

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ավինյան Վահե Ռոմենի

**ՈՉ ԱՎՏՈՆՈՄ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԻ
ՄՇԱԿՈՒՄԸ ԵՎ ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐԻ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՈՒՄԸ**

Ե.13.02 - «Ավտոմատացման համակարգեր»

մասնագիտությամբ տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

Авинян Ваге Роменович

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНЫХ МАТРИЧНЫХ
УРАВНЕНИЙ И АВТОМАТИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

по специальности 05.13.02- “Системы автоматизации”

Ереван 2015

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայաստանի պետական
ճարտարագիտական համալսարանում (Պոլիտեխնիկ)

Գիտական ղեկավար՝
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

տ.գ.դ. Ա.Գ. Ավետիսյան,
տ.գ.դ. Թ.Ա.Նալչաճյան,
Ֆ.-մ.գ.դ. Յու.Ռ. Հակոբյան

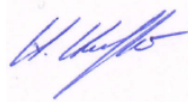
Առաջատար կազմակերպություն՝

ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և
ավտոմատացման պրոբլեմների
ինստիտուտ

Ատենախոսության պաշտպանությունը տեղի կունենա 2015թ. դեկտեմբերի 25-ին,
Ժամը 12⁰⁰-ին, Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանում (ՀԱՊՀ)
գործող «Կառավարման, ավտոմատացման և էլեկտրոնիկայի» 032 Մասնագիտական
խորհրդի նիստում (հասցեն՝ 0009, Երևան, Տերյան փ., 105, 17-րդ մասնաշենք):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀԱՊՀ գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2015թ. նոյեմբերի 25-ին:

032 Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար, տ.գ.դ.



Ա.Գ. Ավետիսյան

Тема диссертации утверждена в Государственном инженерном университете
Армении (Политехник)

Научный руководитель:

д.т.н. А.Г. Аветисян

Официальные оппоненты:

д.т.н. Т.А. Налчаджян

д.ф.-м.н. Ю.Р. Акопян

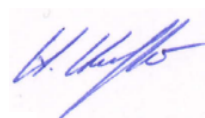
Ведущая организация:

Институт информатики и проблем
автоматизации НАН РА

Защита диссертации состоится 25-го декабря 2015г. в 12⁰⁰ ч. на заседании Специализированного совета 032 – “Управления, автоматизации и электроники”, действующего при Национальном политехническом университете Армении (НПУА) (адрес: 0009, г. Ереван, ул. Теряна, 105, корпус 17).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НПУА.
Автореферат разослан 25-го ноября 2015г.

Ученый секретарь Специализированного
совета 032, д.т.н.



А.Г. Аветисян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы обусловлена разработкой высокоэффективных методов для исследования неавтономных систем, используя особенности дифференциальных преобразований и широкие возможности информационных технологий. Многие задачи управления и системного анализа сводятся к неавтономным системам линейных или нелинейных матричных уравнений. В работе разработаны численно-аналитические методы решения матричных уравнений и пакет прикладных программ (ППП), созданный на их основе.

Целью диссертационной работы является:

1. Разработка новых методов решения неавтономных матричных уравнений на основе дифференциальных преобразований, которые могут быть применены к неавтономным матрицам любой формы с элементами, обладающими достаточной степенью гладкости в центре аппроксимации.
2. Разработка ППП, основанного на предлагаемых методах, работающего в графическом режиме и позволяющего получать решения для каждого класса неавтономных матричных уравнений на основе введенных данных функционального вида.
3. Исследование решения различных классов матричных уравнений предложенными методами и проведение сравнительного анализа полученных результатов как для разработанных, так и для существующих методов с фиксированными точками.

Методы исследования. При решении поставленных задач были использованы: теория дифференциальных преобразований, теория матриц, методы линейной алгебры, теория численных методов, современные информационные технологии.

Научная новизна. Разработаны следующие численно-аналитические методы для решения матричных уравнений различных классов, базированные на дифференциально-тейлоровских преобразованиях:

1. Дифференциальный метод решения линейных неавтономных матричных уравнений на основе приведения матриц к форме Шура.
2. Дифференциальный метод решения линейных неавтономных матричных уравнений на основе регуляризации Тихонова.
3. Д-аналог метода Бартелса-Стюарта для решения линейных неавтономных матричных уравнений типа Сильвестра (Ляпунова).
4. Д-аналог метода решения простых нелинейных неавтономных матричных уравнений.
5. Д-аналог метода решения нелинейных неавтономных матричных уравнений типа Риккати.

Практическая ценность. На основе разработанных численно-аналитических методов в пространстве дифференциальных преобразований разработан ППП объектно-ориентированного типа, многодокументный интерфейс которого снабжен различными элементами управления, всплывающими подсказками, меню.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Дифференциальный метод решения линейных неавтономных матричных уравнений на основе приведения матриц к форме Шура.
2. Дифференциальный метод решения линейных неавтономных матричных уравнений на основе регуляризации Тихонова.
3. Д-аналог метода Бартелса-Стюарта для решения линейных неавтономных матричных уравнений типа Сильвестра (Ляпунова).
4. Д-аналог метода решения простых нелинейных неавтономных матричных уравнений.

5. Д-аналог метода решения нелинейных неавтономных матричных уравнений типа Риккати.
6. Пакет прикладных программ, разработанный на основе численно-аналитических методов в пространстве дифференциальных преобразований.

Апробация результатов работы. Основные теоретические и практические результаты работы докладывались на:

- годовых научных конференциях ГИУА (Ереван, 2011-2014 гг.);
- научных семинарах базовой научно-исследовательской лаборатории “Системного анализа” ГИУА (Ереван, 2011-2014 гг.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано восемь научных работ, список которых представлен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, основных выводов, списка литературы из 102 наименований. Основной текст диссертации изложен на 131 страницах, включая 68 рисунка и 6 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована цель диссертационной работы, представлены научная новизна и практическое значение работы, выделены основные положения, выносимые на защиту, а также изложено краткое содержание работы.

В первой главе представлен обзор работ, посвященных дифференциальным преобразованиям Г.Е. Пухова, решениям линейных и нелинейных, автономных и неавтономных матричных уравнений.

Дифференциальные преобразования при функции-оригинале $x(t)$ в центре аппроксимации $t = t_v$ представляются в виде

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[\frac{d^K x(t)}{dt^K} \right]_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \text{и} \quad x(t) = \aleph(t, t_v, H, X(K)), \quad (1)$$

где $X(K)$ - изображение (дискрета) оригинала $x(t)$; H - масштабный коэффициент; $\aleph(\cdot)$ - некоторая функция, с помощью которой восстанавливается оригинал $x(t)$.

Исходя из вида $\aleph(\cdot)$ функции, обратные дифференциальные преобразования подразделяются на различные типы: дифференциально-маклореновские (ДМ-), дифференциально-тейлоровские (ДТ-), дифференциально-падеевские (ДП-) и т.д.

В данной работе рассмотрены следующие виды параметрических матричных уравнений:

- **линейные неавтономные матричные уравнения вида**

$$A_{m \times m}(t) \cdot X_{m \times n}(t) \cdot B_{n \times n}(t) = C_{m \times n}(t); \quad (2)$$

- **линейные неавтономные матричные уравнения типа Сильвестра**

$$A_{m \times m}(t) \cdot X_{m \times n}(t) + X_{m \times n}(t) \cdot B_{n \times n}(t) = C_{m \times n}(t). \quad (3)$$

В случае, когда $B_{n \times n}(t) = A_{m \times m}^*(t)$, уравнение (3) типа Сильвестра превращается в матричное уравнение типа Ляпунова;

- **нелинейные неавтономные матричные уравнения вида**

$$X_{n \times m}(t) \cdot A_{m \times n}(t) \cdot X_{n \times m}(t) = B_{n \times m}(t); \quad (4)$$

- **нелинейные неавтономные матричные уравнения типа Риккати**

$$A(t)_{n \times n} X_{n \times m}(t) + X_{n \times m}(t) B_{m \times m}(t) + X_{n \times m}(t) C_{m \times n}(t) X_{n \times m}(t) = D_{n \times m}(t). \quad (5)$$

На основе анализа работ, посвященных решению представленных классов матричных уравнений, а также работ по разработке дифференциальных аналогов различных типов параметрических задач сформулированы цель и задачи диссертации.

Вторая глава посвящена разработке методов решения линейных и нелинейных неавтономных матричных уравнений на основе дифференциальных преобразований.

Дифференциальный метод решения линейных неавтономных матричных уравнений на основе приведения матриц к форме Шура. Рассмотрим неавтономное матричное уравнение

$$A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) = C(t), \quad (6)$$

где элементы $A_{m \times n}(t)$, $B_{n \times n}(t)$ и $C_{m \times n}(t)$ матриц при центре аппроксимации $t = t_v$ имеют бесконечные производные по параметру t . Уравнение (6) в пространстве дифференциальных преобразований имеет следующий вид:

$$\sum_{\substack{p=K, q=K, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) = C(K), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (7)$$

где $A(p)$, $p = \overline{0, K}$; $X(q)$, $q = \overline{0, K}$; $B(r)$, $r = \overline{0, K}$ и $C(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ - матричные дискреты матриц $A(t)$, $X(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ соответственно. Из (7) имеем

$$A(0) \cdot X(K) \cdot B(0) = D(K), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (8)$$

где

$$D(K) = C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (9)$$

В результате решения уравнения (8) методом приведения матриц к форме Шура

$$U_A(0) \cdot \tilde{A}(0) \cdot U_A^T(0) \cdot X(K) \cdot U_B(0) \cdot \tilde{B}(0) \cdot U_B^T(0) = D(K), \quad K = \overline{0, \infty} \quad (10)$$

с учетом условий унитарности получим

$$\tilde{A}(0) \cdot U_A^T(0) \cdot X(K) \cdot U_B(0) \cdot \tilde{B}(0) = U_A^T(0) \cdot D(K) \cdot U_B(0), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (11)$$

где $\tilde{A}(0)$ и $\tilde{B}(0)$ - верхнетреугольные матрицы; $U_A(0)$ и $U_B(0)$ - унитарные матрицы, т.е. $U_A^{-1}(0) = U_A^T(0)$ и $U_B^{-1}(0) = U_B^T(0)$.

