-Zalba. Reconfigurable quadruple quantum dots in a silicon nanowire transistor. *ArXiv e-prints,* March 2016.

[10] Z. Xu, S. Lin, X. Li, S. Zhang, Z. Wu, W. Xu, Y. Lu, and S. Xu. Monolayer MoS2/GaAs heterostructure self-driven photodetector with extremely high detectivity. *ArXiv e-prints,* December 2015.

[11] S. M. Goodman, A. Siu, V. Singh, and P. Nagpal. Long-range energy transfer in self-assembled quantum dot-DNA cascades. *Nanoscale,* 7:18435--18440, November 2015.

[12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *A Course of Theoretical Physics: Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory,* volume 3. Butterworth- Heinemann, 1981.

[13] V. Galitski, B. Karnakov, and V. Kogan. *Exploring Quantum Mechanics: A Collection of 700+ Solved Problems for Students, Lecturers, and Researchers. Oxford University Press, 1 edition, 2013.*

[14] B. Billaud and T. T. Truong. Some theoretical results on semiconductor spherical quantum dots. *ArXiv e-prints,* June 2011.

[15] S. M. Ikhdair. Bound state energies and wave functions of spherical quantum dots in presence of a confining potential model. *ArXiv e-prints,* October 2011.

[16] E. Aksahin, V. Ustoglu Unal, and M. Tomak. Exciton related optical absorption in a spherical quantum dot. *European Physical Journal B,* 87:265, November 2014.

[17] A. Gueddim, T. Eloud, N. Messikine, and N. Bouarissa. Energy levels and optical properties of GaN spherical quantum dots. *Superlattices and Microstructures,* 77:124—133, January 2015.

[18] M. S. Atoyan, E. M. Kazaryan, B. Z. Poghosyan, and H. A. Sarkisyan. Interband absorption and excitonic states in narrow band InSb

spherical quantum dots. *Physica E Low-Dimensional Systems and Nanostructures,* 43:1592-1596, July 2011.

[19] B. Qakir, Y. Yakar, and A. Ozmen. Linear and nonlinear optical absorption coefficients of two-electron spherical quantum dot with parabolic potential. *Physica B Condensed Matter,* 458:138--143, February 2015.

[20] Jia-Lin Zhu. Exact solutions for hydrogenic donor states in a spherically rectangular quantum well. *Phys. Rev. B,* 39:8780--8783, Apr 1989.

[21] D. S. Chuu, C. M. Hsiao, and W. N. Mei. Hydrogenic impurity states in quantum dots and quantum wires. *Phys. Rev. B,* 46:3898--3905, Aug 1992.

[22] N. Porras-Montenegro, S. T. Perez-Merchancano, and A. Latge. Binding energies and density of impurity states in spherical gaas-(ga,al)as quantum dots. *Journal of Applied Physics,* 74(12):7624--7626, 1993.

[23] Zhen-Yan Deng, Jing-Kun Guo, and Ting-Rong Lai. Impurity states in a spherical gaas-$ga_{i-x}al_x$as quantum dot: Effects of the spatial variation of dielectric screening. *Phys. Rev. B,* 50:5736--5739, Aug 1994.

[24] Z. Xiao, Jiqian Zhu, and Fengai He. Magnetic field dependence of the binding energy of a hydrogenic impurity in a spherical quantum dot. *Journal of Applied Physics,* 79(12):9181 —9187, 1996.

[25] C. Bose. Binding energy of impurity states in spherical quantum dots with parabolic confinement. *Journal of Applied Physics,* 83(6):3089--3091, 1998.

[26] E. M. Kazaryan, L. S. Petrosyan, and H. A. Sarkisyan. Impurity states in a narrow band gap semiconductor quantum dot with parabolic confinement potential. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* 16(2):174 --178, 2003.

[27] E. M. Kazaryan, A. V. Meliksetyan, L. S. Petrosyan, and H. A. Sarkisyan. Impurity states of narrow-gap semiconductor parabolic quantum dot in the presence of extremely strong magnetic field. *Physica E: Lowdimensional Systems and Nanostructures,* 31(2):228 -- 231, 2006.

[28] C. Bose and C.K. Sarkar. Effect of a parabolic potential on the impurity binding energy in spherical quantum dots. *Physica B: Condensed Matter,* 253(3–4):238 -- 241, 1998.

[29] C. Bose. Perturbation calculation of impurity states in spherical quantum dots with parabolic confinement. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* 4(3):180 --184, 1999.

[30] C. Bose and C.K. Sarkar. Binding energy of impurity states in spherical gaas–ga1–xalxas quantum dots. *physica status solidi (b),* 218(2):461 — 469, 2000.

[31] G. Murillo and N. Porras-Montenegro. Effects of an electric field on the binding energy of a donor impurity in a spherical gaas–(ga,al)as quantum dot with parabolic confinement. *physica status solidi (b),* 220(1):187--190, 2000.

[32] A. Corella-Madueno, R. Rosas, J. L. Marin, and R. Riera. Hydrogenic impurities in spherical quantum dots in a magnetic field. *Journal of Applied Physics,* 90(5):2333--2337, 2001.

[33] A. John Peter. The effect of hydrostatic pressure on binding energy of impurity states in spherical quantum dots. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* 28(3):225 --229, 2005.

[34] W. Xie. Optical properties of an off-center hydrogenic impurity in a spherical quantum dot with gaussian potential. *Superlattices and Microstructures,* 48(2):239 -- 247, 2010.

[35] W. Xie. Impurity effect on low-lying spectra in a two-electron quantum dot with parabolic confinement. *Physica B: Condensed Matter,*

334(3-4):317--322, 2003.

[36] P. Koscik. Entanglement in s states of two-electron quantum dots with coulomb impurities at the center. *Physics Letters A,* 377(37):2393--2397, 2013.

[37] D. S Acosta Coden, R. H Romero, A. Ferron, and S. S Gomez. Impurity effects in two-electron coupled quantum dots: entanglement modulation. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics,* 46(6):065501, 2013.

[38] D. A. Baghdasaryan, E. M. Kazaryan, and H. A. Sarkisyan. Two-electron states and state exchange time control in parabolic quantum dot. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* 58(0):67--72, 2014.

[39] W. Kohn. Cyclotron resonance and de haas-van alphen oscillations of an interacting electron gas. *Phys. Rev.,* 123:1242—1244, Aug 1961.

[40] P. A. Maksym and T. Chakraborty. Quantum dots in a magnetic field: Role of electron-electron interactions. *Physical Review Letters,* 65:108-111, July 1990.

[41] F. M. Peeters. Magneto-optics in parabolic quantum dots. *Phys. Rev. B,* 42:1486--1487, Jul 1990.

[42] A. O. Govorov and A. V. Chaplik. Magnetoabsorption at quantum points. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters,* 52:31, July 1990.

[43] L. Brey, N. F. Johnson, and B. I. Halperin. Optical and magneto-optical absorption in parabolic quantum wells. *Phys. Rev. B,* 40:10647--10649, Nov 1989.

[44] W. Que. Excitons in quantum dots with parabolic confinement. *Phys. Rev. B,* 45:11036--11041, May 1992.

[45] R. C. Ashoori, H. L. Stormer, J. S. Weiner, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West. *N* -electron ground state energies of a quantum dot in magnetic field. *Phys. Rev. Lett.,* 71:613—616, Jul 1993.

[46] R. Rinaldi, P. V. Giugno, R. Cingolani, H. Lipsanen, M. Sopanen, J. Tulkki, and J. Ahopelto. Zeeman effect in parabolic quantum dots. *Phys. Rev. Lett.,* 77:342--345, Jul 1996.