Представим (11) в следующем виде:

$$\tilde{A}(0) \cdot Y(K) \cdot \tilde{B}(0) = \tilde{D}(K), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (12)$$

приняв обозначения

$$Y(K) = U_A^T(0) \cdot X(K) \cdot U_B(0), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (13)$$

$$\tilde{D}(K) = U_A^T(0) \cdot D(K) \cdot U_B(0), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (14)$$

Решение уравнения (6) определяется соотношением

$$X(K) = U_A(0) \cdot Y(K) \cdot U_B^T(0), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (15)$$

Таким образом, поочередно решая уравнения (12) и учитывая верхнетреугольные свойства матриц, определяются матричные дискреты, следовательно, элементы матриц $Y(K)$, $K = \overline{0, \infty}$:

$$Y(K)_{ij} = \frac{\tilde{D}(K)_{ij} - \tilde{A}(0)_{ii} \sum_{p=1}^{j-1} \tilde{B}(0)_{pj} Y(K)_{ip}}{\tilde{A}(0)_{ii} \tilde{B}(0)_{jj}}, \quad i = \overline{m, 1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (16)$$

Дифференциальный метод решения линейных неавтономных матричных уравнений на основе регуляризации Тихонова. Рассмотрим линейное параметрическое матричное уравнение

$$A_{m \times v}(t) \cdot X_{v \times s}(t) \cdot B_{s \times n}(t) = C_{m \times n}(t), \quad (17)$$

которое в пространстве дифференциальных преобразований имеет вид

$$\sum_{\substack{p=K, q=K, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) = C(K), \quad (18)$$

где $A(p) \stackrel{\Delta}{=} A(t)$, $X(q) \stackrel{\Delta}{=} X(t)$, $B(r) \stackrel{\Delta}{=} B(t)$, $C(K) \stackrel{\Delta}{=} A(t)$ - матричные дискреты размерностью $m \times v$, $v \times s$, $s \times n$ и $m \times n$ соответственно. Из (18) имеем

$$A(0) \cdot X(K) \cdot B(0) = C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r). \quad (19)$$

Умножив (19) на обобщенные обратные матрицы $A^+(0)$ слева и $B^+(0)$ справа, получим

$$\tilde{A}(0) \cdot X(K) \cdot \tilde{B}(0) = A^+(0) \cdot \left[C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) \right] \cdot B^+(0), \quad (20)$$

где

$$\tilde{A}(0) = A^+(0) \cdot A(0), \quad \tilde{B}(0) = B(0) \cdot B^+(0). \quad (21)$$

Для матриц $\tilde{A}(0)$ и $\tilde{B}(0)$ может иметь место одно из следующих условий:

$$\tilde{A}(0) = E_{v \times v}, \quad \tilde{B}(0) = E_{s \times s}, \quad (22)$$

$$\tilde{A}(0) \neq E_{v \times v}, \quad \tilde{B}(0) = E_{s \times s}, \quad (23)$$

$$\tilde{A}(0) = E_{v \times v}, \quad \tilde{B}(0) \neq E_{s \times s}, \quad (24)$$

$$\tilde{A}(0) \neq E_{v \times v}, \quad \tilde{B}(0) \neq E_{s \times s}. \quad (25)$$

Рассмотрим определение $X(t)$ с учетом условий (22) и (23). Учитывая метод регуляризации Тихонова, выберем малую величину $\varepsilon > 0$ так, чтобы имели место следующие равенства:

$$(\tilde{A}(0) + \varepsilon \cdot E_{v \times v})^{-1} \cdot (\tilde{A}(0) + \varepsilon \cdot E_{v \times v}) = E_{v \times v}, \quad (26)$$

$$(\tilde{B}(0) + \varepsilon \cdot E_{s \times s}) \cdot (\tilde{B}(0) + \varepsilon \cdot E_{s \times s})^{-1} = E_{s \times s}. \quad (27)$$

Обозначив через $\tilde{C}(K)$ правую часть уравнения (20):

$$\tilde{C}(K) = A^+(0) \cdot \left[C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) \right] \cdot B^+(0), \quad (28)$$

при выполнении условия (22) получаем следующее соотношение определения матричных дискрет $X(K)$:

$$X(K) = (\tilde{A}(0) + \varepsilon \cdot E_{v \times v})^{-1} \cdot \tilde{C}(K), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (29)$$

Соответственно с учетом условия (23) имеем

$$X(K) = \tilde{C}(K) \cdot (\tilde{B}(0) + \varepsilon \cdot E_{s \times s})^{-1}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (30)$$

а с учетом (24):

$$X(K) = (\tilde{A}(0) + \varepsilon_1 \cdot E_{v \times v})^{-1} \cdot \tilde{C}(K) \cdot (\tilde{B}(0) + \varepsilon_2 \cdot E_{s \times s})^{-1}, \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (31)$$

Обратимые отклонения $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ могут отличаться исходя из удовлетворения условий (29) и (30) с требуемой точностью.

С помощью матричных дискрет $X(K)$ можно восстановить оригинал $X(t)$.

В отличие от метода на основе приведения матриц к форме Шура, данный метод можно использовать для матриц как с квадратными, так и с прямоугольными коэффициентами.

Д-аналог метода Бартелса-Стюарта для решения линейных неавтономных матричных уравнений типа Сильвестра. Рассмотрим неавтономное матричное уравнение типа Сильвестра:

$$A_{m \times m}(t) \cdot X_{m \times n}(t) + X_{m \times n}(t) \cdot B_{n \times n}(t) = C_{m \times n}(t), \quad (32)$$

где элементы матриц при центре аппроксимации $t = t_v$ имеют бесконечные производные по параметру t .

Учитывая метод Бартелса-Стюарта для линейных матричных уравнений из (32) имеем

$$U_a(t) \cdot T_a(t) \cdot U_a^T(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot U_b(t) \cdot T_b(t) \cdot U_b^T(t) = C(t), \quad (33)$$

где $U_a(t)$ и $U_b(t)$ - унитарные матрицы ($U_a^T(t) = U_a^{-1}(t)$ и $U_b^T(t) = U_b^{-1}(t)$); $T_a(t)$ и $T_b(t)$ - верхнетреугольные матрицы, полученные в результате приведения матриц $A(t)$ и $B(t)$ к форме Шура:

$$T_a(t) = U_a^T(t) \cdot A(t) \cdot U_a(t), \quad (34)$$

$$T_b(t) = U_b^T(t) \cdot B(t) \cdot U_b(t). \quad (35)$$

Учитывая унитарность матриц $U_a(t)$ и $U_b(t)$ и умножая левые и правые части (33) соответственно на $U_a^T(t)$ и $U_b(t)$, получим

$$T_a(t) \cdot U_a^T(t) \cdot X(t) U_b(t) + U_a^T(t) \cdot X(t) \cdot U_b(t) \cdot T_b(t) = U_a^T(t) \cdot C(t) U_b(t). \quad (36)$$

Выполнив следующие обозначения:

$$\tilde{C}(t) = U_a^T(t) \cdot C(t) \cdot U_b(t), \quad (37)$$

$$Y(t) = U_a^T(t) \cdot X(t) \cdot U_b(t), \quad (38)$$

уравнение (36) сводится к виду

$$T_a(t) \cdot Y(t) + Y(t) \cdot T_b(t) = \tilde{C}(t), \quad (39)$$

Элементы матрицы Y для каждого значения фиксированного параметра определяются согласно следующему рекуррентному соотношению:

$$Y_{ij} = \frac{C_{ij} - \left[\sum_{p=i+1}^m (T_a)_{ip} Y_{pj} + \sum_{l=1}^{j-1} Y_{il} (T_b)_{lj} \right]}{(T_a)_{ii} + (T_b)_{jj}}, \quad i = \overline{m}, j = \overline{1, n}. \quad (40)$$

Решение уравнения (32) представляется в виде

$$X(t) = U_a(t) \cdot Y(t) \cdot U_b^T(t). \quad (41)$$

Уравнение (38) в пространстве дифференциальных преобразований представляется в виде

$$\sum_{l=0}^K (T_a(l) \cdot Y(K-l) + Y(l) \cdot T_b(K-l)) = \tilde{C}(K), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (42)$$

где

$$T_a(K) = \sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} (U_a^T(p) \cdot A(q) \cdot U_a(r)), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (43)$$

$$T_b(K) = \sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} (U_b^T(p) \cdot B(q) \cdot U_b(r)), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (44)$$

$$\tilde{C}(K) = \sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} (U_a^T(p) \cdot C(q) \cdot U_b(r)), \quad K = \overline{0, \infty} - \quad (45)$$

- матричные дискреты (34), (35) и (37) соответственно.

Из (41) следует

$$T_a(0) \cdot Y(K) + Y(K) \cdot T_b(0) = \tilde{C}(K) - \sum_{l=0}^{K-1} (T_a(K-l) \cdot Y(l) + Y(l) \cdot T_b(K-l)), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (46)$$

В пространстве дифференциальных преобразований уравнение (40) имеет следующий вид:

$$Y_{ij}(K) = \frac{\tilde{C}_{ij}(K) - \left(\sum_{l=i+1}^m (T_a)_{il}(K) \cdot Y_{lj}(K) + \sum_{f=1}^{j-1} Y_{if}(K) \cdot (T_b)_{fj}(K) \right)}{(T_a)_{ii}(K) + (T_b)_{jj}(K)}; \quad i = \overline{m, 1}; j = \overline{1, n}, \quad (47)$$

$$(T_a)_{ii}(K) + (T_b)_{jj}(K) \neq 0, \quad K = \overline{0, \infty}.$$

Матричные дискреты $U_a(K)$ и $U_b(K)$ ($K = \overline{0, \infty}$) определяются как дискреты ортогональных матриц собственных векторов $A(t)$ и $B(t)$.