[47] D. Pfannkuche and R. R. Gerhardts. Quantum-dot helium: Effects of deviations from a parabolic confinement potential. *Phys. Rev.* B, 44:13132—13135, Dec 1991.

[48] V. Halonen, T. Chakraborty, and P. Pietilainen. Excitons in a parabolic quantum dot in magnetic fields. *Phys. Rev. B,* 45:5980--5985, Mar 1992.

[49] T. Chakraborty and P. Pietilainen. Optical signatures of spin-orbit interaction effects in a parabolic quantum dot. *Phys. Rev. Lett.,* 95:136603, Sep 2005.

[50] B. Meurer, D. Heitmann, and K. Ploog. Single-electron charging of quantum-dot atoms. *Phys. Rev. Lett.,* 68:1371 —1374, Mar 1992.

[51] M. Fujito, A. Natori, and H. Yasunaga. Many-electron ground states in anisotropic parabolic quantum dots. *Phys. Rev. B,* 53:9952--9958, Apr 1996.

[52] L. P. Kouwenhoven, D. G. Austing, and S. Tarucha. Few-electron quantum dots. *Reports on Progress in Physics,* 64(6):701, 2001.

[53] M. Fricke, A. Lorke, J. P. Kotthaus, G. Medeiros-Ribeiro, and P. M. Petroff. Shell structure and electron-electron interaction in self-assembled inas quantum dots. *EPL (Europhysics Letters),* 36(3):197, 1996.

[54] M. H. Degani and Gil A. Farias. Polaron effects in one-dimensional lateral quantum wires and parabolic quantum dots. *Phys.*

Rev. B, 42:11950—11952, Dec 1990.

[55] V. Gudmundsson and R. R. Gerhardts. Self-consistent model of magnetoplasmons in quantum dots with nearly parabolic confinement potentials. *Phys. Rev. B,* 43:12098—12101, May 1991.

[56] P. Pietilainen and T. Chakraborty. Energy levels and magneto-optical transitions in parabolic quantum dots with spin-orbit coupling. *Phys. Rev. B,* 73:155315, Apr 2006.

[57] D. Pfannkuche and S. E. Ulloa. Selection rules for transport excitation spectroscopy of few-electron quantum dots. *Phys. Rev. Lett.,* 74:1194-1197, Feb 1995.

[58] R. Rinaldi, R. Mangino, R. Cingolani, H. Lipsanen, M. Sopanen, J. Tulkki, M. Brasken, and J. Ahopelto. Magneto-optical properties of strain- induced $in_x gai_{-x} as$ parabolic quantum dots. *Phys. Rev. B,* 57:9763-9769, Apr 1998.

[59] F. R. Waugh, M. J. Berry, D. J. Mar, R. M. Westervelt, K. L. Campman, and A. C. Gossard. Single-electron charging in double and triple quantum dots with tunable coupling. *Phys. Rev. Lett.,* 75:705--708, Jul 1995.

[60] N. F. Johnson and M. C. Payne. Exactly solvable model of interacting particles in a quantum dot. *Phys. Rev. Lett.,* 67:1157—1160, Aug 1991.

[61] K. H. Schmidt, M. Versen, U. Kunze, D. Reuter, and A. D. Wieck. Electron transport through a single inas quantum dot. *Phys. Rev. B,* 62:15879--15887, Dec 2000.

[62] A. Harju, V. A. Sverdlov, R. M. Nieminen, and V. Halonen. Many-body wave function for a quantum dot in a weak magnetic field. *Phys. Rev. B,* 59:5622--5626, Feb 1999.

[63] G. Wang and K. Guo. Interband optical absorptions in a

parabolic quantum dot. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* 28(1):14 -- 21, 2005.

[64] G. Wang and K. Guo. Excitonic effects on the third-order nonlinear optical susceptibility in parabolic quantum dots. *Physica B: Condensed Matter,* 315(4):234 -- 239, 2002.

[65] G. Wang and K. Guo. Excitonic effects on the third- harmonic generation in parabolic quantum dots. *Journal of Physics: Condensed Matter,* 13(35):8197, 2001.

[66] H. A. Sarkisyan. On the criteria of the applicability of single-particle transitions in the multiparticle system. *Physics of Particles and Nuclei Letters,* 4(1):51 —54.

[67] K. G. Dvoyan, D. B. Hayrapetyan, E. M. Kazaryan, and A. A. Tshantshapanyan. Electron states and light absorption in strongly oblate and strongly prolate ellipsoidal quantum dots in presence of electrical and magnetic fields. *Nanoscale research letters,* 2(12):601 —608, 2007.

[68] D. B. Hayrapetyan, K. G. Dvoyan, and E. M. Kazaryan. Direct interband light absorption in a strongly oblated ellipsoidal quantum dot. *Journal of Contemporary Physics (Armenian Academy of Sciences),* 42(4):151 —157, 2007.

[69] K. G. Dvoyan, D. B. Hayrapetyan, and E. M. Kazaryan. Direct interband light absorption in strongly prolated ellipsoidal quantum dots' ensemble. *Nanoscale research letters,* 4(2):106—112, 2009.

[70] D. B. Hayrapetyan, E. M. Kazaryan, and H. A. Sarkisyan. Implementation of kohn's theorem for the ellipsoidal quantum dot in the presence of external magnetic field. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* 75:353--357, 2016.

[71] D. B. Hayrapetyan, E. M. Kazaryan, and H. A. Sarkisyan. On the possibility of implementation of kohn's theorem in the case of ellipsoidal

quantum dots. *Journal of Contemporary Physics (Armenian Academy of Sciences),* 48(1):32--36, 2013.

[72] A. S. Naeimi, L. Eslami, M. Esmaeilzadeh, and M. Reza. Spin transport properties in a double quantum ring with rashba spin-orbit interaction. *Journal of Applied Physics,* 113(1), 2013.

[73] A. Dargys. Quantum ring in the eyes of geometric (Clifford) algebra. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* 47:47 - - 50, 2013.

[74] W. Xie. Optical properties of an exciton in a two-dimensional quantum ring with an applied magnetic field. *Optics Communications,* 291:386 -- 389, 2013.

[75] S. Liang, W. Xie, H. A. Sarkisyan, A. V. Meliksetyan, and H. Shen. Electronic and optical properties of a nanoring in the presence of external magnetic field. *Superlattices and Microstructures,* 51(6):868 -- 876, 2012.

[76] A. Manaselyan, A. Ghazaryan, and T. Chakraborty. Effect of the spin-orbit coupling on the raman spectra of a gaas quantum ring with few electrons. *Solid State Communications,* 181:34 -- 40, 2014.

[77] V.A. Harutyunyan. Optical transitions in semiconductor nanospherical layer under the presence of perturbating electrical field. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* 39(1):37 -- 49, 2007.

[78] V. A. Harutyunyan. Nanospherical heterolayer in strong electrostatic field. *Applied Nanoscience,* 2(3):339--344, 2012.

[79] L. Dong, A. Sugunan, J. Hu, S. Zhou, S. Li, S. Popov, Muhammet S. Toprak, A. T. Friberg, and M. Muhammed. Photoluminescence from quasi-type-ii spherical cdse-cds core-shell quantum dots. *Appl. Opt.,* 52(1):105—109, Jan 2013.

[80] A. Lorke, R. J. Luyken, A. O. Govorov, J. P. Kotthaus, J. M. Garcia, and P. M. Petroff. Spectroscopy of nanoscopic semiconductor rings. *Phys. Rev. Lett.,* 84:2223--2226, Mar 2000.

[81] S. Kim, J. Park, T. Kim, E. Jang, S. Jun, H. Jang, B. Kim, and Sang-Wook Kim. Reverse type-i znse/inp/zns core/shell/shell nanocrystals: Cadmium-free quantum dots for visible luminescence. *Small,* 7(1):70--73, 2011.