$X(K)$ дискреты вычисляются согласно соотношению

$$X(K) = \sum_{\substack{p=K, q=K, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} (U_a(p) \cdot Y(q) \cdot U_b^T(r)), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (48)$$

Д-аналог метода решения простых нелинейных неавтономных матричных уравнений. Пусть дано матричное уравнение вида

$$X_{n \times m}(t) \cdot A_{m \times n}(t) \cdot X_{n \times m}(t) = B_{n \times m}(t), \quad (49)$$

для которого в области дифференциальных преобразований имеем

$$\sum_{\substack{p=K, q=K, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} X(p) \cdot A(q) \cdot X(r) = B(K).$$

Отсюда следует, что

$$X(0) \cdot A(0) \cdot X(K) + X(K) \cdot A(0) \cdot X(0) + \sum_{\substack{p=K-1, q=K, r=K-1 \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} X(p) \cdot A(q) \cdot X(r) = B(K)$$

или

$$G(0) \cdot X(K) + X(K) \cdot F(0) = \overline{B}(K), \quad K = \overline{1, \infty}, \quad (50)$$

где

$$G(0) = X(0) \cdot A(0), \quad F(0) = A(0) \cdot X(0), \quad \overline{B}(K) = B(K) - \sum_{\substack{p=K-1, q=K, r=K-1 \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} X(p) \cdot A(q) \cdot X(r).$$

Для определения матричной дискреты $X(0)$ необходимо решить нелинейное матричное уравнение $X(0) \cdot A(0) \cdot X(0) = B(0)$ каким-либо методом. Далее, поочередно решая уравнения (50) типа Сильвестра, получим матричные дискреты $X(1), \dots, X(K), \dots$, с помощью которых можно будет восстановить оригинал решения $X(t)$.

Д-аналог метода решения нелинейных неавтономных матричных уравнений типа Риккати. Допустим, имеем нелинейное неавтономное матричное уравнение общего вида типа Риккати:

$$A(t)_{n \times n} X_{n \times m}(t) + X_{n \times m}(t) B_{m \times m}(t) + X_{n \times m}(t) C_{m \times n}(t) X_{n \times m}(t) = D_{n \times m}(t). \quad (51)$$

Используя Д-преобразования, переведем систему (51) из области оригиналов в область Д-изображений:

$$\sum_{i=0}^K A(i) X(K-i) + \sum_{j=0}^K X(j) B(K-j) + \sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} X(p) C(q) X(r) = D(K).$$

В результате некоторых преобразований получим

$$\overline{A}(0) X(K) + X(K) \overline{B}(0) = \overline{D}(K), \quad K = \overline{1, \infty}, \quad (52)$$

где

$$\overline{A}(0) = A(0) + X(0) C(0), \quad \overline{B}(0) = B(0) + C(0) X(0),$$

$$\overline{D}(K) = D(K) - \left\{ \sum_{i=1}^K A(i) X(K-i) + \sum_{j=0}^{K-1} X(j) B(K-j) + \sum_{\substack{p=K-1, q=K, r=K-1 \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} X(p) C(q) X(r) \right\}.$$

Для определения матричной дискреты $X(0)$ нужно решить нелинейное матричное уравнение $A(0)X(0) + X(0)B(0) + X(0)C(0)X(0) = D(0)$ каким-либо методом. Далее, поочередно решая уравнения (52) типа Сильвестра, получим матричные дискреты $X(1), \dots, X(K), \dots$ и с помощью обратных дифференциальных преобразований восстановим оригинал решения $X(t)$.

Для оценки производительности разработанных методов получены аналитические соотношения количеств операций умножения и сложения (см. табл.)

Таблица

Тип уравнения	Количество операций умножения и сложения
Простые линейные неавтономные матричные уравнения	<u>Д-аналог на основе приведения матриц к форме Шура</u> $N(*)=(3m(K+1)+m(K^2/2+(3K)/2))n^2+(m^2(K^2/2+(3K)/2)+3m^2(K+1))n$, $N(+)=(3m(K+1)+m(K^2/2+(3K)/2))n^2+(m(K^2/2+(3K)/2)+m(3m-$ $-6)(K+1)+m(K^2/2+(3K)/2)(m-2))n$:
	<u>Д-аналог на основе метода регуляризации Тихонова</u> $N(*)=(m+n(K+1))v^2+(ms+(K^2/2+(3K)/2)(mn+ns)+s^2(K+1)+1)v+s+ns^2+mns$, $N(+)=(m+s(K+1))v^2+(s(m-1)+(K^2/2+(3K)/2)(mn+n(s-1))+s(K+1)(s-$ $-2))v+s^2+s^2(n-1)+ms(n-1)$:
Неавтономные матричные уравнения типа Сильвестра	<u>Д-аналог Бартелса-Стьюарта</u> $N(*)=(K^2+3K+2)n^3+(m(K+1)+m(K^2+3K+2))n^2+(m^2(K+1)+m^2(K^2+3K+2))n+$ $+m^3(K^2+3K+2)$ $N(+)=(K^2+3K+2)n^3+(m(K+1)-(3K)/2+m(K^2+3K+2)-K^2/2-2)n^2+(m+m(K^2+3K)+$ $+m(K+1)(m-1)+m(m-2)(K^2+3K+2))n+m^2(K^2/2+(3K)/2)+m^2(m-1)(K^2+3K+2)$:
Простые нелинейные неавтономные матричные уравнения	$N(*)=(m+m(K+1))n^2+(2m^2(K^2/2+(3K)/2-1)+m^2+m^2(K+1))n$, $N(+)=(m+m(K+1)-1)n^2+(m+(m(m-1)+m^2)(K^2/2+(3K)/2-1)+m^2+m(K^2/2+(3K)/2-$ $-1)+m(K+1)(m-2))n-m^2(K^2/2+(3K)/2-1)-m^2$:
Неавтономные матричные уравнения типа Риккати	$N(*)=(m+Km+m(K+1))n^2+(2m^2(K^2/2+(3K)/2-1)+Km^2+m^2+m^2(K+1))n$, $N(+)=(m+Km+m(K+1))n^2+(4m+(m(m-1)+m^2)(K^2/2+(3K)/2-1)+$ $+m^2+m(K+1)(m-2)+Km(m-2))n-m^2(K^2/2+(3K)/2-1)$:

Из полученных оценок видно (рис. 1 и 2), что Д-аналог решения простых линейных неавтономных матричных уравнений на основе приведения матриц к форме Шура (кр. 1) уступает методу на основе регуляризации Тихонова (кр. 2).

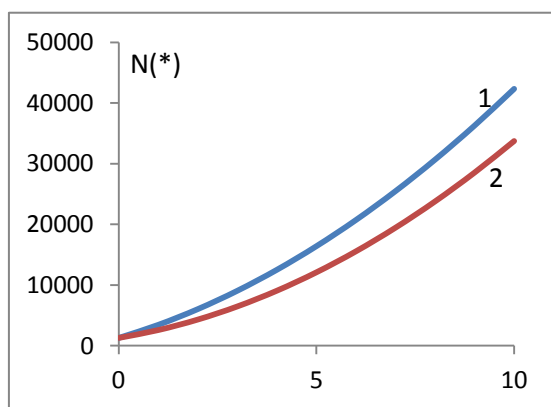


Рис. 1

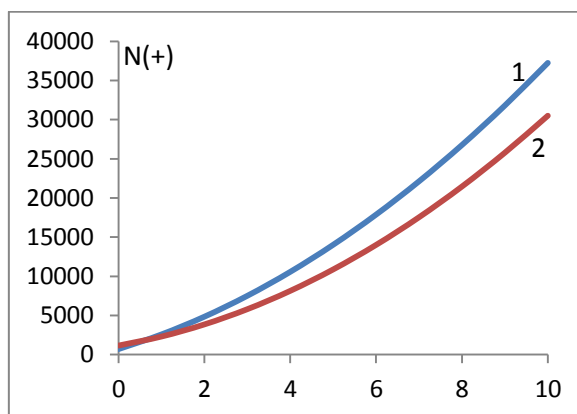


Рис. 2

В третьей главе рассмотрены вопросы разработки пакета прикладных программ. Структура пакета представлена на рис.3.

Пакет прикладных программ состоит из трех частей:

1. Дифференциальные преобразования (Differential transformations).
2. Матричные инварианты (Matrix invariants).
3. Матричные уравнения (Matrix equations).



Рис. 3

В первой части пакета представлены инструменты, полностью основанные на математическом аппарате дифференциальных преобразований и предназначенные для определения матричных дискрет и восстановления оригинала с помощью известных матричных дискрет.

Вторая часть предназначена для определения матричных инвариантов неавтономных матриц.

В разделе матричных уравнений представлены инструменты для решения линейных и нелинейных неавтономных матричных уравнений на основе разработанных в работе методов:

1. Дифференциальный метод решения линейных неавтономных матричных уравнений на основе приведения матриц к форме Шура.
2. Дифференциальный метод решения линейных неавтономных матричных уравнений на основе регуляризации Тихонова.
3. Д-аналог метода Бартелса-Стюарта для решения линейных неавтономных матричных уравнений типа Сильвестра (Ляпунова).
4. Д-аналог метода решения простых нелинейных неавтономных матричных уравнений.
5. Д-аналог метода решения нелинейных неавтономных матричных уравнений типа Риккати.

Основные алгоритмы пакета реализованы на языке C++, графический интерфейс пользователя реализован с использованием библиотеки Qt. Пакет можно использовать на разных операционных системах (например Windows, Linux). Результаты решения каждой задачи можно выводить как в аналитическом, так и в графическом виде. Аналитические и/или численные результаты выводятся в соответствующих диалоговых окнах в табличном виде. Главное окно ППП состоит из четырех основных разделов:

- раздел меню (рис. 4);
- панель инструментов (рис. 5);
- раздел для выбора классов задач (рис. 6);
- интерфейс типа MDI (рис. 7).

Раздел меню предназначен для хранения и/или копирования результатов текущей задачи, изменения видимости панелей инструментов, регулирования, подсказок и других стандартных действий.

Панель инструментов состоит из трех частей:

- файловые инструменты (*File Selector/Chooser*) – для работы с файлами специального формата (рис. 8);
- встроенные инструменты - для работы приложений с буфером обмена (clipboard) операционной системы (рис. 9);
- управляющие инструменты – для решения задач и ввода/вывода результатов (рис. 10).

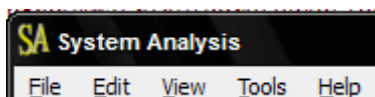


Рис. 4



Рис. 5

В раздел для выбора классов задач включены следующие основные классы:

- дифференциальные преобразования (*Differential transformations*);
- матричные инварианты (*Matrix invariants*);
- матричные уравнения (*Matrix equations*).

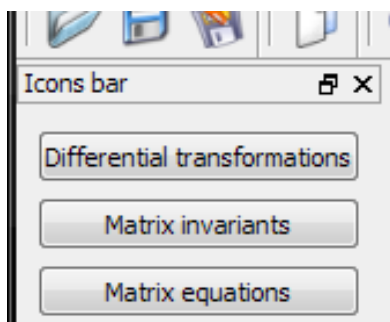


Рис. 6

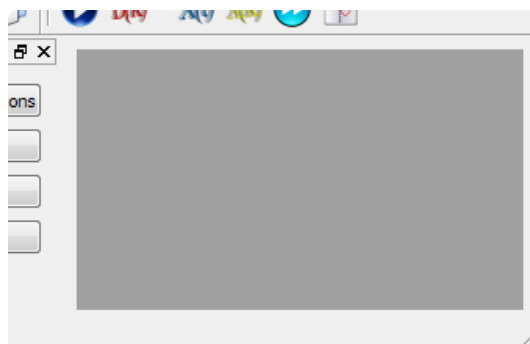


Рис. 7



Рис. 8

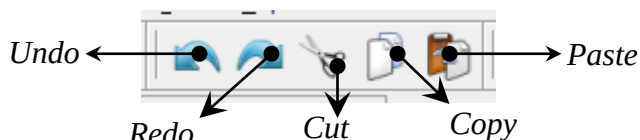


Рис. 9

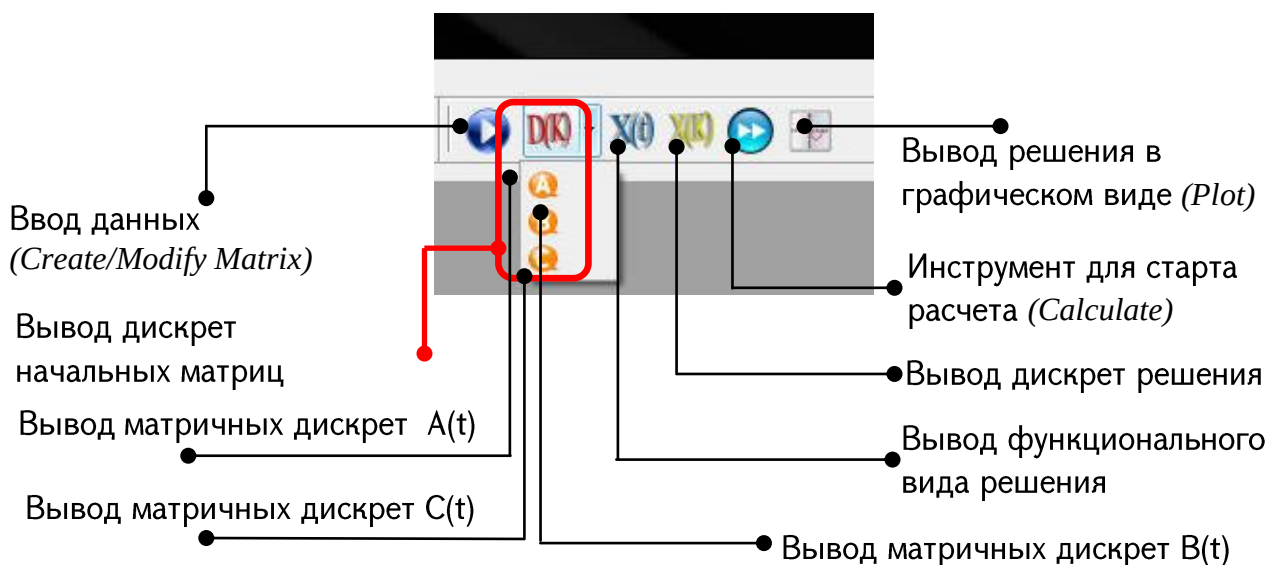


Рис. 10

Класс *Differential transformations* включает в себя подклассы прямых дифференциальных (*Discrets calculation*) и обратных дифференциально-тейлоровских, дифференциально-падеевских преобразований.

Класс *Matrix invariants* состоит из следующих подклассов: обратная матрица (*Inverse Matrix*), обобщенно-обратная матрица (*Pseudoinverse Matrix*), собственные значения (*Eigen Values*), собственные векторы (*Eigen Vectors*), собственный многочлен (*Proper Polynomial*), матричные преобразования (*Matrix Decomposition*).

Класс *Matrix equations* включает в себя линейные и нелинейные подклассы, содержащие кнопки с именами разработанных в данной работе методов (рис. 11). При выборе метода открывается соответствующее окно проекта (рис. 12) с размерностями

начальных матриц (*Dimension*), типом метода (*Type*) и информацией о дискретах (*Discretes quantity*, *Center of approximation*, *Reconstruction type*).

После выбора алгоритма решения (например, метод решения матричных уравнений типа Риккати - *Riccati*) нужно нажать кнопку “*Create/Modify Matrix*” для ввода начальных данных. Ввод осуществляется с помощью мастера ввода (*wizard*), первое окно которого описывает роль мастера и носит информационный характер. Во втором окне (рис. 13) вводятся размеры начальных матриц (*Matrix dimensions*) и данные для вычисления дискрет матричных коэффициентов (*Discrete attributes*): масштабный коэффициент (*Scale coefficient*), центр аппроксимации (*Centre of approximation*), количество дискрет (*Discretes quantity*) и латинский символ независимого параметра (*Parameter*).

В следующих окнах мастера ввода нужно вводить элементы начальных матриц в функциональном виде (рис. 14). При ошибочном вводе функций открывается окно *Expression Maker*, позволяющее проверить (с помощью кнопки “*Check*”) и исправить ошибочный ввод.

После ввода начальных матриц и нажатия кнопки “*Finish*” вычисляются матричные дискреты, которые с помощью инструментов вывода (рис. 10) выводятся в соответствующих окнах-таблицах (рис. 15)

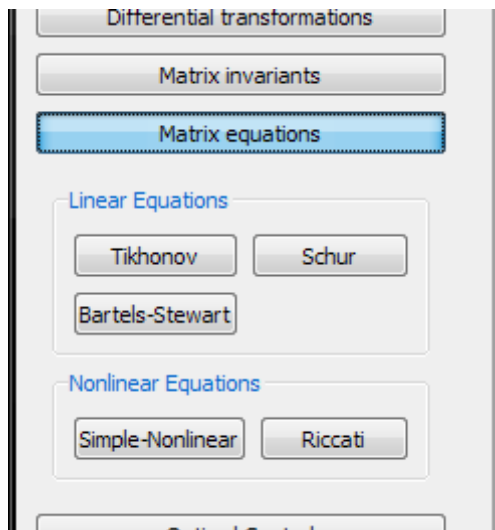


Рис. 11

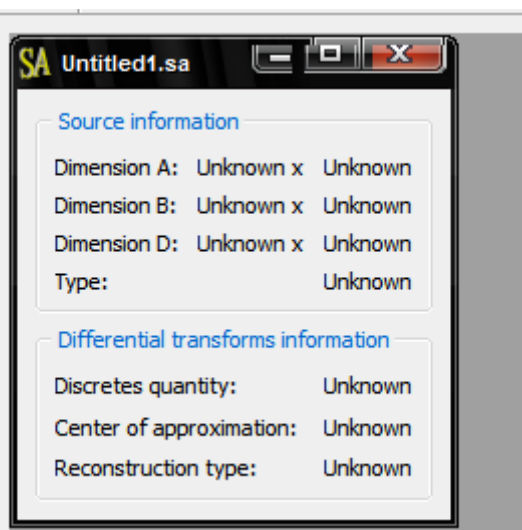


Рис. 12

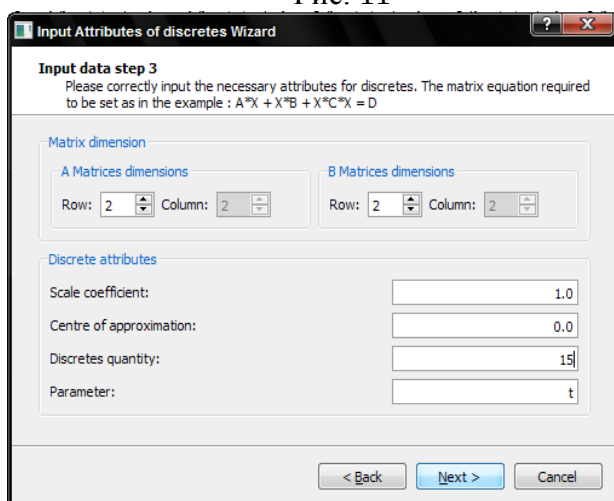


Рис. 13

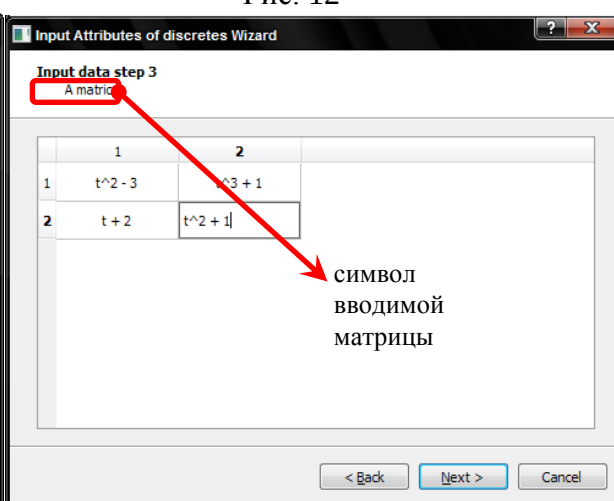


Рис. 14

Нажатие кнопки “*Calculate*” на панели инструментов открывает окно с комбинированным списком для выбора восстанавливающего соотношения, а после нажатия кнопки “*Ok*” выполняется соответствующий алгоритм решения матричного уравнения.

Для вывода функционального вида (рис. 16) решения нужно нажать кнопку $X(t)$ на панели инструментов, которая активизируется после окончания выполнения алгоритма. Матричные дискреты оригинала $X(t)$ можно выводить, используя кнопку $X(K)$.

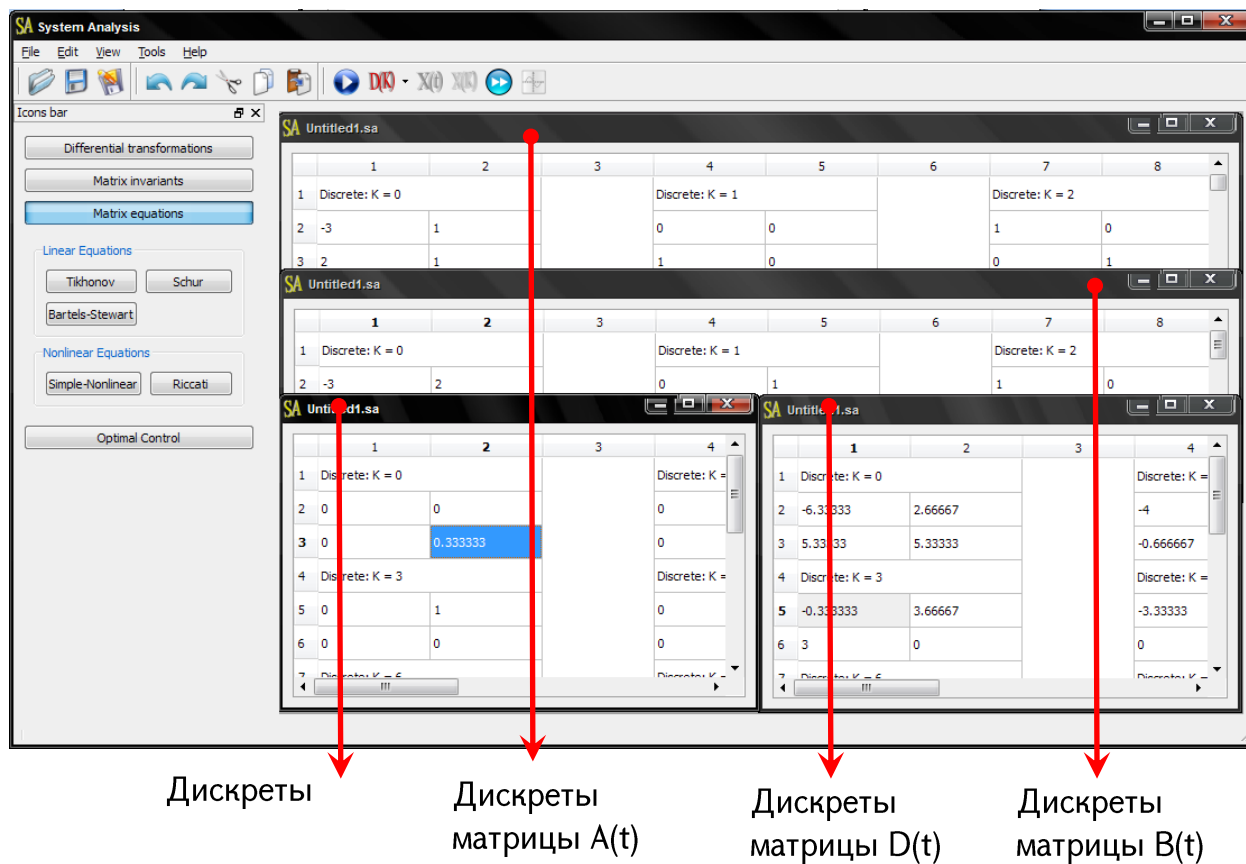


Рис. 15

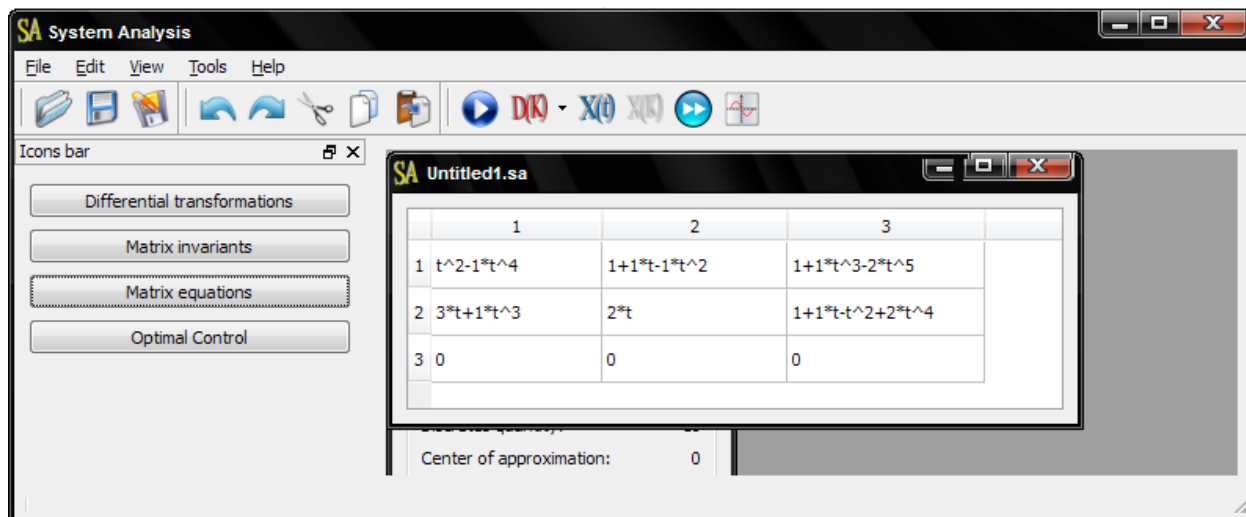


Рис. 16

Результаты решения начального матричного уравнения можно вывести в графическом виде (рис. 17) с помощью кнопки "Plot" (рис. 10).

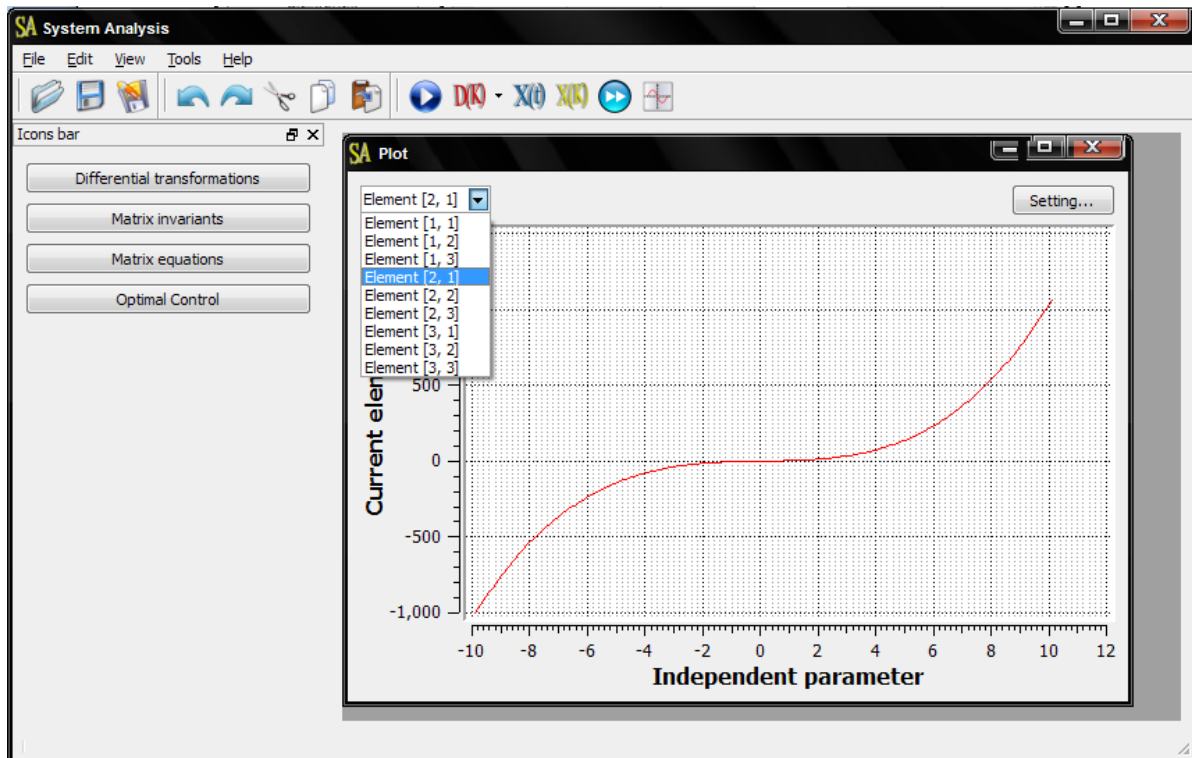


Рис. 17

В четвертой главе представлены вычислительные процедуры решения модельных примеров вышеуказанных типов неавтономных матричных уравнений различных размерностей. Рассмотрены примеры с комплексными элементами. Также проведен сравнительный анализ полученных результатов с результатами известных методов (например, метод Бартелса-Стюарта) при фиксированных значениях параметра. Сравнительный анализ представлен в графическом виде, приведены качественные оценки сравнения.

Пример 1 (применение Д - аналога декомпозиции Шура). Рассмотрим уравнение

$$\begin{bmatrix} t+1 & t & t & t & t+1 \\ t & t-1 & t & t & t \\ t & t & t+1 & t & t \\ t & t & t & t-1 & t \\ t+1 & t & t & t & t+1 \end{bmatrix}_{5 \times 5} \cdot X_{5 \times 2}(t) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{t^2-t-6} & \frac{1}{t^2-t+3} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{-9t^4 - t^3 + 33t^2 + 25t + 6}{-9t^3 + 7t^2 + 29t - 6} & \frac{9t^4 - 19t^3 + 2t^2 + 11t + 3}{t^3 - 6t^2 + 8t - 15} \\ \frac{-t^2 + t + 6}{-9t^3 + 2t^2 + 32t + 12} & \frac{t^3 - 6t^2 + 8t - 15}{9t^4 - 22t^3 + 8t^2 + 6t} \\ \frac{-t^2 + t + 6}{-9t^4 + 3t^3 + 33t^2 + 11t - 6} & \frac{t^3 - 6t^2 + 8t - 15}{9t^4 - 23t^3 + 12t^2 + 7t - 3} \\ \frac{-t^3 + t^2 + 6t}{-9t^4 - t^3 + 33t^2 + 25t + 6} & \frac{t^3 - 6t^2 + 8t - 15}{9t^4 - 19t^3 + 2t^2 + 11t + 3} \\ \frac{-t^3 + t^2 + 6t}{t^3 - 6t^2 + 8t - 15} & \frac{t^3 - 6t^2 + 8t - 15}{t^3 - 6t^2 + 8t - 15} \end{bmatrix}_{5 \times 2}.$$

При центре аппроксимации $t_v = 1,5$ и масштабном коэффициенте $H = 1$ с использованием дифференциально-тейлоровских преобразований получен оригинал $X(t)$

$$X(t) = \begin{bmatrix} t + \frac{1}{2} & t \\ 3t & t \\ 0 & t \\ 1 & 0 \\ t + \frac{1}{2} & t \end{bmatrix},$$

который является решением начального матричного уравнения. Проведем сравнительный графический анализ численных матричных уравнений, полученных на основе метода приведения матриц к форме Шура при фиксированных значениях параметра t на интервале $[-30, 30]$, и решений, полученных предложенными дифференциальными методами (рис.18 -

элемент [1,1] и рис.19 - элемент [1,2]). Очевидно, что в отличие от предложенных методов (кр. 1), существующие методы не позволяют восстанавливать значения начальных матриц в точках разрыва на интервале $[0,10]$ (кр. 2).

Время решения в среде MATLAB на данном интервале при шаге 0,001 существующими методами с фиксированными точками значительно превышает время выполнения предложенными методами.

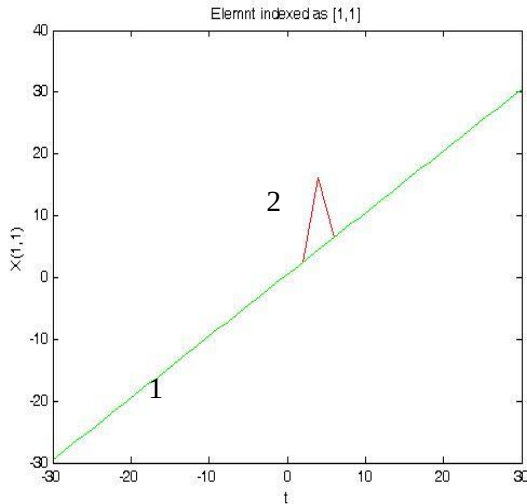


Рис. 18

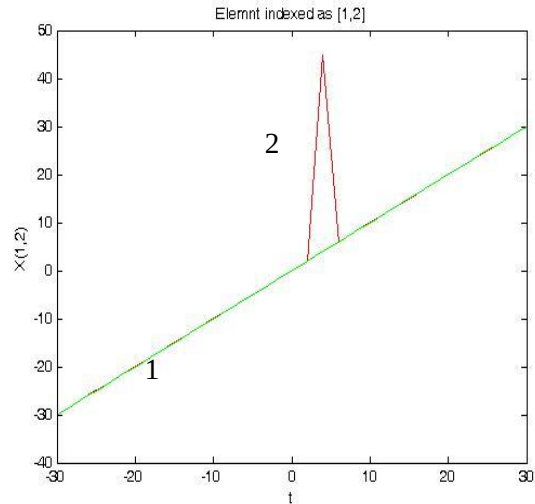


Рис. 19

Пример 2 (применение Д-аналога метода регуляризации Тихонова). Рассмотрим уравнение

$$\begin{bmatrix} \frac{1+t^2}{1+t^2+t^4} & -\frac{t}{1+t^2+t^4} \\ \frac{t^3}{1+t^2+t^4} & \frac{1}{1+t^2+t^4} \\ -\frac{t^2}{1+t^2+t^4} & \frac{t+t^3}{1+t^2+t^4} \end{bmatrix} \cdot X(t) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{t+2} & \frac{1}{t+1} \\ \frac{t+3}{t^2+3t+2} & \frac{t}{t+1} \\ \frac{t^2+3t}{t^2+3t+1} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{t^7+5t^6+7t^5-t^4-3t^3+19t^2+19t+3}{t^8+6t^7+13t^6+15t^5+15t^4+15t^3+14t^2+9t+2} & \frac{2t^3-2t^2+t}{t^4+t^2+1} \\ \frac{t^8+6t^7+17t^6+29t^5+30t^4+38t^3+39t^2+12t}{t^8+6t^7+13t^6+15t^5+15t^4+15t^3+14t^2+9t+2} & \frac{2t^5+t^4+t^2+3t}{t^5+t^4+t^3+t^2+t+1} \\ \frac{t^8+10t^7+30t^6+33t^5+19t^4+20t^3+9t^2}{t^8+6t^7+13t^6+15t^5+15t^4+15t^3+14t^2+9t+2} & \frac{t^5+t^4+3t^2}{t^5+t^4+t^3+t^2+t+1} \end{bmatrix}.$$

При центре аппроксимации $t_v = 0,5$ и масштабном коэффициенте $H=1$ с использованием дифференциально-падаевских преобразований получаем элементы оригинала $X(t)$:

$$x_{11}(t) = \frac{-0.61577 + 1.8179t + 4.0731(t-0.5)^2 + 3.8952(t-0.5)^3 + 1.4235(t-0.5)^4 + 0.14549(t-0.5)^5}{1 + 2.0216(t-0.5) + 1.2431(t-0.5)^2 + 0.44568(t-0.5)^3 + 0.084692(t-0.5)^4},$$

$$x_{12}(t) = \frac{-0.3844 + 3.5961t + 3.3436(t-0.5)^2 + 2.0504(t-0.5)^3 + 0.9283(t-0.5)^4 + 0.17427(t-0.5)^5}{1 + 2.033(t-0.5) + 1.2615(t-0.5)^2 + 0.4522(t-0.5)^3 + 0.086869(t-0.5)^4},$$

$$x_{13}(t) = \frac{-0.2615 + 2.7219t + 1.7902(t-0.5)^2 + 0.19221(t-0.5)^3 + 0.15011(t-0.5)^4 + 0.15961(t-0.5)^5}{1 + 2.389(t-0.5) + 1.8349(t-0.5)^2 + 0.65863(t-0.5)^3 + 0.16001(t-0.5)^4},$$

$$x_{21}(t) = \frac{-0.7828 + 3.7981t + 3.1942(t-0.5)^2 - 0.079475(t-0.5)^3 - 0.42452(t-0.5)^4 - 0.027518(t-0.5)^5}{1 + 2.0235(t-0.5) + 1.247(t-0.5)^2 + 0.44806(t-0.5)^3 + 0.085481(t-0.5)^4 + 0.00024596(t-0.5)^5},$$

$$x_{22}(t) = \frac{-1.2134 + 4.9617t + 6.2979(t-0.5)^2 + 3.2581(t-0.5)^3 + 0.78083(t-0.5)^4 + 0.08603(t-0.5)^5}{1 + 2.0319(t-0.5) + 1.2594(t-0.5)^2 + 0.45094(t-0.5)^3 + 0.086416(t-0.5)^4},$$

$$x_{23}(t) = \frac{-0.8261 + 2.8833t + 4.9621(t-0.5)^2 + 4.0013(t-0.5)^3 + 1.4541(t-0.5)^4 + 0.16429(t-0.5)^5}{1 + 2.4053(t-0.5) + 1.8619(t-0.5)^2 + 0.66927(t-0.5)^3 + 0.16374(t-0.5)^4}.$$

Необходимо отметить, что аналитическое решение трудно восстановить при использовании дифференциально-падаевских преобразований. Полученный оригинал при различных значениях параметра t удовлетворяет начальному матричному уравнению лишь с точностью $10^{-2} \dots 10^{-3}$.

Пример 3 (применение Д-аналога метода Бартелса-Стюарта). Рассмотрим параметрическое уравнение Сильвестра с комплексными элементами:

$$A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{t-1} + jt & 2t-j \\ -t+jt^2 & 3t^2+jt \end{bmatrix} \cdot X(t) + X(t) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{t} + jt & \frac{t}{t^2-2} - j(t+1) \\ \frac{t}{2t+1} + j & \frac{t}{3t^2-t+5} - j \end{bmatrix} = C(t),$$

$$c_{11}(t) = \frac{t^5(-3j-2) + t^4(2-8j) + t^3(-2j-3) + t^2(3j-5) + t(3j+1) + (j+1)}{-2t^3 - t^2 + 2t + 1},$$

$$c_{12}(t) = \frac{3t^8 + t^7(6j-7) + t^6(10-15j) + t^5(3j+5) + t^4(16j-21) + t^3(29-35j) + t^2(45j-35) + t(2-3j) - 10j}{3t^5 - 4t^4 + 3t^2 - 12t + 10},$$

$$c_{21}(t) = \frac{-2t^5j + t^4(4-9j) + t^3(12-9j) + t^2(11-j) + t(3-j) - j}{-2t^2 - 3t - 1},$$

$$c_{22}(t) = \frac{-3t^8 + t^7(1-15j) + t^6(2j+7) + t^5(6j-7) + t^4(6-10j) + t^3(45j+6) + t^2(13j-21) + t(8-5j) + 10}{-3t^4 + t^3 + t^2 - 2t + 10}.$$

Согласно Д-аналогу метода ортогонализации Грамма-Шмидта (при $t_v = 0.5$; $H = 1.2$), получаем следующие матричные дискреты $X(K)$:

$$X(1) = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.2 - 1.2j \\ 0 & 1.2j \end{bmatrix}, X(2) = \begin{bmatrix} 0 & -1.44j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X(K) = \{0\}, K \geq 3.$$

Оригинал $X(t)$ восстанавливается с применением дифференциально-тейлоровских преобразований:

$$X(t) = \begin{bmatrix} t+j & t+1-jt^2 \\ j & jt \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица является аналитическим решением рассмотренного уравнения.

Пример 4 (применение Д-аналога метода решения простого нелинейного параметрического матричного уравнения). Рассмотрим уравнение

$$X(t) \cdot \frac{1}{1+t^2+t^4} \begin{bmatrix} 1+t^2 & -t \\ t^3 & 1 \\ -t^2 & t+t^3 \end{bmatrix} \cdot X(t) = \begin{bmatrix} \frac{2t^4-4t^3-t^2+2t}{t^2-t+1} & \frac{t^7-t^6-4t^4+15t^3-6t}{t^4+t^2+1} & \frac{-t^7+5t^6-2t^5-9t^4-10t^3+3t^2+6t}{t^4+t^2+1} \\ \frac{-3t^2+5t^3}{t^2-t+1} & \frac{2t^6-4t^5-4t^4-9t^3+4t^2+2t}{t^4+t^2+1} & \frac{-2t^6+13t^5+6t^4+7t^3-9t^2}{t^4+t^2+1} \end{bmatrix}.$$

Вычисляя матричные дискреты $X(K)$ и последовательно решая уравнения (50) методом Бартелса-Стюарта при $t_v = 1$, $H = 1$, получим соответствующий оригинал:

$$X(t) = \begin{bmatrix} t & -1+2(t-1)+(t-1)^2 & 2+(t-1)-(t-1)^2 \\ -t & 2t & -3t \end{bmatrix}.$$

Отметим, что полученное решение является аналитическим решением рассмотренного матричного уравнения. Сравним результаты решения с результатами, полученными при фиксированных точках для значений параметра t на интервале $[-30, 30]$ (рис. 20 - элемент $[1, 2]$ и рис. 21 - элемент $[1, 3]$). Решение, полученное в фиксированных точках известными методами (кр. 1), имеет многочисленные точки разрыва, при наличии которых решение задачи невозможно аппроксимировать. Между тем оригинал непрерывного решения с легкостью восстанавливается с помощью дифференциально-тейлоровских преобразований (кр. 2).

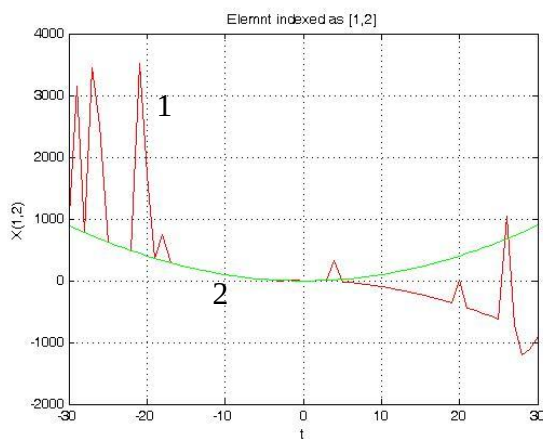


Рис. 20

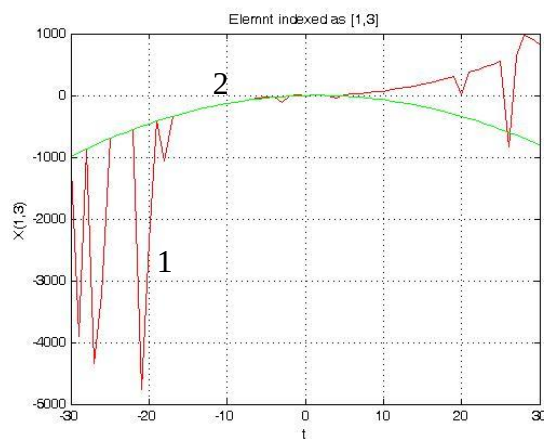


Рис. 21

Пример 5 (применение Д-аналога метода решения нелинейного параметрического матричного уравнения Риккати). Рассмотрим уравнение

$$A(t)X(t) + X(t)B(t) - X(t)C(t)X(t) + D(t) = 0,$$

$$\text{где } B(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 3 & t + 2 \\ t^3 + 1 & t^2 + 1 \end{bmatrix} \frac{1}{t+1}; \quad A(t) = B^T(t); \quad C(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t^3 + t \\ 2t^5 & \frac{1+3t}{3} \end{bmatrix};$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} 4t^{10} - 2t^8 - 2t^7 - 2t^6 + 5t^5 - \frac{10t^4}{3} - \frac{t^3}{3} + \frac{25t^2}{3} - 4t - \frac{19}{3} & 8t^{11} + 8t^9 - 8t^8 + 4t^7 - t^6 + t^5 - 6t^4 + \frac{11t^3}{3} - 6t^2 + \frac{7t}{3} + \frac{8}{3} \\ 6t^8 - 4t^7 - 6t^6 + 6t^5 + 3t^3 - t^2 - \frac{2t}{3} + \frac{16}{3} & 12t^9 - 8t^8 + 6t^7 - 8t^6 + 9t^5 - 7t^2 - 12t + \frac{16}{3} \end{bmatrix}.$$

Поочередно решая матричные уравнения (52) методом Бартелса-Стюарта при $t_v = 0$, $N=1$, получаем оригинал

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 1 & 2t^3 + t - 1 \\ t + 1 & 3t - 2 \end{bmatrix},$$

что является аналитическим решением рассмотренного уравнения (рис. 22 -элемент [1,1]).

Уравнение было решено также методом замороженных коэффициентов при фиксированных значениях параметра t на интервале $[-30, 30]$. На полученном графике (рис. 23) видны значительные отклонения параметра, что не позволяет аппроксимировать элементы решения с достаточной точностью.

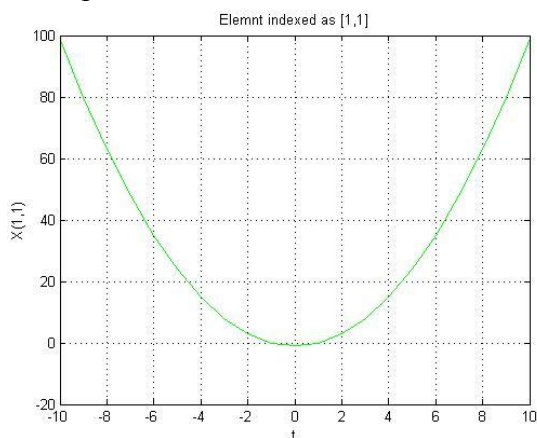


Рис. 22

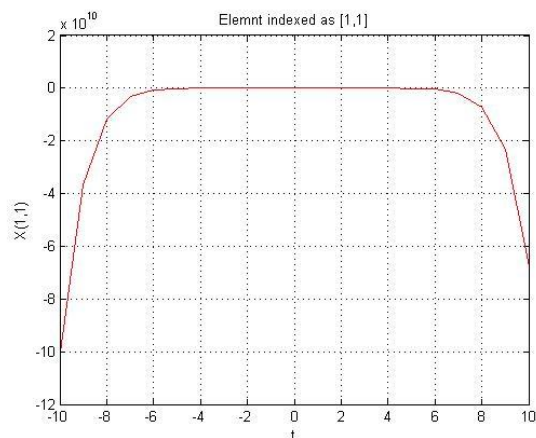


Рис. 23

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе разработаны методы решения нескольких классов неавтономных матричных уравнений, основанные на дифференциальных преобразованиях:

1. Дифференциальный метод решения линейных неавтономных матричных уравнений на основе приведения матриц к форме Шура [3].
2. Дифференциальный метод решения линейных неавтономных матричных уравнений на основе регуляризации Тихонова [2].
3. Д-аналог метода Бартелса-Стюарта для решения линейных неавтономных матричных уравнений типа Сильвестра (Ляпунова) [7].
4. Д-аналог метода решения простых нелинейных неавтономных матричных уравнений [4].
5. Д-аналог метода решения нелинейных неавтономных матричных уравнений типа Риккати [5].

Для разработанных методов получены аналитические выражения одной из вычислительных характеристик – количества операций сложения и умножения, в зависимости от размерности матрицы и количества дискрет. Построены зависимости вычислительных характеристик с целью выявления особенностей предложенных методов, а также проведен сравнительный анализ дифференциальных методов по вычислительным характеристикам.

На основе разработанных численно-аналитических методов [1-7] создан пакет прикладных программ [8] объектно-ориентированного типа, работающий в многодокументном режиме с помощью различных диалоговых окон, меню, панелей инструментов, строк подсказок. Основные функции и алгоритмы пакета реализованы на языке программирования C++, графический интерфейс – с применением библиотеки Qt.

С помощью пакета прикладных программ решены различные классы матричных уравнений как с реальными, так и с комплексными элементами. Полученные результаты подтверждают эффективность разработанных методов. Проведен сравнительный анализ разработанных методов с известными методами решения матричных автономных уравнений при фиксированных значениях.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Ավինյան Վ.Ռ., Մելիքյան Ա.Վ., Կյուրեղյան Ա.Լ., Ղազարյան Դ.Ա. Պարամետրական մատրիցների կեղծ հակադարձների որոշման եղանակ՝ հիմնված Տիխոնովի ռեգուլյարացման մեթոդի վրա // ՀՊՃՀ Բանբեր. «Մոդելավորում, օպտիմալացում, կառավարում» սերիա. - 2010. - Թող. 13, հ.2. - Էջ 135-140:
2. Авинян В.Р., Казарян Д.А., Кюрегян А.Л. К решению параметрических линейных матричных уравнений // Вестник ИАА. - 2011. - Т.8, N 3.-С. 436-440.
3. Авинян В.Р., Казарян Д.А., Кюрегян А.Л. К решению параметрических линейных матричных уравнений на основе дифференциальных преобразований Пухова и метода приведения матриц к форме Шура // Вестник ГИУА. Сер. "Моделирование, оптимизация, управление". - 2011. - Вып.14, том 1.- С.135-141.
4. Միմոնյան Ս.Հ., Ավինյան Վ.Ռ., Ղազարյան Դ.Ա., Ադամյան Գ.Վ. Ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների մեկ դասի խնդիրների լուծման եղանակի Դ-նմանակի մշակումը // ՀՊՃՀ Լրաբեր. Գիտական և մեթոդական հոդվածների ժողովածու. - 2012. - Մ.1. - Էջ. 335-341:
5. Авинян В.Р. Метод решения нелинейных параметрических матричных уравнений на основе дифференциальных преобразований // Вестник ГИУА. Сер. "Информационные технологии, электроника, радиотехника". - 2012. - Вып.15, том 1.- С.21-25.

6. Аветисян А.Г., Авинян В.Р. Метод определения обратных многопараметрических матриц, основанный на симплекс-преобразованиях и многомерных дифференциальных преобразованиях // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.- 2012.- Т. LXV, N1. - С.94-99.
7. Avetisyan A.G., Avinyan V.R., Ghazaryan D.A. A method for solving Silvester type parametric matrix equation // Հայաստանի ԳԱԱ և ՀՊՃՀ Տեղեկագիր. Տեխնիկական գիտություններ սերիա.- 2013.- Հ. 66, Մ. 4.- էջ. 376-383:
8. Avinyan V.R. An application package for solution of parametric matrix equations based on differential transforms // Proceedings of Engineering Academy of Armenia.- 2015 Vol.12, N 2. – P.170-174.

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծմանը նվիրված աշխատանքների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ դրանց լուծման եղանակները սակավաթիվ են: Իրականացված աշխատանքներն ուղղված են ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման այնպիսի եղանակների մշակմանը, որոնք պահանջում են մեծաքանակ գործողություններ մատրիցների կրոնեկերյան արտադրյալների օգտագործման պատճառով:

Գոյություն ունեցող մեթոդները, նույնիսկ պարզ մատրիցային հավասարումների լուծման համար սահմանափակ կիրառություններ ունեն՝ ոչ ավտոնոմ մատրիցի տեսքին և հատկություններին ներկայացվող մի շարք սահմանափակումների (օրինակ սինգուլյարություն, սիմետրիկություն և այլն) պատճառով: Ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման հայտնի եղանակները ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման համար կարելի է կիրառել օգտվելով սառեցված գործակիցների մեթոդից: Վերջինս հանգեցնում է այնպիսի խնդիրների, ինչպիսիք են՝ մոտարկման միջակայքի երկարության ընտրությունը, միջակայքի վրա ընտրված կետերի քանակի որոշումը, մոտարկման բազմանդամի ընտրությունը, հատվածի եզրերում ի հայտ եկող Ռունգեի էֆեկտի նվազեցումը, ճյուղավորման խնդիրը և այլն: Նշված խնդիրներից խուսափելու նպատակով անհրաժեշտություն է առաջանում մշակել ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման այնպիսի մեթոդներ, որոնք, հիմնվելով դիֆերենցիալ ձևափոխությունների առանձնահատկությունների և տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ընձեռած հնարավորությունների կիրառման վրա, կապահովեն բարձր արդյունավետություն: Կառավարման և համակարգային վերլուծության մի շարք խնդիրների ուսումնասիրման ժամանակ անհրաժեշտություն է առաջանում լուծել ոչ ավտոնոմ գծային կամ ոչ գծային մատրիցային հավասարումներ, որոնց լուծման համար աշխատանքում մշակվել են թվա-անալիտիկ մեթոդներ՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա, մասնավորապես.

1. գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Շուրի վերլուծության վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակը [3],

2. գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Տիխոնովի ռեգուլյարացման եղանակի վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակը [2],
3. Սիլվեստրի (Լյապունովի) տիպի գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի Դ-նմանակը [7],
4. պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը [4],
5. Ռիկկատիի տիպի ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը [5]:

Մշակված եղանակների համար ստացվել են հաշվողական բնութագրերի (մասնավորապես, բազմապատկման և գումարման գործողությունների քանակների) անալիտիկ արտահայտություններ կախված գործակից մատրիցների չափայնություններից և ընտրված դիսկրետների քանակից: Առաջարկված եղանակների առանձնահատկությունների բացահայտման նպատակով կառուցվել են հաշվողական բնութագրերի կախվածությունները, ինչպես նաև իրականացվել է պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման դիֆերենցիալ եղանակների համեմատական վերլուծություն ըստ հաշվողական բնութագրերի:

Մշակված ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման թվա-անալիտիկ մեթոդների [1-7] հիման վրա, հաշվողական գործընթացներն ավտոմատացնելու նպատակով մշակվել է ամբողջովին օբյեկտ-կողմնորոշված, բազմափաստաթղթային ռեժիմով համալրված կիրառական ծրագրերի փաթեթ [8], որն աշխատում է երկխոսային ռեժիմի պատուհանների օգտագործմամբ, որոնք հագեցված են անհրաժեշտ մենյուներով, գործիքների վահանակներով, օգնող հաղորդագրություններով: Փաթեթի հիմնական ֆունկցիաներն ու ալգորիթմներն իրականացվել են ծրագրավորման C++ լեզվով, իսկ գրաֆիկական ինտերֆեյսը՝ Qt գրադարանի օգտագործմամբ: Ի տարբերություն այլ համանման ծրագրային միջոցների՝ այստեղ դիֆերենցիալ պատկերների հաշվարկն իրականացվել է դիֆերենցիալ հանրահաշվի կանոնների հիման վրա, որը հնարավորություն է ընձեռում զգալիորեն փոքր ժամանակում ստանալ մեծ չափայնությամբ, ողորկ ֆունկցիաներով նկարագրվող ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների մատրիցային դիսկրետները և լուծումները:

Փաթեթի կիրառմամբ լուծվել են տարբեր տիպերի մատրիցային հավասարումներ ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս տարրերով մատրիցների համար: Մատրիցային հավասարումների լուծումների արդյունքների համեմատական վերլուծությունը պարամետրի ամրակայված արժեքների դեպքում ստացված լուծումների հետ հաստատում է մշակված եղանակների արդյունավետությունը:

Vahe Romen Avinyan

DEVELOPMENT OF METHODS FOR SOLUTION OF NON-AUTONOMOUS MATRIX EQUATIONS AND AUTOMATION OF COMPUTATIONAL PROCEDURES

SUMMARY

The analysis of research papers dedicated to solution of non-autonomous matrix equations shows that there are a few methods for solving them. The existing studies are mainly devoted to such methods for solving the non-autonomous matrix equations, which require a large number of operations due to the Kroneker's products usage.

Even for the relatively simple matrix equations the existing methods have limited application due to a number of requirements imposed on the form and characteristics of the matrix (e.g. singularity, symmetricalness, etc.). The methods for solving autonomous matrix equations can be applied to the non-autonomous ones by using the method of frozen coefficients. The latter leads to the such problems as the selection of the approximation range, the number of the approximation points, the approximating polynomial, reduction of the Runge's effect on the edges of the interval, etc. In order to avoid the mentioned drawbacks of the existing methods it is crucial to develop such methods for solving the non-autonomous matrix equations, which will be highly effective through the usage of the peculiarities of the differential transformations as well as the capabilities of the information technologies.

The following numerical-analytical methods based on the differential transformations have been proposed for solving the non-autonomous matrix equations, which become actual while investigation of the various problems of the control theory and system analysis:

1. A differential method for solving linear non-autonomous matrix equations on the basis of matrix reduction to Schur's form [3],
2. A differential method for solving linear non-autonomous matrix equations based on the Tikhonov's regularization [2],
3. D-analogue of Bartels-Stewart method for solving Sylvester's (Lyapunov's) type non-autonomous linear matrix equations [7],
4. D-analogue of method for solving nonlinear non-autonomous simple matrix equations [4],

5. D-analogue of method for solving nonlinear non-autonomous matrix equations of Riccati type [5].

For the developed methods the analytical expressions of one of the computational characteristics - the number of addition and multiplication operations - have been obtained taking into account the dimension of the matrix and the number of discretizes. The graphics of computational dependencies have been constructed in order to identify peculiarity of the proposed methods, as well as a comparative analysis of the differential characteristics of the methods for solving simple non-autonomous linear matrix equation sets have been conducted.

On the basis of the developed numerical-analytical methods [1-7] a fully object-oriented software package for automation of computational procedures has been developed [8]. The latter has a MDI interface with various dialog boxes, menus, toolbars, tooltips. The main functions and algorithms of the package are implemented in C++ programming language, the GUI is based on the capabilities of the QT library. Unlike other software packages the differential images are calculated by means of the differential algebra expressions, which allows obtaining matrix discretizes for non-autonomous matrix equations of any dimension with smooth functions within a relatively short time.

Different classes of non-autonomous matrix equations with both real and complex elements have been solved by means of the developed application package. The comparative analysis of the matrix equations solution's results with the ones obtained for the fixed values of the parameter confirms the effectiveness of the developed methods.

A handwritten signature in blue ink, consisting of stylized, overlapping loops and strokes, positioned in the lower right area of the page.