[82] K. M. Gambaryan, V. M. Aroutiounian, V. G. Harutyunyan, O. Marquardt, and P. G. Soukiassian. Room temperature magnetoelectric properties of type-ii inassbp quantum dots and nanorings. *Applied Physics Letters,* 100(3), 2012.

[83] E. M. Kazaryan, A. A. Kirakosyan, V. N. Mughnetsyan, and H. A. Sarkisyan. Tunability of absorption threshold frequencies and stark shift in the insb narrow gap spherical quantum layer. *Semiconductor Science and Technology,* 27(8):085003, 2012.

[84] P. Pietilainen and T. Chakraborty. Interacting-electron states and the persistent current in a quantum ring. *Solid State Communications,* 87(9):809 -- 812, 1993.

[85] T. Chakraborty and P. Pietilainen. Electron-electron interaction and the persistent current in a quantum ring. *Phys. Rev. B,* 50:8460--8468, Sep 1994.

[86] A. K. Atayan, E. M. Kazaryan, A. V. Meliksetyan, and H. A. Sarkisyan. Interband magnetoabsorption in cylindrical quantum layer with smorodinsky-winternitz confinement potential. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience,* 7(6):1165—1171, 2010-06- 01T00:00:00.

[87] P. Winternitz, Ya. A. Smorodinsky, M. Uglirzh, and I. Frish. Symmetry groups in classical and quantum mechanics. *Yadern. Fiz.,* 4, 1966.

[88] B. Boyacioglu and A. Chatterjee. Dia- and paramagnetism and total susceptibility of gaas quantum dots with gaussian confinement. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* 44(9):1826 --1831, 2012.

[89] B. Boyacioglu and A. Chatterjee. Heat capacity and entropy of a gaas quantum dot with gaussian confinement. *Journal of Applied Physics,* 112(8):083514, 2012.

[90] S. Gumber, M. Kumar, M. Gambhir, M. Mohan, and P. Kumar Jha. Thermal and magnetic properties of cylindrical quantum dot with asymmetric confinement. *Canadian Journal of Physics,* 93(11):1264—1268, 2015.

[91] E. M. Kazaryan, L. S. Petrosyan, and H. A. Sarkisyan. Impurity levels in a parabolic quantum dot under action of a strong magnetic field. *International Journal of Modern Physics B,* 15(31):4103—4110, 2001.

[92] E. Shpolsky. *Atomic physics (in Russian),* volume 2. Nauka, Moscow, 1974.

[93] A. Davydov. *Quantum Mechanics (in Russian).* Nauka, Moscow, 1973.

[94] S. Flugge. *Practical quantum mechanics. I, II.* Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[95] N. G. Aghekyan, E. M. Kazaryan, A. A. Kostanyan, and H. A. Sarkisyan. Two electronic states and state exchange time control in spherical nanolayer. *Superlattices and Microstructures,* 50(3):199--206, 2011.

[96] S. E. Laux, D. J. Frank, and F. Stern. Quasi-one-dimensional electron states in a split-gate gaas/algaas heterostructure. *Surface Science,* 196(1):101 --106, 1988.

[97] A. Kumar, S. E. Laux, and F. Stern. Electron states in a gaas

quantum dot in a magnetic field. *Phys. Rev. B,* 42:5166--5175, Sep 1990.

[98] J. Alsmeier, Ch. Sikorski, and U. Merkt. Subband spacings of quasi-onedimensional inversion channels on insb. *Phys. Rev. B,* 37:4314--4316, Mar 1988.

[99] F. Brinkop, W. Hansen, J. P. Kotthaus, and K. Ploog. One-dimensional subbands of narrow electron channels in gated $al_xga_{i-x}as$/gaas heterojunctions. *Phys. Rev. B,* 37:6547--6550, Apr 1988.

[100] T. Demel, D. Heitmann, P. Grambow, and K. Ploog. Far-infrared response of one-dimensional electronic systems in single- and twolayered quantum wires. *Phys. Rev. B,* 38:12732--12735, Dec 1988.

[101] Yu. A. Bychkov, S. V. lordanskii, and G. M. Eliashberg. Two-dimensional electrons in a strong magnetic field. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters,* 33:143, 1981.

[102] C. G. Darwin. The diamagnetism of the free electron. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 27:86--90,1 1931.

[103] J. A. Barker and E. P. O'Reilly. The influence of inter-diffusion on electron states in quantum dots. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* 4(3):231 --237, 1999.

[104] D. A. Baghdasaryan, D. B. Hayrapetyan, and E. M. Kazaryan. Oblate spheroidal quantum dot: electronic states, direct interband light absorption and pressure dependence. *The European Physical Journal* B, 88(9):1--6, 2015.

[105] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Statistical Physics, Part 1,* volume 3. Butterworth-Heinemann, 1980.

ՀՐԱՊԱՐԱԿՎԱԾ ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻ ՑԱՆԿ

1. А. Ц. Калтахчян. Оценка энергии дивалентной примеси в параболической квантовой точке на основе соотношения неопределенностей. Вестник РАУ №2, 40-45, 2014.
2. D. A. Baghdasaryan, H. T. Ghaltaghchyan, E. M. Kazaryan, H. A. Sarkisyan. Two-electron impurity in the parabolic quantum dot: Uncertainty relation and perturbation approach. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 70, 52-57, 2015.
3. H. T. Ghaltaghchyan, D. B. Hayrapetyan, E. M. Kazaryan, H. A. Sarkisyan. Few-body absorption in prolate ellipsoidal quantum dot. Journal of Physics: Conference Series (Vol. 673, No. 1, p. 012012). IOP Publishing, 2016.
4. D. A. Baghdasaryan, H. T. Ghaltaghchyan, E. M. Kazaryan, H. A. Sarkisyan. Impurity with two electrons in the spherical quantum dot with Unite confinement potential. Journal of Physics: Conference Series (Vol. 673, No. 1, p. 012018). IOP Publishing, 2016.
5. А.Ц. Калтахчян, Э.М. Казарян, А.А. Саркисян. Диамагнитная восприимчивость электронного газа в цилиндрическом нанослое. Известия НАН Армении, Физика, т.51, №2, 218-226, 2016.
6. H. T. Ghaltaghchyan, D. B. Hayrapetyan, E. M. Kazaryan, H. A. Sarkisyan. Few-body magneto-absorption in prolate ellipsoidal quantum dot. Physics of Atomic Nuclei. (ընդունված է տպագրության)

ՇՆՈՐՀԱԿԱԼԱԿԱՆ ԽՈՍՔ

Խորին շնորհակալություն եմ հայտնում իմ գիտական ղեկավար, ֆիզ.-մաթ. գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր Հ.Ա. Սարգսյանին ատենախոսական աշխատանքի կատարման ընթացքում ուղղորդելու, օգնելու և սրտացավ վերաբերմունքի համար:

Սրտանց շնորհակալ եմ նաև ֆիզ.-մաթ. գիտությունների դոկտոր, ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս Է.Մ. Ղազարյանին ատենախոսական աշխատանքի նկատմամբ ցուցաբերած ուշադրության և արժեքավոր դիտողությունների համար:

Շնորհակալ եմ նաև հրապարակված հոդվածների համահեղինակներիս՝ ֆիզ.-մաթ. գիտությունների թեկնածու Դ.Բ. Հայրապետյանին և ասպիրանտ Դ.Ա. Բաղդասարյանին համատեղ գիտական աշխատանքի և բազմաթիվ քննարկումների համար, որ ունեցել ենք աշխատանքի կատարման ընթացքում: