

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԿՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՎԻՆՅԱՆ ՎԱՀԵ ՌՈՄԵՆԻ

ՈՉ ԱՎՏՈՆՈՄ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄԸ ԵՎ ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐԻ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՈՒՄԸ

Ե.13.02 – «Ավտոմատացման համակարգեր» մասնագիտությամբ տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման

ԱՏԵՆԱԿՈՍՈՒԹՅՈՒՆ

Գիտական ղեկավար՝
տ.գ.դ. Ա.Գ. Ավետիսյան

Երևան 2015

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ.....4

ԳԼՈՒԽ 1. ԳՐԱԿԱՆՈՂՅՅԱՆ ԱԿՆԱՐԿ ԵՎ ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՂՅՅԱՆ ՆՊԱՏԱԿՆԵՐԸ

1.1. Դիմումայի ձևափոխություններն ու դրանց վրա հիմնված աշխատանքները.....10
1.2. Ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծմանը նվիրված աշխատանքները.....17
1.3. Ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումներն ու դրանց նվիրված աշխատանքները.....28
1.4. Ատենախոսության նպատակները.....34

**ԳԼՈՒԽ 2. ՈՉ ԱՎՏՈՆՈՄ ԳԾԱՅԻՆ ԵՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱ-
ՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒՇՄԱՆ ԹՎԱ-ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՄԵԹՈԴՆԵՐ ՀԻՄՆՎԱԾ
ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՂՅՅԱՆԵՐԻ ՎՐԱ**

2.1. Պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակները.....37
2.1.1. Շուրի վերլուծության վրա հիմնված դիմումայի եղանակը.....37
2.1.2. Տիխոնովի ռեգուլյարացման եղանակի վրա հիմնված դիմումայի եղանակը.....40
2.1.3. Առաջարկված եղանակների համեմատական վերլուծությունը.....44
2.2. Գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Բարտելս- Ստյուարտի եղանակի Դ-նմանակը.....45
2.3. Պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը.....50
2.4. Ոիկկատիի տիպի ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը.....55
2.5. Եզրակացություններ 2-րդ գլխի վերաբերյալ59

ԳԼՈՒԽ 3. ՈՉ ԱՎՏՈՆՈՄ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒՇՄԱՆ ԹՎԱ- ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ԾՐԱԳՐԵՐԻ ՓԱԹԵԹ	
3.1. Կառուցվածքը, հիմնական բնութագրերը	60
3.2. Հիմնական դասերն ու ֆունկցիաները	63
3.3. Հիմնական ալգորիթմները	74
3.4. Ծրագրային փաթեթի աշխատանքային միջավայրը	76
3.5. Եզրակացություններ երրորդ գլխի վերաբերյալ.....	87
ԳԼՈՒԽ 4. ՓՈՐՁԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ	
4.1. Պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման մոդելային օրինակներ	88
4.2. Սիլվեստրի տիպի գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների Բար- տելս-Ստյուարտի եղանակով Դ-նմանակով լուծման մոդելային օրինակ	102
4.3. Պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման մոդելային օրինակ.....	109
4.4. ՈՒիկատիի տիպի ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման մոդելային օրինակ.....	112
4.5. Եզրակացություններ 4-րդ գլխի վերաբերյալ	116
ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ	118
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ	121

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Տեղեկատվական տեխնոլոգիաների, համակարգային վերլուծության, կառավարման ու ավտոմատացման բնագավառներում կատարվող հետազոտություններում հաճախ առաջանում է մատրիցային հավասարումների լուծման անհրաժեշտություն: Մատրիցային հավասարումների բազմաթիվ տարատեսակներ կան, այդ թվում գծային և ոչ գծային մատրիցային հավասարումներ, որոնց գործակից և փնտրվող մատրիցների տարրերը կարող են լինել որոշակի արգումենտից կախված ֆունկցիաներ: Այդպիսի խնդիրների լուծման մեթոդների մշակմանն ու դրանց հաշվողական գործընթացների ավտոմատացմանն է նվիրված ատենախոսական աշխատանքը:

Ոչ ավտոնոմ ֆունկցիաներով նկարագրվող խնդիրների լուծման բազմաթիվ հետազոտություններ [6, 9, 16, 28-30, 32, 39] վկայում են, որ նման խնդիրների լուծման համար բավարար արդյունավետություն են ապահովում Գ.Ե. Պուխովի առաջարկած դիֆերենցիալ ձևափոխությունները [33-38]: Դիֆերենցիալ ձևափոխությունները այլ (օրինակ ինտեգրալային) ձևափոխություններից հիմնականում տարբերվում են նրանով, որ բնօրինակներից (լուծվող խնդրի նախնական ոչ ավտոնոմ ֆունկցիաները) պատկերներին անցումը կատարվում է դիֆերենցման, այլ ոչ թե ինտեգրման գործողությամբ, որը թույլ է տալիս իրականացնել լուծվող խնդիրների փոփոխականների հանրահաշվականացման, հաշվարկների գուգահեռականացման հնարավորություններով օժտված պարզագույն հաշվողական ընթացակարգեր:

Թեմայի արդիականությունը պայմանավորված է ոչ ավտոնոմ համակարգերի ուսումնասիրման բարձր արդյունավետությամբ օժտված մեթոդների մշակմամբ, որոնք հիմնված են դիֆերենցիալ ձևափոխությունների առանձնահատկությունների

և տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ընծեռած հնարավորությունների կիրառման վրա: Կառավարման և համակարգային վերլուծության մի շարք խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտություն է առաջանում լուծել ոչ ավտոնոմ գծային կամ ոչ գծային մատրիցային հավասարումներ, որոնց լուծման համար տվյալ աշխատանքում մշակվել են մի շարք թվա-անալիտիկ մեթոդներ և դրանց հիման վրա ստեղծվել է կիրառական ծրագրերի փաթեթ:

Ատենախոսության նպատակներն են՝

1. Մշակել տարբեր դասերի ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման մեթոդներ՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա, որոնք կիրառելի են մոտարկման կենտրոնում ողորկ տարրերով ոչ ավտոնոմ մատրիցների համար:
2. Մշակված մեթոդների հիման վրա ստեղծել կիրառական ծրագրերի փաթեթ, որը երկխոսային ռեժիմի պատուհանների օգտագործմամբ հնարավորություն կընձեռի ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների յուրաքանչյուր դասի անալիտիկ տեսքով տվյալների ներմուծմամբ ստանալ հավասարման լուծումներ՝ պահանջվող տեսքերով (ֆունկցիոնալ, աղյուսակային):
3. Իրականացնել մշակված մեթոդներով տարբեր դասերի մատրիցային հավասարումների լուծման փորձնական հետազոտություններ և համեմատական վերլուծություն, ինչպես մշակված մեթոդների միջև, այնպես էլ ամրակայված կետերի համար հայտնի եղանակներով ստացված արդյունքների հետ: Ստանալ մշակված եղանակների իրականացման ընթացքում պահանջվող գործողությունների քանակական գնահատականներ:

Գիտական նորույթը: Մշակվել են մի շարք դասերի ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման թվա-անալիտիկ մեթոդներ, որոնք հիմնված են դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա, մասնավորապես.

1. գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Շոլի վերլուծության վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակ,
2. գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Տիխոնովի ռեգույարացման եղանակի վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակ,
3. Սիլվեստրի (Լյապունովի) տիպի գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի Դ-նմանակը,
4. պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը,
5. Ոիկկատիի տիպի ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը:

Գործնական արժեքը: Դիֆերենցիալ ձևափոխությունների տիրույթում մշակված ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման թվա-անալիտիկ եղանակների հիման վրա մշակվել է ամբողջովին օբյեկտ-կողմնորոշված, բազմափառաթղթային ռեժիմով համալրված կիրառական ծրագրերի փաթեթ, որն աշխատում է երկխոսային ռեժիմի անհրաժեշտ մենյուներով, գործիքների վահանակներով, օգնող հաղորդագրություններով հագեցած պատուհանների օգտագործմամբ: Փաթեթի օգնությամբ լուծվել են մի շարք մոռելային օրինակներ, որոնց արդյունքները հաստատում են մշակված եղանակների արդյունավետությունը:

Պաշտպանության դուրս բերվող հիմնական դրույթները.

- պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Շոլի վերլուծության վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակը,

- պարզագոյն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Տիխոնովի ռեգուլյարացման եղանակի վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակը,
- գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի Դ-նմանակը,
- պարզագոյն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը,
- Ռիկատիի տիպի ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը,
- դիֆերենցիալ ձևափոխությունների տիրույթում մշակված ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման թվա-անալիտիկ եղանակների հիման վրա մշակված կիրառական ծրագրերի փաթեթը:

Աշխատանքի տեսական և գործնական արդյունքները գեկուցվել են՝

- Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանի (նախկին <ՊՃՀ>) տարեկան գիտաժողովներում (2011-2014);
- Տեղեկատվական տեխնոլոգիաների և ավտոմատացման ամբիոնի, Համակարգային վերլուծություն բազային գիտահետազոտական լաբորատորիայի գիտական սեմինարներում (2011-2014):

Հրատարակումները: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները հրատարակված են 8 գիտական աշխատանքներում, որոնք ներկայացված և ընդգծված են գրականության ցանկում:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը: Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, 4 գլուխներից, եզրահանգումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 102 անվանում: Հիմնական նյութը շարադրված է 131 տպագիր էջի վրա, որոնք ներառում են 68 նկարներ և 6 աղյուսակներ:

Ներածությունում հիմնավորված է ատենախոսության թեմայի արդիականությունը, ներկայացված են ատենախոսության նպատակները, պաշտպանության դուրս բերվող հիմնական դրույթները, աշխատանքի հակիրճ նկարագրությունը և հիմնական գիտական արդյունքները:

Առաջին գլխում ներկայացված են դիֆերենցիալ ձևափոխություններին, գծային և ոչ գծային, ավտոնոմ և ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծմանը նվիրված աշխատանքները:

Դիֆերենցիալ նմանակների մշակմանը նվիրված աշխատանքների վերլուծության հիման վրա ձևակերպված են ատենախոսության նպատակները:

Երկրորդ գլուխը նվիրված է գծային և ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման մշակված եղանակների՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա:

Ներկայացված են նաև մշակված եղանակների համար ստացված հաշվողական բնութագրերի (մասնավորապես, բազմապատկման և գումարման գործողությունների քանակների) անալիտիկ արտահայտությունները՝ կախված գործակից մատրիցների չափայնություններից և դիսկրետների քանակից:

Հաշվողական բնութագրերի հիման վրա իրականացվել է ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման մշակված եղանակների համեմատական վերլուծություն: Առաջարկված գծային և ոչ գծային մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակների առանձնահատկությունների բացահայտման նպատակով կառուցվել են հաշվողական բնութագրերի ֆունկցիոնալ կախվածությունները:

Երրորդ գլխում ներկայացված է դիֆերենցիալ ձևափոխությունների տիրույթում մշակված ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման թվա-անալիտիկ եղանակների հիման վրա մշակված կիրառական ծրագրերի փաթեթի կառուցվածքը,

հիմնական բնութագրերը, օգտագործված դասերն ու ֆունկցիաները, աշխատանքային միջավայրը, գործիքներն ու հնարավորությունները:

Չորրորդ գլխում ներկայացված են փորձնական հետազոտությունների հաշվողական ընթացակարգերն ու արդյունքները: Մշակված թվա-անալիտիկ եղանակների արդյունքները համեմատվել են ամրակայված կետերի դեպքում հայտնի եղանակներով լուծման արդյունքների հետ: Համեմատական վերլուծության արդյունքները ներկայացված են գրաֆիկների տեսքով, տրվել են նաև համապատասխան որակական գնահատականները:

Եզրահանգման մեջ ընդհանրացված են աշխատանքում ստացված գիտագործնական արդյունքները:

ԳԼՈՒԽ 1

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱԿՆԱՐԿ ԵՎ ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ՆՊԱՏԱԿՆԵՐԸ

1.1. Դիֆերենցիալ ձևափոխություններն ու դրանց վրա հիմնված աշխատանքները

Ներկայացնենք Գ.Ե. Պուխովի առաջարկած դիֆերենցիալ ձևափոխություններն ու դրանց կիրառմամբ մի շարք աշխատանքներ:

Եթե $x(t)$ ֆունկցիան ունի անվերջ կարգի ածանցյալներ $t = t_v$, կետում, ապա դիֆերենցիալ ձևափոխությունները ներկայացվում են հետևյալ կերպ [35].

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[\frac{d^K x(t)}{dt^K} \right]_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \aleph(t, t_v, H, X(K)), \quad (1.1.1)$$

որտեղ $X(K)$ -ն $x(t)$ բնօրինակի պատկերն է՝ դիսկրետը, H -ը՝ մասշտաբային հաստատունը, t_v -ն՝ մոտարկման կենտրոնը, $\aleph(\cdot)$ -ն՝ որևէ մոտարկող ֆունկցիա, որի կիրառմամբ վերականգնվում է $x(t)$ բնօրինակը, \Rightarrow սիմվոլից ձախ ուղիղ, իսկ աջ մասում՝ հակադարձ ձևափոխություններն են:

Կախված $\aleph(\cdot)$ ֆունկցիայի տիպից $x(t)$ բնօրինակը վերականգնելիս՝ տարրերում են դիֆերենցիալ-մակլորենյան ($\Gamma\text{Մ}-$), դիֆերենցիալ-թեյլորյան ($\Gamma\text{Շ}-$), դիֆերենցիալ-պադեյան ($\Gamma\text{Պ}-$), դիֆերնցիալ-լեժանդրյան ($\Gamma\text{Լ}-$) և այլ տիպերի ձևափոխություններ [33-38]: Ներկայացնենք դրանցից մի քանիսը:

Դժ-ձևափոխությունների դեպքում բնօրինակը վերականգնվում է հետևյալ տեսքով՝

$$x(t) = \sum_{K=0}^{\infty} X(K) \cdot \left(\frac{t - t_v}{H} \right)^K : \quad (1.1.2)$$

Մոտարկման կենտրոնի գրոյական արժեքի դեպքում՝ $t_v = 0$, ԴԹ-ձևափոխությունները վերածվում են ԴՄ-ձևափոխությունների.

$$x(t) = \sum_{K=0}^{\infty} X(K) \cdot \left(\frac{t}{H} \right)^K : \quad (1.1.3)$$

ԴՊ-ձևափոխությունների դեպքում ունենք.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a'_0 + a'_1(\tau - \tau_v) + \cdots + a'_m(\tau - \tau_v)^m}{1 + b'_1(\tau - \tau_v) + \cdots + b'_n(\tau - \tau_v)^n} + \rho(\tau) = \\ &= \frac{a_0 + a_1 \cdot \tau + \cdots + a_m \cdot \tau^m}{1 + b_1 \cdot \tau + \cdots + b_n \cdot \tau^n} + \rho(\tau) = \frac{a(\tau)}{b(\tau)} + \rho(\tau), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

որտեղ $\tau = t \cdot H^{-1}$ -ը հարաբերական արգումենտն է, a_i -ն, $i = \overline{1, m}$, և b_j -ն, $j = \overline{1, n}$, որոշման ենթակա անհայտ գործակիցներն են ($m \leq n$), իսկ $\rho(\tau)$ -ն՝ ինչ-որ հայտնի ֆունկցիա (մնացորդային անդամ), որը մասնավոր դեպքում կարող է հավասար լինել զրոյի: Ընդհանուր դեպքում, եթե $\rho(\tau) \neq 0$, Պաղեի մոտարկման b_j , $j = \overline{1, n}$, գործակիցները որոշվում են հետևյալ մոդելի օգտագործմամբ.

$$\bar{X}(K) + \sum_{j=1}^{j=n} b_j \cdot \bar{X}(K-j) = \sum_{i=0}^{i=m} a_i b(K-i), \quad K = \overline{1, \infty}, \quad (1.1.5)$$

որտեղ $\bar{X}(K) = X(K) - \rho(K)$, $\forall K = \overline{0, \infty}$, իսկ $\pi(\cdot)$ -ն թեյլորյան միավորն է՝

$$\pi(K) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } K = 0, \\ 0, & \text{եթե } K = \overline{1, \infty}: \end{cases}$$

(1.1.4) տեսքի առնչությունների աջ մասերը $m > K$ դեպքում վերածվում են զրոների և ստացվում է $\bar{X}(m)$ անկյունագծային տարրեր ունեցող մատրիցով և $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ անհայտ վեկտորով գծային հանրահաշվական հավասարումների հետևյալ անհամասեռ համակարգը՝

$$\begin{bmatrix} \bar{X}(m) & \bar{X}(m-1) & \cdots & \bar{X}(m-n+1) \\ \bar{X}(m+1) & \bar{X}(m) & \cdots & \bar{X}(m-n+2) \\ \bar{X}(m+2) & \bar{X}(m+1) & \cdots & \bar{X}(m-n+3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{X}(m+n-1) & \bar{X}(m+n-2) & \cdots & \bar{X}(m) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{X}(m+1) \\ \bar{X}(m+2) \\ \bar{X}(m+3) \\ \vdots \\ \bar{X}(m+n) \end{pmatrix}; \quad (1.1.6)$$

$b = (b_1, \dots, b_n)^T$ -ի որոշելուց հետո հաշվում է $(a_0, \dots, a_m)^T$ վեկտորը հետևյալ առնչությամբ՝

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{X}(0) \\ \bar{X}(1) \\ \vdots \\ \bar{X}(m) \end{pmatrix}; \quad (1.1.7)$$

Աշխատանքում մշակված մեթոդների հիմքում ընկած են դիֆերենցիալ ձևափոխությունների հանրահաշվի կանոնները [33-38]:

Դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառմամբ մշակվել են տարաբնույթ խնդիրների լուծման եղանակներ: Ներկայացնենք դրանցից մի քանիսը:

Բազմաթիվ խնդիրների (ավտոնոմ և ոչ ավտոնոմ հավասարումների համակարգեր, մատրիցների ինվարիանտների որոշում, մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրներ, դինամիկ խնդիրներ և այլն) լուծման մի շարք եղանակներ (Դ-նմանակներ) ամփոփվել են [39] մենագրությունում:

[1] աշխատանքում առաջարկված է դիֆերենցիալ ձևափոխությունների հիման վրա պարամետրական հակադարձ մատրիցների որոշման եղանակ՝ օգտագործելով սիմպլեքս ձևափոխությունները:

Քառակուսային պարամետրական ծրագրավորման խնդիրների լուծման եղանակ է առաջարկված [2] աշխատանքում՝ հիմնված սիմպլեքս և դիֆերենցիալ ձևափոխությունների համատեղ կիրառման վրա:

Տիխոնովի ռեգուլյարացման եղանակի և դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառմամբ ոչ ավտոնոմ մատրիցների Մոլ-Պենրոուզի ընդհանրացված հակադարձների որոշման եղանակ է ներկայացված [4] հոդվածում:

Պարամետրական մատրիցների ընդհանրացված հակադարձների Դ-նմանակների համեմատական վերլուծությունն ըստ մեքենայական արագության (ժամանակի), զբաղեցրած հիշողության ծավալի և կատարված գործողությունների քանակի (գումարման և բազմապատկման) ներկայացված է [5] –ում:

[6] ատենախոսությունը նվիրված է ոչ ավտոնոմ մատրիցների մի քանի ինվարիանտների որոշման դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա հիմնված մեթոդների մշակմանն ու դրանց ավտոմատացմանը:

[7] – ում առաջարկված է պարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման պարզ եղանակ, իսկ [10] – ում՝ բազմապարամետրական մատրիցների հակադարձների որոշման եղանակ՝ հիմնված բազմաչափ դիֆերենցիալ ձևափոխությունների և սիմպլեքս ձևափոխությունների համատեղ կիրառման վրա:

[11] աշխատանքում առաջարկված է գծային ծրագրավորման խնդրի լուծման եղանակ, ընդ որում խնդրի նպատակային ֆունկցիայի գործակիցները կամ սահմանափակումների աջ մասերն ունեն բազմապարամետրական կախվածություններ: Օգտագործված են դիֆերենցիալ-թեյլորյան ձևափոխությունները: Լուծված է նավթամշակման ընկերության արտադրության պլանավորման գործնական օրինակ: [12] հոդվածում ուսումնասիրված է գծային ծրագրավորման խնդիր, որտեղ նպատակային ֆունկցիայի գործակիցները, սահմանափակումների աջ մասը և սահմանափակումների գործակիցները պարամետրական են: Օգտագործված են դիֆերենցիալ-պադեյան և սիմպլեքս ձևափոխությունները:

[16] ատենախոսությունը նվիրված է պարամետրական մատրիցների կեղծ հակադարձների որոշման եղանակների մշակմանն ու մեքենայական իրականացմանը:

[17] աշխատանքում իրականացված է ոչ գծային եզրային խնդիրների լուծման եղանակ՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա: Դինամիկ համակարգերի օպտիմալացման եղանակ է դիտարկված [18] – ում:

[21] հոդվածում առաջարկված են աղյուսակային տեսքով տրված ազդանշանների մշակման հատուկ հաշվողական միջոցներ:

Ոչ գծային շղթաների անցումային բնութագրերի որոշման եղանակ է ներկայացված [22] աշխատանքում: Եղանակը հիմնված է աստիճանային շարքերի կիրառման վրա: Լուծման ճշտության բարձրացման նպատակով իրականացվել է շարքի անդամների թվի կրճատում ի հաշիվ աստիճանային բազիսից Լագերի, Լեժանդրի, Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների բազիսներին անցնելու միջոցների:

[23] – ում առաջարկված են ոչ ավտոնոմ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ընթացքում առաջացող սխալանքի գնահատման եղանակները, [25] հոդվածում դիտարկված են Ֆրեդհոլմի առաջին կարգի ինտեգրալային հավասարումներն ու մշակված եղանակի հիման վրա կառուցված սպեկտրոսկոպիայում վերականգնման խնդրի դիֆերենցիալ-թեյլորյան մոդելը:

[28] ատենախոսությունը նվիրված է դիֆերենցիալ ձևափոխությունների հիման վրա բազմակետ եզրային պայմաններով օպտիմալ կառավարման խնդիրների լուծմանը:

Ոչ ավտոնոմ կառավարման համակարգերի դիտելիության հարցերի ուսումնասիրմանն է նվիրված [29] ատենախոսությունը: Դիֆերենցիալ-պատեյան ձևափոխությունների կիրառմամբ վերջավոր խնդիրների լուծման մոդելներ են

մշակված [30] ատենախոսությունում: [32] - ատենախոսությունում ուսումնասիրված են ոչ ավտոնոմ կառավարման համակարգերի կայունության, կայունացնելիության հիմնախնդիրները:

Պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների մեկ դասի խնդրի լուծման եղանակ է ներկայացված [40] հոդվածում:

[41]-ում առաջարկված են դիֆերենցիալ-կոմպլեքս ձևափոխությունները: Ուսումնասիրված են առաջարկված մեթոդների կիրառությունները բարդ էլեկտրատեխնիկական համակարգերի մոդելավորման և դինամիկ կայունության վերլուծության համար: Լյապունովի ֆունկցիայի հիման վրա մշակված են կայունության պաշարի գնահատման մեթոդներ:

[42] աշխատանքում իրականացված են ոչ գծային շղթաների արձագանքի ժամանակային պարամետրերի մուտքային իմպուլսային ազդանշանի ամպլիտուդից նվազագույն կախվածության պայմանների ուսումնասիրություններ՝ օգտվելով դիֆերենցիալ ձևափոխություններից և ինվարիանտության տեսության առնչություններից:

[43] ատենախոսությունում ստացված են առնչություններ ոչ թեյլորյան տիպի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների, վերականգնող աստիճանային շարքերի միջակայքերի սահմանափակումների նախնական գնահատականների և վերականգնված լուծումների սխալանքների գնահատման չափանիշների համար: Առաջարկված են մոդելավորման և պարամետրական օպտիմալացման նոր մոտեցումներ՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա:

[44] հոդվածում իրականացված է արձագանքի իդենտիֆիկացման խնդիրը՝ գծային համակարգերի կոտորակառացիոնալ ֆունկցիաների տեսքով:

[45] մենագրության մեջ նկարագրված են դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառությունները ոչ գծային բարդ դինամիկ համակարգերի մոդելավորման խնդիրների լուծման համար, մասնավորապես վրդովմունքի և վիճակի պարամետրերի նկատմամբ ինվարիանտ բնութագրեր ունեցող գերբարձր հաճախականային ռադիոտեխնիկական սարքավորումների հետազոտման խնդիրներում:

[46] ատենախոսական աշխատանքը նվիրված է խառը դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառմամբ դինամիկ համակարգերի մոդելավորման և օպտիմալացման խնդիրների լուծմանը: Ստացված արդյունքները թույլ են տալիս ժամանակի իրական ռեժիմում լուծել գյուղատնտեսական մեքենաների կառավարման խնդիրը և արտաքին ազդեցություններին ադապտացման հարցը:

[48] հոդվածը նվիրված է մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների և եզրային խնդիրների լուծմանը: [51] - ում առաջարկված են գծային դիֆերենցիալ-հանրահաշվական հավասարումների լուծման եղանակներ: Լուծվել են առաջին կարգի հավասարումներ և ցույց է տրվել, որ եղանակները կիրառելի են նաև բարձր կարգի հավասարումների լուծման համար: [56] աշխատանքում առաջարկված է Հելմիոլցի հավասարման լուծման եղանակ:

[57] հոդվածը նվիրված է Ռիկկատիի քառակուային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը: Ստացվել են նշված դասի հավասարումների լուծման անդրադարձ առնչություններ:

[59] – ում առաջարկված է խառը ոչ գծային եզրային պայմաններով գծային ալիքային հավասարումների լուծման եղանակ:

[63] հոդվածում մշակված է դինամիկ համակարգերի օպտիմալ կառավարման խնդիրների լուծման եղանակ: Սովորական կամ մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումները դիֆերենցիալ ձևափոխությունների տիրույթում վերած-

վում են ոչ գծային հանրահաշվական հավասարումների համարժեք համակարգի: Դիֆերենցիալ հակադարձ ձևափոխությունների միջոցով օպտիմալ կառավարման ֆունկցիան ստացվում է բազիսային շարքի վերջավոր անդամների գումարի տեսքով: Գծային ու ոչ գծային էլեկտրական սարքերի վերլուծության եղանակ է առաջարկված [64] հոդվածում:

Կառավարման ոչ գծային խնդիրների լուծման թվային եղանակ է առաջարկված [75]-ում: Օպտիմալ կառավարման խնդիրները կարելի է ներկայացնել եզրային պայմաններով հանրահաշվական և դիֆերենցիալ հավասարումների միջոցով, որոնք նախ հանգեցվում են ոչ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի, որոնց թվային լուծումները ստացվում են վերջավոր անդամներով թեյլորի շարքի տեսքով:

1.2. Ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծմանը նվիրված աշխատանքները

Մատրիցային հավասարումների լուծման անհրաժեշտություն հաճախ է առաջանում գծային հանրահաշվի սպեկտրալ խնդիրների լուծման, սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման կայունության ուսումնասիրման, մեխանիկայի տարատեսակ խնդիրների ուսումնասիրման, կառավարման տեսության [20, 27, 81, 99] և այլ խնդիրների լուծման ժամանակ:

Տարածված են մատրիցային հավասարումների հետևյալ տեսակները.

- Լյապունովի մատրիցային հավասարումներ [20, 27, 52, 77, 100],
- Սիլվեստրի մատրիցային հավասարումներ [20, 27, 31, 52, 101],
- Ռիկկատիի մատրիցային հավասարումներ [24, 27, 47, 81, 98]:

Ընդհանուր առմամբ մատրիցային հավասարումները կարելի է բաժանել երկու դասի՝ գծային (օրինակ՝ Լյապունովի մատրիցային հավասարումները) և ոչ գծային (օրինակ՝ Ռիկատիի մատրիցային հավասարումները), որոնք էլ, իրենց հերթին բաժանվում են երկու ենթադասերի՝ պարզագույն և թվարկված տիպերի: Ներկայացնենք ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների ենթադասերը և դրանց լուծմանը նվիրված աշխատանքները:

Պարզագույն գծային ավտոնոմ մատրիցային հավասարումներ: Ենթադրենք տրված են $A_{m \times m}$, $B_{n \times n}$ և $C_{m \times n}$ մատրիցները: Այդ դեպքում պարզագույն գծային ավտոնոմ մատրիցային հավասարում կանվանենք հետևյալ հավասարումը [27]

$$A \cdot X \cdot B = C, \quad (1.2.1)$$

որտեղ $X_{m \times n}$ -ը փնտրվող մատրիցն է:

Պարզագույն գծային մատրիցային հավասարումների լուծման համար առաջարկվում է օգտվել Շուրի վերլուծությունից [27, 67]: Վերջինիս համաձայն (1.2.1)-ը ներկայացվում է հետևյալ կերպ՝

$$\{U_A \cdot \tilde{A} \cdot U_A^T\} \cdot X \cdot \{U_B \cdot \tilde{B} \cdot U_B^T\} = D,$$

որտեղ \tilde{A} -ն և \tilde{B} -ն վերին եռանկյունաձև, իսկ U_A -ն և U_B -ն ունիտար մատրիցներ են ($U_A^{-1} = U_A^T$ և $U_B^{-1} = U_B^T$ [19, 31, 53]): Հաշվի առնելով ունիտարության պայմանները կունենանք՝

$$\tilde{A} \cdot U_A^T \cdot X \cdot U_B \cdot \tilde{B} = U_A^T \cdot D \cdot U_B :$$

Նշանակելով

$$Y = U_A^T \cdot X \cdot U_B, \quad \tilde{D} = U_A^T \cdot D \cdot U_B :$$

կունենանք՝

$$\tilde{A} \cdot Y \cdot \tilde{B} = \tilde{D},$$

որտեղից

$$Y_{ij} = \frac{\tilde{D}_{ij} - \tilde{A}_{ii} \sum_{p=1}^{j-1} \tilde{B}_{pj} Y_{ip}}{\tilde{A}_{ii} \tilde{B}_{jj}}, \quad i = \overline{m, 1}, \quad j = \overline{1, n}:$$

Անհայտ փոփոխականը կորոշենք հետևյալ կերպ.

$$X = U_A \cdot Y \cdot U_B^T: \quad (1.2.2)$$

[88] աշխատանքը նվիրված է (1.2.1) տիպի մատրիցային հավասարումների լուծմանը՝ օգտագործելով մատրիցների ունիտարության պայմանները:

Լյապունովի հավասարում [100]: Լյապունովի հավասարման լուծման անհրաժեշտություն է առաջանում կառավարման տեսության մեջ՝ կայունության վերլուծության և օպտիմալ կառավարման խնդիրներում: Կառավարման տեսության մեջ Լյապունովի դիսկրետ հավասարում անվանում են հետևյալ հավասարումը.

$$A \cdot X \cdot A^* - X + Q = 0,$$

որտեղ, Q - ն հերմիտյան մատրից է: Լյապունովի անընդհատ հավասարումը հետևյալ տեսքի է.

$$A \cdot X + X \cdot A^* + Q = 0:$$

Լյապունովի դիսկրետ հավասարման լուծման համար առաջարկվում է օգտագործել Շուրի եղանակը [77]: Վերջինս իրականացված է մատրիցների սեփական թվերի որոշման QR ալգորիթմի հիման վրա [67]:

[52] աշխատանքում Լյապունովի անընդհատ հավասարման լուծման համար առաջարկվում է Բարտելս-Ստյուարտի եղանակը:

[55] –ում ուսումնասիրված են անընդհատ գծային ստացիոնար կառավարման համակարգեր՝ սակավաթիվ մուտքերով և ելքերով: Մշակված են թվային ալգորիթմներ Լյապունովի ու Ռիկկատիի հավասարումների լուծման համար, որոնք սերվում

Են գծային-քառակուսային օպտիմալ կառավարման խնդիրներից: Ներկայացված է Լյապունովի հավասարման լուծման խտերացիոն եղանակ՝ հիմնված Խոլեցկու վերլուծության վրա: Նշված ալգորիթմի և Նյուտոն-Կլեյմանի մեթոդի միավորման արդյունքում ստացվել է Ռիկատիի հավասարման լուծման խտերացիոն եղանակ: Առաջարկված ալգորիթմները կարելի է կիրառել մեծ չափայնությամբ համակարգերի լուծման համար: Թվային օրինակների միջոցով ցոյց է տրված նշված ալգորիթմների արդյունավետությունը՝ հաշվի առնելով հաշվողական գործընթացների քանակն ու զբաղեցրած հիշողության ծավալը:

[68] Իոդվածում ծևակերպված է գծային ծրագրավորման խնդիր, որտեղ թույլատրելի լուծումը պարամետրականացնում է անընդհատ և դիսկրետ (CPA)' Լյապունովի ֆունկցիան ($V: D \rightarrow R$)՝ հիմնվելով այնպիսի ավտոնոմ համակարգի վրա, որի հավասարակշռության կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում և D հիպերխորանարդը ևս ընդգրկում է այդ սկզբնակետը: Ընդ որում գծային ծրագրավորման խնդիրը կախված է հիպերխորանարդի եռանկյունականացումից (triangulation): Ապացուցված է, որ եթե համակարգի հավասարակշռությունը կոորդինատների սկզբնակետում էքսպոնենցիալ կայուն է, իսկ հիպերխորանարդի եռանկյունականացումը բավարարում է որոշակի հատկությունների, ապա նման գծային ծրագրավորման խնդիրն ունի թույլատրելի լուծում: Ներկայացված է համակարգի համար նման գծային ծրագրավորման խնդիրներ գեներացնող ալգորիթմ, օգտագործելով ճշգրտվող եռանկյունականացում: Յուրաքանչյուր քայլում ալգորիթմը ստուգում է գծային ծրագրավորման խնդիրի լուծման թույլատրելիությունը: Արդյունքում վերջինս միշտ ունակ է հաշվել էքսպոնենցիալ կայուն հավասարակշռությամբ համակարգի Լյապունովի դիսկրետ ֆունկցիան: Ենթադրվում է, որ համակարգն ունի C^2 աջակողմյան տիրույթ: Մասնավորապես ենթադրվում է, որ համա-

կարգը չպետք է հանդիսանա գծային կամ դիսկրետ տիպի: Ներկայացված մոտեցումը հանդիսանում է CPA մեթոդի ոչ տրիվիալ ադապտացիան անընդհատ և դիսկրետ համակարգերի Լյապունովի ֆունկցիայի որոշման համար:

[77] աշխատանքում առաջարկված է $X = FXF^T + S$ տիպի մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակ: Ալգորիթմը հիմնված է մատրիցների սեփական թվերի որոշման QR ալգորիթմի վրա և արդյունավետորեն կիրառվում է մեծ չափողանություն ունեցող մատրիցային հավասարումների լուծման համար: Լուծված է մոդելային օրինակ, որը բացահայտում է ալգորիթմի արդյունավետությունը: Մեթոդը կարելի է կիրառել նաև $A^T X + XA + B = 0$ տեսքի ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման համար:

[90] հոդվածում ներկայացված է Ֆոն-Միզեսի ալգորիթմը $AX + XA^T + Q = 0$ տեսքով ներկայացվող Լյապունովի բարձր կարգ ունեցող հավասարումների լուծման դոմինանտ ինվարիանտների ենթաբազմության հաշվարկի համար՝ առանց X մատրիցը նախապես որոշելու: Ալգորիթմը կրում է իտերացիոն բնույթ և օգտագործում է Կոիլովի ենթաբազմությունների բազիսը՝ X , մատրիցա-վեկտորային արտադրյալները հաշվարկելիս: Ալգորիթմի կիրառման համար անհրաժեշտ է հաշվի առնել $A + A^T < 0$ պայմանը: Հաշվողական հետազոտությունների արդյունքները վկայում են, որ եթե X մատրիցի համար թույլատրելի է ցածր կարգի լուծում, ապա ալգորիթմն ապահովում է ենթաբազմության օրթոգոնալ բազիս, որը մոտարկում է համապատասխան չափողականությամբ դոմինանտ X -ինվարիանտների ենթաբազմությունը: Բերված են նաև զուգամիտության անալիտիկ արդյունքները:

[92] աշխատանքում ուսումնասիրված է Սիլվեստրի և Լյապունովի հավասարումների լուծման երկու դասական եղանակ՝ Բարտելս-Ստյուարտի եղանակը $A_1 X + XA_2 + D = 0$ և Համարլինի մեթոդը $AX + XA^T + BB^T = 0$ հավասարման լուծման

համար: Դիտարկված են ունիտար քվազի-եռանկյունածն համակարգերի լուծման երեք սխեմաներ: Մշակված սխեմաները համեմատվել են համապատասխան հավասարումների լուծման համար MATLAB միջավայրում մշակված միջոցների հետ և ցոյց են տրվել նշված սխեմաների առավելությունները: Համեմատություն է կատարվել նաև Լյապունովի հավասարման լուծման համար SLICOT միջավայրում մշակված միջոցի հետ:

Սիլվեստրի հավասարում [101]: Դիցուք տրված են $A_{n \times n}$, $B_{n \times n}$, $C_{n \times n}$, մատրիցները: Սիլվեստրի հավասարում է կոչվում հետևյալ մատրիցային հավասարումը.

$$A \cdot X + X \cdot B = C:$$

Սիլվեստրի հավասարման լուծման հայտնի եղանակ է Բարտելս-Ստյուարտի եղանակը [27], որտեղ A և B մատրիցները բերվում են Շուրի տեսքի [67]:

[54] աշխատանքում մշակված է Սիլվեստրի հավասարման լուծման եղանակ՝ հիմնված նշանային ֆունկցիայի մեթոդի վրա (matrix sign function method):

[60] աշխատանքում դիտարկված են ինչպես $A \cdot X \pm X^* \cdot B^* = C$ Սիլվեստրի հավասարման լուծման եղանակը, այնպես էլ $A \cdot X \cdot B^* \pm X^* = C$,
 $A \cdot X \cdot B^* \pm C \cdot X^* \cdot D^* = E$ և $A \cdot X \pm X^* \cdot A^* = C$ հավասարումների լուծման եղանակներ՝ հիմնված մատրիցների Շուրի և QR վերլուծությունների վրա:

[65] հոդվածում մշակված է $AX - XB = C$ հավասարման լուծման եղանակ, որտեղ լուծումը փնտրվում է $X = \sum_{j=1}^v \sum_{i=1}^{\mu} \gamma_{ij} A^{i-1} C B^{j-1}$ տեսքով:

[69] -ում դիտարկված է $A \cdot X + X \cdot B = C$ տեսքի Սիլվեստրի հավասարման լուծման եղանակ, որը Բարտելս-Ստյուարտի եղանակից տարբերվում է նրանով, որ A մատրիցը բերվում է Հեսսենբերգի տեսքի մատրիցի: Մշակված ալգորիթմը 30-70%-ով արագագործ է՝ կախված A և B մատրիցների չափայնությունից: Ալգորիթմի

կայունությունը ներկայացված է միջինացված սխալանքի վերլուծությամբ և թվային օրինակների թեստավորմամբ:

[73] հոդվածում ներկայացված են $AX - XB = C$ տեսքի Սիլվեստրի հավասարման Գալերկինի և մինիմալ սխալանքի ալգորիթմները: Վերջիններիս իրականացման համար օտագործված են Կոհլովի ենթատարածությունները, որտեղ օրթոգոնալ բազիսները ստացվում են Առնոլդի պրոցեսների միջոցով: Կոհլովի որոշակի տարածության ընտրման դեպքում խնդրի լուծումը բերվում է մի քանի անկախ խնդիրների լուծման, որունք թույլ են տալիս խնդիրը լուծել մի քանի պրոցեսորների վրա միաժամանակ:

[74] հոդվածում դիտարկված են Սիլվեստրի տիպի այնպիսի մատրիցային հավասարումներ, որոնք ունեն միակ լուծում: Այս դեպքում լուծումը ներկայացվում է հայտնի մատրիցների բնութագրիչ բազմանդամների միջոցով:

[79] աշխատանքում ներկայացված է $AX + XB = C$ տեսքի գծային մատրիցային հավասարումների լուծման ընդհանրացված եղանակ: Բոլոր տարրերը չեն չափանի մատրից փոփոխականներով նախնական հավասարումը դիտարկվում է որպես $LX = C$ տեսքի վեկտոր փոփոխականներով հավասարում: Որպես արդյունք բացի ընդհանրացված լուծման եղանակից, ներկայացված է նաև խնդրի լուծման գոյության երկու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

[92] աշխատանքում դիտարկված է Սիլվեստրի հավասարման լուծման Բարտելս-Ստյուարտի եղանակը:

[95] հոդվածում ներկայացված է $AX+XB = C$ տեսքի Սիլվեստրի M-մատրիցային (մատրից, որի բոլոր տարրերը, բացի գլխավոր անկյունագծի տարրերից, բացասական են կամ զրո և սեփական թվերի իրական մասերը դրական են) հավասարման լուծման թվային եղանակ: Ընդ որում A և B մատրիցները ոչ սինգուլյար M-

մատրիցներ են (կամ դրանցից մեկը), $P = I_m \otimes A + B^T \otimes I_n$ -ն ոչ սինգուլյար M-մատրից է, իսկ C -ն դրական որոշված է:

Պարզագույն ոչ գծային ավտոնոմ մատրիցային հավասարումներ:
Ենթադրենք տրված են $A_{m \times n}$ և $B_{n \times m}$ մատրիցները: Պարզագույն ոչ գծային մատրիցային հավասարում կանվանենք հետևյալ հավասարումը.

$$X_{n \times m} \cdot A_{m \times n} \cdot X_{n \times m} = B_{n \times m},$$

որը Ոիկկատիի հավասարման մասնավոր դեպքն է:

Ոիկկատիի հավասարում [98]: Դիցուք տրված են $A_{n \times n}$, $B_{n \times m}$, $R_{m \times m}$ և $Q_{n \times n}$ մատրիցները: Ոիկկատիի անընդհատ հավասարում է [81] կոչվում հետևյալ մատրիցային հավասարումը.

$$A^T \cdot X + X \cdot A - X \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot X + Q = 0,$$

իսկ Ոիկկատիի դիսկրետ հավասարում [81]՝

$$X = A^T \cdot X \cdot A - (A^T \cdot X \cdot B) \cdot (R + B^T \cdot X \cdot B)^{-1} (B^T \cdot X \cdot A) + Q = 0:$$

Հարկ է նշել, որ Ոիկկատիի հավասարման լուծմանն է հանգում օպտիմալ գծային կառավարման հետևյալ խնդիրը [24, 27, 47].

$$\dot{x}(t) = A_{n \times n} \cdot x(t) + B_{n \times m} \cdot u(t),$$

ընդ որում որակի չափանիշը տրված է հետևյալ տեսքով՝

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt,$$

որտեղ R -ը և Q -ն սիմետրիկ մատրիցներ են, ընդ որում R -ը դրական որոշված է, Q -ն՝ դրական կիսորոշված: Այս դեպքում կունենանք Ոիկկատիի հետևյալ հավասարումը.

$$X \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot X - A^T \cdot X - X \cdot A - Q = 0,$$

իսկ օպտիմալ կառավարումը կորոշվի այսպես՝

$$u^* = -R^{-1} \cdot B^T \cdot X :$$

Համանման կերպով Ոիկկատիի դիսկրետ առնչությունը ստացվում է, եթե որակի չափանիշի ինտեգրալային արտահայտությունը փոխարինենք գումարով, իսկ X և u փոփոխականների արգումենտը՝ k -ով ($k = \overline{0, \infty}$):

[26] – ում հետազոտվում են փոփոխական գործակիցներով Ոիկկատիի մատրիցային հավասարման տարբեր մոտեցումներ: Ապացուցված է, որ այս հավասարման բարդությունը որոշում է Զիգելի վերին ընդհանրացված կիսահարթության հոսքը և կիսահարթության սահմանները կազմող ստրատներից յուրաքանչյուրի համար: Ներմուծվում է գրասսմանի բազմության քառյակ կետերի կրկնակի մատրիցային հարաբերության հասկացությունը և ներկայացվում են վերջինիս կիրառությունները: Մասնավորապես, բերված է փոփոխական գործակիցներով Ոիկկատիի մատրիցային հավասարմամբ որոշվող $G_n(R^{2n})$ հոսքով տեղափոխվող բազմությունների գույքի իզոկլինության պահպանման չափանիշը: Դիտարկվում են քառակուսային որակի չափանիշով օպտիմալ կառավարման երկգծային խնդիրները, որոշվում են համապատասխան էքստրեմալները և վերջիններով որոշվող Ոիկկատիի մատրիցային հավասարումները:

[55] հոդվածում ուսումնասիրվում են լայնամասշտաբ/բազմաչափ, գծային, ժամանակի ընթացքում անփոփոխ, նոսր կամ համակարգված մատրիցով և մուտքերի ու ելքերի համեմատաբար քիչ քանակությամբ կառավարման համակարգերը: Այս աշխատանքի հիմնական ներդրումը Լյապունովի և Ոիկկատիի փոփոխականների մեջ քանակությամբ հավասարումների, ինչպես նաև վերջիններից բխող քառակուսա-գծային օպտիմալ կառավարման խնդիրների լուծման հաշվողական ալգորիթմների մշակումն է: Նախ և առաջ դիտարկված է Լյապունովի լայնածավալ

հավասարումների լուծման մատրիցի՝ Խոլեցկու տրոհման ցածր աստիճանի գործակիցների մոտարկման փոփոխական ուղղությամբ իտերացիոն մեթոդը և առաջարկված է վերջինիս կատարելագործված տարբերակը: Այնուհետև ներկայացված են այս մեթոդի և Նյուտոնի մեթոդի տարատեսակներից մեկի՝ Կլեյնմանի իտերացիաների մեթոդի, համադրման արդյունքները լայնածավալ Ռիկատիի հավասարումների լուծման համար: Վերջապես, նկարագրված է քառակուսա-գծային օպտիմալ կառավարման խնդիրների լուծման ալգորիթմի ենթադրվող տարբերակը: Ալգորիթմները արդյունավետ են ինչպես հաշվողական, այնպես էլ ծրագրային իրականացման համար պահանջող հիշողության տեսակետից: Մասնավորապես, դրանք կարող են կիրառվել շատ մեծ չափողականությամբ խնդիրների լուծման համար, եթե համակարգչի հիշողությունը չի բավականացնում համակարգի/խնդրի չափողականությամբ քառակուսային, նոսր մատրիցները պահելու համար: Ալգորիթմների արագագործությունը գնահատվել է հաշվողական մի շարք փորձարկումներով:

Ռիկատիի հանրահաշվական հավասարման սիմետրիկ լուծման որոշման համար Նյուտոնի մեթոդի կիրառության դեպքում զուգամիտությունը երաշխավորվում է միայն սահմանափակ պայմաններում [71]: Մասնավորապես, ընտրված սկզբանակետը պետք է հեռու լինի լուծումից: Զուգամիտությունը քառակուսային է, եթե ֆրեշեի ածանցյալները դառնալի/շրջելի են լուծման համար: Այս աշխատանքում հետազոտված է Նյուտոնի մեթոդի վարքը նշված ածանցյալների անշրջելիության դեպքում և առաջարկված է պարզ ձևափոխություն, որն զգալիորեն բարելավում է Նյուտոնի մեթոդի արագագործությունը:

[82] աշխատանքում ներկայացված է Ռիկատիի հավասարման (անընդհատ և դիսկրետ) լուծման նոր եղանակ: Վերջինս սեփական վեկտորների որոշման դասական մոտեցման տարբերակն է և օգտագործում է Շուրի վեկտորների

համապատասխան համախումբը՝ ապահովելով նշանակալի հաշվողական առավելություններ: Մեծ ուշադրություն է հատկացված հաշվողական մի շարք բարդությունների քննարկմանը: Մեթոդը հաշվողական տեսանկյունից կայուն է և հուսափիրեն կիրառելի է մինչև 100-րդ կարգի խիտ մատրիցներով համակարգերի համար:

Մեծ չափողականությամբ Ռիկատիի հանրահաշվական հավասարումների լուծման խնդիր առաջանում է մոտարկումների օգտագործմամբ մասնակի դիֆերենցիալ հավասարումներով մոդելավորվող կոնտրոլերային համակարգերի նախագծման ժամանակ [86]: Մեծ չափողականությամբ մոդելների դեպքում սեփական վեկտորների որոշման վրա հիմնված ուղիղ մեթոդները չեն գործում: Այս աշխատանքում նկարագրված է իտերացիոն մեթոդ, որը որպես առավելություն օգտագործում է նշված խնդիրների որոշակի յուրահատկություններ՝ մատրիցների նոսրությունը, շատ ավելի քիչ կարգավորումներ քան մոտարկման աստիճանը, զուգամիտությունը մոդելի կարգի աճի հետ զուգընթաց: Ալգորիթմը բավականին պարզ է կոդավորման տեսակետից: Արագագործությունը լուսաբանված է մի շարք ստանդարտ օրինակների լուծմամբ:

[87] հոդվածը նվիրված է սահմանային պայմանի տերմինալով Ռիկատիի մատրիցային դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը: Ռիկատիի մատրիցային հավասարման լուծումը տրված է Ռիկատիի հավասարման հանրահաշվական ձևի օգտագործմամբ: Մշակված մեթոդը լուսաբանված է գործնական օրինակի լուծմամբ:

[94] – ում դիտարկված է կոմպլեքս տարրերով $XDX+XA+AX^*-C=0$ տեսքի Ռիկատիի մատրիցային հավասարումը:

[96] աշխատանքի նպատակն է վիճակի կառավարման խառը սահմանափակումներով օպտիմալ կառավարման խնդիրների երկրորդ կարգի պայմանների

բազմակողմանի ուսումնասիրությունը: Ներկայացված են համալուծ կետի տեսությունը և անհրաժեշտ պայմանները, ստացվել է համապատասխան Ռիկատիի հավասարումը: Մշակվել են անհրաժեշտ պայմանների ամրապնդման բավարար չափանիշները այդ թվում նաև Ռիկատիի հավասարումը: Արդյունքներն ամփոփում են կառավարման մաքուր սահմանափակումների, ինչպես նաև վիճակի խառը սահմանափակումների համար արդեն իսկ հայտնիները:

Ստոխաստիկ օպտիմալ կառավարման խնդիրները լուծելու համար ահրաժեշտ է լուծել Ռիկատիի հավասարումը [97]: Արդյունքներն ամփոփում են Վիթլի կողմից ապացուցված թեորեմը, ինչպես նաև հեղինակների կողմից արդեն իսկ դիտարկված միաչափ դեպքը: Որպես մասնավոր դեպք լուծվել է երկչափ խնդիր:

1.3. Ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումներն ու դրանց նվիրված աշխատանքները

Ներկայացնենք մատրիցային հավասարումների տարատեսակները, երբ հավասարման գործակից մատրիցները և անհայտ մատրիցները կախված են որոշակի t արգումենտից:

Պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարում.

$$A_{m \times m}(t) \cdot X_{m \times n}(t) \cdot B_{n \times n} = C_{m \times n}(t), \quad (1.3.1)$$

Գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարում.

$$A_{m \times m}(t) \cdot X_{m \times n}(t) + X_{m \times n}(t) \cdot B_{n \times n}(t) = C_{m \times n}(t), \quad (1.3.2)$$

Այն դեպքում, եթե $B_{n \times n}(t) = A_{m \times m}^*(t)$, (1.3.2) Սիլվեստրի տիպի մատրիցային հավասարումը վերածվում է Լյապունովի տիպի մատրիցային հավասարման:

Պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարում.

$$X_{n_{xm}}(t) \cdot A_{m_{xn}}(t) \cdot X_{n_{xm}}(t) = B_{n_{xm}}(t); \quad (1.3.3)$$

Ոիկկատիի տիպի ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարում.

$$A(t)_{n_{xi}} X_{n_{xm}}(t) + X_{n_{xm}}(t) B_{m_{xn}}(t) + X_{n_{xm}}(t) C_{m_{xn}}(t) X_{n_{xm}}(t) = D_{n_{xm}}(t), \quad (1.3.4)$$

Ստորև հակիրճ ներկայացնենք ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումներին նվիրված մի քանի աշխատանքները:

[61] ատենախությունը նվիրված է գծային հավասարումների համակարգերի լուծմանը, որտեղ գործակիցների մատրիցը և աջ մասերը պարամետրականացվում են անկախ փոփոխականների բազմությամբ: Այդ փոփոխականներից յուրաքանչյուրն ունի իր սեփական միջակայքը և ենթադրվում է, որ արտադրյալների տարածության կշռային ֆունկցիան ընդգրկում է այդ փոփոխականները: Ենթադրելով, որ մատրիցի տարրերի և աջ մասի պարամետրական կախվածություններն անալիտիկ տեսք ունեն «այսինքն կարող են ներկայացվել աստիճանային շարքերի տեսքով» և պահանջելով, որպեսզի մատրիցը լինի ոչ սինգուլյար պարամետրի յուրաքանչյուր արժեքի համար, ապահովում ենք եզակի լուծման գոյությունը: Աշխատանքում ներկայացվում են մի շարք բազմապարամետրական մոտարկման մեթոդներ, որոնք հայտնի են որպես սպեկտրային մեթոդներ, պարամետրերի տարածության յուրաքանչյուր կետում պարամետրականացված հավասարումների համակարգին բավարարող ֆունկցիայի մոտարկման համար:

[62] - ը նվիրված է պարամետրականացված, ստոխաստիկ մոտքերով մասնակի ածանցյալներով հավասարումների լուծումների Գալերկինի սպեկտրալ մոտարկումից բխող գծային հավասարումների համակարգերի լուծման մոտեցումների ուսումնասիրմանը: Դիտարկված են մատրիցային հավասարումներ, որոնց

գործակից մատրիցը և աջ մասերը կախված են պարամետրերի որոշակի բազմությունից «այսինքն տարածության մեջ մասնակիորեն դիսրետացված ստույաստիկ մուտքերով մասնակի ածանցյալներով հավասարումներ» և հետազոտված է վերջինիս լուծման Գալերկինի մոտարկումից առաջացող գծային համակարգը: Ստացված է այս հավասարումների համակարգի օգտակար ֆակտորիզացիայի միջոց և խնդիրների լայն խմբի համար ճկուն մեթոդ, որն ընդլայնում է սեփական վեկտորների սահմանները, պարզեցնում է նախնական մշակումը: Վերլուծությունը համարվում է ստանդարտ էլիպսոիդալ մասնակի ածանցյալներով հավասարումների փորձնական համակարգի նախնական պայմանների թվային հետազոտմամբ գոյություն ունեցող CFD կոդերի օգտագործմամբ հեղուկների կիրառությունը: Թվային հետազոտություններում օգտագործվող MATLAB կոդն առկա է համացանցում:

[70] աշխատանքը նվիրված է համակարգերի և կառավարման տեսությունում առաջացող որոշակի պարամետրից կախված Սիլվեստրի հասավարումների լուծմանը: Ենթադրվում է, որ մատրիցները պարամետրական են, պարտադիր չեն, որ ունենան նույն չափողականությունը, պարամետրի արժեքից կախված՝ ունենան նույն բազիսով սեփական վեկտորներ:

[72] աշխատանքում ներկայացված է $A(t)V(t) + WA(t) = G(t)$ տեսքի մատրիցային հավասարումների լուծման արագ զուգամիտող իտերացիոն ալգորիթմ: Այսպիսի հավասարումների համակարգեր առաջանում են պարաբոլային համակարգերի և ժամանակի ընթացքում փոփոխվող գծային համակարգերի Լյապունովի մեթոդով կայունությունն ուսումնասիրելիս: Յուրաքանչյուր ժամանակային միջակայքի համար ցանկալի լուծումը ստացվում է $AV+WA=G$ տեսքի համեմատաբար փոքր չափողականությամբ մատրիցային հավասարման լուծումից, քան ոռոչո կարգի պարամետրա-

կան գործակիցներով սովորական հանրահաշվական գծային հավասարումներին դիմելիս:

[76] - ում դիտարկվում են կրկնակի դիֆերենցելի գործակիցներով ոչ ավտոնոմ Ռիկատիի տիպի մատրիցային դիֆերենցիալ հավասարումներ: Նախ որոշվում է սկզբնական պայմաններով խնդիրների տվյալների տեսակետից ինտերվալի գոյությունը, այնուհետև վերջինիս կետերի ցանցի համար գծային միաքայլ մատրիցային մեթոդների կիրառմամբ կառուցվում է դիսկրետ թվային լուծումը: Վերջապես օգտագործելով գծային մատրիցային B-սիլայն ֆունկցիաները, որոշվում է սխալանքի գնահատմամբ անընդհատ թվային լուծումը: ζ աշվի առնելով $\varepsilon > 0$ թույլատրելի սխալանքը կառուցում են անընդհատ թվային լուծումը, որի սխալանքը գոյության տիրույթում վերևից սահմանափակված է ε -ով:

[78] Իոդվածը նվիրված է սիմետրիկ, մեծ չափողականությամբ Լյապունովի հավասարումներին, որտեղ աջ մասերն ու մատրիցային գործակիցները պարամետրական են և ունեն ցածր ռանգ: Մասնավորապես դիտարկվում է բավականին ողորկ պարամետրական կախվածություններով դեպքը և նպատակն է պարամետրերի մի շարք տարբեր արժեքների համար լուծումների որոշումը: Հիմնվելով Լյապունովի հավասարումների համար ստացված արդյունքների վրա բոլոր հնարավոր լուծումները պարունակող տեսզորն ընձեռում է ռանգից ցածր գծայնությամբ մոտարկման հնարավորություն: Բոլոր հավասարումները մեկ գծային հիպերիամակարգում խմբավորումը հնարավոր է դառնում նախնական պայմաններով CG մեթոդի և ռանգից ցածր գծայնությամբ մոտարկման մեթոդների միավորման արդյունքում: Այս մոտեցումը բավականին ճկուն է բազմատեսակ նախնական պայմանների նկատմամբ:

[80] աշխատանքում դիտարկվում է պարամետրական կախվածությամբ $(A_0 - \nu C_1 C_2^T)X(\nu) + X(\nu)(B_0 - \nu D_1 D_2^T) = E$ Սիլվեստրի հավասարման լուծման օպտիմալացման արդյունավետ ալգորիթմ, որտեղ A_0, B_0 -ն համապատասխանաբար $m \times m$ և $n \times n$ -չափանի մատրիցներ են, C_1 -ը և C_2 -ը՝ $m \times r_1$, D_1 -ը և D_2 -ը՝ $n \times r_2$, X, E -ն՝ $m \times n$ չափայնությամբ մատրիցներ են, ν -ն՝ իրական պարամետր է: Օպտիմալացման համար օգտագործվում են օպտիմալացման հետևյալ չափանիշները՝ $Tr(X(\nu)) \rightarrow \min$ և $\|X(\nu)\|_F \rightarrow \min$: Ստացված առնչությունների հիման վրա ներկայացվում է X լուծման հետքի՝ $\nu \rightarrow Tr(X(\nu))$ և Ֆրոբենիուսի նորմի՝ $\nu \rightarrow \|X(\nu)\|_F$, ինչպես նաև նշված ֆունկցիաների ածանցյալների որոշման արդյունավետ ալգորիթմ: Այս հանգամանքն ապահովում է նշված ֆունկցիաների օպտիմալացում՝ գոյություն ունեցող ստանդարտ օպտիմալացման մեթոդներով: Այս խնդրի մասնավոր դեպքը չափազանց կարևոր խնդիր է մեխանիկական համակարգերում՝ կափույր մածուցիկության օպտիմալացման համար:

Սիլվեստրի հավասարումն առավել հաճախ հանդիպում է մաթեմատիկայի և կառավարման բնագավառներում [83]: Բարտելս-Ստյուարտի եղանակը և դրա ընդլայնումները բավականին արդյունավետ են, ունեն $O(n^3)$ բարդության աստիճան և լայնորեն կիրառվում են կոմպլեքս թվերի տիրույթում որոշված Սիլվեստրի ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման համար: Սիլվեստրի տիպի ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների համար հաշվողական բարդությունն աճում է ընտրանքի ժամանակահատվածի ինտենսիվ նվազման հետ մեկտեղ և չի կարող բավարարել իրական ժամանակում հաշվարկի անընդհատության պայմանները: Մասնավոր դեպքում, եթե Սիլվեստրի տիպի հավասարումը նկարագրվում է իրական թվերի բազմությունում, զուգահեռ գրադիենտային նեյրոնային ցանցերը

հնարավորություն են ընծեռում իրական ժամանակում ստանալ ոչ ավտոնոմ հավասարման լուծումը, սակայն միշտ առկա է գնահատման ենթակա սխալանք, մինչդեռ Զհանգի կողմից մշակված պարբերական նեյրոնային ցանցը (ZNN) զուգամիտում է հավասարման լուծմանը: Նեյրոնային ցանցերի կոմպլեքս թվերի տիրույթում վերջին ձեռքբերումները թույլ են տալիս գոյություն ունեցող իրական ZNN-ի հնարավորություններն ընդլայնել կոմպլեքս թվերի տիրույթում նկարագրվող ոչ ավտոնոմ Սիլվեստրի հավասարման լուծման համար: Այս աշխատանքում հետազոտվել են կոմպլեքս տարրերով Սիլվեստրի տիպի հավասարման լուծումը՝ օգտագործելով կոմպլեքս ZNN-ը և ապացուցվել են նեյրոնային ցանցի գլոբալ զուգամիտությունը ոչ գծային կոմպլեքս ֆունկցիաների միջոցով: Սահմանվել է ֆունկցիա, որն ապացուցում է ZNN-ի զուգամիտումը վերջավոր ժամանակում, ինչն ավելի է կարևորում մշակման առավելությունները, ընդ որում զուգամիտության վերին սահմանը կարելի է ստանալ անալիտիկ տեսքով: Իրականացվել են տեսական և թվային մոդելավորման վերլուծություններ, որոնք հաստատում են առաջարկված մեթոդի արդյունավետությունը:

[84] – ում ներմուծված է Դիրակի մատրիցային հավասարման հասկացությունը, որը կարող է դիտարկվել որպես Դիրակի ֆունկցիայի ընդհանրացում էլեկտրոնի համար: Քննարկվում է Դիրակի սովորական հավասարման և Դիրակի մատրիցային հավասարման միջև կապը, կազմված է լագրանժյանը, որից բխում է Դիրակի մատրիցային հավասարումը: Այս լագրանժյանը հաստատուն է անկախ փոփոխականների գլոբալ միասնական փոխակերպումներից: Լագրաժյանի հաստատումության պայմանը հանգեցնում է տրամաչափային դաշտերով լագրանժյանների:

Վերջին ժամանակներս Կոհլիովի ընդլայնված ենթաքազմությունը լայն կիրառություն է գտել որպես հզոր միջոց մատրիցային ֆունկցիաների գնահատման և մեծ մատրիցներ ներառող մի շարք այլ խնդիրներում [91]: Այս աշխատանքի շրջանակներում ցուց է տրվում, որ նշված բազմությունը հսկայական պոտենցիալ ունի պրոյեկցիոն տիպի մեթոդների շարքում՝ մեծածավալ հանրահաշվական խնդիրների արդյունավետ լուծման համար: Մեծ ուշադրություն է դարձվել շեղումներով համակարգերին և առավել ընդհանուր պարամետրական կախվածություններով մատրիցային հավասարումներին, ինչպես նաև փոխանցող ֆունկցիայի մոտարկմանը: Գործնական օրինակների վրա հիմնված հաշվողական փորձարկումներն ապացուցում են մոտեցման արդյունավետությունը:

1.4. Ատենախոսության նպատակները

Ընդհանրացնելով դիտարկված աշխատանքների վերլուծության արդյունքները՝ կարելի է եզրակացնել, որ ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակները սակավաթիվ են: Իրականացված հիմնական աշխատանքներն ուղղված են ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման այնպիսի եղանակների մշակմանը, որոնք անհամեմատ մեծացնում են հավասարման մատրիցների կարգը (օգտագործելով կրոնեկերյան արտադրյալներ):

Գոյություն ունեցող մեթոդները, նույնիսկ այս համեմատաբար պարզ խնդրի լուծման համար, սահմանափակ կիրառություններ ունեն՝ ոչ ավտոնոմ մատրիցի տեսքին և հատկություններին ներկայացվող մի շարք սահմանափակումների պատճառով (մասնավորապես ոչ ստացիոնար քառակուսային մատրիցը ոչ սինգուլյար է, սիմետրիկ): Ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների համար

մշակված դասական եղանակները հիմնականում չեն ընդհանրացվել ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման համար: Այն հայտնի եղանակները (մասնավորապես Բարտելս-Ստյուարտի), որոնք արդյունավետ կիրառություններ են գտել ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման համար, ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման համար կարելի է կիրառել օգտվելով սառեցված գործակիցների մեթոդից: Վերջինս հանգեցնում է այնպիսի խնդիրների, ինչպիսիք են՝ մոտարկման միջակայքի երկարության ընտրությունը, միջակայքի վրա ընտրված կետերի քանակի որոշումը, մոտարկման բազմանդամի ընտրությունը, հատվածի եզրերում ի հայտ եկող Ռունգեի էֆեկտի նվազեցումը, ճյուղավորման խնդիրը և այլն: Գոյություն ունեցող մեթոդների նշված թերություններից խուսափելու նպատակով անհրաժեշտություն է առաջանում մշակել նոր մեթոդներ:

Այսպիսով ատենախոսության նպատակներն են.

- Մշակել ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման նոր մեթոդներ՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա, որոնք կիրառելի են մոտարկման կենտրոնում ողորկ տարրերով ցանկացած տեսքի ոչ ստացիոնար մատրիցների համար:
- Մշակված մեթոդների հիման վրա, ծրագրավորման C++ լեզվով, մշակել կիրառական ծրագրերի փաթեթ, որն օգտագործողին հնարավորություն կընձեռի ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների յուրաքանչյուր դասի նախնական տվյալները ներմուծել և հավասարման լուծումները ստանալ երկխոսային ռեժիմի պատուհանների օգտագործմամբ:
- Իրականացնել մշակված մեթոդների փորձնական հետազոտություններ, ինչպես նաև համեմատական վերլուծություն՝ միմյանց և ֆիքսված կետերի համար հայտնի եղանակով ստացված արդյունքների հետ: Մշակված մեթոդների

արդյունավետությունը գնահատելու նպատակով ստանալ մշակված եղանակների յուրաքանչյուր քայլում իրականացվող գործողությունների քանակական գնահատականներ:

ԳԼՈՒԽ 2.

ՈՉ ԱՎՏՈՆՈՄ ԳԾԱՅԻՆ ԵՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒՇՄԱՆ ԹՎԱ-ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՄԵԹՈԴՆԵՐ ՀԻՄՆՎԱԾ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ

2.1. Պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների

լուծման եղանակները

2.1.1 Շուրջի վերլուծության վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակը [15]

Դիցուք տրված են $m \times m$ չափայնությամբ $A(t)$, $n \times n$ չափայնությամբ $B(t)$ և $m \times n$ չափայնությամբ $C(t)$ մատրիցները, որոնց բոլոր տարրերը $t = t_v$ մոտարկման կենտրոնում ունեն անվերջ կարգի ածանցյալներ ըստ t փոփոխականի: Ներկայացնենք

$$A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) = C(t) \quad (2.1.1)$$

պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարման լուծման ընթացակարգը՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա [33-38]:

(2.1.1) մատրիցային հավասարումը տեղափոխենք դիֆերենցիալ պատկերների տիրույթ համաձայն դիֆերենցիալ ձևափոխությունների հանրահաշվի կանոնների [33]: Կունենանք՝

$$\sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) = C(K), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.1.2)$$

որտեղ $A(p)$, $p = \overline{0, K}$; $X(q)$, $q = \overline{0, K}$; $B(r)$, $r = \overline{0, K}$ և $C(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ մատրիցները համապատասխանաբար $A(t)$, $X(t)$, $B(t)$ և $C(t)$ մատրիցների մատրիցային դիսկրետներն են: (2.1.2) –ից հետևում է

$$A(0) \cdot X(K) \cdot B(0) + \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K-1, r=K} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) = C(K), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.1.3)$$

որտեղից

$$A(0) \cdot X(K) \cdot B(0) = C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K-1, r=K} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r), \quad K = \overline{0, \infty}: \quad (2.1.4)$$

Կատարենք

$$D(K) = C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K-1, r=K} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r), \quad K = \overline{0, \infty} \quad (2.1.5)$$

նշանակումը: Հաշվի առնելով (2.1.5)-ը (2.1.3) առնչությունը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$A(0) \cdot X(K) \cdot B(0) = D(K), \quad K = \overline{0, \infty}: \quad (2.1.6)$$

Ստացված թվային մատրիցային հավասարումները լուծենք օգտվելով Շուրի վերլուծությունից [27, 52, 67]: Վերջինիս համաձայն (2.1.6)-ը կներկայացնենք այսպես՝

$$U_A(0) \cdot \tilde{A}(0) \cdot U_A^T(0) \cdot X(K) \cdot U_B(0) \cdot \tilde{B}(0) \cdot U_B^T(0) = D(K), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.1.7)$$

որտեղ $\tilde{A}(0)$ -ն և $\tilde{B}(0)$ -ն վերին եռանկյունաձև մատրիցներ են, $U_A(0)$ -ն և $U_B(0)$ -ն ունիտար մատրիցներ են, այսինքն համապատասխանաբար $U_A^{-1}(0) = U_A^T(0)$ և $U_B^{-1}(0) = U_B^T(0)$: Հաշվի առնելով ունիտարության պայմանները կունենանք՝

$$\tilde{A}(0) \cdot U_A^T(0) \cdot X(K) \cdot U_B(0) \cdot \tilde{B}(0) = U_A^T(0) \cdot D(K) \cdot U_B(0), \quad K = \overline{0, \infty}: \quad (2.1.8)$$

Նշանակենք

$$Y(K) = U_A^T(0) \cdot X(K) \cdot U_B(0), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.1.9)$$

$$\tilde{D}(K) = U_A^T(0) \cdot D(K) \cdot U_B(0), \quad K = \overline{0, \infty}: \quad (2.1.10)$$

Հաշվի առնելով նշանակումները (2.1.8)-ը ներկայացնենք հետևյալ կերպ՝

$$\tilde{A}(0) \cdot Y(K) \cdot \tilde{B}(0) = \tilde{D}(K), \quad K = \overline{0, \infty}: \quad (2.1.11)$$

Անհայտ փոփոխականը որոշենք հետևյալ արտահայտությամբ.

$$X(K) = U_A(0) \cdot Y(K) \cdot U_B^T(0), \quad K = \overline{0, \infty}: \quad (2.1.12)$$

Այսպիսով, հերթականությամբ լուծելով (2.1.11) հավասարումները, որոնց ձախ մասերը վերին եռանկյունաձև մատրիցներ են, հեշտությամբ կորոշենք պահանջվող մատրիցային դիսկրետները, հետևապես $Y(K), K = \overline{0, \infty}$, մատրիցների տարրերը՝ ըստ հետևյալ առնչության

$$Y(K)_{ij} = \frac{\tilde{D}(K)_{ij} - \tilde{A}(0)_{ii} \sum_{p=1}^{j-1} \tilde{B}(0)_{pj} Y(K)_{ip}}{\tilde{A}(0)_{ii} \tilde{B}(0)_{jj}}, \quad i = \overline{m, 1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad K = \overline{0, \infty}: \quad (2.1.13)$$

Ներկայացնենք պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման վերը նշված եղանակի հաշվողական բնութագրերը: Այ.2.1.1-ում ներկայացված են յուրաքանչյուր քայլում իրականացվող բազմապատկման («*») և գումարման («+») գործողությունների անալիտիկ արտահայտությունները՝ կախված մատրիցների չափայնություններից:

Աղյուսակ 2.1.1

Գործողությունների քանակը յուրաքանչյուր քայլում
(պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումներ)

Գործողությունը	«*»-ների քանակը	«+»-ների քանակը
$C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r)$	$(m^2n + n^2m)(0.5(K^2 + 3K + 2) - 1)$	$(0.5(K^2 + 3K + 2) - 1)((m+n-2)mn + mn)$
$U_A^T(0) \cdot D(K) \cdot U_B(0),$ $\frac{\tilde{D}(K)_{ij} - \tilde{A}(0)_{ii} \sum_{p=1}^{j-1} \tilde{B}(0)_{pj} Y(K)_{ip}}{\tilde{A}(0)_{ii} \tilde{B}(0)_{jj}},$ $U_A(0) \cdot Y(K) \cdot U_B^T(0)$	$3(m^2n + n^2m)(K+1)$	$3(m+n-2)mn(K+1)$

Արդյունարար գնահատականները կլինեն՝

$$N^{(*)} = (3m(K+1) + m(K^2/2 + (3K)/2))n^2 + (m^2(K^2/2 + (3K)/2) + 3m^2(K+1))n,$$

$$N^{(+)} = (3m(K+1) + m(K^2/2 + (3K)/2))n^2 + (m(K^2/2 + (3K)/2) + m(3m-6)(K+1) + m(K^2/2 + (3K)/2)(m-2))n:$$

Նկատենք, որ բերված արտահայտություններում $K=0$ տեղադրելու դեպքում կստանանք հաշվողական բնութագրերը ավտոնոմ մատրիցների համար:

Դիտողություն: Հարկ է նշել, որ Շուրի վերլուծության ենթարկվում են միայն քառակուսային մատրիցները [67], ընդ որում մատրիցի որոշիչը պետք է տարբերվի զրոյից: Ուստի, Շուրի վերլուծության վրա հիմնված եղանակը կիրառելի է միայն քառակուսային, ոչ զրոյական որոշիչով գործակից մատրիցների դեպքում:

2.1.2. Տիխոնովի ռեգույարացման եղանակի վրա հիմնված

դիֆերենցիալ եղանակը [14]

Դիտարկենք $m \times n$ չափայնությամբ $A(t)$, $s \times n$ չափայնությամբ $B(t)$ և $m \times n$ չափայնությամբ $C(t)$ մատրիցներով կազմված հետևյալ պարզագույն գծային մատրիցային հավասարումը

$$A_{mxv}(t) \cdot X_{vxs}(t) \cdot B_{sxn}(t) = C_{mxn}(t): \quad (2.1.14)$$

Ընդ որում բոլոր տարրերը $t = t_v$ մոտարկման կենտրոնում ունեն անվերջ կարգի ածանցյալներ ըստ t փոփոխականի [9,39]:

(2.1.14) առնչությունը դիֆերենցիալ պատկերների տիրուպթում [39] ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) = C(K), \quad (2.1.15)$$

որտեղ $A(p) \equiv A(t)$, $X(q) \equiv X(t)$, $B(r) \equiv B(t)$, $C(K) \equiv A(t)$ -երը համապատասխանաբար m_{XV} , v_{XS} , s_{XN} և m_{XN} չափայնությամբ մատրիցային դիսկրետներն են:

(2.1.15) –ից ունենք՝

$$A(0) \cdot X(K) \cdot B(0) + \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K-1, r=K} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) = C(K), \quad (2.1.16)$$

որտեղից

$$A(0) \cdot X(K) \cdot B(0) = C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K-1, r=K} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r); \quad (2.1.17)$$

(2.1.17) արտահայտությունը ձախից բազմապատկենք $A^+(0)$, իսկ աջից՝ $B^+(0)$ ընդհանրացված կերծ հակադարձ մատրիցներով: Այդ ռեպրում կունենանք

$$A^+(0) \cdot A(0) \cdot X(K) \cdot B(0) \cdot B^+(0) = A^+(0) \cdot \left[C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K-1, r=K} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) \right] \cdot B^+(0); \quad (2.1.18)$$

Նշանակենք

$$\tilde{A}(0) = A^+(0) \cdot A(0), \quad \tilde{B}(0) = B(0) \cdot B^+(0); \quad (2.1.19)$$

(2.1.18) առնչությունը կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$\tilde{A}(0) \cdot X(K) \cdot \tilde{B}(0) = A^+(0) \cdot \left[C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K-1, r=K} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) \right] \cdot B^+(0); \quad (2.1.20)$$

Նշենք, որ $\tilde{A}(0)$ և $\tilde{B}(0)$ մատրիցների համար կարող է տեղի ունենալ հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը.

$$\tilde{A}(0) = E_{v_X v}, \quad \tilde{B}(0) = E_{s_X s}, \quad (2.1.21)$$

$$\tilde{A}(0) \neq E_{v_X v}, \quad \tilde{B}(0) = E_{s_X s}, \quad (2.1.22)$$

$$\tilde{A}(0) = E_{v_X v}, \quad \tilde{B}(0) \neq E_{s_X s}, \quad (2.1.23)$$

$$\tilde{A}(0) \neq E_{v_X v}, \quad \tilde{B}(0) \neq E_{s_X s}; \quad (2.1.24)$$

[40] աշխատանքում ներկայացված է $X(t)$ -ի որոշման ալգորիթմ, երբ տեղի ունի (2.1.21)-ը: Ներկայացնենք $X(t)$ -ի որոշման ընթացակարգը, երբ տեղի ունեն (2.1.22) և (2.1.23) պայմանները: Այդ նպատակով օգտվենք Տիխոնովի ռեզուլյարացման եղանակից [4, 53], որի դեպքում ավտոնոմ Y_{mxn} մատրիցի ընդհանրացված կեղծ հակադարձ մատրիցը որոշվում է

$$Y^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Y^T \cdot Y + \varepsilon \cdot E_{n \times n}) Y^T, \quad (2.1.25)$$

առնչությամբ, որտեղ $\varepsilon > 0$ -ը բավականին փոքր մեծություն է, որով պայմանավորվում է խնդրի լուծման ճշտությունը: Ոչ ավտոնոմ մատրիցների համար նույնպես օգտագործենք (2.1.25) առնչությունը:

[4] աշխատանքում ներկայացված ալգորիթմին համապատասխան ընտրենք փոքր $\varepsilon > 0$ մեծությունն այնպես, որ տեղի ունենան հետևյալ հավասարությունները՝

$$(\tilde{A}(0) + \varepsilon \cdot E_{v \times v})^{-1} \cdot (\tilde{A}(0) + \varepsilon \cdot E_{v \times v}) = E_{v \times v}, \quad (2.1.26)$$

$$(\tilde{B}(0) + \varepsilon \cdot E_{s \times s}) \cdot (\tilde{B}(0) + \varepsilon \cdot E_{s \times s})^{-1} = E_{s \times s}: \quad (2.1.27)$$

(2.1.20)-ի աջ մասը նշանակենք

$$\tilde{C}(K) = A^+(0) \cdot \left[C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K-1, r=K} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) \right] \cdot B^+(0). \quad (2.1.28)$$

Այսպիսով, (2.1.22) պայմանի տեղի ունենալու դեպքում (2.1.20) արտահայտությունից, հաշվի առնելով (2.1.28) նշանակումը $X(K)$ մատրիցային դիսկրետների որոշման համար ունենք

$$X(K) = (\tilde{A}(0) + \varepsilon \cdot E_{v \times v})^{-1} \cdot \tilde{C}(K), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.1.29)$$

իսկ (2.1.23) պայմանի տեղի ունենալու դեպքում՝

$$X(K) = \tilde{C}(K) \cdot (\tilde{B}(0) + \varepsilon \cdot E_{s \times s})^{-1}, \quad K = \overline{0, \infty}: \quad (2.1.30)$$

Այն դեպքում երբ տեղի ունի (2.1.24) պայմանը, $X(K)$ մատրիցային դիսկրետները կորոշվեն այսպես՝

$$X(K) = \left(\tilde{A}(0) + \varepsilon_1 \cdot E_{vv} \right)^{-1} \cdot \tilde{C}(K) \cdot \left(\tilde{B}(0) + \varepsilon_2 \cdot E_{ss} \right)^{-1}, \quad K = \overline{0, \infty}: \quad (2.1.31)$$

Այս դեպքում, անհրաժեշտ հակադարձելի շեղումները ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) կարող են տարբերվել՝ կախված (2.1.26) և (2.1.27) պայմանների պահանջվող ճշտությամբ բավարարվելուց:

Ունենալով $X(K)$ մատրիցային դիսկրետները, հեշտությամբ կարելի է վերականգնել $X(t)$ բնօրինակն ըստ վերականգնող որևէ առնչության [9,39]:

Ներկայացնենք պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Տիխոնովի ռեգուլյարացման եղանակի հաշվողական բնութագրերը: Այդ 2.1.2-ում ներկայացված են յուրաքանչյուր քայլում իրականացվող բազմապատկման («*») և գումարման («+») գործողությունների անալիտիկ արտահայտությունները՝ կախված մատրիցների չափայնություններից:

Աղյուսակ 2.1.2

Գործողությունների քանակը յուրաքանչյուր քայլում
(պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումներ, Տիխոնովի ռեգուլյարացման եղանակ)

Գործողությունը	«*»-ների քանակը	«+»-ների քանակը
$\tilde{A}(0) = A^+(0) \cdot A(0),$ $\tilde{B}(0) = B(0) \cdot B^+(0):$	v^2m+s^2n	$v^2(m-1)+s^2(n-1)$
$A^+(0) \cdot \left[C(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K-1, r=K} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) \right] \times B^+(0).$	$(vnm+snv)(0.5(K^2+3K+2)-1)+nms+vms$	$(0.5(K^2+3K+2)-1)((s-1)nv+(v-1)nm+mn)+vs(m-1)+ms(n-1)$
$(\tilde{A}(0) + \varepsilon_1 \cdot E_{vv})^{-1} \cdot \tilde{C}(K) \cdot (\tilde{B}(0) + \varepsilon_2 \cdot E_{ss})^{-1}$	$(v^2n+s^2v)(K+1)+v+s$	$sv(s+v-2)(K+1)+v^2+s^2$

Արդյունարար գնահատականներն են.

բազմապատկման գործողությունների համար՝

$$N(*) = (m+n(K+1))v^2 + (ms+(K^2/2+(3K)/2)(mn+ns)+s^2(K+1)+1)v+s+ns^2+mns,$$

գումարման գործողությունների համար՝

$$N(+) = (m+s(K+1))v^2 + (s(m-1)+(K^2/2+(3K)/2)(mn+n(s-1))+s(K+1)(s-2))v+s^2+s^2(n-$$

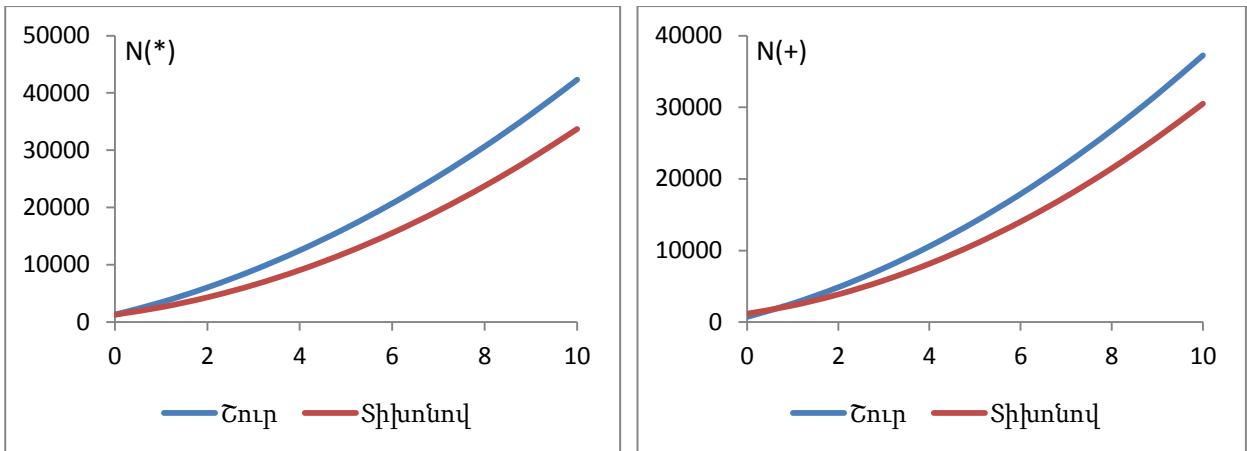
-1)+ms(n-1):

Դիտողություն: Ի տարբերություն Շուրի վերլուծության վրա հիմնված եղանակի, այս եղանակը կիրառելի է ինչպես քառակուսային, այնպես էլ ուղղանկյուն գործակից մատրիցների դեպքում:

2.1.3. Առաջարկված եղանակների համեմատական վերլուծությունը

Դիտարկենք պարզագոյն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Շուրի վերլուծության վրա հիմնված [15] և Տիխոնովի ռեգուլյարացման եղանակի [14] վրա հիմնված եղանակների Դ-նմանակների համեմատական վերլուծություն կախված հաշվողական բնութագրերից, մասնավորապես, գումարման և բազմապատկման գործողությունների քանակներից: Հաշվի առնելով Շուրի վերլուծության վրա հիմնված եղանակի վերը նշված դիտողությունը, համեմատությունը կներկայացնենք միայն քառակուսային մատրիցների համար: Կառուցենք բազմապատկման և գումարման գործողությունների քանակների կախվածության գրաֆիկները դիսկրետների քանակից, եթք $m = n = 6$ (նկ. 2.1.1, նկ. 2.1.2):

Ինչպես երևում է գործողությունների քանակների տեսակետից միևնույն պայմանների դեպքում Շուրի վերլուծության վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակը զիջում է Տիխոնովի ռեգուլյարացման եղանակի դիֆերենցիալ նմանակին:



Նկ. 2.1.1

Նկ. 2.1.2

2.2. Գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի Դ-նմանակը [49]

Դիտարկենք գծային ոչ ավտոնոմ Սիլվեստրի տիպի [27, 20, 101] ընդհանուր տեսքի հետևյալ մատրիցային հավասարումը՝

$$A_{mn}(t) \cdot X_{mn}(t) + X_{mn}(t) \cdot B_{nm}(t) = C_{mn}(t), \quad (2.2.1)$$

որտեղ մատրիցների բոլոր տարրերը $t = t_v$ մոտարկման կենտրոնում ունեն անվերջ կարգի ածանցյալներ ըստ t փոփոխականի:

Համաձայն գծային ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի [27, 52] (2.2.1)-ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$U_a(t) \cdot T_a(t) \cdot U_a^T(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot U_b(t) \cdot T_b(t) \cdot U_b^T(t) = C(t), \quad (2.2.2)$$

որտեղ $U_a(t)$ -ն և $U_b(t)$ -ն ունիտար մատրիցներ են [19, 31] ($U_a^T(t) = U_a^{-1}(t)$) և $U_b^T(t) = U_b^{-1}(t)$), $T_a(t)$ -ն և $T_b(t)$ -ն վերին եռանկյունաձև մատրիցներ են, որոնք ձևավորվում են համապատասխանաբար $A(t)$ և $B(t)$ մատրիցները Շուրի ձևավորման ենթարկելու արդյունքում [27, 52, 67].

$$T_a(t) = U_a^T(t) \cdot A(t) \cdot U_a(t), \quad (2.2.3)$$

$$T_b(t) = U_b^T(t) \cdot B(t) \cdot U_b(t); \quad (2.2.4)$$

Հաշվի առնելով $U_a(t)$ և $U_b(t)$ մատրիցների ունիտարությունը և բազմապատկերով (2.2.2) առնչության ձախ և աջ մասերը համապատասխանաբար $U_a^T(t)$ և $U_b(t)$ մատրիցներով կունենանք՝

$$T_a(t) \cdot U_a^T(t) \cdot X(t) U_b(t) + U_a^T(t) \cdot X(t) \cdot U_b(t) \cdot T_b(t) = U_a^T(t) \cdot C(t) U_b(t); \quad (2.2.5)$$

Նշանակելով

$$\tilde{C}(t) = U_a^T(t) \cdot C(t) \cdot U_b(t), \quad (2.2.6)$$

$$Y(t) = U_a^T(t) \cdot X(t) \cdot U_b(t), \quad (2.2.7)$$

(2.2.5)-ի համար կունենանք

$$T_a(t) \cdot Y(t) + Y(t) \cdot T_b(t) = \tilde{C}(t), \quad (2.2.8)$$

որտեղ յուրաքանչյուր ամրակայված t -ի համար Y մատրիցի տարրերը որոշվում են ըստ հետևյալ անդրադարձ առնչության՝

$$Y_{ij} = \frac{C_{ij} - \left[\sum_{p=i+1}^m (T_a)_{ip} Y_{pj} + \sum_{l=1}^{j-1} Y_{il} (T_b)_{lj} \right]}{(T_a)_{ii} + (T_b)_{jj}}, \quad i = \overline{m, 1}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.2.9)$$

(2.2.1) հավասարման լուծումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$X(t) = U_a(t) \cdot Y(t) \cdot U_b^T(t); \quad (2.2.10)$$

Համաձայն դիֆերենցիալ ձևափոխությունների հանրահաշվի [33] (2.2.8) մատրիցային հավասարումը պատկերների տիրույթում կլինի՝

$$\sum_{l=0}^K (T_a(l) \cdot Y(K-l) + Y(l) \cdot T_b(K-l)) = \tilde{C}(K), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.2.11)$$

որտեղ

$$T_a(K) = \sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} (U_a^T(p) \cdot A(q) \cdot U_a(r)), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.2.12)$$

$$T_b(K) = \sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} (U_b^T(p) \cdot B(q) \cdot U_b(r)), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.2.13)$$

$$\tilde{C}(K) = \sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} (U_a^T(p) \cdot C(q) \cdot U_b(r)), \quad K = \overline{0, \infty} \quad (2.2.14)$$

համապատասխանաբար (2.2.3), (2.2.4) և (2.2.5) առնչությունների պատկերներն են՝ մատրիցային դիսկրետները:

(2.2.11) –ից հետևում է

$$\begin{aligned} T_a(0) \cdot Y(K) + Y(K) \cdot T_b(0) &= \\ = \tilde{C}(K) - \sum_{l=0}^{K-1} (T_a(K-l) \cdot Y(l) + Y(l) \cdot T_b(K-l)), \quad K &= \overline{0, \infty}: \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Յուրաքանչյուր իտերացիայի համար ($K = \overline{0, \infty}$) մատրիցային դիսկրետի տարրերը որոշվում են (2.2.9) –ի դիֆերենցիալ պատկերներին համապատասխան.

$$\begin{aligned} Y_{ij}(K) &= \frac{\tilde{C}_{ij}(K) - \left(\sum_{l=i+1}^m (T_a)_{il}(K) \cdot Y_{lj}(K) + \sum_{f=1}^{j-1} Y_{if}(K) \cdot (T_b)_{jf}(K) \right)}{(T_a)_{ii}(K) + (T_b)_{jj}(K)}; \\ i &= \overline{m, 1}; \quad j = \overline{1, n}; \\ (T_a)_{ii}(K) + (T_b)_{jj}(K) &\neq 0, \quad K = \overline{0, \infty}, \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

ընդ որում $U_a(K)$ և $U_b(K)$ ($K = \overline{0, \infty}$) դիսկրետները կարելի է որոշել որպես $A(t)$ և $B(t)$ մատրիցների սեփական վեկտորներով կազմված մատրիցներ, որոնք նախապես օրթոգոնալացվել են Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակի Դ-նմանակին [16, 39] համապատասխան:

Անհայտ փոփոխականի $X(K)$ դիսկրետները որոշվում են ըստ (2.2.10) առնչության հետևյալ դիֆերենցիալ պատկերների՝

$$X(K) = \sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} (U_a^T(p) \cdot Y(q) \cdot U_b^T(r)), K = \overline{0, \infty} : \quad (2.2.17)$$

Ներկայացնենք գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի Դ-նմանակի հաշվողական բնութագրերը (առլ. 2.2.1) ըստ մատրիցների չափայնությունների:

Աղյուսակ 2.2.1

Գործողությունների քանակը յուրաքանչյուր քայլում
(Բարտելս-Ստյուարտի եղանակ)

Գործողությունը	«*»-ների քանակը	«+»-ների քանակը
$\sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} (U_a^T(p) \cdot A(q) \cdot U_a(r)),$ $\sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} (U_b^T(p) \cdot B(q) \cdot U_b(r))$	$(n^3+m^3)(K^2+3K+2)$	$(K^2+3K+2)(m^2(m-1)+ n^2(n-1))+(0.5(K^2+3K+2)-1)(m^2+ n^2)$
$\sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} (U_a^T(p) \cdot C(q) \cdot U_b(r)),$ $\sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} (U_a^T(p) \cdot Y(q) \cdot U_b^T(r))$	$(K^2+3K+2)(m^2n+n^2m)$	$(K^2+3K+2)(m+n-2)mn+(K^2+3K)mn$
$\frac{\tilde{C}_{ij}(K) - \left(\sum_{l=i+1}^m (T_a)_{il}(K) \cdot Y_{lj}(K) + \sum_{f=1}^{j-1} Y_{if}(K) \cdot (T_b)_{jf}(K) \right)}{(T_a)_{ii}(K) + (T_b)_{jj}(K)}$	$(K+1)(m^2n+n^2m)$	$(K+1)(m+n-1)mn+mn$

Արդյունարար գնահատականները կլինեն.

- բազմապատկման գործողությունների համար՝

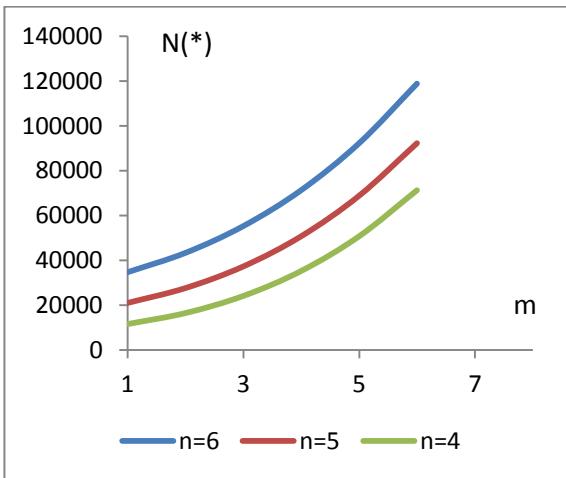
$$N(*) = (K^2+3K+2)n^3 + (m(K+1)+m(K^2+3K+2))n^2 + (m^2(K+1)+m^2(K^2+3K+2))n + m^3(K^2+3K+2),$$

- գումարման գործողությունների համար՝

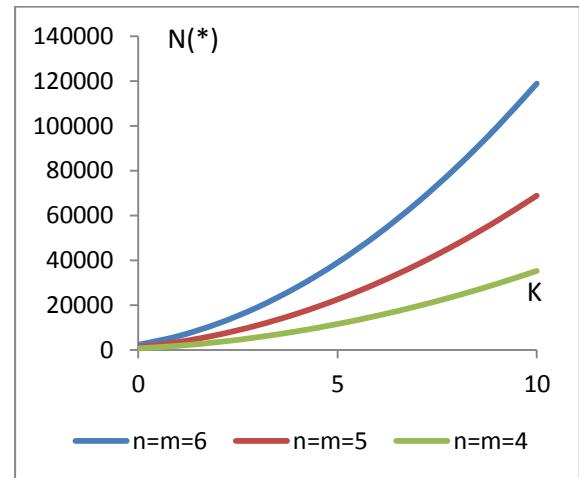
$$N(+)= (K^2+3K+2)n^3 + (m(K+1)-(3K)/2+m(K^2+3K+2)-K^2/2-2)n^2 + (m+m(K^2+3K)+m(K+1)(m-1)+m(m-2)(K^2+3K+2))n + m^2(K^2/2+(3K)/2) + m^2(m-1)(K^2+3K+2):$$

Մեթոդի առանձնահատկություններն ուսումնասիրելու նպատակով կառուցենք հետևյալ կախվածությունների գրաֆիկները.

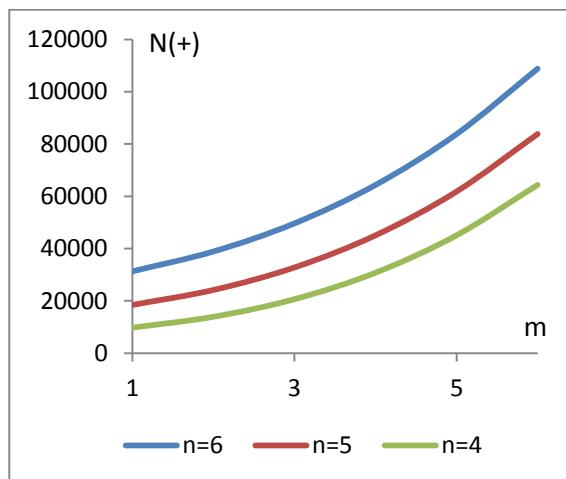
- բազմապատկման գործողությունների քանակի կախվածությունը մատրիցի տողերի ($m = \overline{1,6}$) քանակից, եթե $n = \overline{4,6}$, $K = 10$ (նկ. 2.2.1),
- բազմապատկման գործողությունների քանակի կախվածությունը դիսկրետների քանակից, եթե $m = n = \overline{4,6}$ (նկ. 2.2.2),
- գումարման գործողությունների քանակի կախվածությունը մատրիցի տողերի ($m = \overline{1,6}$) քանակից, եթե $n = \overline{4,6}$, $K = 10$ (նկ. 2.2.3),
- գումարման գործողությունների քանակի կախվածությունը դիսկրետների քանակից, եթե $m = n = \overline{4,6}$ (նկ. 2.2.4):



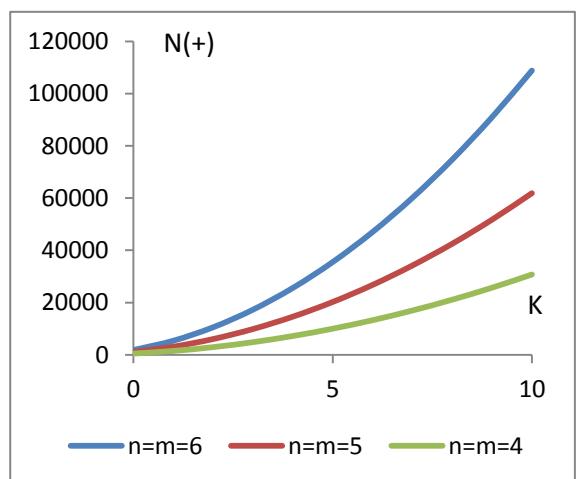
Նկ. 2.2.1



Նկ. 2.2.2



Նկ. 2.2.3



Նկ. 2.2.4

Դիտողություն 1: Ինչպես երևում է նկ.2.2.1 և նկ.2.2.2 - ում ներկայացված գումարման գործողությունների քանակի համար ստացված կախվածությունների գրաֆիկները գրեթե չեն տարբերվում նկ.2.2.3 և նկ.2.2.4 – ում ներկայացված բազմապատկման գործողությունների քանակների կախվածությունների գրաֆիկներից: Նշված հանգամանքը պայմանավորված է Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի Դ-նմանակի կիրառման ընթացակարգերում մատրիցների բազմապատկումների դիֆերենցիալ հանրահաշվի եռակի փաթաթների կիրառմամբ, որտեղ կատարվում են գրեթե նույնքան բազմապատկման և գումարման գործողություններ: Այսպես, եթե

$$\text{ունենք } A_{mxn}(t) * B_{nxv}(t) * C_{vxs}(t) \Xi \sum_{\substack{p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=k}}^K (A(p) \cdot B(q) \cdot C(r)), k = \overline{0, K} \text{ փաթաթը, ապա } \psi_{tr}$$

Զինիս համար կպահանջվեն $N(*)=0.5(K^2+3K+2)(vns+nms)$ բազմապատկման և $N(+) = 0.5(K^2+3K+2)((v-1)ns + (n-1)ms)$ գումարման գործողություններ: Պարզեցնելով և միմյանցից հանելով ստացված առնչությունները կարելի է նշել, որ փաթաթների համար պահանջվող բազմապատկման գործողությունների քանակը պահանջվող գումարման գործողությունների քանակից տարբերվում է $0.5(K^2+3K+2)s(n+m)-n$:

Դիտողություն 2: Բազմապատկման և գումարման գործողությունների քանակների կախվածությունները մատրիցների սյուների և տողերի թվից խորանարդային են, իսկ դիսկրետների քանակից՝ քառակուսային:

2.3. Պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը [8]

Ենթադրենք տրված է հետևյալ մատրիցային հավասարումը.

$$X_{nxm}(t) \cdot A_{mxn}(t) \cdot X_{nxm}(t) = B_{nxm}(t): \quad (2.3.1)$$

Պարամետրական (2.3.1) արտահայտությունից թվային արտահայտություն-ների անցնելու նպատակով օգտվենք դիֆերենցիալ ձևափոխություններից: (2.3.1) արտահայտությունը դիֆերենցիալ ձևափոխությունների տիրությում ներկայացվում է հետևյալ կերպ:

Եթե $K=0$, ունենք՝

$$X(0) \cdot A(0) \cdot X(0) = B(0),$$

Նշանակենք աջ մասը

$$\bar{B}(0) = B(0),$$

կունենանք

$$X(0) \cdot A(0) \cdot X(0) = \bar{B}(0); \quad (2.3.2)$$

Եթե $K=1$, ապա՝

$$X(0) \cdot A(0) \cdot X(1) + X(0) \cdot A(1) \cdot X(0) + X(1) \cdot A(0) \cdot X(0) = B(1),$$

աջ մասը կլինի՝

$$\bar{B}(1) = B(1) - X(0) \cdot A(1) \cdot X(0):$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$G(0) = X(0) \cdot A(0),$$

$$F(0) = A(0) \cdot X(0),$$

կունենանք

$$G(0) \cdot X(1) + X(1) \cdot F(0) = \bar{B}(1); \quad (2.3.3)$$

Եթե $K=2$, ապա՝

$$\begin{aligned} X(0) \cdot A(0) \cdot X(2) + X(2) \cdot A(0) \cdot X(0) + X(1) \cdot A(1) \cdot X(0) + \\ + X(1) \cdot A(0) \cdot X(1) + X(0) \cdot A(1) \cdot X(1) + X(0) \cdot A(2) \cdot X(0) = B(2), \end{aligned}$$

աջ մասը կլինի՝

$$\bar{B}(2) = B(2) - X(1) \cdot A(1) \cdot X(0) - X(1) \cdot A(0) \cdot X(1) - X(0) \cdot A(1) \cdot X(1) - X(0) \cdot A(2) \cdot X(0),$$

ուստի կունենանք՝

$$G(0) \cdot X(2) + X(2) \cdot F(0) = \bar{B}(2);$$

.....

Եթե $K = K$, ապա՝

$$\sum_{\substack{p=K, q=K, r=K \\ p=0, q=0, r=0, \\ p+q+r=K}}^{p=K, q=K, r=K} X(p) \cdot A(q) \cdot X(r) = B(K), \quad (2.3.4)$$

որտեղից

$$X(0) \cdot A(0) \cdot X(K) + X(K) \cdot A(0) \cdot X(0) + \sum_{\substack{p=K-1, q=K, r=K-1 \\ p=0, q=0, r=0, \\ p+q+r=K}}^{p=K-1, q=K, r=K-1} X(p) \cdot A(q) \cdot X(r) = B(K),$$

աջ մասի համար կունենանք՝

$$\bar{B}(K) = B(K) - \sum_{\substack{p=K-1, q=K, r=K-1 \\ p=0, q=0, r=0, \\ p+q+r=K}}^{p=K-1, q=K, r=K-1} X(p) \cdot A(q) \cdot X(r),$$

արդյունքում կստանանք՝

$$G(0) \cdot X(K) + X(K) \cdot F(0) = \bar{B}(K), \quad K = \overline{1, \infty}: \quad (2.3.5)$$

$X(t)$ -ի $X(0)$ մատրիցային դիսկրետի որոշման համար անհրաժեշտ է որևէ եղանակով լուծել (2.3.2) ոչ գծային ավտոնոմ մատրիցային հավասարությունը [27]: Այնուիետև, հաջորդաբար լուծելով Սիլվեստրի տիպի (2.3.5) ավտոնոմ մատրիցային հավասարությունները, կստանանք $X(1), \dots, X(K), \dots$, մատրիցային դիսկրետները, որոնց միջոցով հեշտությամբ կվերականգնվի խնդրի փնտրվող $X(t)$ լուծությունը, ըստ որևէ վերականգնող առնչության (1.1.1):

Ներկայացնենք պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարությունների լուծման դիֆերենցիալ եղանակի հաշվողական բնութագրերը (աղյ. 2.3.1):

Աղյուսակ 2.3.1

Գործողությունների քանակը յուրաքանչյուր քայլում
(պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումներ)

Գործողությունը	«*»-ների քանակը	«+»-ների քանակը
$X(0) \cdot A(0)$ $A(0) \cdot X(0),$	$m^2n + n^2m$	$(n-1)m^2 + (m-1)n^2$
$B(K) - \sum_{\substack{p=K-1, q=K, r=K-1 \\ p=0, q=0, r=0, \\ p+q+r=K}}^{p=K-1, q=K, r=K-1} X(p) \cdot A(q) \cdot X(r)$	$2m^2n(0.5(K^2+3K+2)-2)$	$(0.5(K^2+3K+2)-2)((n-1)m^2 + (m-1)mn) + (0.5(K^2+3K+2)-2)mn$
$G(0) \cdot X(K) + X(K) \cdot F(0)$	$(n^2m + m^2n)(K+1)$	$(m+n-2)mn(K+1) + nm$

Գումարելով և պարզեցնելով ստացված արտահայտությունները՝ ստանանք արդյունարար գնահատականները: Բազմապատկման գործողությունների համար ունենք՝

$$N(*) = (m+m(K+1))n^2 + (2m^2(K^2/2+(3K)/2-1)+m^2+m^2(K+1))n,$$

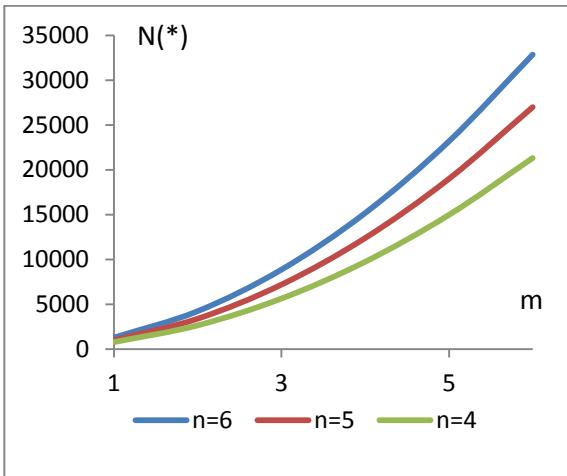
իսկ գումարման գործողությունների համար՝

$$N(+) = (m+m(K+1)-1)n^2 + (m+(m(m-1)+m^2)(K^2/2+(3K)/2-1)+m^2+m(K^2/2+(3K)/2-1)+m(K+1)(m-2))n - m^2(K^2/2+(3K)/2-1) - m^2:$$

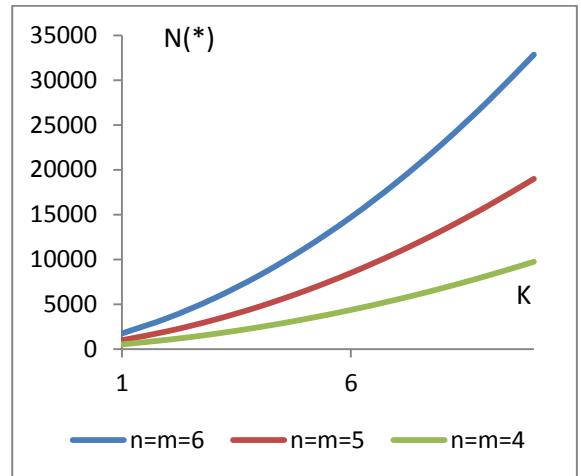
Մեթոդի առանձնահատկություններն ուսումնասիրելու նպատակով կառուցենք հետևյալ կախվածությունների գրաֆիկները.

- բազմապատկման գործողությունների քանակի կախվածությունը մատրիցի տողերի ($m = \overline{1,6}$) քանակից, եթե $n = \overline{4,6}$, $K = 10$ (նկ. 2.3.1),
- բազմապատկման գործողությունների քանակի կախվածությունը դիսկրետների քանակից, եթե $m = n = \overline{4,6}$ (նկ. 2.3.2),
- գումարման գործողությունների քանակի կախվածությունը մատրիցի տողերի ($m = \overline{1,6}$) քանակից, եթե $n = \overline{4,6}$, $K = 10$ (նկ. 2.3.3),

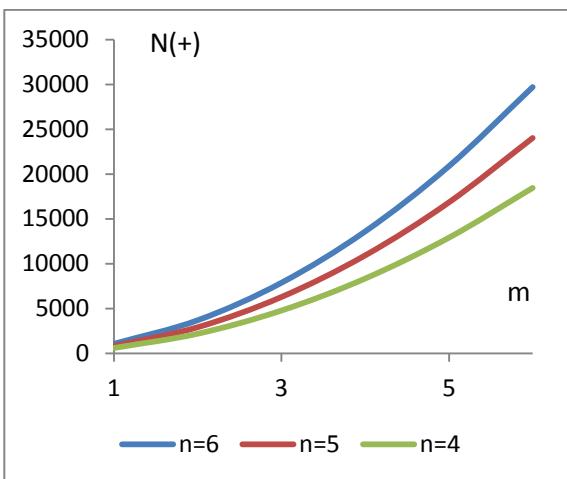
- գումարման գործողությունների քանակի կախվածությունը դիսկրետների քանակից, երբ $m = n = \overline{4,6}$ (նկ. 2.3.4):



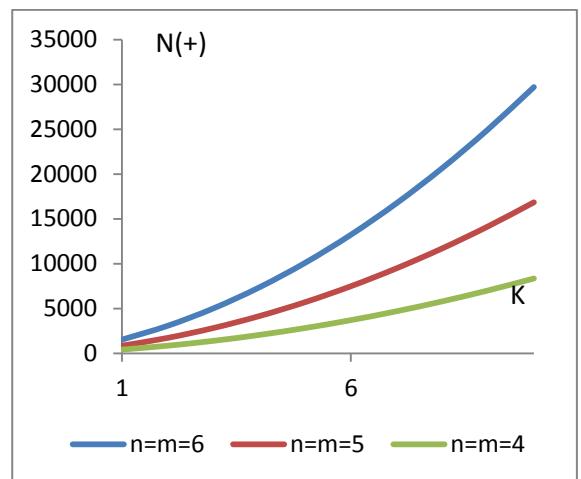
Նկ. 2.3.1



Նկ. 2.3.2



Նկ. 2.3.3



Նկ. 2.3.4

Դիտողություն 1: Ինչպես երևում է գումարման գործողությունների քանակի համար ստացված կախվածությունների գրաֆիկները գրեթե չեն տարբերվում ներկայացված բազմապատկման գործողությունների կախվածությունների գրաֆիկներից՝ դիֆերենցիալ փաթաթների առկայության պատճառով:

Դիտողություն 2: Բազմապատկման և գումարման գործողությունների քանակներից կախված մատրիցների սյուների և տողերի թվից փոխվում են քառակուսային օրենքով:

2.4. ՈՒԿԿԱՏԻԻ ՄԻԱՅԻ ՈՅ ԳԾԱՅԻՆ ՈՅ ԱՎՏՈՆՈՄ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԻԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՐԻԾՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿԻ Դ-ՆՄԱՆԱԿՐ [13]

Ենթադրենք ունենք ՈՒԿԿԱՏԻԻ ՄԻԱՅԻ ՈՅ ԳԾԱՅԻՆ ՈՅ ԱՎՏՈՆՈՄ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԻԱՎԱՍԱՐՈՒՄ՝

$$A(t)_{n \times n} X_{n \times m}(t) + X_{n \times m}(t)B_{m \times m}(t) + X_{n \times m}(t)C_{m \times n}(t)X_{n \times m}(t) = D_{n \times m}(t), \quad (2.4.1)$$

որը դիֆերենցիալ ձևափոխությունների տիրույթում ներկայացվում է հետևյալ կերպ.

Եթե $K=0$, ապա՝

$$A(0)X(0) + X(0)B(0) + X(0)C(0)X(0) = D(0), \quad (2.4.2)$$

Եթե $K=1$, ապա՝

$$\begin{aligned} & A(0)X(1) + A(1)X(0) + X(0)B(1) + X(1)B(0) + X(0)C(0)X(1) + \\ & + X(1)C(0)X(0) + X(0)C(1)X(0) = D(1), \end{aligned}$$

որտեղից կունենանք՝

$$\begin{aligned} & (A(0) + X(0)C(0)) \cdot X(1) + X(1) \cdot (B(0) + C(0)X(0)) = \\ & = D(1) - (A(1)X(0) + X(0)B(1) + X(0)C(1)X(0)): \end{aligned}$$

Կատարելով հետևյալ նշանակումները՝

$$\bar{A}(0) = A(0) + X(0)C(0),$$

$$\bar{B}(0) = B(0) + C(0)X(0),$$

$$\bar{D}(1) = D(1) - (A(1)X(0) + X(0)B(1) + X(0)C(1)X(0)),$$

կունենանք՝

$$\bar{A}(0)X(1) + X(1)\bar{B}(0) = \bar{D}(1): \quad (2.4.3)$$

Եթե $K=2$, ապա՝

$$\begin{aligned} & A(0)X(2) + A(1)X(1) + A(2)X(0) + X(2)B(0) + X(1)B(1) + X(0)B(2) + X(0)C(0)X(2) + \\ & + X(1)C(0)X(1) + X(1)C(1)X(0) + X(2)C(0)X(0) + X(0)C(1)X(1) + X(0)C(2)X(0) = D(2), \end{aligned}$$

որտեղից կունենանք՝

$$\begin{aligned}
& (A(0) + X(0)C(0)) \cdot X(2) + X(2) \cdot (B(0) + C(0)X(0)) = \\
& = D(2) - A(1)X(1) + A(2)X(0) + X(1)B(1) + X(0)B(2) + \\
& + X(1)C(0)X(1) + X(1)C(1)X(0) + X(0)C(1)X(1) + X(0)C(2)X(0):
\end{aligned}$$

Նշանակենք

$$\begin{aligned}
\bar{D}(2) &= D(2) - A(1)X(1) + A(2)X(0) + X(1)B(1) + X(0)B(2) + \\
& + X(1)C(0)X(1) + X(1)C(1)X(0) + X(0)C(1)X(1) + X(0)C(2)X(0),
\end{aligned}$$

կունենանք՝

$$\bar{A}(0)X(1) + X(1)\bar{B}(0) = \bar{D}(2): \quad (2.4.4)$$

Եթբ K=K, ապա՝

$$\sum_{i=0}^K A(i)X(K-i) + \sum_{j=0}^K X(j)B(K-j) + \sum_{\substack{p=0; q=0; r=0 \\ p+q+r=K}}^K X(p)C(q)X(r) = D(K),$$

որտեղից՝

$$\begin{aligned}
& A(0)X(K) + X(K)B(0) + X(0)C(0)X(K) + X(K)C(0)X(0) + \sum_{i=1}^K A(i)X(K-i) + \\
& + \sum_{j=0}^{K-1} X(j)B(K-j) + \sum_{\substack{p=0; q=0; r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K-1; q=K; r=K-1} X(p)C(q)X(r) = D(K),
\end{aligned}$$

որտեղից էլ՝

$$\begin{aligned}
& \{A(0) + X(0)C(0)\}X(K) + X(K)\{B(0) + C(0)X(0)\} = D(K) - \\
& - \left\{ \sum_{i=1}^K A(i)X(K-i) + \sum_{j=0}^{K-1} X(j)B(K-j) + \sum_{\substack{p=0; q=0; r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K-1; q=K; r=K-1} X(p)C(q)X(r) \right\}:
\end{aligned}$$

Վերջինիս աջ մասը նշանակենք

$$\bar{D}(K) = D(K) - \left\{ \sum_{i=1}^K A(i)X(K-i) + \sum_{j=0}^{K-1} X(j)B(K-j) + \sum_{\substack{p=0; q=0; r=0 \\ p+q+r=K}}^{p=K-1; q=K; r=K-1} X(p)C(q)X(r) \right\}:$$

Արդյունքում կստանանք՝

$$\bar{A}(0)X(K) + X(K)\bar{B}(0) = \bar{D}(K): \quad (2.4.5)$$

$X(t)$ -ի $X(0)$ մատրիցային դիկրետի որոշման համար անհրաժեշտ է որևէ եղանակով լուծել (2.4.2) ոչ գծային ավտոնոմ մատրիցային հավասարումը [27, 55]: Այնուհետև, հաջորդաբար լուծելով Սիլվեստրի տիպի (2.4.3), (2.4.4) և (2.4.5) մատրիցային հավասարումները, կստանանք $X(1), \dots, X(K), \dots$ մատրիցային դիսկրետները, որոնց միջոցով ըստ դիֆերենցիալ հակադարձ որևէ ձևափոխության կվերականգնենք խնդրի $X(t)$ լուծումը:

Ներկայացնենք ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման դիֆերենցիալ եղանակի հաշվողական բնութագրերը (աղյ. 2.4.1):

Աղյուսակ 2.4.1

Գործողությունների քանակը յուրաքանչյուր քայլում
(Ոիկկատիի տիպի ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումներ)

Գործողությունը	«*»-ների քանակը	«+»-ների քանակը
$A(0) + X(0)C(0)$		
$B(0) + C(0)X(0)$	$m^2n + n^2m$	$nm^2 + mn^2$
$\bar{D}(K)$ մատրիցային դիսկրետների որոշումը	$(m^2n + n^2m)K + 2m^2n(0.5(K^2 + 3K + 2) - 2)$	$K(m+n-2)mn + (0.5(K^2 + 3K + 2) - 2)(mn(m-1) + (n-1)m^2) + 3nm$
$\bar{A}(0) \cdot X(K) + X(K) \cdot \bar{B}(0)$	$(n^2m + m^2n)(K+1)$	$(m+n-2)mn(K+1) + nm$

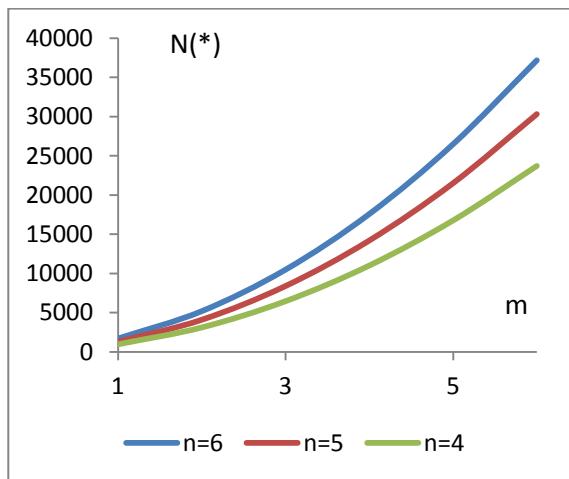
Արդյունարար գնահատականները կլինեն՝

$$N(*) = (m + Km + m(K+1))n^2 + (2m^2(K^2/2 + (3K)/2 - 1) + Km^2 + m^2 + m^2(K+1))n$$

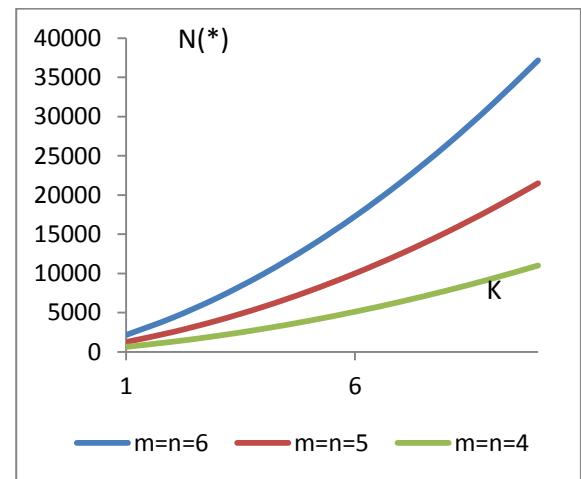
$$N(+) = (m + Km + m(K+1))n^2 + (4m + (m(m-1) + m^2)(K^2/2 + (3K)/2 - 1) + m^2 + m(K+1)(m-2))n - m^2(K^2/2 + (3K)/2 - 1):$$

Մեթոդի առանձնահատկություններն ուսումնասիրելու նպատակով կառուցենք ստացված կախվածությունների գրաֆիկները հետևյալ դեպքերի համար.

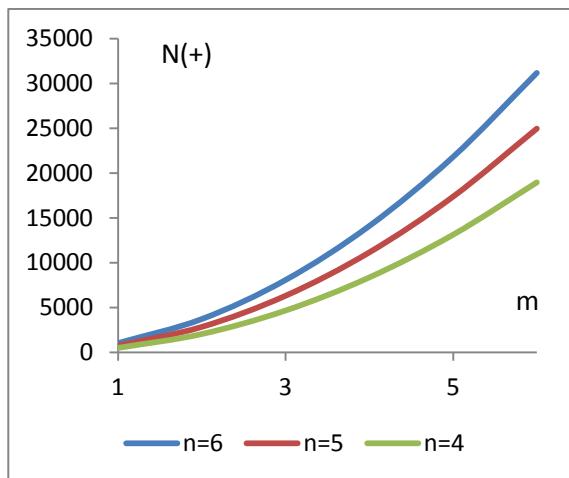
- բազմապատկման գործողությունների քանակի կախվածությունը մատրիցի տողերի ($m = \overline{1,6}$) քանակից, եթե $n = \overline{4,6}$, $K = 10$ (նկ. 2.4.1),
- բազմապատկման գործողությունների քանակի կախվածությունը դիսկրետների քանակից, եթե $m = n = \overline{4,6}$ (նկ. 2.4.2),
- գումարման գործողությունների քանակի կախվածությունը մատրիցի տողերի ($m = \overline{1,6}$) քանակից, եթե $n = \overline{4,6}$, $K = 10$ (նկ. 2.4.3),
- գումարման գործողությունների քանակի կախվածությունը դիսկրետների քանակից, եթե $m = n = \overline{4,6}$ (նկ. 2.4.4):



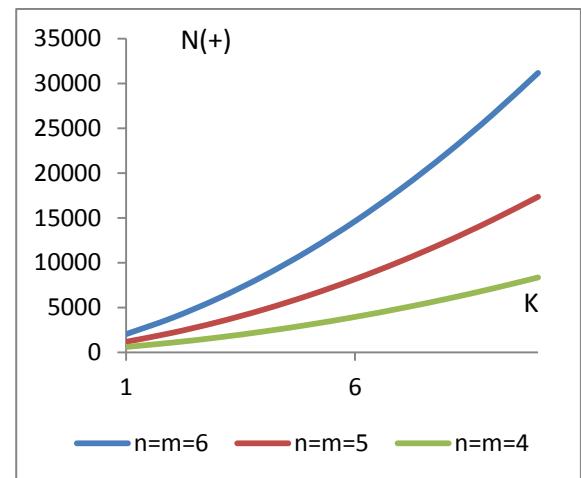
Նկ. 2.4.1



Նկ. 2.4.2



Նկ. 2.4.3



Նկ. 2.4.4

Դիտողություն: Բազմապատկման և գումարման գործողությունների քանակ-ները կախված մատրիցների սյուների և տողերի թվից փոխվում են քառակուսային օրենքով:

2.5. Եզրակացություններ 2-րդ գլխի վերաբերյալ

1. Մշակվել են պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման դիֆերենցիալ եղանակներ հիմնված Շուրի վերլուծության և Տիխոնովի ռեգույարացման եղանակների վրա:
2. Մշակվել է գծային ոչ ավտոնոմ Սիլվեստրի տիպի ընդհանուր տեսքի մատրիցային հավասարումների լուծման դիֆերենցիալ եղանակ՝ հիմնված Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի վրա:
3. Մշակվել է պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման դիֆերենցիալ եղանակ:
4. Մշակվել է ոչ գծային ոչ ավտոնոմ Ռիկկատիի տիպի ընդհանուր տեսքի մատրիցային հավասարումների լուծման դիֆերենցիալ եղանակ:
5. Մշակված եղանակների համար ստացվել են հաշվողական բնութագրերի (մասնավորապես բազմապատկման և գումարման գործողությունների քանակների) անալիտիկ արտահայտություններ կախված գործակից մատրիցների չափայնություններից:
6. Իրականացվել է պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման դիֆերենցիալ եղանակների համեմատական վերլուծություն: Առաջարկված ոչ գծային մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակների առանձնահատկությունների բացահայտման նպատակով կառուցվել են հաշվողական բնութագրերի՝ գործողությունների քանակների կախվածությունները:

ԳԼՈՒ 3

ՈՉ ԱՎՈՆՈՄ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒՇՄԱՆ ԹՎԱ-ԱՆԱԼԻՏԻԿ

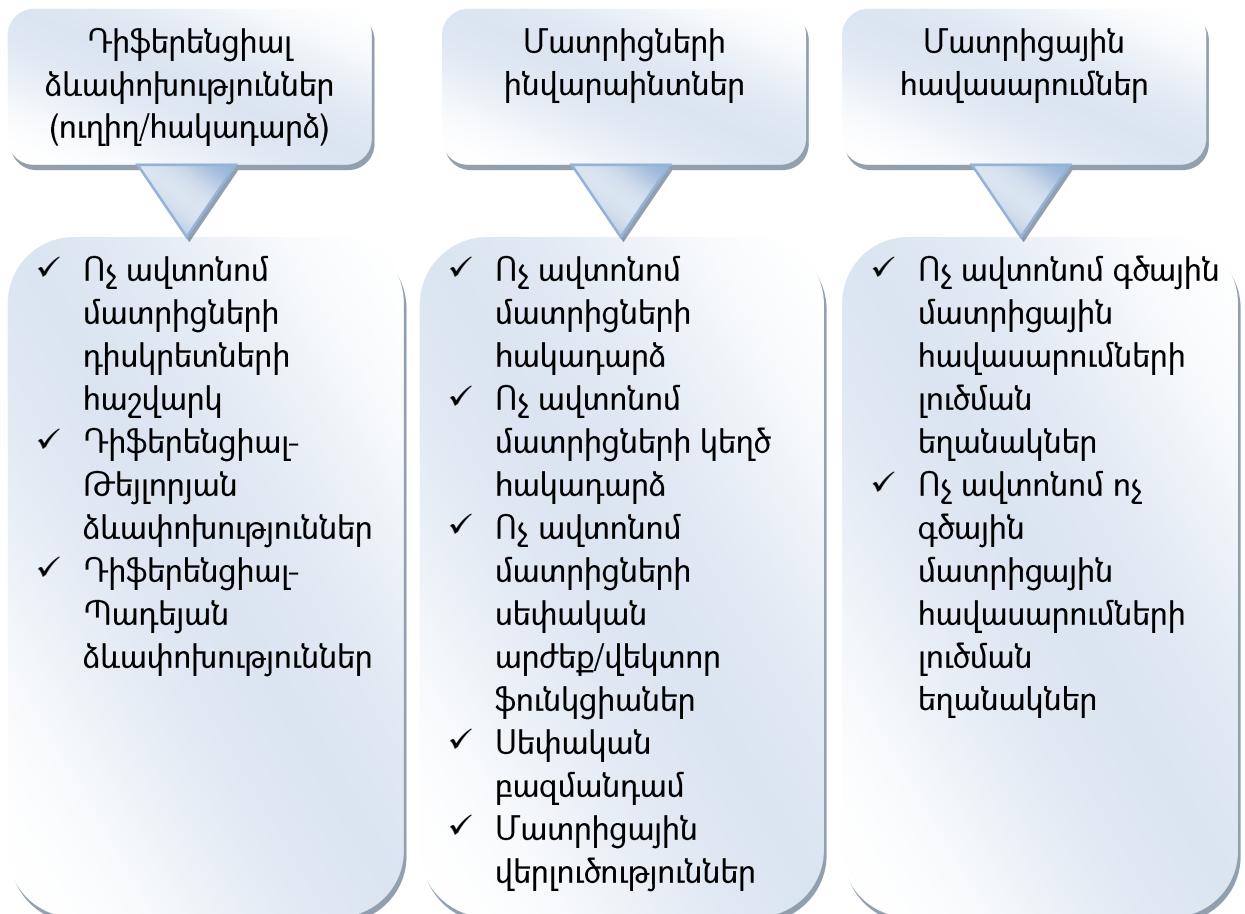
ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԿԻՐԱՊԱԿԱՆ ԾՐԱԳՐԵՐԻ ՓԱԹԵԹ

3.1. Կառուցվածքը, հիմնական բնութագրերը

Կիրառական ծրագրերի փաթեթն (այսուհետ ԿԾՓ) ընդգրկում է հետևյալ հիմնական բաղկացուցիչ մասերը [3, 50]:

1. Դիֆերենցիալ ձևափոխություններ (Differential transformations)
2. Մատրիցների ինվարիանտներ (Matrix invariants)
3. Մատրիցային հավասարումներ (Matrix equations)

ԿԾՓ հիմնական կառուցվածքային սխեման ներկայացված է նկ. 3.1.1-ում:



Նկ. 3.1.1

Դիֆերենցիալ ձևափոխություններ բաժինը նախատեսված է ոչ ավտոնոմ մատրիցների դիկրետների հաշվարկման [9,33-39] և հայտնի դիսկրետների հիման վրա բնօրինակը (ըստ դիֆերենցիալ-թեյլորյան կամ դիֆերենցիալ-պադեյան ձևափոխությունների [39]) վերականգնելու համար:

Մատրիցների ինվարիանտներ բաժնում տեղ են գտել ոչ ավտոնոմ մատրիցների ինվարիանտների որոշման տարատեսակ եղանակներ [1, 4, 6, 9, 16]:

Մատրիցային հավասարումներ բաժնում գետեղված են ոչ ավտոնոմ գծային և ոչ գծային մատրիցային հավասարումների լուծման սույն աշխատանքի շրջանակներում մշակված հետևյալ եղանակները եղանակները [8, 13, 14, 15, 49].

1. Շուրի վերլուծության վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակ,
2. Տիխոնովի ռեգուլյարացման եղանակի վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակ,
3. Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի Դ-նմանակը,
4. Պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը,
5. Ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը:

ԿԾՓ- ի հիմնական ալգորիթմներն իրականացված են ծրագրավորման C++ լեզվով [58, 89, 93], շահագործողական գրաֆիկական ինտերֆեյսն (Graphical user interface) իրականացվել է QT գրադարանի [66, 85] օգտագործմամբ: Փաթեթն օգտագործելի է տարբեր օպերացիոն համակարգերում (օրինակ Linux, Windows):

Փաթեթի ծրագրային իրականացման հիմնական բնութագրերն են՝ ֆունկցիաները, ինկապուլացված դասերը [58, 89, 93], ընդ որում ծրագրային մասն ամբողջովին օբյեկտ-կողմնորոշված է [58, 66], որը հնարավորություն է տալիս ընդլայնել տարատեսակ նոր գործիքներով: Նվազագույն միավորները ամբողջ,

կոմպլեքս կամ իրական մատրիցներ (վեկտորներ) են:

Գրաֆիկական ինտերֆեյսը պարզեցված է երկխոսային պատուհանների միջոցով, որոնցից յուրաքանչյուրում առկա են օգնությունների և հուշումների հաղորդագրություններ: Նման պարզեցումը հնարավորություն է ստեղծում օգտագործել ԿԾՓ-ն առանց շահագործողի նախնական գիտելիքների:

Աշխատանքային ռեժիմը կազմակերպվում է ընդունված գրաֆիկական ինտերֆեյսներին համապատասխան մենյուներով, ստեղներով և այլ գործիքներով: Յուրաքանչյուր խնդրի մուտքային տվյալները ներմուծվում են միանման երկխոսային վարպետների (wizard) օգտագործմամբ:

ԿԾՓ-ն թույլ է տալիս վերը նշված խնդիրների դիֆերենցիալ նմանակների լուծումները ստանալ ըստ պահանջվող դիսկրետների քանակի, մոտարկման կենտրոնի, մասշտաբային գործակցի, ինչպես նաև անկախ պարամետրի: Ալգորիթմները կարելի է իրականացնել կամայական չափողականությամբ ոչ ավտոնոմ կամ ավտոնոմ մատրիցների համար, որոնք վարպետների համապատասխան պատուհաններում ներմուծվում են տարր առ տարր կամ պատճենվում: Նախատեսված է նաև ներմուծված մաթեմատիկական արտահայտության ստուգման պատուհանը, որը թույլ է տալիս խմբագրել ներմուծվող բարդ արտահայտությունները:

Յուրաքանչյուր խնդրի լուծման արդյունքները կարելի է տեսնել ինչպես ֆունկցիոնալ, այնպես էլ գրաֆիկական տեսքերով: Ֆունկցիոնալ կամ թվային արդյունքները ներկայացվում են մատրիցային առյուսակների տեսքով՝ համապատասխան պատուհաններում: Գրաֆիկական տեսքերը ներկայացվում են յուրաքանչյուր տարրի համար առանձին, ընդ որում տարրերն ընտրվում են բացվող ցուցակից ըստ ինդեքսների:

ԿԾՓ-ն թույլ է տալիս մի քանի խնդիրներ լուծել միաժամանակ, իսկ արդյունքները կարելի է համեմատել բազմափաստաթղթային ռեժիմի (multiple document interface) օգտագործմամբ:

3.2. Հիմնական դասերն ու ֆունկցիաները

ԿԾՓ-ն կառուցված է հայտնի model–view–controller ճարտարապետությամբ [102], որտեղ model-ը պարունակում է ծրագրում օգտագործվող տվյալները (մատրիցներ, դիսկրետներ, գործակիցներ): View-ն պասիվ ինտերֆեյս է, որի միջոցով արտապատկերվում են խնդրի նախնական կամ վերջնական արդյունքները: Controller-ն իրականացնում է տարատեսակ գործողություններ model-ի և view-ի միջև:

ԿԾՓ-ի հիմնական բաժիններն արտապատկերելու համար նախատեսված հիմնական դասերն են.

DiffTransformsView – արտապատկերում է դիֆերենցիալ ուղիղ և հակադարձ ձևափոխությունների իրականացման համար նախատեսված գործիքները և պատուհանները: Դասը ներառում է void addReconstructionGroup() ֆունկցիան, որը նախատեսված է դիֆերենցիալ ձևափոխությունների ստացման համար անհրաժեշտ կոճակների խմբերի ձևավորման համար:

MatrixInvariantsView – նախատեսված է մատրիցների ինվարիանտների կամ դրանց պատկերների արտապատկերման գործիքներն ու պատուհաններն արտապատկերելու համար: Դասն ընդգրկում է void insertInversGroup(), void insertPseudoinversGroup(), void insertEigenValuesGroup(), void insertEigenVectoresGroup(), void insertCharacteristicPolynomGroup() ֆունկցիաները, որոնք նախատեսված են համապատասխանաբար մատրիցների հակադարձի,

ընդհանրացված հակադարձի, սեփական թվերի, սեփական վեկտորների, բնութագրիչ բազմանդամի գործակիցների որոշման ալգորիթմների կոճակների խմբերի ձևավորման համար: void createSignals() ֆունկցիան նախատեսված է յուրաքանչյուր ալգորիթմին համապատասխան կոճակի սեղմումից առաջացող ազդանշանը կառավարող ծրագրին փոխանցելու համար:

MatrixEquationsView – դասը ոչ ավտոնոմ, գծային կամ ոչ գծային մատրիցային հավասարումների լուծման համար նախատեսված գործիքների արտապատկերման համար է: Դասն ընդգրկում է void addLinearGroup(), void addNonLinearGroup() ֆունկցիաները, որոնք նախատեսված են ոչ ավտոնոմ գծային և ոչ գծային մատրիցային հավասարումների լուծման ալգորիթմների կոճակների խմբերի ձևավորման համար: void createSignals() ֆունկցիան նախատեսված է յուրաքանչյուր տիպի մատրիցային հավասարման լուծման ալգորիթմին համապատասխան կոճակի սեղմումից առաջացող ազդանշանը կառավարող ծրագրին փոխանցելու համար:

Օգտագործվող տվյալները պահպում և մշակվում են հետևյալ հիմնական դասերի օգտագործմամբ.

Matrixt – շաբլոն դաս է՝ նախատեսված տարրեր չափողականությամբ և տարրեր տիպի տարրեր պարունակող մատրիցների հետ աշխատելու համար: Սահմանված են նաև մատրիցների հետ աշխատելու տարրեր գործողություններ (բազմապատկում, գումարում, տրանսպոնացում և այլն):

Discretes – նախատեսված է ոչ ավտոնոմ մատրիցի դիսկրետների և դրանց հետ առնչվող գործողությունների իրականացման համար:

Dtransformation – նախատեսված է դիֆերենցիալ ձևափոխությունների հանրահաշվի կանոններով դիսկրետների հաշվարկման համար:

SystemAnalysis – նախատեսված է հիմնական պատուհանների ստեղծման, մենյուների, գործիքների վահանակների կառավարման համար:

Ոչ ավտոնոմ, գծային կամ ոչ գծային մատրիցային հավասարումների լուծման ալգորիթմներն իրականացնելու համար օգտագործվել են ինչպես վերը նշված դասերը այնպես էլ աղյուսակ 3.1.1 –ում ներկայացված դասերը:

Աղյուսակ 3.1.1

Դասեր	Ֆունկցիաներ	Նշանակություն
MatrixEquationsWizard	<i>accept();</i> <i>getDiscretesQuantity()</i> <i>getAMatrixDimension(...)</i> <i>getBMatrixDimension(...)</i> <i>getCMatrixDimension(...)</i> <i>getDMatrixDimension(...)</i> <i>getLinearAndNonLinearSequences(...)</i> <i>getCenterOfApproximation()</i> <i>getScaleCoefficient()</i> <i>:</i>	Ոչ ավտոնոմ մատրիցային տարբեր հավասարումների մատրիցների ներմուծման վարպետ
InfoWindow	<i>setInfoParameters(...)</i> <i>etWindowNumber()</i> <i>getSourceType()</i> <i>setCurfile(...)</i> <i>isModified()</i> <i>:</i>	Արտապատկերում է տվյալներ ներմուծված մատրիցների և դիֆերենցիալ ձևակոխությունների մասին
StringMatrixOutputWindow	<i>insertStringMatrixIntoWindow(...)</i> <i>setCurfile(...)</i> <i>deleteItems()</i> <i>createActions()</i> <i>:</i>	Նախատեսված է արդյունարար մատրիցներն անալիտիկ տեսքերով արտապատկերելու համար

3.2.1. Matrix դասի ֆունկցիաները

Matrix(short Row, short Column) - Matrix դասի կոնստրուկտորն է, որն ինիցիալացնում է դասի աշխատանքի կազմակերպման համար անհրաժեշտ որոշակի պարամետրեր, ընդ որում մուտքին տրվում է տրված մատրիցի չափայնությունը՝ տողը և սյունը: Նշենք, որ դասը պարունակում է մի շարք այլ կոնստրուկտորներ ևս, որոնք հեշտացնում են դասի օգտագործումը:

void Create(short Row, short Column) - ֆունկցիան ստեղծում է Row և Column չափայնությամբ մատրից: Այս ֆունկցիան օգտագործվում է դինամիկ հիշողությունում Matrix տիպի վեկտոր ստեղծելիս, քանի որ այս դեպքում անհնար է կատարել դասի ինիցիալացում կոնստրուկտորների միջոցով (new օպերատորը վեկտոր ստեղծելիս վեկտորի յուրաքանչյուր տարրի համար կանչում է ստեղծվող դասի լրության կոնստրուկտորը):

void ReleaseMemory() ֆունկցիան ազատում է դասի օբյեկտի կողմից գրադեգրած դինամիկ հիշողությունը՝ առանց ոչնչացնելու այդ օբյեկտը:

Template<class mType> mType GetDeterm() - ֆունկցիան հաշվում է մատրիցի որոշիչը, եթե մատրիցը քառակուսային է, հակառակ դեպքում՝ գեներացնում է Dimension_Error բացառությունը:

Matrix PseudoinverseMatrix() ֆունկցիան Գրեյվիլի եղանակի [16] կիրառմամբ հաշվում և վերադարձնում է մատրիցի կեղծ հակադարձը:

void MakeUnitary() ֆունկցիան մատրիցը վերափոխում է միավոր մատրիցի, եթե մատրիցը քառակուսային է, հակառակ դեպքում՝ գեներացնում է Dimension_Error բացառությունը:

void Transpose() ֆունկցիան տրանսպոնացնում է մատրիցը:

`bool IsUnitary()` ֆունկցիան նախատեսված է մատրիցի թեստավորման համար, ընդ որում, եթե մատրիցը միավոր է, ապա ֆունկցիան վերադարձնում է `true` արժեքը, հակառակ դեպքում՝ `false` արժեք:

Նշենք, որ բացի վերը թվարկած ֆունկցիաներից, `Matrix` դասը պարունակում է մի շարք օպերատորներ և ֆունկցիաներ, այդ թվում՝ `operator []`, `operator+=`, `operator+`, `operator-=`, `operator-`, `operator=`, `operator*=`, `operator*`, `operator/=`, `operator/`, `operator()`, `operator==`, `operator!=`, `Matrix NotSingularMatrix()`:

3.2.2. Discretes դասի ֆունկցիաները

`Discretes(Matrix_cmplx *discs, int row, int column, int DiscretesQuantity, double CenterOfApproximation, double ScaleCoefficiet, QString IndependedVariable)` – նախատեսված է `Discretes` տիպի օբյեկտներ ստեղծելու համար, որտեղ `discs` – մատրիցային դիսկրետների վեկտոր է, `row`, `column` – մատրիցի չափայնությունն է, `DiscretesQuantity` – դիսկրետների քանակն է, `CenterOfApproximation` – մոտարկման կենտրոնն է, `ScaleCoefficiet` – մասշտաբային գործակիցն է, `IndependedVariable` – անկախ պարամետրն է:

`Matrix_cmplx *getMatrixDiscretes() const, void setDiscretes(...)` – նախատեսված են մատրիցային դիսկրետները ստանալու և ստեղծելու համար:

`int getDiscretesQuantity() const, void setDiscretesQuantity(int K)` – նախատեսված են դիսկրետների քանակը ստանալու և սահմանելու համար:

`double getCenterOfApproximation() const, void setCenterOfApproximation(double tnyu)` – նախատեսված են մոտարկման կենտրոնի արժեքը ստանալու և սահմանելու համար:

double getScaleCoefficient() const, void setScaleCoefficient(double H) – նախատեսված են մասշտաբային գործակցի արժեքը ստանալու և սահմանելու համար:

void setRow(int row), void setColumn(int column), void getMatrixDimension(int &row, int &column) const – նախատեսված են մատրիցի չափայնությունը սահմանելու և ստանալու համար:

QString getIndependedVariable() const, void setIndependedVariable(QString IndependedVariable) – նախատեսված են անկախ պարամետրը ստանալու և սահմանելու համար:

3.2.3. DTransformation դասի ֆունկցիաները

DTransformation(double tnyu, double H, int K, QString param) – դասի կոնստրուկտորն է, որը նախատեսված է մոտարկման կենտրոնի, մասշտաբային գործակցի, դիկրետների քանակի համապատասխան անդամ տվյալների և անկախ պարամետրի ինիցիալացման համար:

double *calculate(QString &expr) throw (DivisionByZero, LnZero) - վերադարձնում է expr -ում գրված արտահայտության համար հաշվարկված դիկրետները double տիպի ցուցիչում: Այստեղ նախատեսված են DivisionByZero (զրոյի վրա բաժանում), LnZero (լոգարիթմատակ արտահայտության զրոյական արժեք) բացառությունները ծրագրի համապատասխան անկանխատեսելի ելքերից խուսափելու համար:

void setCenterOfApproximation(double tnyu), void setScaleCoefficient(double H1), void setDiscretesQuantity(int K), void setExpression(QString expr) - ֆունկցիաները նախատեսված են մոտարկման կենտրոնի, մասշտաբային գործակցի, դիկրետների

քանակի համապատասխան անդամ տվյալների թույլատրելի արժեքների և անկախ պարամետրի ձևավորման համար:

```
double *DAddition(const double *X, const double *Y), double *DSubtract(const double *X, const double *Y), double *DMultiply(const double *X, const double *Y), double *DMultiply(const double X, const double *Y), double *DDivision(const double *X, const double *Y) throw (DivisionByZero), double *DPow(const double *X, const double *Y), double *DPow(const double *X, const double Y) - ֆունկցիաները նախատեսված են դիմերենցիալ ձևափոխությունների հանրահաշվի համապատասխան գործողությունների կազմակերպման համար:
```

```
double *DXtNyu(const double *X), double *DXtMyu(const double *X) - ֆունկցիաները նախատեսված են մոտարկման կենտրոնի որոշակի չափով շեղման, ստացված կենտրոնում դիսկրետների հաշվման և մոտարկման կենտրոնի նախկին արժեքին համապատասխան դիսկրետների ձևավորման համար:
```

```
double *DT_m(const int m) - նախատեսված է պարամետրի ցուցային արտահայտության դիսկրետների հաշվման համար:
```

```
double *DSin(const double *X) throw (DivisionByZero), double *DCos(const double *X) throw (DivisionByZero), double *DTan(const double *X), double *DCTan(const double *X) - ֆունկցիաները համապատասխանաբար  $\sin(x(t))$ ,  $\cos(x(t))$ ,  $\tan(x(t))$  և  $\operatorname{ctg}(x(t))$  եռանկյունաչափական ֆունկցիաների պատկերների ստացման համար են:
```

```
double *DExp(const double *X) throw (DivisionByZero), double *DLn(const double *X) throw (LnZero, DivisionByZero) - ֆունկցիաներն ապահովում են  $\exp(x(t))$  և  $\ln(x(t))$  ֆունկցիաների պատկերների ստացումը:
```

```
double *DTed() - ֆունկցիան նախատեսված է թեյլորյան միավորի (տեղ) պատկերների ստացման համար:
```

```

double *parseExpression(const QString &str, int &pos), double
*parseMultiplyDivision(const QString &str, int &pos), double *parsePowExp(const
QString &str, int &pos), double *parseSinCos(const QString &str, int &pos), double
*parseTanCtan(const QString &str, int &pos), double *parseCoefficient(const QString
&str, int &pos) - ֆունկցիաները ռեկուրսիվ ֆունկցիաներ են և իրականացնում են
տեքստային արտահայտության ձևափոխում համապատասխան մաթեմատիկական
արտահայտության՝ միաժամանակ իրականացնելով համապատասխան
դիսկրետների հաշվարկը:
```

3.2.4. MatrixEquationsWizard դասի ֆունկցիաները

void accept() - Վերաբեռնավորված ֆունկիա է, որը Վարպետի “Finish”
ստեղնի սեղմելուց հետո իրականացնում է մատրիցային դիսկրետների հաշվարկն
ըստ նախօրոք ներմուծված պարամետրերի (մոտարկման կենտրոն, դիսկրետների
քանակ, մասշտաբային գործակից, մատրիցի չափեր, անկախ պարամետր):

```

int getDiscretesQuantity(), void getAMatrixDimension(int &row, int &column), void
getBMatrixDimension(int &row, int &column), void getCMatrixDimension(int &row, int
&column), void getDMatrixDimension(int &row, int &column), void
getLinearAndNonLinearSequences(int &linear, int &nonlinear), double
getCenterOfApproximation(), double getScaleCoefficient(), QString
getIndependedVariable(), MatrixDiscretes getAMatrixDiscretes(), MatrixDiscretes
getBMatrixDiscretes(), MatrixDiscretes getCMatrixDiscretes(), Matrix_cmplx *
getDMatrixDiscretes() - ֆունկցիաները կառավարող ծրագրին վերադարձնում են
համապատասխանաբար դիսկրետների քանակը, մատրիցների չափերը,  
մատրիցային հավասարմանը մասնակցող գծային և ոչ գծային գումարելիների
```

քանակները, մասշտաբային գործակիցը, մոտարկման կենտրոնը, անկախ պարամետրը և մատրիցային դիսկրետները:

3.2.5. **InputDataWizard** դասի ֆունկցիաները

void accept() - վերաբեռնավորված ֆունկցիա է, որը Վարպետի “Finish” ստեղնի սեղմելուց հետո իրականացնում է մատրիցային դիսկրետների հաշվարկն ըստ նախօրոք ներմուծված պարամետրերի (մոտարկման կենտրոն, դիսկրետների քանակ, մասշտաբային գործակից, մատրիցի չափեր, անկախ պարամետր):

int getDiscretesQuantity(), void getMatrixDimension(int &row, int &column), double getCenterOfApproximation(), double getScaleCoefficient(), QString getIndependedVariable(), Matrix_cmplx *getMatrixDiscretes() - ֆունկցիաները կառավարող ծրագրին վերադարձնում են համապատասխանաբար դիսկրետների քանակը, մատրիցի չափերը, մոտարկման կենտրոնը, անկախ պարամետրը և մատրիցային դիսկրետները:

void setSquareMatrix() - ֆունկցիան Վարպետին տեղեկացնում է ներմուծվող մատրիցի քառակուսային լինելու հանգամանքը:

3.2.6. **ReconstructionWizard** դասի ֆունկցիաները

void accept() - վերաբեռնավորված ֆունկցիա է, որը Վարպետի “Finish” ստեղնի սեղմելուց հետո իրականացնում է նախապես ստեղծված ֆայլից վերցված մատրիցային դիսկրետների հիման վրա բնօրինակի վերականգնումը:

void readFromFile(QString &filename) - նախապես ստեղծված ֆայլից մատրիցային դիսկրետները կարդալու համար նախատեսված ֆունկցիա է:

`void setReconstructionType(Reconstruction::ReconstructionType type)` - ֆունկցիան վարպետին տեղեկացնում է, թե վերականգնող ինչ առնչություն է (թեյլորյան կամ պադեյան) անհրաժեշտ օգտագործել բնօրինակի ձևավորման համար:

3.2.7. SAPlot դասի ֆունկցիաները

`SAPlot(Matrix_String *mExpr, QWidget *parent = 0)` - դասի կոնստրուկտորն է, որտեղ ձևավորվում է գրաֆիկական մասի պատուհանը և կառուցվում են նախնական գրաֆիկները յուրաքանչյուր տարրի համար:

`void elementIsSelected(int index)` - ֆունկցիան բացվող ցուցակից որևէ տարր ընտրելու դեպքում կառուցում է համապատասխան տարրի գրաֆիկը:

`void changeScales()` - կառուցվող միջակայքի չափերը փոփոխելու համար նախատեսված ֆունկցիան է:

3.2.8. ExpressionMaker դասի ֆունկցիաները

`ExpressionMaker(QWidget *parent = 0)` - դասի կոնստրուկտորն է, որն ինիցիալացնում է խմբագրման վահանակի համապատասխան կոճակների անունները և դասավորում դրանք համապատասխան խմբերում՝ դրանց փնտրումն ավելի ոյուրին դարձնելու նպատակով:

`void setText(QString &expr), void setParameter(QString ¶m)` ֆունկցիաներն իրականացնում են համապատասխանաբար տեքստային դաշտի արժեքի և անկախ պարամետրի սահմանումը:

`QString getText() const, QVariant value()` ֆունկցիաները վերադարձնում են համապատասխանաբար տեքստային դաշտի արժեքը և արդեն խմբագրված մաթեմատիկական արտահայտությունը:

3.2.9. Parser դասի ֆունկցիաները

QString makeValidExpression(QString &expr) ֆունկցիան ճշգրտում ներմուծված տեքստային արտահայտությունը՝ հետազա ձևափոխություններ իրականացնելու համար:

void setParameter(const QString ¶m) - ձևավորում է տառային պարամետրը:

QVariant parseExpression(const QString &str, int &pos) - տեքստային արտահայտությունը ձևափոխում է մաթեմատիկականի՝ հաշվի առնելով նախապես սահմանված տառային պարամետրը:

QVariant parseMultiplyDivision(const QString &str, int &pos), QVariant parsePowExp(const QString &str, int &pos), QVariant parseSinCos(const QString &str, int &pos), QVariant parseTanCtan(const QString &str, int &pos), QVariant parseCoefficient(const QString &str, int &pos) ֆունկցիաներն իրականացնում են մաթեմատիկական գործողությունների և տառային պարամետրի կամ ազատ գործակիցների ձևափոխություն համապատասխան ծրագրավորման լեզվին հասկանալի առնչությունների:

3.3. Հիմնական ալգորիթմները

Ներկայացնենք մշակված գլոբալ ֆունկցիաները:

void calculateYForSimpleLinearME(const Matrix_cmplx & Ta, const Matrix_cmplx & Tb, const Matrix_cmplx & C, Matrix_cmplx & Y) և void calculateYForSilvesterME(const Matrix_cmplx & Ta, const Matrix_cmplx & Tb, const Matrix_cmplx & C, Matrix_cmplx & Y) ֆունկցիաները, օգտվելով համապատասխանաբար (2.1.13) և (2.3.16) առնչություններից, հաշվարկում են Y մատրիցի տարրերը: Ta -ն և Tb-ն վերին

Եռանկյունաձև մատրիցներ են, որոնք ստացվում են նախնական մատրիցները Շուրի վերլուծության [27,67] ենթարկելուց հետո, C-ն ազատ անդամ մատրիցն է:

```
void schurDecomposition(Matrix_cmplx *pA, Matrix_cmplx* & pU, Matrix_cmplx* &
pT, int Dim, int N, ulong MaximumNumberOfIteration, ulong& IterationNumber,double
Epsilon) throw (DivisionByZero, Dimension_Error) ֆունկցիան ցանկացած
քառակուսային ոչ ավտոնոմ մատրից ենթարկում է Շուրի վերլուծության
դիֆերենցիալ պատկերների տիրույթում: Այստեղ պA-ն նախնական մատրիցի
դիսկրետներն են, պU -ն և պT-ն Շուրի ձևափոխության արդյունքում ստացվող
համապատասխանաբար ունիտար և վերին եռանկյունաձև մատրիցների մատրի-
ցային դիսկրետները, Dim-ը մատրիցների չափայնությունն է, N -ը՝ դիսկրետների
քանակը, MaximumNumberOfIteration-ը և IterationNumber-ը ֆունկցիայում
օգտագործված QR ալգորիթմի Դ-նմանակի [9] իրականացման ժամանակ
կատարված իտերացիաների մաքսիմալ և ընթացիկ քանակներն են, Epsilon -ը
խնդրի լուծման պահանջվող ճշտությունը:
```

```
void solveWithSchurDecomposition(Matrix_cmplx *pA, Matrix_cmplx *pB,
Matrix_cmplx *pD, Matrix_cmplx* pRes, int DimA, int DimB, int N, double Epsilon) throw
(DivisionByZero, Dimension_Error) – նախատեսված է ոչ ավտոնոմ պարզագոյն
գծային մատրիցային հավասարման լուծման համար համաձայն (2.1.1)-(2.1.13)
ընթացակարգի: Այստեղ պA-ն, պB-ն և պD-ն նախնական մատրիցային հավասարման
գործակից մատրիցների մատրիցային դիսկրետներն են, պRes -ը մատրիցային
հավասարման լուծման մատրիցային դիսկրետները, DimA -ն և DimB -ն համապա-
տասխանաբար A(t) և B(t) քառակուսային մատրիցների չափայնություններն են, N-ը
դիսկրետների քանակն է, Epsilon -ը խնդրի լուծման պահանջվող ճշտությունը:
```

```

void solveWithTikhonovRegularization(Matrix_cmplx *pA, Matrix_cmplx *pB,
Matrix_cmplx *pD, Matrix_cmplx* pRes, int rowA, int columnA, int rowB, int columnB,
int N, double Eps1, double Eps2) - ֆունկցիան նախատեսված է Տիխոնովի
ռեգուլյարացման եղանակի վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակով ոչ ավտոնոմ
պարզագույն գծային մատրիցային հավասարումների լուծման համար ((2.2.1)-
(2.2.18)): pA-ն, pB-ն և pD –ն նախնական մատրիցային հավասարման գործակից
մատրիցների մատրիցային դիսկրետներն են, pRes –ը մատրիցային հավասարման
լուծման մատրիցային դիսկրետներն են, rowA-ն, columnA-ն, rowB-ն, columnB-ն
համապատասխանաբար A(t) և B(t) ուղղանկյունաձև մատրիցների չափայնություն-
ներն են, N-ը դիսկրետների քանակն է, Eps1-ն ու Eps2-ը անհրաժեշտ հակադարձելի
շեղումներն են (2.2.18):

```

```

void solveWithBartelsStewart(Matrix_cmplx *pA, Matrix_cmplx *pB, Matrix_cmplx
*pD, Matrix_cmplx* pRes, int DimA, int DimB, int N, double Epsilon) throw
(DivisionByZero, Dimension_Error) - իրականացնում է ոչ ավտոնոմ գծային
Սիլվեստրի տիպի մատրիցային հավասարումների լուծում համաձայն Բարտելս-
Սոյուարտի եղանակի Դ-նմանակի համար մշակված ընթացակարգի ((2.3.1)-
(2.3.17)): Այստեղ pA-ն, pB-ն և pD –ն նախնական մատրիցային հավասարման
գործակից մատրիցների մատրիցային դիսկրետներն են, pRes –ը մատրիցային
հավասարման լուծման մատրիցային դիսկրետներն են, DimA –ն և DimB –ն A(t) և
B(t) քառակուսային մատրիցների չափայնություններն են, N-ը դիսկրետների
քանակն է, Epsilon –ը՝ խնդրի լուծման պահանջվող ճշտությունը:

```

```

void solveSimpleNonLinearME(Matrix_cmplx *pA, Matrix_cmplx *pD, Matrix_cmplx*
pRes, int rowA, int rowD, int N, double Epsilon) throw (DivisionByZero,
Dimension_Error) – ֆունկցիան նախատեսված է ոչ ավտոնոմ պարզագույն ոչ գծային
հավասարումների լուծման դիֆերենցիալ եղանակի իրականացման համար

```

համաձայն ((2.4.1) - (2.4.5)) ընթացակարգի: Նշենք, որ այստեղ (2.4.5) հավասարումների լուծման համար օգտագործվել է solveWithSchurDecomposition(...) ֆունկցիան: pA -ն, և pD -ն նախնական մատրիցային հավասարման գործակից մատրիցների մատրիցային դիսկրետներն են, $pRes$ -ը մատրիցային հավասարման լուծման մատրիցային դիսկրետներն են, $rowA$ -ն, $rowD$ -ն, N -ը և $Epsilon$ -ը համապատասխանաբար $A(t)$, $D(t)$ մատրիցների չափայնություններն են, դիսկրետների քանակը և խնդրի լուծման ճշտությունը:

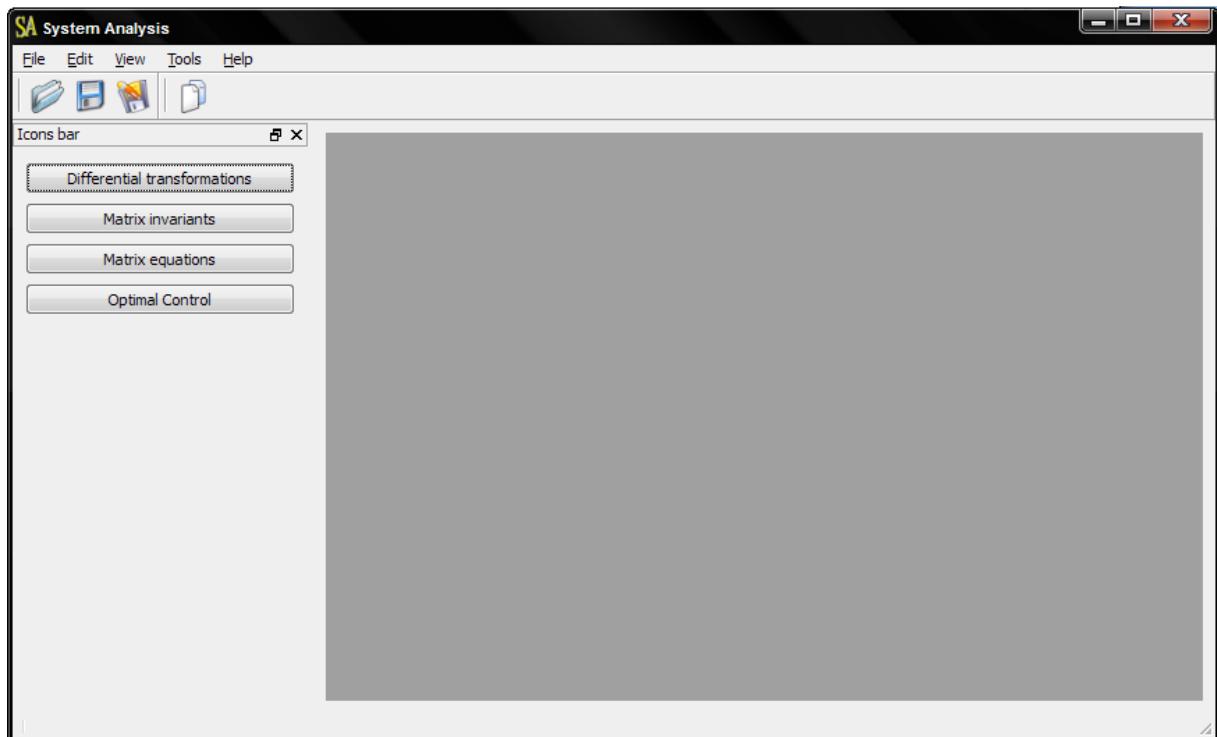
```
void solveRiccatiME(Matrix_cmplx *pA, Matrix_cmplx *pB, Matrix_cmplx *pC,
Matrix_cmplx *pD, Matrix_cmplx* pRes, int rowA, int rowB, int N, double Epsilon) throw
(DivisionByZero, Dimension_Error) Ֆունկցիան իրականացնում է ոչ գծային ոչ
ավտոնոմ Ռիկկատիի տիպի մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-
նմանակը ((2.5.1) - (2.5.5)): (2.5.5) -հավասարումների համար օտագործվում է
solveWithSchurDecomposition(...) ֆունկցիան:  $pA$ -ն,  $pB$ -ն,  $pC$ -ն և  $pD$  -ն նախնական
մատրիցային հավասարման գործակից մատրիցների մատրիցային դիսկրետներն
են,  $pRes$  -ը մատրիցային հավասարման լուծման մատրիցային դիսկրետներն են,
 $rowA$ -ն,  $rowB$ -ն,  $N$ -ը և  $Epsilon$ -ը համապատասխանաբար  $A(t)$ ,  $B(t)$  մատրիցների
չափայնություններն են, դիսկրետների քանակը և խնդրի լուծման ճշտությունը:
```

3.4. ԿԾՓ -ի աշխատանքային միջավայրը

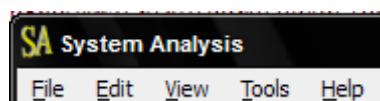
ԿԾՓ -ի [50] հիմնական պատուհանն ունի նկ.3.4.1 -ում պատկերված տեսքը, որը կարելի է տեսնել *SystemAnalysis.exe* ֆայլը թողարկելուց հետո:

Հիմնական պատուհանը բաղկացած է 4 հիմնական բաժիններից՝

1. Մենյուների բաժին (նկ. 3.4.2),
2. Գործիքների վահանակ (նկ. 3.4.3),
3. Խնդիրների դասեր (նկ. 3.4.4),
4. բազմափաստաթղթային ռեժիմի ինտերֆեյս (*MDI*, նկ. 3.4.5):



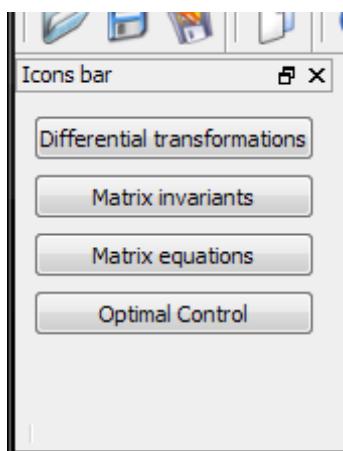
Նկ.3.4.1



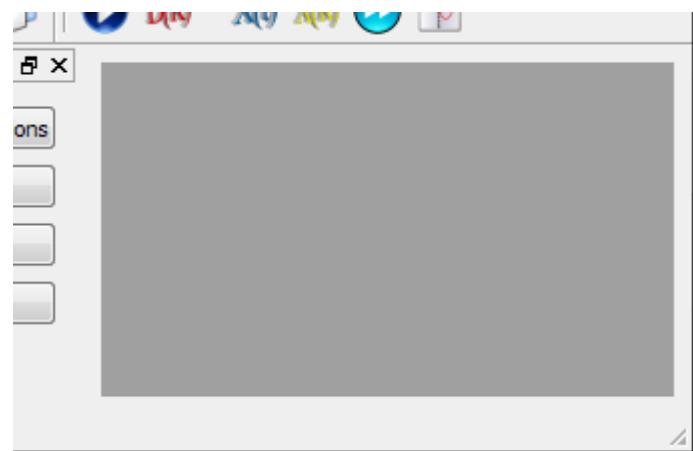
Նկ. 3.4.2



Նկ. 3.4.3



Նկ. 3.4.4



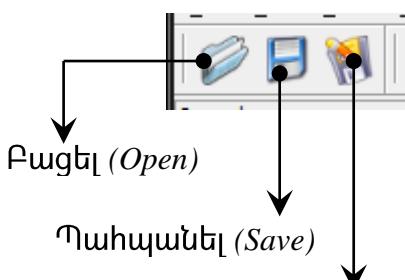
Նկ. 3.4.5

Մենյուների բաժինը նախատեսված է տվյալ խնդրի ընթացիկ արդյունքների պահպանման, պատճենման, աշխատանքային վահանակները՝ տեսանելիության փոփոխման, կարգավորումների, օգնության և այլ ստանդարտ գործողությունների

իրանացման համար:

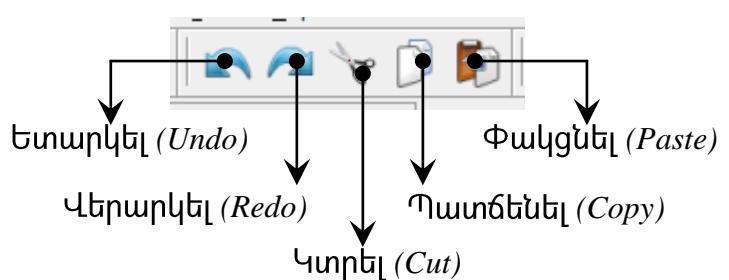
Գործիքների վահանակն իր հերթին բաղկացած է երեք մասից՝

1. ֆայլային գործիքներ (*File Selector/Chooser*) - նախատեսված են ֆայլային համակարգում առկա մշակված ԿԾՓ-ին հատուկ ֆորմատի ֆայլերի հետ աշխատելու համար (նկ. 3.4.6),
2. գործառույթների համալիր - նախատեսված է օպերացիոն համակարգի ժամանակավոր շտեմարանի (*clipboard*) հետ աշխատելու համար (նկ. 3.4.7),
3. կառավարող գործիքներ - նախատեսված են խնդիրների լուծման ընթացքը կազմակերպելու և արդյունքները վերլուծելու համար (նկ. 3.4.8):

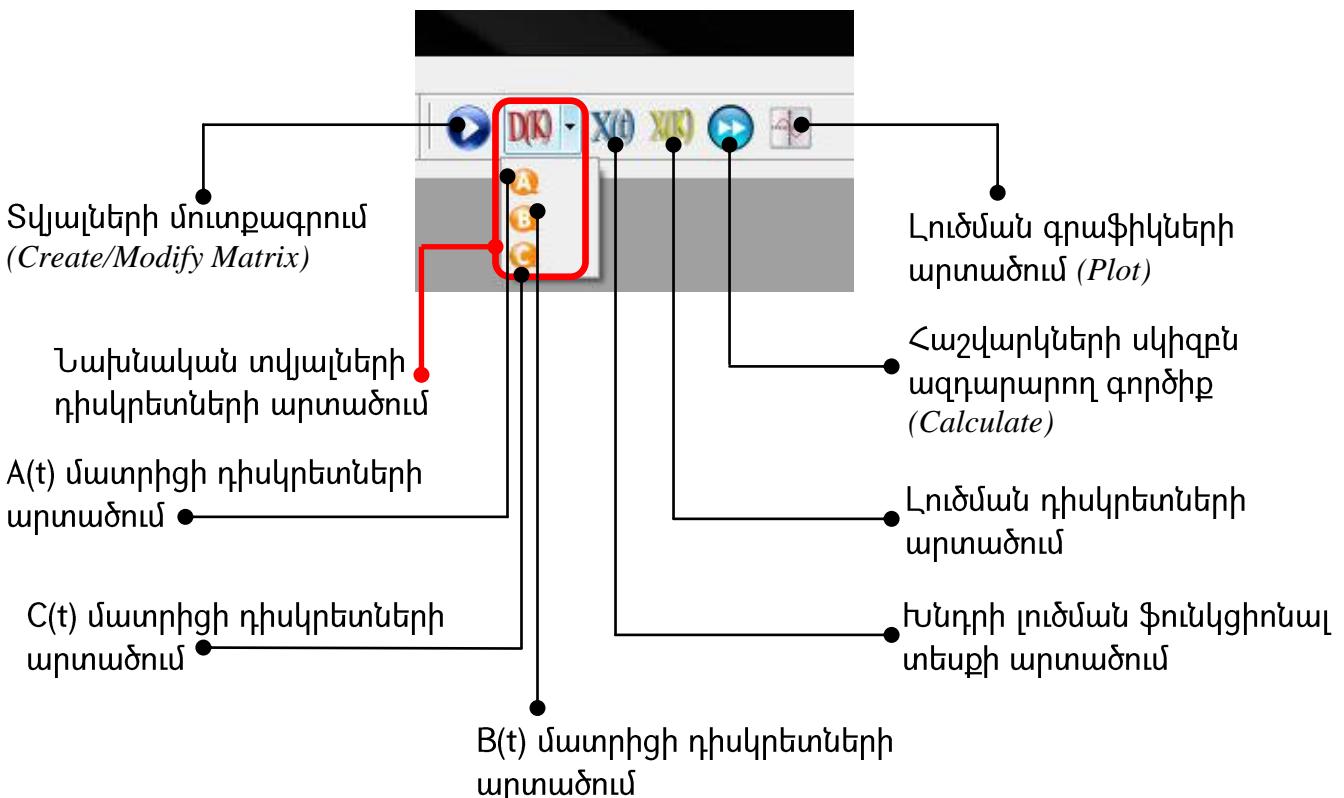


Պահպանել բոլորը (Save All)

Նկ. 3.4.6



Նկ. 3.4.7



Նկ. 3.4.8

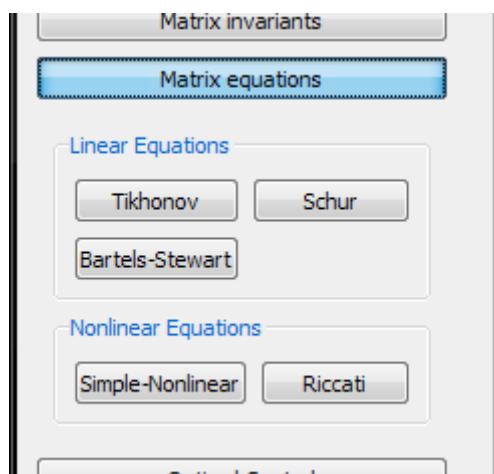
Խնդիրների դասեր բաժնում ընդգրկված են հետևյալ հիմնական դասերը.

1. Դիֆերենցիալ ձևափոխություններ (*Differential transformations*),
2. Մատրիցների ինվարիանտներ (*Matrix invariants*),
3. Մատրիցային հավասարումներ (*Matrix equations*):

Differential transformations – դասն ընդգրկում է դիֆերենցիալ ռուիդ ձևափոխություններ (*Discrete calculation*) և հակադարձ թեյլորյան (*DT*) ու պարեյան (*DP*) ձևափոխություններ ենթադասերը:

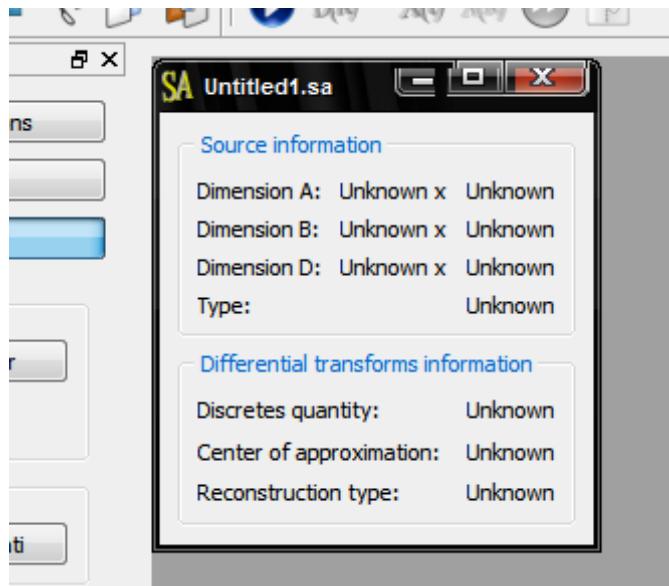
Matrix invariants – ընդգրկում է հետևյալ ենթադասերը, հակադարձ մատրից (*Inverse Matrix*), կեղծ հակադարձ մատրից (*Pseudoinverse Matrix*), մատրիցի սեփական արժեքներ (*Eigen Values*), սեփական վեկտորներ (*Eigen Vectors*), սեփական բազմանդամ (*Proper Polynomial*), մատրիցային ձևափոխություններ (*Matrix Decomposition*):

Matrix equations- դասն ընդգրկում է գծային և ոչ գծային ենթադասերը, որոնք ներառում են մշակված ալգորիթմների համանուներով կոճակներ (նկ. 3.4.9):



Նկ. 3.4.9

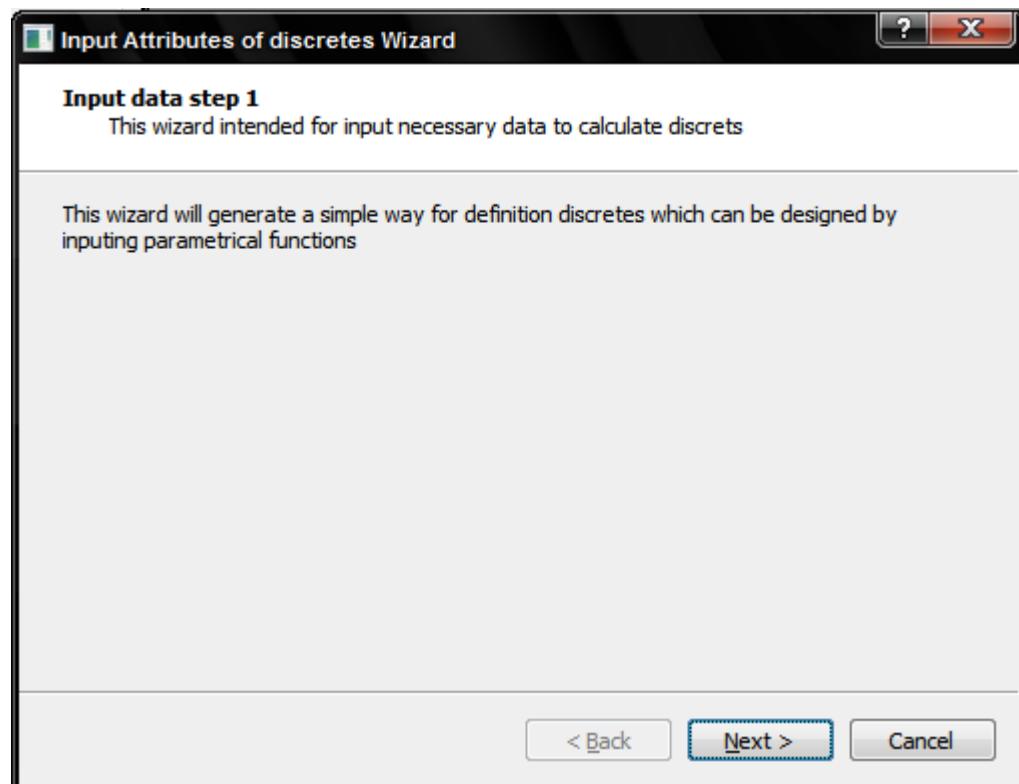
Ոչ ավտոնոմ գծային կամ ոչ գծային մատրիցային հավասարման լուծման համար, ընտրելով համապատասխան ալգորիթմը, բացվում են համապատասխան գործիքները և նախագծի պատուհանը (նկ. 3.4.10), որտեղ ընդգրկված են տվյալներ նախնական հավասարման գործակից մատրիցների չափայնությունների (*Dimension*), ընտրված մեթոդի (*Type*) և դիկրետների (*Discrete quantity, Center of approximation, Reconstruction type*) պարամետրերի մասին:



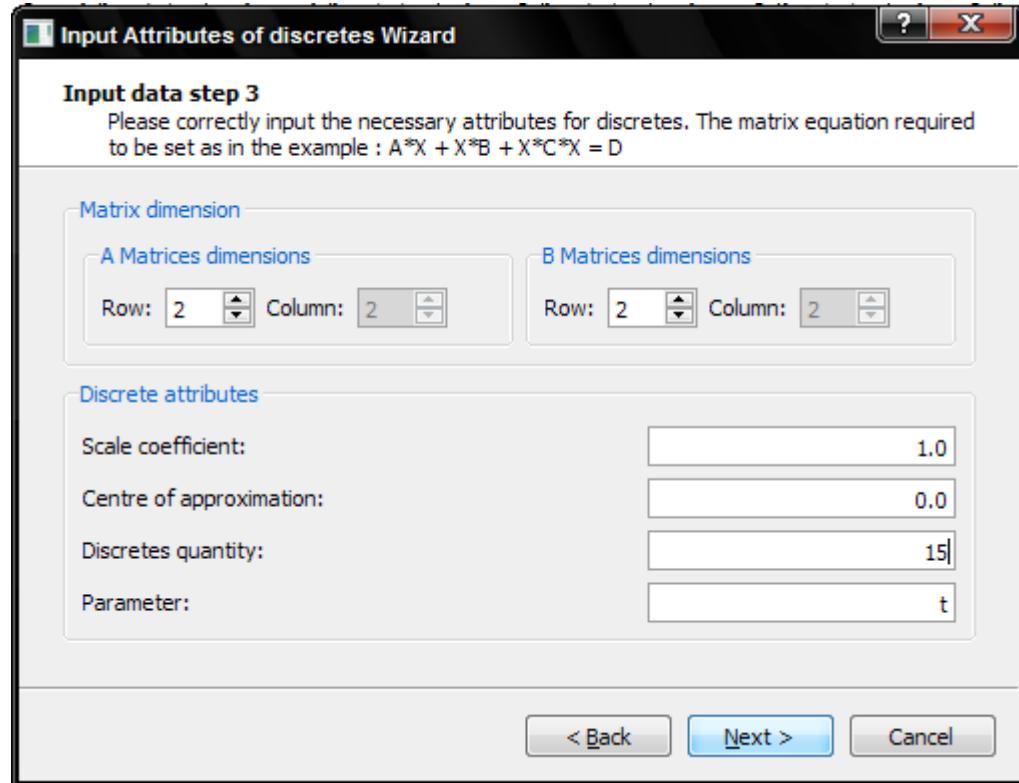
Նկ. 3.4.10

Խնդրի լուծման ալգորիթմն (օրինակ՝ Ռիկատիի տիպի մատրիցային հավասարումների լուծման ալգորիթմ - *Riccati*) ընտրելուց հետո, նախնական տվյալների մուտքագրման գործընթացն սկսելու համար անհրաժեշտ է սեղմել *Create/Modify Matrix* – ստեղնը, որի արդյունքում թողարկվում է ընտրված ալգորիթմին համապատասխան ներմուծման վարպետը (*wizard*): Վերջինիս առաջին պատուհանը կրում է ինֆորմացիոն բնույթ, որտեղ նկարագրվում է վարպետի նշանակությունը (նկ. 3.4.11):

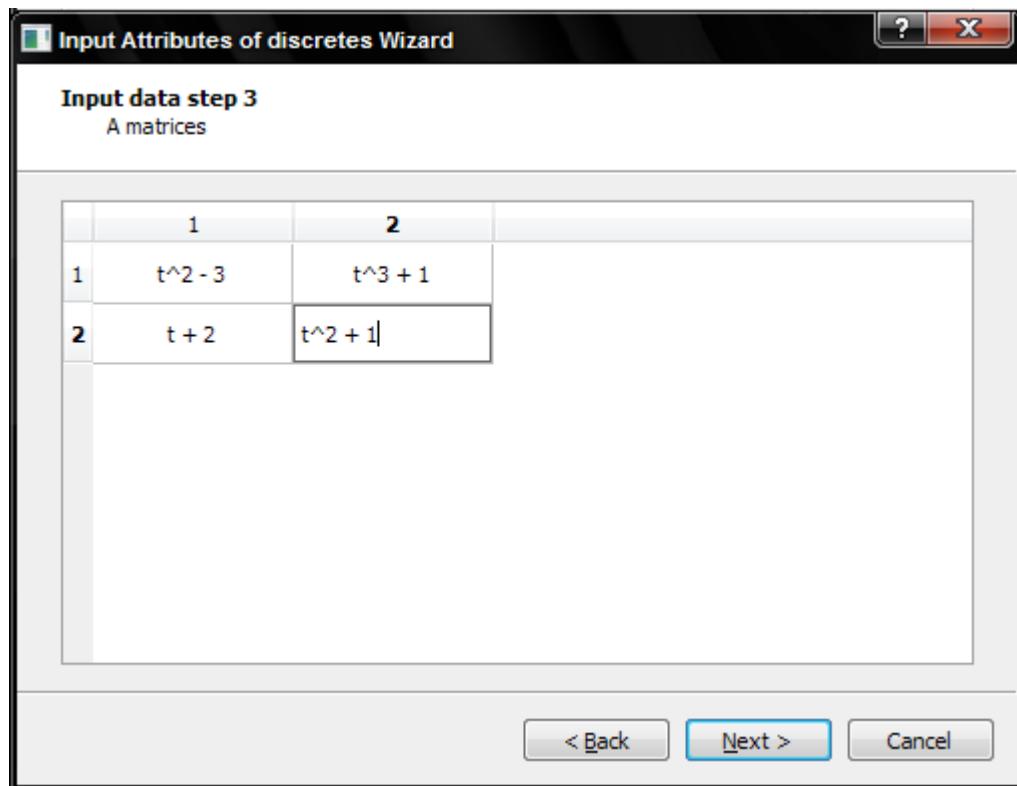
Վարպետի երկրորդ պատուհանն (նկ. 3.4.12) առաջարկում է ներմուծել ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարման գործակից մատրիցների չափայնությունները (*Matrix dimensions*) և գործակից մատրիցների դիսկրետների հաշվարկման համար տվյալներ (*Discrete attributes*): Մատրիցների չափայնությունների բաժինը, կախված ընտրված մատրիցային հավասարման ենթադասից, կարող է տարբերվել, մասնավորապես Տիխոնովի ռեզուլյարացման եղանակի վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակի ընտրման դեպքում A և B մատրիցների սյուների (*Column*) ներմուծման բլոկն ակտիվանում է: *Discrete attributes* բաժնում առաջարկվում է ներմուծել մասշտաբային գործակիցը (*Scale coefficient*), մոտարկման կենտրոնը (*Centre of approximation*), դիսկրետների քանակը (*Discretes quantity*) և անկախ պարամետրը (*Parameter*), որը կարող է լինել լատինառ այբուբենի ցանկացած սիմվոլ:



Üç. 3.4.11

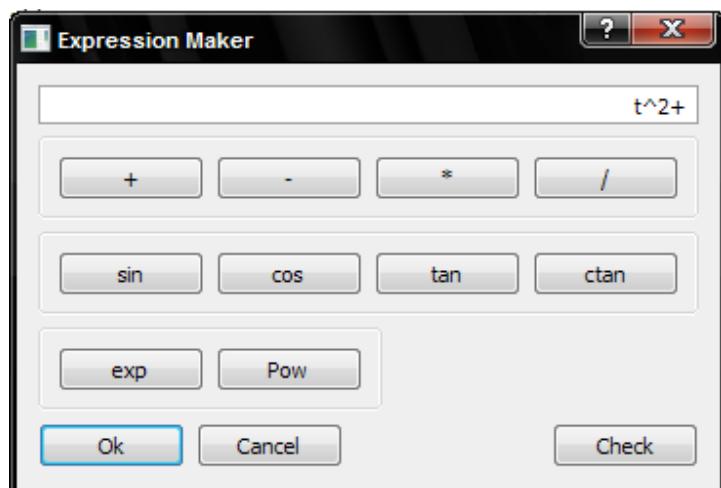


Üç. 3.4.12



Նկ. 3.4.13

Վարպետի «Next» կոճակը սեղմելուց հետո, առաջարկվում է ներմուծել ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարման գործակից մատրիցների ֆունկցիոնալ տեսքերը: Նկ. 3.4.13 –ում բերված պատուհանը նախատեսված է $A(t)$ մատրիցի տարրերը ներմուծելու համար: Նշենք, որ որևէ տարրի ներմուծման ժամանակ ֆունկցիոնալ տեսքի ստանդարտ կանոններից շեղվելու կամ սխալվելու դեպքում, բացվում է *Expression Maker* պատուհանը (Նկ. 3.4.14), որը թույլ է տալիս ուղղել թույլ տրված սխալը և ստուգել (*“Check”* ստեղնի միջոցով) սխալների առկայությունը:

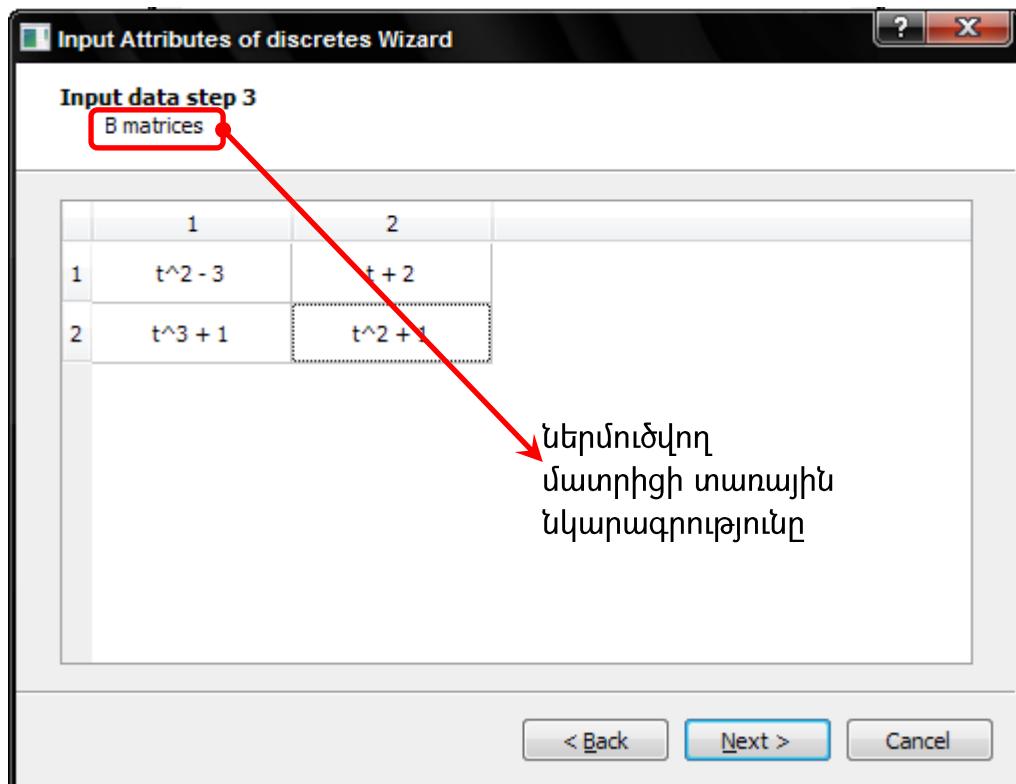


Նկ. 3.4.14

Ներմուծման պատուհանի վերևի հատվածում կարելի է տեսնել ներմուծվող մատրիցի տառային նկարագրությունը՝ մատրիցային հավասարման համապատասխան (նկ. 3.4.15): Մասնավորապես:

$$A(t)X(t) + X(t)B(t) + X(t)C(t)X(t) = D(t),$$

մատրիցային հավասարման դեպքում նկ.3.4.13-ում ներմուծվում է $A(t)$ մատրիցը, իսկ նկ. 3.4.15-ում՝ $B(t)$ -ն:

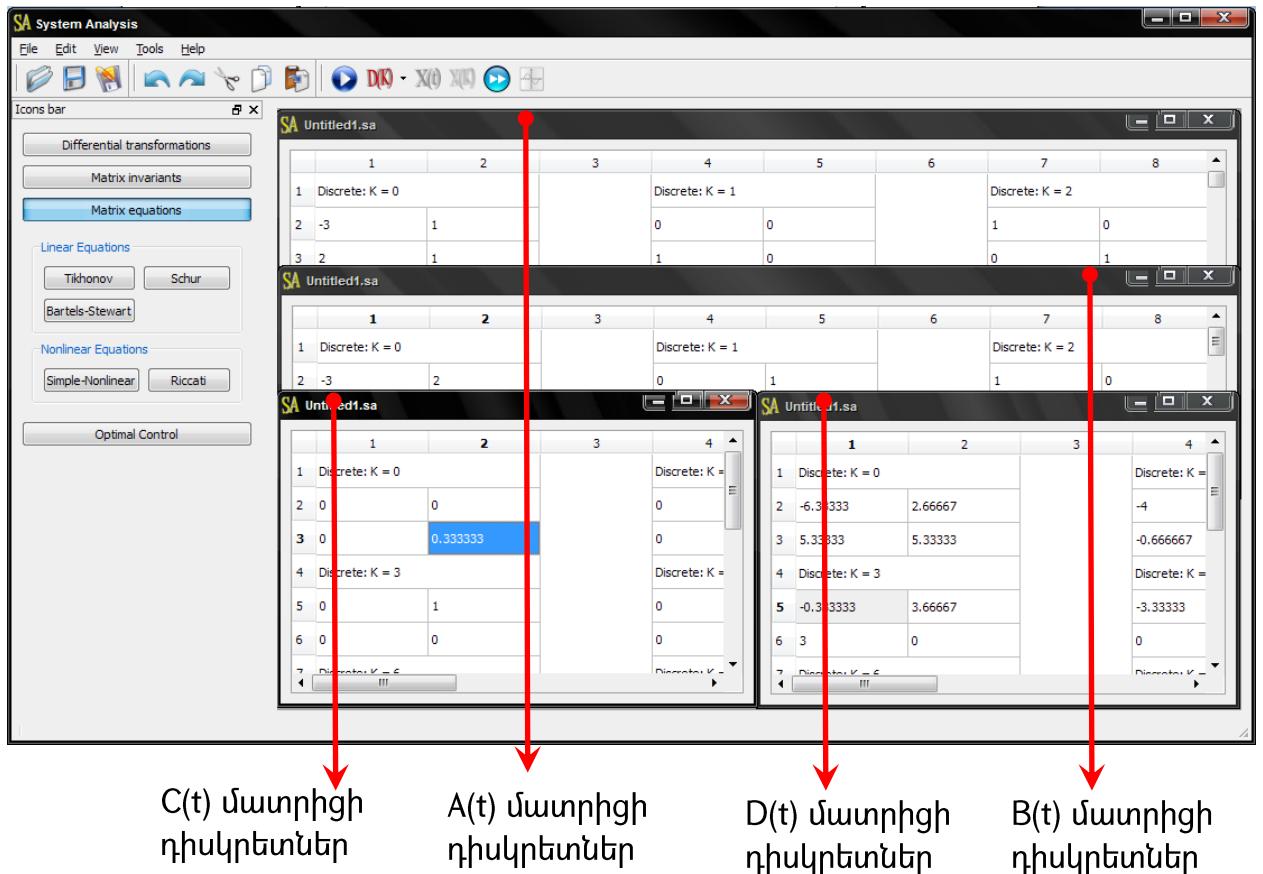


Նկ. 3.4.15

Գործակից մատրիցները ներմուծելուց հետո (ներմուծման վարպետի «Finish» ստեղնը սեղմելուց հետո) համաձայն դիֆերենցիալ ձևափոխությունների հանրահաշվի [33] իրականացվում է մատրիցային դիսկրետների հաշվարկը՝ ըստ վարպետի երկրորդ պատուհանում ներմուծված պարամետրերի:

Գործիքների վահանակի նախնական տվյալների դիսկրետների արտածման համար նախատեսված գործիքի միջոցով կարելի է տեսնել ոչ ավտոնոմ մատրիցների դիսկրետները՝ համապատասխան պատուհաններում այլուսակների տեսքերով (նկ. 3.4.16): Յուրաքանչյուր մատրիցի համար նշված գործիքի վրա սեղմելիս առաջացող բացվող ցուցակում նախատեսված է համանուն կոճակ (նկ.

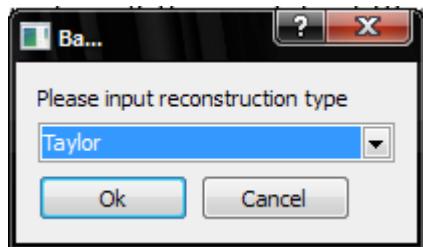
3.4.8) համապատասխան դիսկրետների արտապատկերման պատուհանը բացելու համար:



Նկ. 3.4.16

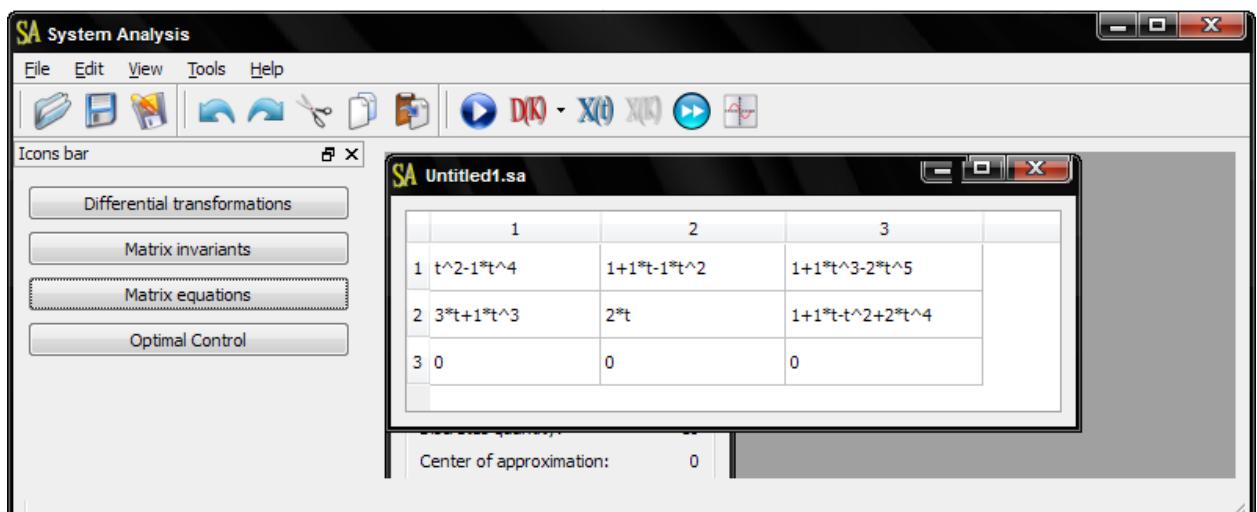
Նշենք, որ դիսկրետների համար նախատեսված պատուհանների պարունակությունն ամբողջությամբ տեսնելու համար կարելի է դրանք մեծացնել կամ փոքրացնել, իսկ թվային արժեքները կարելի է պատճենել գործառույթների համալիրի (Նկ. 3.4.7) միջոցով:

Գործիքների վահանակի *Calculate* ստեղնը սեղմելուց հետո բացվում է Նկ.3.4.17-ում պատկերված պատուհանը, որտեղ առաջարկվում է ընտրել բնօրինակը վերականգնող առնչության տիպը (թեյլորյան կամ պադեյան [35]), իսկ «*Ok*» ստեղնը սեղմելուց հետո իրականացվում է ընտրված ենթադասին համապատասխան ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարման լուծման ալգորիթմը:



Նկ. 3.4.17

Խնդրի լուծման ֆունկցիոնալ տեսքը (բնօրինակը) կարելի է տեսնել գործիքների վահանակի $X(t)$ ստեղնը սեղմելով (նկ. 3.4.18), որն ակտիվանում է համապատասխան ալգորիթմն իրականացնելուց հետո:



Նկ. 3.4.18

$X(t)$ մատրիցի մատրիցային դիսկրետները կարելի է տեսնել համապատասխան $X(K)$ գործիքը սեղմելուց հետո բացվող պատուհանում (նկ. 3.4.19):

Լուծման գրաֆիկական արտածում (Plot) գործիքը թույլ է տալիս խնդրի լուծման արդյունքները պատկերել գրաֆիկական տեսքով (նկ. 3.4.20): Այս ենթապատուհանի վերևի ձախ մասի բացվող ցուցակից կարելի է ընտրել արդյունարար մատրիցի յուրաքանչյուր տարրը՝ համաձայն նրա ինդեքսների (օրինակ՝ Element [2,1]):

SA System Analysis

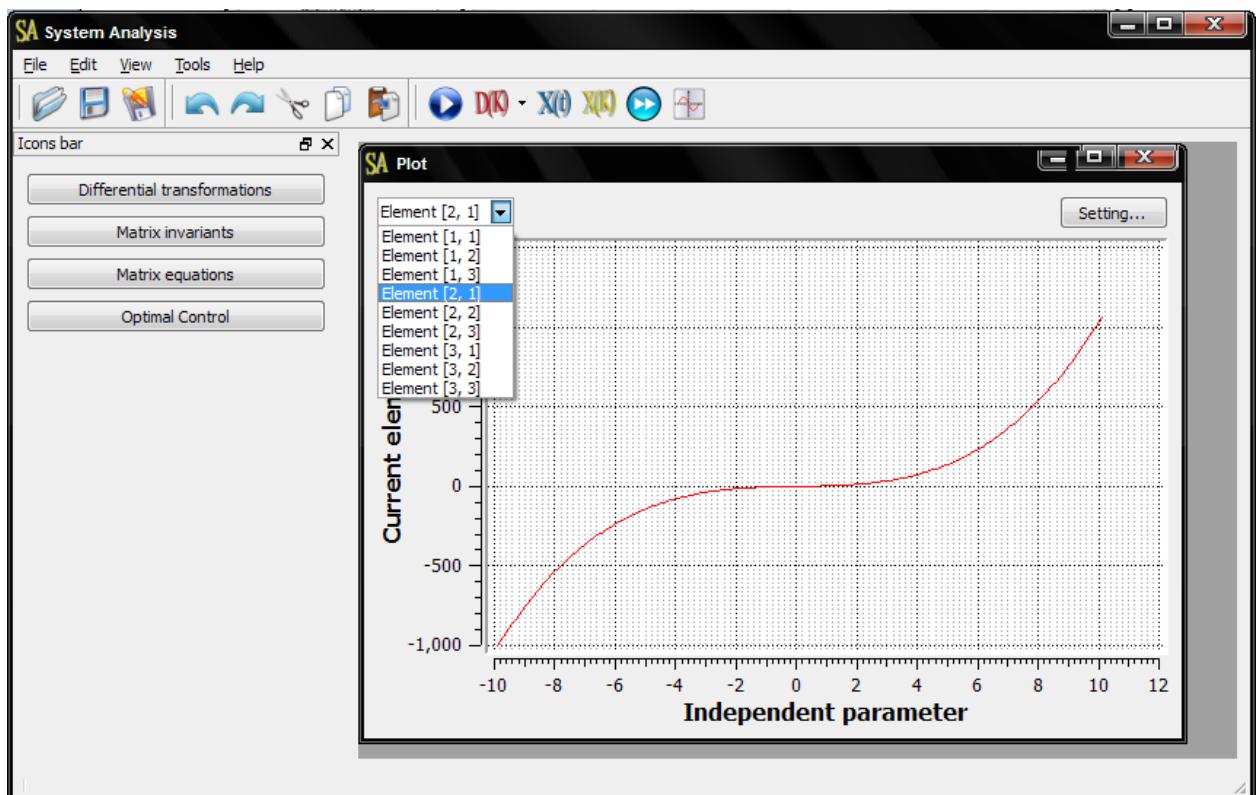
Differential transformations
Matrix invariants
Matrix equations
Optimal Control

Icons bar

SA Untitled1.sa

1	2	3	4	5	6
2 0	1	1		Discrete: K = 1	
3 0	0	1		0	2
4 0	0	0		0	0
5 Discrete: K = 3				Discrete: K = 4	
6 4e-08	-4e-08	1		-1	-4e-08
7 1	6e-08	-6e-08		-8e-08	8e-08
8 0	0	0		0	0
9 Discrete: K = 7				Discrete: K = 7	

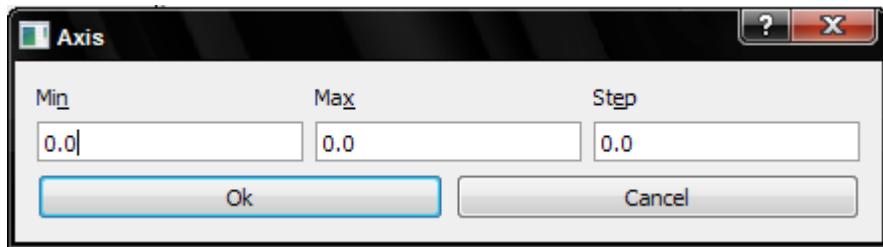
Նկ. 3.4.19



Նկ. 3.4.20

Plot պատուհանի վերսի աջ անկյունում առկա «Setting...» ստեղնը սեղմելուց հետո բացվում է «Axis» պատուհանը (նկ. 3.4.21), որը թույլ է տալիս փոփոխել

գրաֆիկի արտապատկերման միջակայքը (*Min* – նվազագույն սահման, *Max* – առավելագույն սահման) և քայլը (*Step*):



Նկ. 3.4.21

3.5. Եզրակացություններ երրորդ գլխի վերաբերյալ

Ասենախոսությունում մշակված ոչ ավտոնոմ գծային և ոչ գծային մատրիցային հավասարումների լուծման ալգորիթմների հիման վրա մշակվել է կիրառական ծրագրերի փաթեթ: Փաթեթն աշխատում է երկխոսային ռեժիմի պատուհանների օգտագործմամբ, որոնք հագեցված են անհրաժեշտ մեջյուններով, գործիքների վահանակներով, օգնող հաղորդագրություններով: Փաթեթի հիմնական ֆունկցիաները և ալգորիթմներն իրականացվել են ծրագրավորման C++ լեզվով, իսկ գրաֆիկական ինտերֆեյսն իրականացվել է Qt գրադարանի օգտագործմամբ:

ԿԾՓ-ն ամբողջովին օբյեկտ-կողմնորոշված է, որը հնարավորություն է տալիս ընդլայնել տարատեսակ նոր գործիքներով և այլ տիպի խնդիրների լուծման ալգորիթմներով: Բազմափաստաթղթային ռեժիմը թույլ է տալիս հեշտությամբ համեմատել տարբեր խնդիրների լուծման արդյունքները, իսկ խնդրի լուծման արդյունքները կարելի է տեսնել ինչպես անալիտիկ, այնպես էլ գրաֆիկական տեսքերով:

Խնդրի լուծման անհրաժեշտ տվյալները, ինչպես թվային այնպես էլ ֆունկցիոնալ տեսքերով ներմուծվում են համապատասխան վարպետների օգտագործմամբ, որտեղ յուրաքանչյուր խնդրի դասին համապատասխան այս կամ այն հատկությունները ենթարկվում են ավտոմատ դինամիկ փոփոխությունների: Փաթեթում օգտագործված տվյալների նվազագույն միավորներն են ամբողջ, կոմպլեքս կամ իրական տարրերով մատրիցները (վեկտորները):

ԳԼՈՒԽ 4

ՓՈՐՁԱԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

3.1. Պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման մոդելային օրինակներ

Օրինակ 1 (Շուրջի վերլուծության վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակ):

Դիտարկենք հետևյալ մատրիցային հավասարումը.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccc} t+1 & t & t & t & t+1 \\ t & t-1 & t & t & t \\ t & t & t+1 & t & t \\ t & t & t & t-1 & t \\ t+1 & t & t & t & t+1 \end{array} \right]_{5 \times 5} \cdot X_{5x2}(t) \cdot \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{t^2-t-6} & \frac{1}{t^2-t+3} \\ \frac{t-5}{t} & \frac{t}{t} \end{array} \right]_{2 \times 2} = \\
 & = \left[\begin{array}{cc} \frac{-9t^4 - t^3 + 33t^2 + 25t + 6}{-t^3 + t^2 + 6t} & \frac{9t^4 - 19t^3 + 2t^2 + 11t + 3}{t^3 - 6t^2 + 8t - 15} \\ \frac{-9t^3 + 7t^2 + 29t - 6}{-t^2 + t + 6} & \frac{(-9t^4 + 27t^3 - 21t^2 + 3t)}{t^3 - 6t^2 + 8t - 15} \\ \frac{-9t^3 + 2t^2 + 32t + 12}{-t^2 + t + 6} & \frac{9t^4 - 22t^3 + 8t^2 + 6t}{t^3 - 6t^2 + 8t - 15} \\ \frac{-9t^4 + 3t^3 + 33t^2 + 11t - 6}{-t^3 + t^2 + 6t} & \frac{9t^4 - 23t^3 + 12t^2 + 7t - 3}{t^3 - 6t^2 + 8t - 15} \\ \frac{-9t^4 - t^3 + 33t^2 + 25t + 6}{-t^3 + t^2 + 6t} & \frac{9t^4 - 19t^3 + 2t^2 + 11t + 3}{t^3 - 6t^2 + 8t - 15} \end{array} \right]_{5 \times 2} :
 \end{aligned}$$

Համաձայն ուղիղ դիֆերենցիալ ձևափոխությունների (1.1.1), եթե $t_v = 1.5$ և $H = 1$

կունենանք հետևյալ մատրիցային դիսկրետները.

$$A(0) = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 2.5 \\ 1.5 & 0.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 & 2.5 & 1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 & 1.5 & 0.5 & 1.5 \\ 2.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A(K) = \{0\}, K \geq 2;$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 0,66667 & -0,28571 \\ -0,28571 & 0,40000 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} -0,44444 & -0,08163 \\ -0,29932 & 0,05333 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} 0,29630 & -0,02332 \\ -0,16845 & -0,13511 \end{bmatrix},$$

$$B(3) = \begin{bmatrix} -0,19753 & -0,00666 \\ -0,12118 & 0,05784 \end{bmatrix}, B(4) = \begin{bmatrix} 0,13169 & -0,00190 \\ -0,07825 & 0,00518 \end{bmatrix}, B(5) = \begin{bmatrix} -0,08779 & -0,00054 \\ -0,05289 & -0,01819 \end{bmatrix},$$

$$B(6) = \begin{bmatrix} 0,05853 & -0,00016 \\ -0,03505 & 0,00832 \end{bmatrix}, B(7) = \begin{bmatrix} -0,03902 & -0,00004 \\ -0,02343 & -0,00041 \end{bmatrix}, B(8) = \begin{bmatrix} 0,02601 & -0,00001 \\ -0,01560 & -0,00244 \end{bmatrix};$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} 8.7381 & -0.4143 \\ 4.3571 & 0.2143 \\ 6.5 & 0.1286 \\ 6.2619 & -0.1857 \\ 8.7381 & -0.4143 \end{bmatrix}, C(1) = \begin{bmatrix} -3.0363 & -0.6784 \\ -0.3878 & 0.0041 \\ -1.8571 & -0.2604 \\ -0.6780 & -0.6588 \\ -3.0363 & -0.6784 \end{bmatrix}, C(2) = \begin{bmatrix} -7.0584 & -2.6799 \\ -5.6987 & -1.6255 \\ -6.8027 & -2.2740 \\ -6.547 & -2.1014 \\ -7.0584 & -2.6799 \end{bmatrix},$$

$$C(3) = \begin{bmatrix} -5.2073 & -1.9571 \\ -3.9591 & -1.6388 \\ -4.6595 & -1.8354 \\ -4.1118 & -1.7804 \\ -5.0273 & -1.9571 \end{bmatrix}, C(4) = \begin{bmatrix} -3.1777 & 0.0535 \\ -2.5937 & -0.0938 \\ -3.0708 & 0.0088 \\ -2.9639 & -0.0549 \\ -3.1777 & 0.0535 \end{bmatrix}, C(5) = \begin{bmatrix} -2.3027 & 0.0062 \\ -1.7422 & 0.0867 \\ -2.0574 & 0.0343 \\ -1.812 & 0.057 \\ -2.3027 & 0.0062 \end{bmatrix},$$

$$C(6) = \begin{bmatrix} -1.1456 & -0.1568 \\ -1.1577 & -0.1356 \\ -1.3687 & -0.1494 \\ -1.3217 & -0.1435 \\ -1.4156 & -0.1568 \end{bmatrix}, C(7) = \begin{bmatrix} -1.0225 & 0.0422 \\ -0.7729 & 0.0165 \\ -0.9133 & 0.0337 \\ -0.8041 & 0.0248 \\ -1.0225 & 0.0422 \end{bmatrix}, C(8) = \begin{bmatrix} -0.6294 & 0.0079 \\ -0.5150 & 0.0180 \\ -0.6086 & 0.0113 \\ -0.5878 & 0.0146 \\ -0.6294 & 0.0079 \end{bmatrix}$$

և այլն:

Որոշենք $X_{5x2}(t)$ մատրիցը օգտվելով գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Շուրի վերլուծության վրա հիմնված եղանակից [15]:

$A(0)$ և $B(0)$ մատրիցների համար, համաձայն Շուրի ծևափոխությունների [27, 67], ունենք.

$$U_A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0.2266 & 0.7071 & -0.4194 & 0.5222 \\ 0.7071 & -0.6007 & 0 & 0.1166 & 0.3543 \\ 0 & 0.4190 & 0 & 0.788 & 0.4510 \\ -0.7071 & -0.6007 & 0 & 0.1166 & 0.3543 \\ 0 & 0.2266 & -0.7071 & -0.4194 & 0.5222 \end{bmatrix}, \tilde{A}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1782 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3473 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.3308 \end{bmatrix};$$

$$U_B(0) = \begin{bmatrix} -0.5372 & -0.8435 \\ -0.8435 & 0.5372 \end{bmatrix}, \tilde{B}(0) = \begin{bmatrix} 0.218 & 0 \\ 0 & 0.8486 \end{bmatrix}.$$

Այդ դեպքում, համաձայն (2.1.5) –ի K=0 դեպքում կունենանք՝

$$D(0) = C(0):$$

Համաձայն (2.1.10)-ի՝

$$\tilde{D}(0) = \begin{bmatrix} 0.4849 & 1.288 \\ -0.0367 & -0.3388 \\ 0 & 0 \\ 0.1390 & 1.06 \\ -8.1912 & -13.5405 \end{bmatrix}:$$

Այնուհետև, ըստ (2.1.13)-ի՝

$$Y(0) = \begin{bmatrix} -2.2241 & -1.5177 \\ 0.9442 & 2.2409 \\ 0 & 0 \\ 0.4733 & 0.9271 \\ -4.5095 & -1.9153 \end{bmatrix},$$

ըստ (2.1.12)-ի՝

$$X(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 \\ 4.5 & 1.5 \\ 0 & 1.5 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1.5 \end{bmatrix}:$$

K=1 դեպքում համաձայն (2.1.5)-ի ունենք՝

$$D(1) = C(1) - (A(0) \cdot X(0) \cdot B(1) + A(1) \cdot X(0) \cdot B(0)),$$

Հետևաբար ըստ (2.1.10)-ի, (2.1.13)-ի և (2.1.12)-ի կունենանք՝

$$\tilde{D}(1) = \begin{bmatrix} 0.3785 & 1.1961 \\ -0.0192 & -0.1941 \\ 0 & 0 \\ 0.0608 & 0.5120 \\ -4.8906 & -5.5422 \end{bmatrix}, \quad Y(1) = \begin{bmatrix} -1.7359 & -1.094 \\ 0.4955 & 1.2836 \\ 0 & 0 \\ 0.2071 & 0.4478 \\ -2.6924 & -0.7839 \end{bmatrix}, \quad X(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}:$$

Եթե K=2, համաձայն (2.1.5)-ի՝

$$D(2) = C(2) - \left(A(0) \cdot X(0) \cdot B(2) + A(2) \cdot X(0) \cdot B(0) + A(1) \cdot X(1) \cdot B(0) + A(1) \cdot X(0) \cdot B(1) + A(0) \cdot X(1) \cdot B(1) \right),$$

Հետևաբար, համաձայն (2.1.10)-ի կունենանք՝

$$\tilde{D}(2) = \{0\}:$$

Այնուհետև, ըստ (2.1.13)-ի՝

$$Y(2) = \{0\},$$

իսկ ըստ (2.1.12)-ի՝

$$X(2) = \{0\}:$$

Նմանապես $X(K) = [0]$, $\forall K = \overline{2, \infty}$:

Հաշվի առնելով ստացված մատրիցային դիսկրետները վերականգնենք $X(t)$ բնօրինակը համաձայն դիֆերենցիալ-թեյլորյան վերականգնող առնչության.

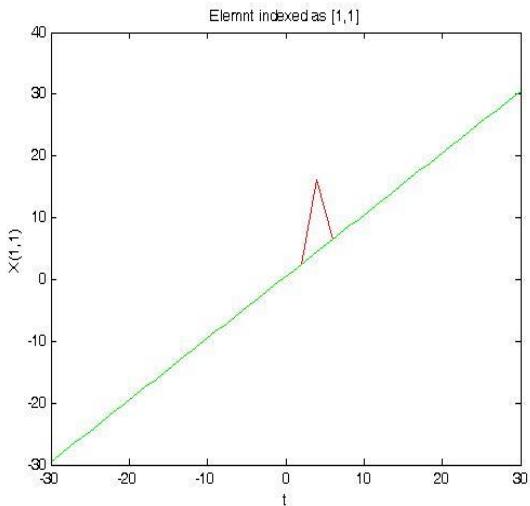
$$X(t) = \begin{bmatrix} t + \frac{1}{2} & t \\ 3t & t \\ 0 & t \\ 1 & 0 \\ t + \frac{1}{2} & t \end{bmatrix}:$$

Ստացված $X(t)$ լուծումն անալիտիկորեն բավարարում է սկզբնական մատրիցային հավասարմանը:

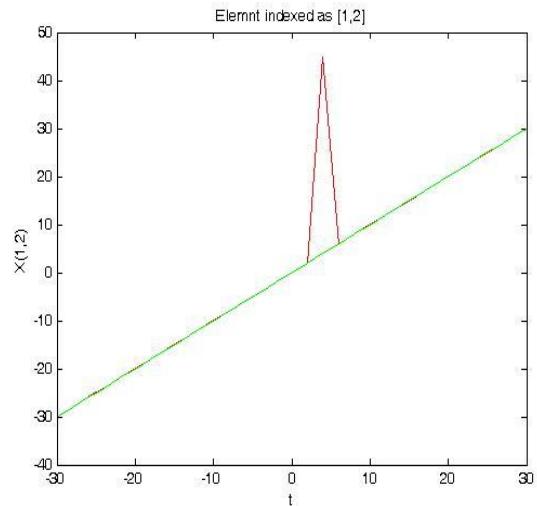
Համեմատենք ստացված արդյունքները ամրակայված կետերի դեպքում ստացված արդյունքների հետ: Վերջինս իրականացնելու համար դիտարկենք t պարամետրի $[-30, 30]$ միջակայքում ստացված թվային մատրիցային հավասարումները Շուրի վերլուծության վրա հիմնված եղանակով և առաջարկված դիֆերենցիալ եղանակով ստացված լուծումների մի քանի տարրերի համատեղ գրաֆիկները (նկ.4.1.1- նկ.4.1.4):

Ինչպես երևում է գրաֆիկներից, $[0, 10]$ միջակայքում հայտնի եղանակով լուծման դեպքում նախնական մատրիցների խզման կետերին համապատասխան արժեքները չեն վերականգնվում՝ ի տարբերություն առաջարկված եղանակի:

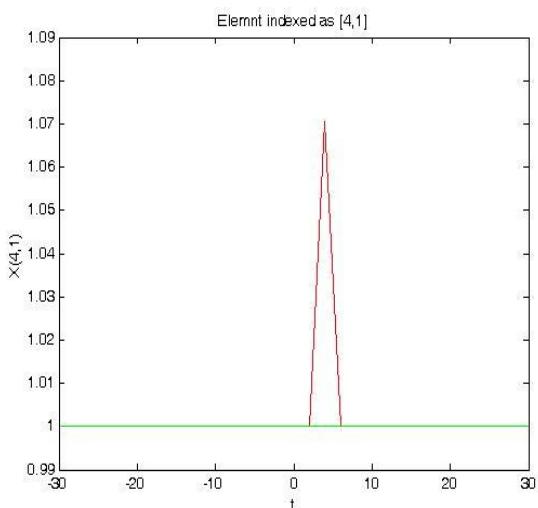
Դիպողություն: Ֆիքսված կետերի համար նշված միջակայքում մատրիցային հավասարման լուծման համար MATLAB ծրագրային միջավայրում ծախսված մեքենայական ժամանակը 0.001 քայլի դեպքում զգալիորեն գերազանցում է նույն միջավայրում առաջարկված եղանակներով լուծման համար ծախսված ժամանակից:



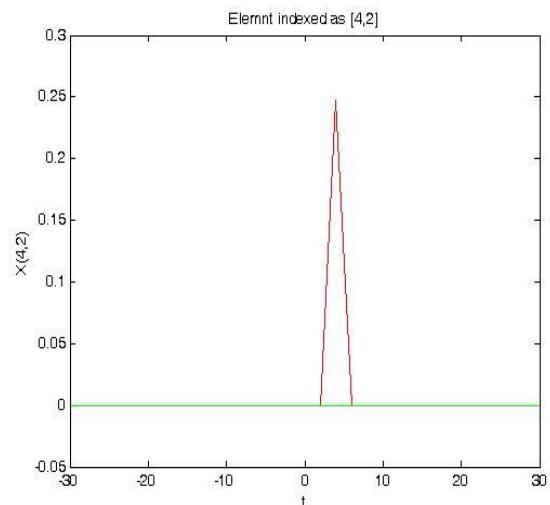
Նկ.4.1.1



Նկ.4.1.2



Նկ.4.1.3



Նկ.4.1.4

Օրինակ 2 (Տիխոնովի ռեզուլյարացման եղանակի վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակ) [14]:

Դիտարկենք հետևյալ մատրիցային հավասարումը.

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix} \cdot X(t) \cdot \begin{bmatrix} t-1 & t^2 & 0 & t \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t^2(t-1) & 4t^4 + 2t^3 + t^2 + t - 1 & 0 & 4t^3 + t^2 + t + 1 \\ t(t^2 + 3)(t-1) & 3t^5 - 2t^4 + 2t^3 + 4t^2 - 1 & 0 & t(t^3 + 3t + 2) \end{bmatrix}.$$

$t_v = 0$ և $H = I$ արժեքների դեպքում կունենանք հետևյալ մատրիցային դիսկրետները.

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(K) = \{0\}, K \geq 2;$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(K) = \{0\}, K \geq 3;$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C(2) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C(3) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(4) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C(5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(K) = \{0\}, K \geq 6,$$

որոնց դեպքում բավարարվում են (2.1.22) առնչությունները՝

$$A^+(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq E_{3x3},$$

$$B^+(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{3x3};$$

Այդ դեպքում, օգտագործելով (2.1.29)-ը, երբ $\varepsilon = 10^{-7}$, կստանանք հետևյալ $X(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ մատրիցային դիսկրետները.

Նախ՝

$$(\tilde{A}(0) + \varepsilon \cdot E_{vv})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 10^{-7} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^7 \end{bmatrix},$$

$K=0$ դեպքում ունենք՝

$$\tilde{C}(0) = A^+(0) \cdot C(0) \cdot B^+(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X(0) = (\tilde{A}(0) + \varepsilon \cdot E_{vv})^{-1} \cdot \tilde{C}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

Եթք $K=1$, ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} \tilde{C}(1) &= A^+(0) \cdot [C(1) - A(0) \cdot X(0) \cdot B(1) - A(1) \cdot X(0) \cdot B(0)] \cdot B^+(0) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \{\bullet\} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

որտեղ

$$\begin{aligned} \{\bullet\} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$X(1) = (\tilde{A}(0) + \varepsilon \cdot E_{vv})^{-1} \cdot \tilde{C}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

$K=2$ դեպքում կունենանք՝

$$\begin{aligned} \tilde{C}(2) &= A^+(0) \cdot \left[C(2) - \sum_{\substack{p=2, q=2-1, r=2 \\ p=1, q=0, r=1 \\ p+q+r=2}} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) \right] \cdot B^+(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$X(2) = (\tilde{A}(0) + \varepsilon \cdot E_{vv})^{-1} \cdot \tilde{C}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Համանման ձևով մնացած դիսկրետները կլինեն.

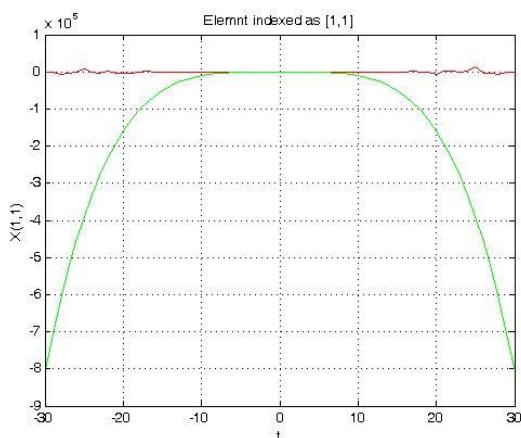
$$X(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X(4) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X(5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X(K) = \{0\}, K \geq 6:$$

$X(t)$ բնօրինակը (1.1.2) դիֆերենցիալ թեյլորյան ձևափոխությունների օգնությամբ վերականգնելով, կստանանք՝

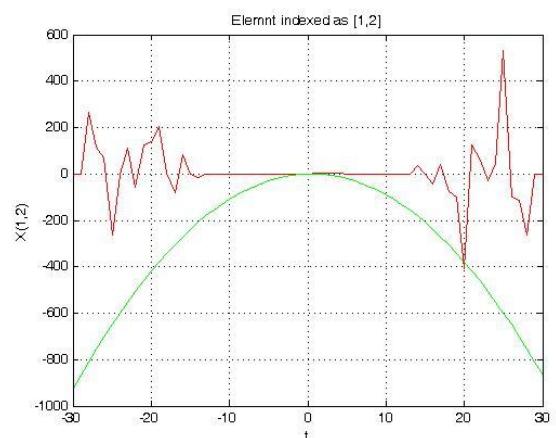
$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + X(1)t + X(2)t^2 + X(3)t^3 + X(4)t^4 + X(5)t^5 + X(6)t^6 = \\ &= \begin{bmatrix} t^2 - t^4 & 1 + t - t^2 & 1 + t^3 - 2t^5 \\ 3t + t^3 & 2t & 1 + t - t^2 + 2t^4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ստացված լուծումը ճշգրտորեն բավարարում է նախնական մատրիցային հավասարմանը:

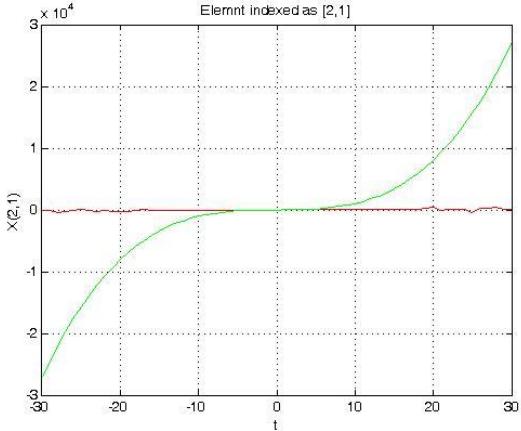
Համեմատենք ստացված արդյունքները ֆիքսված կետերի դեպքում Շուրի վերլուծության վրա հիմնված եղանակով [27] ստացված արդյունքների հետ: Այդ նպատակով դիտարկենք t պարամետրի $[-30, 30]$ միջակայքում ֆիքսված կետերի դեպքում և առաջարկված եղանակով ստացված լուծումների մի քանի տարրերի համատեղ գրաֆիկները (նկ.4.1.5- նկ.4.1.8):



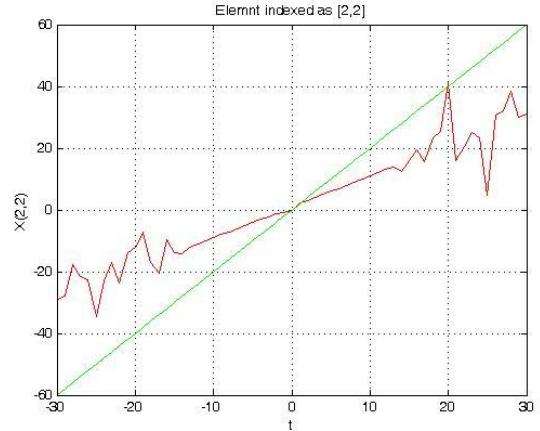
Նկ.4.1.5



Նկ.4.1.6



Նկ.4.1.7



Նկ.4.1.8

Ֆիքսված կետերի դեպքում ստացված արդյունքները 10^{-4} ճշտությամբ են բավարարում նախնական մատրիցային հավասարմանը (այնինչ առաջարկված եղանակով ստացված արդյունքները ճշգրիտ, անալիտիկորեն են բավարարում): Վերը բերված գրաֆիկներից երևում են առաջարկված եղանակով (կանաչ գույնով ներկայացված) և ամրակայված արժեքների դեպքում (կարմիր գույնով) ստացված արդյունքների զգալի տարբերությունները:

Օրինակ 3: Դիտարկենք հետևալ մատրիցային հավասարումը.

$$\begin{bmatrix} \frac{1+t^2}{1+t^2+t^4} & -\frac{t}{1+t^2+t^4} \\ \frac{t^3}{1+t^2+t^4} & \frac{1}{1+t^2+t^4} \\ \frac{t^2}{1+t^2+t^4} & \frac{t+t^3}{1+t^2+t^4} \\ -\frac{t}{1+t^2+t^4} & \frac{1+t^2}{1+t^2+t^4} \end{bmatrix} \cdot X(t) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{t+2} & \frac{1}{t+1} \\ \frac{t+3}{t^2+3t+2} & \frac{t}{t+1} \\ \frac{t^2+3t}{t^2+3t+1} & 0 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \frac{t^7 + 5t^6 + 7t^5 - t^4 - 3t^3 + 19t^2 + 19t + 3}{t^8 + 6t^7 + 13t^6 + 15t^5 + 15t^4 + 15t^3 + 14t^2 + 9t + 2} & \frac{2t^3 - 2t^2 + t}{t^4 + t^2 + 1} \\ \frac{t^8 + 6t^7 + 17t^6 + 29t^5 + 30t^4 + 38t^3 + 39t^2 + 12t}{t^8 + 6t^7 + 13t^6 + 15t^5 + 15t^4 + 15t^3 + 14t^2 + 9t + 2} & \frac{2t^5 + t^4 + t^2 + 3t}{t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1} \\ \frac{t^8 + 10t^7 + 30t^6 + 33t^5 + 19t^4 + 20t^3 + 9t^2}{t^8 + 6t^7 + 13t^6 + 15t^5 + 15t^4 + 15t^3 + 14t^2 + 9t + 2} & \frac{t^5 + t^4 + 3t^2}{t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1} \end{bmatrix} :$$

$t_v = 0,5$ և $H = 1$ արժեքների դեպքում կունենանք հետևալ մատրիցային դիսկրետները.

- $A(t)$ -մատրիցի համար՝

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0.9524 & -0.3810 \\ 0.0952 & 0.7619 \\ -0.1905 & 0.4762 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} -0.3265 & -0.3265 \\ 0.4626 & -0.8707 \\ -0.5442 & 0.7891 \end{bmatrix}, A(2) = \begin{bmatrix} -0.679 & 1.0988 \\ 0.4328 & -0.4561 \\ 0.2229 & -0.666 \end{bmatrix},$$

$$A(3) = \begin{bmatrix} -0.0533 & -0.0533 \\ -0.7589 & 1.0188 \\ 1.0721 & -0.7056 \end{bmatrix}, A(4) = \begin{bmatrix} 1.1262 & -1.2442 \\ -0.7344 & 0.4507 \\ -0.6754 & 0.5098 \end{bmatrix}, A(5) = \begin{bmatrix} 0.0979 & 0.0979 \\ 1.273 & -1.0973 \\ -1.1952 & 1.1751 \end{bmatrix}$$

և այլն;

- $B(t)$ -մատրիցի համար՝

$$B(0) = \begin{bmatrix} 0,40000 & 0,66667 \\ 0,93333 & 0,33333 \\ 0,63636 & 0,00000 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} -0,16000 & -0,44444 \\ -0,72889 & 0,44444 \\ 0,52893 & 0,00000 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} 0,06400 & 0,29630 \\ 0,52859 & -0,29630 \\ -0,63711 & 0,00000 \end{bmatrix},$$

$$B(3) = \begin{bmatrix} -0,02560 & 0,29630 \\ -0,36946 & -0,29630 \\ 0,73438 & 0,00000 \end{bmatrix}, B(4) = \begin{bmatrix} 0,01024 & 0,13169 \\ 0,25313 & -0,13169 \\ -0,83651 & 0,00000 \end{bmatrix}, B(5) = \begin{bmatrix} -0,00410 & -0,08779 \\ -0,17149 & 0,08779 \\ 0,94969 & 0,00000 \end{bmatrix}$$

և այլն;

- $C(t)$ -մատրիցի համար՝

$$C(0) = \begin{bmatrix} 1.2646 & 0.1905 \\ 1.7434 & 0.9524 \\ 0.5556 & 0.4286 \end{bmatrix}, C(1) = \begin{bmatrix} -1.7905 & 0.1633 \\ 1.5519 & 0.8798 \\ 1.7024 & 1.161 \end{bmatrix}, C(2) = \begin{bmatrix} -0.2499 & 0.2125 \\ -3.2382 & -1.5921 \\ 0.5211 & -0.3231 \end{bmatrix},$$

$$C(3) = \begin{bmatrix} 3.2654 & 0.6797 \\ 1.1584 & 1.4296 \\ -1.4351 & -1.4229 \end{bmatrix}, C(4) = \begin{bmatrix} -2.4374 & -1.5755 \\ 0.9874 & 0.5552 \\ -0.7541 & 1.2088 \end{bmatrix}, C(5) = \begin{bmatrix} -0.6095 & 0.0577 \\ 1.1026 & -1.4012 \\ 0.863 & 0.7359 \end{bmatrix}$$

և այլն, որոնց դեպքում բավարարվում են (2.1.23) առնչությունները.

$$A^+(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}, \tilde{A}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9524 & -0.3810 \\ 0.0952 & 0.7619 \\ -0.1905 & 0.4762 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{2x2},$$

$$B^+(0) = \begin{bmatrix} -0.3512 & 0.7024 & 0.7619 \\ 1.5653 & -0.1305 & -0.7924 \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{B}(0) = \begin{bmatrix} 0,40000 & 0,66667 \\ 0,93333 & 0,33333 \\ 0,63636 & 0,00000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,3512 & 0,7024 & 0,7619 \\ 1,5653 & -0,1305 & -0,7924 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,903 & 0,194 & -0,2235 \\ 0,194 & 0,6121 & 0,447 \\ -0,2235 & 0,447 & 0,4849 \end{bmatrix} \neq E_{3x3}:$$

Այդ դեպքում հաշվի առնելով (2.1.30)-ը, երբ $\varepsilon = 10^{-8}$ նախ կունենանք՝

$$\begin{aligned} (\tilde{B}(0) + \varepsilon \cdot E_{3x3})^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} 0,903 & 0,194 & -0,2235 \\ 0,194 & 0,6121 & 0,447 \\ -0,2235 & 0,447 & 0,4849 \end{bmatrix} + 10^{-8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \\ &= 10^8 \cdot \begin{bmatrix} 0,9698 & -1,9395 & 2,2350 \\ -1,9395 & 3,8790 & -4,4701 \\ 2,2350 & -4,4701 & 5,1512 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$K=0$ դեպքում, ըստ (2.1.28) -ի ունենք՝

$$\begin{aligned} \tilde{C}(0) &= A^+(0) \cdot C(0) \cdot B^+(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,2646 & 0,1905 \\ 1,7434 & 0,9524 \\ 0,5556 & 0,4286 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} -0,3512 & 0,7024 & 0,7619 \\ 1,5653 & -0,1305 & -0,7924 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2932 & 1,4136 & 1,0995 \\ 1,1163 & 1,2675 & 0,6156 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(0) &= \tilde{C}(0) \cdot (\tilde{B}(0) + \varepsilon \cdot E_{3x3})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2932 & 1,4136 & 1,0995 \\ 1,1163 & 1,2675 & 0,6156 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,9698 & -1,9395 & 2,2350 \\ -1,9395 & 3,8790 & -4,4701 \\ 2,2350 & -4,4701 & 5,1512 \end{bmatrix} \times \\ &\times 10^8 = \begin{bmatrix} 0,2932 & 1,4136 & 1,0995 \\ 1,1163 & 1,2675 & 0,6156 \end{bmatrix}: \end{aligned}$$

$K=1$ դեպքում՝

$$\begin{aligned} \tilde{C}(1) &= A^+(0) \cdot [C(1) - A(0) \cdot X(0) \cdot B(1) - A(1) \cdot X(0) \cdot B(0)] \cdot B^+(0) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \{\bullet\} \cdot \begin{bmatrix} 1,2646 & 0,1905 \\ 1,7434 & 0,9524 \\ 0,5556 & 0,4286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2253 & 0,7222 & 0,0951 \\ 1,5394 & 2,3862 & 1,4027 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

որտեղ

$$\{\bullet\} = \begin{bmatrix} -1.7905 & 0.1633 \\ 1.5519 & 0.8798 \\ 1.7024 & 1.161 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9524 & -0.3810 \\ 0.0952 & 0.7619 \\ -0.1905 & 0.4762 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2932 & 1.4136 & 1.0995 \\ 1.1163 & 1.2675 & 0.6156 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.16000 & -0.44444 \\ -0.72889 & 0.44444 \\ 0.52893 & 0.00000 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} -0.3265 & -0.3265 \\ 0.4626 & -0.8707 \\ -0.5442 & 0.7891 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2932 & 1.4136 & 1.0995 \\ 1.1163 & 1.2675 & 0.6156 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.40000 & 0.66667 \\ 0.93333 & 0.33333 \\ 0.63636 & 0.00000 \end{bmatrix},$$

$$X(1) = \tilde{C}(1) \cdot (\tilde{B}(0) + \varepsilon \cdot E_{3 \times 3})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2253 & 0.7222 & 0.0951 \\ 1.5394 & 2.3862 & 1.4027 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9698 & -1.9395 & 2.2350 \\ -1.9395 & 3.8790 & -4.4701 \\ 2.2350 & -4.4701 & 5.1512 \end{bmatrix} \times$$

$$\times 10^8 = \begin{bmatrix} 1.2253 & 0.7222 & 0.0951 \\ 1.5394 & 2.3862 & 1.4027 \end{bmatrix} :$$

Եթք $K=2$, ունենք՝

$$\tilde{C}(2) = A^+(0) \cdot \left[C(2) - \sum_{\substack{p=2, q=2-1, r=2 \\ p=1, q=0, r=1 \\ p+q+r=2}} A(p) \cdot X(q) \cdot B(r) \right] \cdot B^+(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4209 & 1.1633 \\ -0.2627 & -0.6230 \\ -0.2366 & -0.6023 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -0.3512 & 0.7024 & 0.7619 \\ 1.5653 & -0.1305 & -0.7924 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2317 & 0.0922 & -0.4544 \\ -1.3127 & -0.1470 & 0.4420 \end{bmatrix},$$

$$X(2) = \tilde{C}(2) \cdot (\tilde{B}(0) + \varepsilon \cdot E_{3 \times 3})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2317 & 0.0922 & -0.4544 \\ -1.3127 & -0.1470 & 0.4420 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9698 & -1.9395 & 2.2350 \\ -1.9395 & 3.8790 & -4.4701 \\ 2.2350 & -4.4701 & 5.1512 \end{bmatrix} \times$$

$$\times 10^8 = \begin{bmatrix} 1.2317 & 0.0922 & -0.4544 \\ -1.3127 & -0.1470 & 0.4420 \end{bmatrix} :$$

Համանման ձևով ստանում ենք մնացած դիսկրետները.

$$X(3) = \begin{bmatrix} -0.2485 & 0.3127 & 0.3792 \\ 0.157 & -0.0201 & -0.0855 \end{bmatrix}, \quad X(4) = \begin{bmatrix} -0.1762 & -0.2731 & -0.1605 \\ 0.1095 & -0.1789 & -0.2027 \end{bmatrix},$$

$$X(5) = \begin{bmatrix} 0.1578 & 0.2305 & 0.1316 \\ 0.0114 & 0.3349 & 0.2856 \end{bmatrix}, \quad X(6) = \begin{bmatrix} -0.0937 & -0.2736 & -0.1967 \\ -0.1182 & -0.4333 & -0.3247 \end{bmatrix},$$

$$X(7) = \begin{bmatrix} 0.0927 & 0.3617 & 0.2737 \\ 0.1627 & 0.5411 & 0.399 \end{bmatrix}, \quad X(8) = \begin{bmatrix} -0.1263 & -0.4708 & -0.3537 \\ -0.1964 & -0.6894 & -0.513 \end{bmatrix},$$

$$X(9) = \begin{bmatrix} 0.1685 & 0.6045 & 0.4514 \\ 0.2465 & 0.8857 & 0.6617 \end{bmatrix}$$

և այլն:

Նշենք, որ ստացված դիսկրետներով (2.1.15) առնչությունը բավարարվում է 10^{-7} ճշտությամբ: Հաշվի առնելով $X(K), K = \overline{0,9}$, մատրիցային դիսկրետները, կարելի է վերականգնել

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & x_{13}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & x_{23}(t) \end{bmatrix}$$

բնօրինակը համաձայն դիֆերենցիալ-պադեյան ձևափոխությունների (1.1.3)՝

$$x_{11}(t) = \frac{-0.61577 + 1.8179t + 4.0731(t-0.5)^2 + 3.8952(t-0.5)^3 + 1.4235(t-0.5)^4 + 0.14549(t-0.5)^5}{1 + 2.0216(t-0.5) + 1.2431(t-0.5)^2 + 0.44568(t-0.5)^3 + 0.084692(t-0.5)^4},$$

$$x_{12}(t) = \frac{-0.3844 + 3.5961t + 3.3436(t-0.5)^2 + 2.0504(t-0.5)^3 + 0.9283(t-0.5)^4 + 0.17427(t-0.5)^5}{1 + 2.033(t-0.5) + 1.2615(t-0.5)^2 + 0.4522(t-0.5)^3 + 0.086869(t-0.5)^4},$$

$$x_{13}(t) = \frac{-0.2615 + 2.7219t + 1.7902(t-0.5)^2 + 0.19221(t-0.5)^3 + 0.15011(t-0.5)^4 + 0.15961(t-0.5)^5}{1 + 2.389(t-0.5) + 1.8349(t-0.5)^2 + 0.65863(t-0.5)^3 + 0.16001(t-0.5)^4},$$

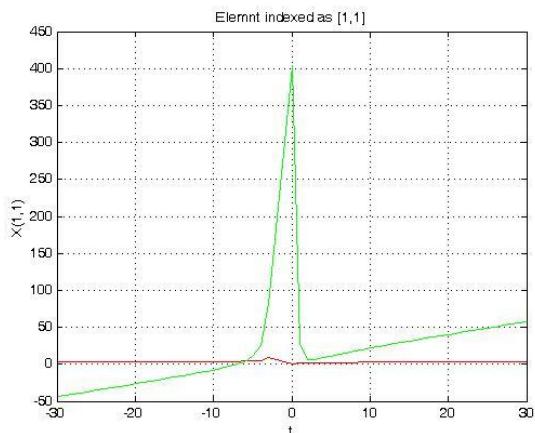
$$x_{21}(t) = \frac{-0.7828 + 3.7981t + 3.1942(t-0.5)^2 - 0.079475(t-0.5)^3 - 0.42452(t-0.5)^4 - 0.027518(t-0.5)^5}{1 + 2.0235(t-0.5) + 1.247(t-0.5)^2 + 0.44806(t-0.5)^3 + 0.085481(t-0.5)^4 + 0.00024596(t-0.5)^5},$$

$$x_{22}(t) = \frac{-1.2134 + 4.9617t + 6.2979(t-0.5)^2 + 3.2581(t-0.5)^3 + 0.78083(t-0.5)^4 + 0.08603(t-0.5)^5}{1 + 2.0319(t-0.5) + 1.2594(t-0.5)^2 + 0.45094(t-0.5)^3 + 0.086416(t-0.5)^4},$$

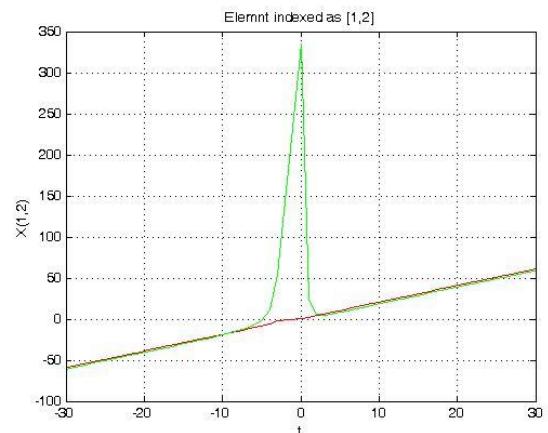
$$x_{23}(t) = \frac{-0.8261 + 2.8833t + 4.9621(t-0.5)^2 + 4.0013(t-0.5)^3 + 1.4541(t-0.5)^4 + 0.16429(t-0.5)^5}{1 + 2.4053(t-0.5) + 1.8619(t-0.5)^2 + 0.66927(t-0.5)^3 + 0.16374(t-0.5)^4}.$$

Դիպողություն: Հարկ է նշել, որ ստացված դիսկրետներով համաձայն դիֆերենցիալ-պադեյան ձևափոխությունների ճշգրիտ բնօրինակը վերականգնել չի հաջողվում: Ստացված բնօրինակը t պարամետրի տարրեր արժեքների դեպքում $10^{-2} \div 10^{-3}$ ճշտությամբ է բավարարում նախնական մատրիցայի հավասարմանը:

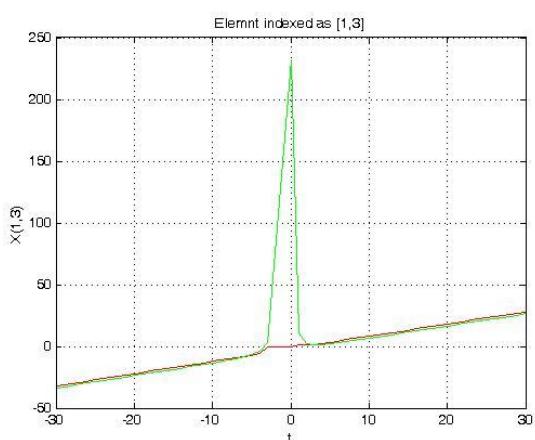
Համեմատելու համար ներկայացնենք t պարամետրի $[-30, 30]$ միջակայքում ֆիքսված արժեքների դեպքում հայտնի եղանակով [27] և առաջարկված եղանակով ստացված լուծումների մի քանի տարրերի համատեղ գրաֆիկները (նկ.4.1.9-նկ.4.1.13, կանաչ գույնով ներկայացված է առաջարկված եղանակով ստացված լուծման գրաֆիկները):



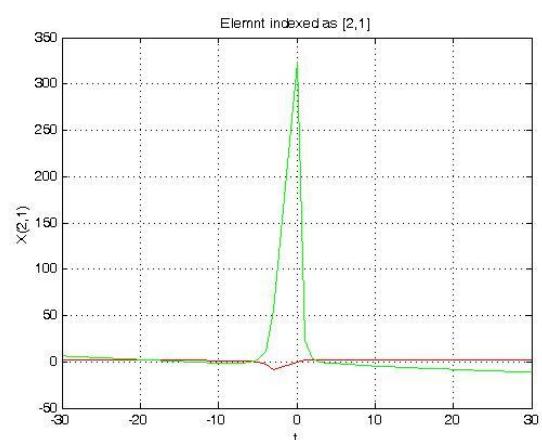
Նկ.4.1.9



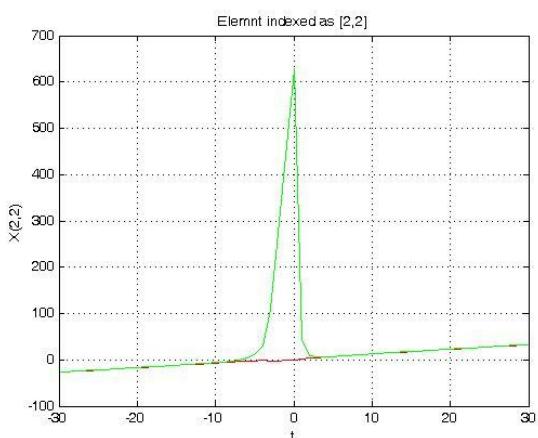
Նկ.4.1.10



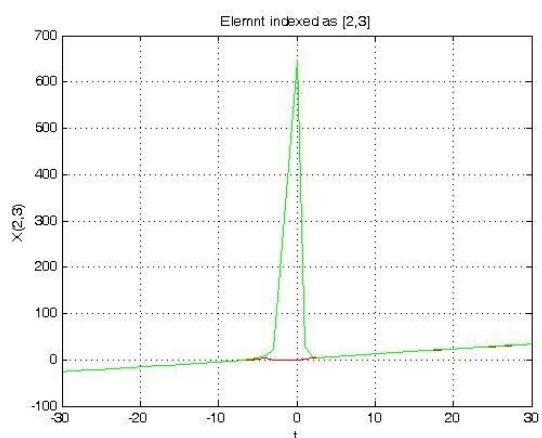
Նկ.4.1.11



Նկ.4.1.12



Նկ.4.1.12



Նկ.4.1.13

Ինչպես երևում է x_{11} տարրի համար ստացված բնօրինակի դեպքում ունենք զգալի շեղումներ ամրակայված կետերի եղանակով ստացված արդյունքների հետ համեմատած: Մնացած տարրերի դեպքում առաջարկված եղանակով ստացված արդյունքները զգալի շեղումներ ունեն միայն խզման կետերում, ընդ որում հայտնի

Եղանակով ստացված արդյունքների համար խզման կետերում բնօրինակը վերականգնել չի հաջողվում:

4.2. Սիլվեստրի տիպի գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների Բարտելս-Ստյուարտի եղանակով լուծման մոդելային օրինակ

Օրինակ 1. Դիտարկենք հետևալ մատրիցային հավասարումը [49].

$$\begin{aligned} A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) &= C(t) = \\ &= \begin{bmatrix} t+1 & 1-t \\ -t & t^2 \end{bmatrix} \cdot X(t) + X(t) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t-5} \\ \frac{t}{t^2-t-6} & \frac{t}{t^2-t+3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -t^4 + t^3 + 3t^2 + t + 12 \\ -t^2 + t + 6 \\ t^3 + t^2 - t - 6 \\ t^3 - t^2 - 6t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3t^4 - 15t^3 + 13t^2 - 39t - 15 \\ t^3 - 6t^2 + 8t - 15 \\ t^6 - 7t^5 + 13t^4 - 16t^3 + 3t^2 + 14t + 3 \\ t^3 - 6t^2 + 8t - 15 \end{bmatrix} : \end{aligned}$$

Համաձայն դիֆերենցիալ ռուիդ ձևափոխությունների [35] $A(t)$, $B(t)$ և $C(t)$ մատրիցային դիկրետների համար (եթե $t_v = 1.5$; $H = 1$;) կունենանք հետևյալ թվային մատրիցները.

$$\begin{aligned} A(0) &= \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -1.5 & 2.25 \end{bmatrix}; A(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; A(K) = \{0\}, K \geq 3. \\ B(0) &= \begin{bmatrix} 0,66667 & -0,28571 \\ -0,28571 & 0,40000 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} -0,44444 & -0,08163 \\ -0,29932 & 0,05333 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} 0,29630 & -0,02332 \\ -0,16845 & -0,13511 \end{bmatrix}, \\ B(3) &= \begin{bmatrix} -0,19753 & -0,00666 \\ -0,12118 & 0,05784 \end{bmatrix}, B(4) = \begin{bmatrix} 0,13169 & -0,00190 \\ -0,07825 & 0,00518 \end{bmatrix}, B(5) = \begin{bmatrix} -0,08779 & -0,00054 \\ -0,05289 & -0,01819 \end{bmatrix}, \\ B(6) &= \begin{bmatrix} 0,05853 & -0,00016 \\ -0,03505 & 0,00832 \end{bmatrix}, B(7) = \begin{bmatrix} -0,03902 & -0,00004 \\ -0,02343 & -0,00041 \end{bmatrix}, B(8) = \begin{bmatrix} 0,02601 & -0,00001 \\ -0,01560 & -0,00244 \end{bmatrix}. \\ C(0) &= \begin{bmatrix} 3.5357 & 6.0714 \\ 0.2381 & -0.0607 \end{bmatrix}, C(1) = \begin{bmatrix} 1.9660 & 3.1252 \\ -1.1791 & 3.1484 \end{bmatrix}, C(2) = \begin{bmatrix} 0.2796 & -0.4011 \\ -0.2557 & 3.3273 \end{bmatrix}, \\ C(3) &= \begin{bmatrix} -0.4714 & -0.0238 \\ -0.5478 & 0.9450 \end{bmatrix}, C(4) = \begin{bmatrix} -0.3168 & 0.0613 \\ -0.1069 & 0.0637 \end{bmatrix}, C(5) = \begin{bmatrix} -0.2105 & -0.0430 \\ -0.2454 & -0.0226 \end{bmatrix}, \\ C(6) &= \begin{bmatrix} -0.1405 & 0.0018 \\ -0.0469 & -0.0059 \end{bmatrix}, C(7) = \begin{bmatrix} -0.0936 & 0.0091 \\ -0.1092 & 0.0089 \end{bmatrix}, C(8) = \begin{bmatrix} -0.0624 & -0.0057 \\ -0.0208 & -0.0033 \end{bmatrix}: \end{aligned}$$

Համաձայն Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակի Դ-նմանակի [16,39]՝

$U_a(t)$ և $U_b(t)$ մատրիցային դիսկրետների համար կունենանք.

$$U_a(0) = \begin{bmatrix} -0.5547 & 0.8321 \\ 0.8321 & 0.5547 \end{bmatrix}, U_a(1) = \begin{bmatrix} 0.2560 & 0.1707 \\ 0.1707 & -0.2560 \end{bmatrix}, U_a(2) = \begin{bmatrix} -0.0919 & -0.1182 \\ -0.1182 & 0.0919 \end{bmatrix},$$

$$U_a(3) = \begin{bmatrix} 0.0182 & 0.0646 \\ 0.0646 & -0.0182 \end{bmatrix}, U_a(4) = \begin{bmatrix} 0.0065 & -0.0280 \\ -0.0280 & -0.0065 \end{bmatrix}, U_a(5) = \begin{bmatrix} -0.0099 & 0.0083 \\ 0.0083 & 0.0099 \end{bmatrix},$$

$$U_a(6) = \begin{bmatrix} 0.0067 & -0.0002 \\ -0.0002 & -0.0067 \end{bmatrix}, U_a(7) = \begin{bmatrix} -0.0031 & -0.0020 \\ -0.0020 & 0.0031 \end{bmatrix}, U_a(8) = \begin{bmatrix} 0.0009 & 0.0018 \\ 0.0018 & -0.0009 \end{bmatrix}.$$

$$U_b(0) = \begin{bmatrix} 0.5372 & -0.8435 \\ 0.8435 & 0.5372 \end{bmatrix}, U_b(1) = \begin{bmatrix} 0.2638 & 0.1680 \\ -0.1680 & 0.2638 \end{bmatrix}, U_b(2) = \begin{bmatrix} -0.3869 & -0.1884 \\ 0.1884 & -0.3869 \end{bmatrix},$$

$$U_b(3) = \begin{bmatrix} 0.0470 & -0.1286 \\ 0.1286 & 0.0470 \end{bmatrix}, U_b(4) = \begin{bmatrix} 0.2653 & 0.2678 \\ -0.2678 & 0.2653 \end{bmatrix}, U_b(5) = \begin{bmatrix} -0.3610 & -0.0864 \\ 0.0864 & -0.3610 \end{bmatrix},$$

$$U_b(6) = \begin{bmatrix} 0.0009 & 0.0018 \\ 0.0018 & -0.0009 \end{bmatrix}, U_b(7) = \begin{bmatrix} 0.4630 & 0.4036 \\ -0.4036 & 0.4630 \end{bmatrix}, U_b(8) = \begin{bmatrix} -0.5449 & 0.0093 \\ -0.0093 & -0.5449 \end{bmatrix}:$$

Համաձայն (2.2.12) և (2.2.13) առնչությունների $T_a(t)$ և $T_b(t)$ մատրիցների համար ունենք հետևյալ մատրիցային դիսկրետները.

$$T_a(0) = \begin{bmatrix} 3.25 & -1 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, T_a(1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T_a(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T_a(K) = \{0\}, K \geq 3.$$

$$T_b(0) = \begin{bmatrix} 0.2180 & 0 \\ 0 & 0.8486 \end{bmatrix}, T_b(1) = \begin{bmatrix} -0.2629 & 0.2177 \\ 0 & -0.1282 \end{bmatrix}, T_b(2) = \begin{bmatrix} -0.2273 & 0.1451 \\ 0 & 0.3885 \end{bmatrix},$$

$$T_b(3) = \begin{bmatrix} 0.1294 & 0.1145 \\ 0 & -0.2691 \end{bmatrix}, T_b(4) = \begin{bmatrix} -0.0865 & 0.0763 \\ 0 & 0.2234 \end{bmatrix}, T_b(5) = \begin{bmatrix} -0.1040 & 0.0523 \\ 0 & -0.0020 \end{bmatrix},$$

$$T_b(6) = \begin{bmatrix} 0.1236 & 0.0349 \\ 0 & -0.0568 \end{bmatrix}, T_b(7) = \begin{bmatrix} -0.0277 & 0.0234 \\ 0 & -0.0109 \end{bmatrix}, T_b(8) = \begin{bmatrix} -0.1402 & 0.0156 \\ 0 & 0.1638 \end{bmatrix}:$$

$\tilde{C}(K)$ մատրիցային դիկրետները կորոշենք համաձայն (2.2.14)-ի՝

$$\tilde{C}(0) = \begin{bmatrix} -3.8304 & -0.3491 \\ 5.8838 & 0.1028 \end{bmatrix}, \tilde{C}(1) = \begin{bmatrix} 1.5541 & 1.0568 \\ 5.3401 & 3.4547 \end{bmatrix}, \tilde{C}(2) = \begin{bmatrix} 2.2941 & 4.4893 \\ -0.1348 & -0.8432 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(3) = \begin{bmatrix} 0.1574 & 0.7549 \\ 0.7562 & -1.8087 \end{bmatrix}, \tilde{C}(4) = \begin{bmatrix} 1.4498 & -2.1484 \\ 0.0357 & 2.1249 \end{bmatrix}, \tilde{C}(5) = \begin{bmatrix} -0.0573 & 1.7826 \\ -1.7510 & 0.1310 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(6) = \begin{bmatrix} -1.4382 & 0.5874 \\ 1.3535 & -2.5293 \end{bmatrix}, \tilde{C}(7) = \begin{bmatrix} 1.5134 & -3.0276 \\ 0.7543 & 3.0819 \end{bmatrix}, \tilde{C}(8) = \begin{bmatrix} 0.5821 & 2.5169 \\ -2.9709 & 0.4562 \end{bmatrix}:$$

Ըստ (2.2.16)-ի $Y(K)$ մատրիցային դիսկրետների համար կունենանք.

$$Y(0) = \begin{bmatrix} -0.1170 & -0.0745 \\ 3.4247 & 0.0438 \end{bmatrix}, Y(1) = \begin{bmatrix} 1.0130 & 0.5937 \\ 1.6389 & 1.1373 \end{bmatrix}, Y(2) = \begin{bmatrix} -0.2067 & 0.3738 \\ -0.3285 & -1.1520 \end{bmatrix},$$

$$Y(3) = \begin{bmatrix} 0.1429 & -0.4917 \\ 0.5400 & -0.7634 \end{bmatrix}, Y(4) = \begin{bmatrix} 0.2514 & 0.0236 \\ -0.2054 & 1.2838 \end{bmatrix}, Y(5) = \begin{bmatrix} -0.3745 & 0.3855 \\ -0.5451 & -0.6625 \end{bmatrix},$$

$$Y(6) = \begin{bmatrix} 0.0767 & -0.4476 \\ 0.7900 & -1.0591 \end{bmatrix}, Y(7) = \begin{bmatrix} 0.4068 & -0.0459 \\ -0.0120 & 1.9631 \end{bmatrix}, Y(8) = \begin{bmatrix} -0.4888 & 0.6503 \\ -1.2267 & -0.6442 \end{bmatrix}:$$

$X(K)$ մատրիցային դիսկրետները որոշենք (2.2.17) առնչությամբ.

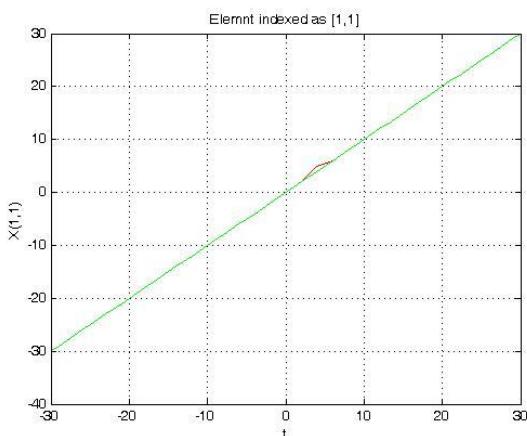
$$X(0) = \begin{bmatrix} 1.5 & 2.5 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}, X(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X(K) = \{0\}, K \geq 2:$$

$X(t)$ բնօրինակը վերականգնենք համաձայն դիֆերենցիալ-թեյլորյան հակադարձ ձևափոխությունների (1.1.2).

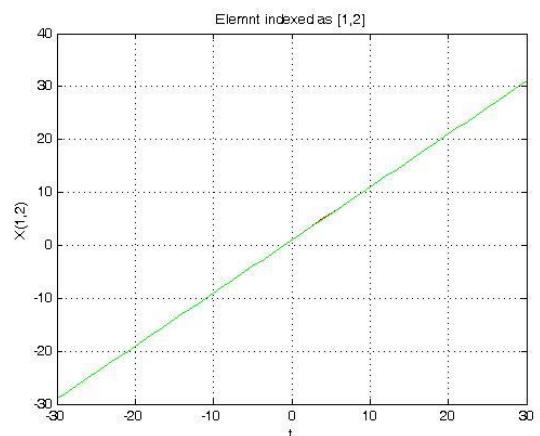
$$X(t) = \begin{bmatrix} t & t+1 \\ 1 & t \end{bmatrix}:$$

Դիտողություն. Ստացված լուծումը համընկնում է նախնական մատրիցային հավասարման անալիտիկ լուծման հետ:

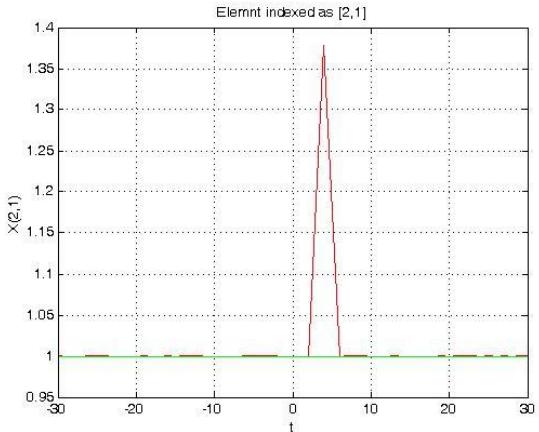
Համեմատենք ստացված արդյունքները t պարամետրի $[-30, 30]$ միջակայքում ամրակայված արժեքների դեպքում Բարտելս-Սոյուարտի եղանակով [27, 52, 67] ստացված ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծումների հետ: Ներկայացնենք ստացված լուծուման տարրերի համատեղ գրաֆիկները (նկ.4.2.1- նկ.4.2.4):



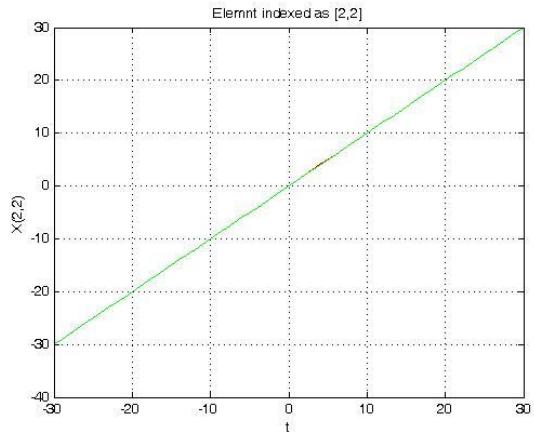
Նկ.4.2.1



Նկ.4.2.2



Նկ.4.2.3



Նկ.4.2.4

Ինչպես երևում է գրաֆիկներից (կանաչ գույնով ներկայացված է առաջարկված եղանակով ստացված լուծման գրաֆիկները) [1,10] միջակայքում ամրակայված արժեքների դեպքում ստացվում են խզումներ, որոնք բացակայում են անալիտիկ լուծման մեջ:

Օրինակ 2. Դիտարկենք կոմպլեքս տարրերով Սիլվեստրի տիպի հետևյալ մատրիցային հավասարումը.

$$A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = \\ = \begin{bmatrix} \frac{1}{t-1} + jt & 2t-j \\ -t + jt^2 & 3t^2 + jt \end{bmatrix} \cdot X(t) + X(t) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{t} + jt & \frac{t}{t^2-2} - j(t+1) \\ \frac{t}{2t+1} + j & \frac{t}{3t^2-t+5} - j \end{bmatrix} = C(t),$$

որտեղ

$$c_{11}(t) = \frac{t^5(-3j-2) + t^4(2-8j) + t^3(-2j-3) + t^2(3j-5) + t(3j+1) + (j+1)}{-2t^3 - t^2 + 2t + 1}$$

$$c_{12}(t) = \frac{3t^8 + t^7(6j-7) + t^6(10-15j) + t^5(3j+5) + t^4(16j-21) + t^3(29-35j) + t^2(45j-35) + t(2-3j) - 10j}{3t^5 - 4t^4 + 3t^2 - 12t + 10}$$

$$c_{21}(t) = \frac{-2t^5 j + t^4(4-9j) + t^3(12-9j) + t^2(11-j) + t(3-j) - j}{-2t^2 - 3t - 1}$$

$$c_{22}(t) = \frac{-3t^8 + t^7(1-15j) + t^6(2j+7) + t^5(6j-7) + t^4(6-10j) + t^3(45j+6) + t^2(13j-21) + t(8-5j) + 10}{-3t^4 + t^3 + t^2 - 2t + 10}.$$

Համաձայն (1.1.1) դիֆերենցիալ ուղիղ ձևափոխությունների $A(t)$, $B(t)$ և $C(t)$ մատրիցային դիկրետների համար (եթե $t_v = 0.5$; $H = 1.2$;) կունենանք հետևյալ թվային մատրիցները.

$$A(0) = \begin{bmatrix} -2 + 0.5j & 1 - j \\ -0.5 + 0.25j & 0.75 + 0.5j \end{bmatrix}; A(1) = \begin{bmatrix} -4.8 + 1.2j & 2.4 \\ -1.2 + 1.2j & 3.6 + 1.2j \end{bmatrix}; A(2) = \begin{bmatrix} -11.52 & 0 \\ 1.44j & 4.32 \end{bmatrix};$$

$$A(3) = \begin{bmatrix} -27.648 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A(4) = \begin{bmatrix} -66.3552 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A(5) = \begin{bmatrix} -159.25248 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A(6) = \begin{bmatrix} -382.206 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A(7) = \begin{bmatrix} -917.29428 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \dots$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 0.66667 + 0.5j & -0.28571 - 1.5j \\ 0.25 + j & 0.09524 - j \end{bmatrix}, \quad B(1) = \begin{bmatrix} -0.53333 + 1.2j & -0.88163 - 1.2j \\ 0.3 & 0.18503 \end{bmatrix},$$

$$B(2) = \begin{bmatrix} 0.42667 & -0.83965 \\ -0.36 & -0.16295 \end{bmatrix}, \quad B(3) = \begin{bmatrix} -0.34133 & -1.30122 \\ 0.432 & -0.07776 \end{bmatrix}, \quad B(4) = \begin{bmatrix} 0.27307 & -1.58318 \\ -0.5184 & 0.16964 \end{bmatrix},$$

$$B(5) = \begin{bmatrix} -0.08779 & -0.00054 \\ -0.05289 & -0.01819 \end{bmatrix}, \quad B(6) = \begin{bmatrix} 0.17476 & -2.78135 \\ -0.7465 & -0.13338 \end{bmatrix}, \quad B(7) = \begin{bmatrix} -0.13981 & -3.68155 \\ 0.89579 & 0.072136 \end{bmatrix}, \dots$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} -0.04167 + 1.60417j & -1.125 - 0.80952j \\ -2 + 1.16667j & 1.0625 + 0.6369j \end{bmatrix}, \quad C(1) = \begin{bmatrix} -4.71667 + 0.29167j & -7.89184 + 3.75782j \\ -6 + 3.21667j & -0.6 + 5.02517j \end{bmatrix},$$

$$C(2) = \begin{bmatrix} -10.6866 - 8.84333j & -23.8201 + 13.2419j \\ -2.88 + 7.08667j & -0.72 + 11.540913j \end{bmatrix}, \quad C(3) = \begin{bmatrix} -27.0907 - 28.09733j & -55.5383 + 26.2953j \\ 1.17067j & 3.456 + 7.10435j \end{bmatrix},$$

$$C(4) = \begin{bmatrix} -66.8875 - 65.9525j & -134.9023 + 65.0576j \\ 0.53227j & 2.0736 - 1.59167j \end{bmatrix}, \quad C(5) = \begin{bmatrix} -158.723 - 159.626j & -321.3 + 157.008j \\ -0.52949j & -1.95953j \end{bmatrix},$$

$$C(6) = \begin{bmatrix} -382.754 - 381.844j & -68.607 + 379.23j \\ 0.54801j & -2.86431j \end{bmatrix}, \quad C(7) = \begin{bmatrix} -916.707 - 917.658j & -1839.8188 + 913.774j \\ -0.58771j & 3.80555j \end{bmatrix}, \dots$$

Համաձայն Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակի Դ-նմանակի [39]՝ $U_a(t)$

և $U_b(t)$ մատրիցային դիսկրետների համար կունենանք.

$$U_a(0) = \begin{bmatrix} 0.99062 + 0.0189j & -0.1747 + 0.10721j \\ 0.17467 - 0.10721j & 0.99063 + 0.0189j \end{bmatrix}, \quad U_a(1) = \begin{bmatrix} 0.03006 + 0.00898j & 0.09897 + 0.11492j \\ -0.09897 - 0.11492j & 0.03006 + 0.00898j \end{bmatrix},$$

$$U_a(2) = \begin{bmatrix} 0.05035 - 0.17977j & 0.63858 - 0.5555j \\ -0.63858 + 0.5555j & 0.05035 - 0.17977j \end{bmatrix}, \quad U_a(3) = \begin{bmatrix} -0.26206 + 0.06439j & -0.72784 - 0.03288j \\ 0.72784 + 0.03288j & -0.26206 + 0.06439j \end{bmatrix},$$

$$U_a(4) = \begin{bmatrix} 0.29843 + 0.16134j & 1.77108 - 0.5482j \\ -1.77108 + 0.5482j & 0.29843 + 0.16134j \end{bmatrix}, \quad U_a(5) = \begin{bmatrix} -0.01246 - 0.89519j & -0.21737 - 0.89519j \\ 0.21737 + 0.89519j & -0.01246 - 0.89519j \end{bmatrix},$$

$$U_a(6) = \begin{bmatrix} -0.87229 + 1.68955j & 1.81277 + 1.40827j \\ -1.81277 - 1.40827j & -0.87229 + 1.68955j \end{bmatrix}, \quad U_a(7) = \begin{bmatrix} 2.3309 - 1.19275j & 2.19488 - 7.35809j \\ -2.19488 + 7.35809j & 2.3309 - 1.19275j \end{bmatrix},$$

$$U_b(0) = \begin{bmatrix} 0.86192 + 0.37492j & -0.76043 + 0.42496j \\ 0.76043 - 0.42496j & 0.86192 + 0.37492j \end{bmatrix}, \quad U_b(1) = \begin{bmatrix} 0.57558 - 0.68181j & 0.96156 + 0.04834j \\ -0.96156 - 0.04834j & 0.57558 - 0.68181j \end{bmatrix},$$

$$U_b(2) = \begin{bmatrix} -1.3156 + 0.2403j & -0.47745 - 1.09805j \\ 0.47745 + 1.09805j & -1.3156 + 0.2403j \end{bmatrix}, U_b(3) = \begin{bmatrix} 1.6228 + 1.24858j & -0.98793 + 1.60588j \\ 0.98793 - 1.60588j & 1.6228 + 1.24858j \end{bmatrix},$$

$$U_b(4) = \begin{bmatrix} 0.25511 - 3.56424j & 3.59665 - 0.17263j \\ -3.59665 + 0.17263j & 0.25511 - 3.56424j \end{bmatrix}, U_b(5) = \begin{bmatrix} -5.24889 + 3.38548j & -3.5868 - 4.90035j \\ 3.5868 + 4.90035j & -5.24889 + 3.38548j \end{bmatrix},$$

$$U_b(6) = \begin{bmatrix} 10.3235 + 4.16197j & -3.51074 + 10.4299j \\ 3.51074 - 10.4299j & 10.3235 + 4.16197j \end{bmatrix}, U_b(7) = \begin{bmatrix} -4.60664 - 19.8359j & 19.44 - 5.6587j \\ -19.44 + 5.6587j & -4.60664 - 19.8359j \end{bmatrix}:$$

Համաձայն (2.2.12) և (2.2.13) առնչությունների $T_a(t)$ և $T_b(t)$ մատրիցների համար ունենք հետևյալ մատրիցային դիսկրետները.

$$T_a(0) = \begin{bmatrix} -1.93736 + 0.21425j & 1.5 - 1.25j \\ 0 & 0.68736 + 0.78575j \end{bmatrix}, T_a(1) = \begin{bmatrix} -4.6024 + 0.92848j & 3.6 - 1.2j \\ 0 & 3.40241 + 1.47152j \end{bmatrix},$$

$$T_a(2) = \begin{bmatrix} -11.78502 + 0.96434j & -1.44j \\ 0 & 4.58502 - 0.96434j \end{bmatrix}, T_a(3) = \begin{bmatrix} -28.36168 + 0.601026j & 0 \\ 0 & 0.71368 - 0.60103j \end{bmatrix},$$

$$T_a(4) = \begin{bmatrix} -65.9477 + 2.29544j & 0 \\ 0 & -0.4075 - 2.29544j \end{bmatrix}, T_a(5) = \begin{bmatrix} -161.332 + 0.03138j & 0 \\ 0 & 2.07952 - 3.13842j \end{bmatrix},$$

$$T_a(6) = \begin{bmatrix} -385.287 + 4.55908j & 0 \\ 0 & 3.0808 - 4.5591j \end{bmatrix}, T_a(7) = \begin{bmatrix} 917.0851 + 6.04048j & 0 \\ 0 & -0.20914 - 6.04047j \end{bmatrix},$$

$$T_b(0) = \begin{bmatrix} -0.59972 - 0.13164j & -0.53571 - 2.5j \\ 0 & 1.36162 - 0.36836j \end{bmatrix}, T_b(1) = \begin{bmatrix} -0.17877 + 1.53123j & -1.18163 - 1.2j \\ 0 & -0.16953 - 0.33123j \end{bmatrix},$$

$$T_b(2) = \begin{bmatrix} -0.1246 + 0.29528j & 0.47965 \\ 0 & 0.38831 - 0.29528j \end{bmatrix}, T_b(3) = \begin{bmatrix} -0.20128 + 0.45006j & -1.73322 \\ 0 & -0.21782 - 0.45006j \end{bmatrix},$$

$$T_b(4) = \begin{bmatrix} -0.33334 + 0.61389j & -1.064776 \\ 0 & 0.47604 - 0.61389j \end{bmatrix}, T_b(5) = \begin{bmatrix} -0.53424 + 0.89429j & -2.7784 \\ 0 & 0.30222 - 0.89429j \end{bmatrix},$$

$$T_b(6) = \begin{bmatrix} -0.58165 + 0.46514j & -2.03485 \\ 0 & 0.62303 - 0.46514j \end{bmatrix}, T_b(7) = \begin{bmatrix} -0.3482 + 1.0086j & -4.57735 \\ 0 & 0.28052 - 1.0086j \end{bmatrix}:$$

$\tilde{C}(K)$ մատրիցային դիկրետները կորոշենք համաձայն (2.2.14)-ի՝

$$\tilde{C}(0) = \begin{bmatrix} -2.00105 + 1.34977j & -1.04666 - 2.68031j \\ -0.88893 - 0.14634j & 2.18365 - 0.47959j \end{bmatrix}, \tilde{C}(1) = \begin{bmatrix} -6.87016 + 8.10317j & -6.33234 - 0.44217j \\ -6.02439 + 3.88494j & 1.13573 - 1.24773j \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(2) = \begin{bmatrix} -9.64611 + 6.99367j & -18.38179 + 16.0899j \\ 0.29289 + 14.349j & -9.25177 + 4.20104j \end{bmatrix}, \tilde{C}(3) = \begin{bmatrix} -35.30459 - 15.04367j & -24.37934 + 22.58165j \\ 15.56109 - 1.18988j & 7.09278 + 14.73446j \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(4) = \begin{bmatrix} -113.998 + 1.26425j & -94.90617 + 27.73497j \\ 5.24118 - 13.83793j & 11.23363 - 20.34645j \end{bmatrix}, \tilde{C}(5) = \begin{bmatrix} -195.963 + 12.28989j & -239.917 + 146.413j \\ 10.51114 + 21.18893j & -24.07148 - 16.31414j \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(6) = \begin{bmatrix} -533.491 - 75.9758j & -446.474 + 285.099j \\ 53.39425 - 25.44254j & 22.45018 + 11.44879j \end{bmatrix}, \tilde{C}(7) = \begin{bmatrix} -1351.12 + 53.068111j & -1287.774 + 602.541j \\ -41.44417 - 40.79584j & 21.63079 - 102.377j \end{bmatrix}:$$

Ըստ (2.2.16)-ի $Y(K)$ մատրիցային դիսկրետների համար կունենանք.

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 1.18082 + 0.47475j & 0.43749 - 0.18005j \\ -0.39865 + 1.30558j & -0.68046 - 0.2405j \end{bmatrix}, \quad Y(1) = \begin{bmatrix} 1.4639 - 0.58888j & 1.94537 + 0.29707j \\ 1.1467 + 1.40565j & -0.4029 + 2.51734j \end{bmatrix},$$

$$Y(2) = \begin{bmatrix} -1.85084 - 2.12775j & 1.72937 - 3.70612j \\ 0.77338 - 2.52862j & 2.36453 + 0.05674j \end{bmatrix}, \quad Y(3) = \begin{bmatrix} -1.24099 + 3.68983j & -4.71419 - 1.3671j \\ -2.50701 + 0.53995j & -0.63202 - 3.22381j \end{bmatrix},$$

$$Y(4) = \begin{bmatrix} 4.66692 - 3.14365j & 4.09753 + 6.10275j \\ 4.56718 + 1.32564j & -2.82089 + 1.66251j \end{bmatrix}, \quad Y(5) = \begin{bmatrix} -12.47936 - 6.24791j & 3.65056 - 14.02505j \\ 1.53459 - 9.58377j & 8.2236 - 0.47665j \end{bmatrix},$$

$$Y(6) = \begin{bmatrix} 3.5218 + 20.41711j & -22.76666 + 6.19213j \\ -11.49687 + 6.20754j & -4.8279 - 18.54147j \end{bmatrix}, \quad Y(7) = \begin{bmatrix} 18.36199 - 32.25336j & 33.75953 + 18.29289j \\ 28.30406 + 6.3325j & -17.3654 + 18.88333j \end{bmatrix}:$$

$X(K)$ մատրիցային դիսկրետները որոշենք (2.2.17) առնչությամբ.

$$X(0) = \begin{bmatrix} 0.5 + j & 1.5 - 0.25j \\ j & 0.5j \end{bmatrix}, \quad X(1) = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.2 - 1.2j \\ 0 & 1.2j \end{bmatrix}, \quad X(2) = \begin{bmatrix} 0 & -1.44j \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X(K) = \{0\}, \quad K \geq 3:$$

$X(t)$ բնօրինակը վերականգնենք համաձայն դիֆերենցիալ-թեյլորյան հակառարձ ձևափոխությունների (1.1.2).

$$X(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + j & 1.5 - 0.25j \\ j & 0.5j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & 1.2 - 1.2j \\ 0 & 1.2j \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{t-0.5}{1.2}\right) + \begin{bmatrix} 0 & -1.44j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{t-0.5}{1.2}\right)^2,$$

որտեղից

$$X(t) = \begin{bmatrix} t + j & t + 1 - jt^2 \\ j & jt \end{bmatrix}:$$

Ստացված արտահայտությունը ճշգրտորեն բավարարում է նախնական մատրիցային հավասարմանը:

Դիտողություն. Մշակված եղանակները կիրառելի են ինչպես իրական այնպես էլ կոմպլեքս տարրերով մատրիցային հավասարումների լուծման համար:

4.3. Պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման մոդելային օրինակ

Դիցուք տրված է հետևյալ ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումը [8].

$$X(t) \cdot \frac{1}{1+t^2+t^4} \begin{bmatrix} 1+t^2 & -t \\ t^3 & 1 \\ -t^2 & t+t^3 \end{bmatrix} \cdot X(t) = \\ = \begin{bmatrix} \frac{2t^4 - 4t^3 - t^2 + 2t}{t^2 - t + 1} & \frac{t^7 - t^6 - 4t^4 + 15t^3 - 6t}{t^4 + t^2 + 1} & \frac{-t^7 + 5t^6 - 2t^5 - 9t^4 - 10t^3 + 3t^2 + 6t}{t^4 + t^2 + 1} \\ \frac{-3t^2 + 5t^3}{t^2 - t + 1} & \frac{2t^6 - 4t^5 - 4t^4 - 9t^3 + 4t^2 + 2t}{t^4 + t^2 + 1} & \frac{-2t^6 + 13t^5 + 6t^4 + 7t^3 - 9t^2}{t^4 + t^2 + 1} \end{bmatrix}:$$

$t_v = 1$ մոտարկման կենտրոնի և $H=1$ մասշտաբային գործակցի դեպքում մատրիցային դիսկրետները կլինեն.

- $A(t)$ մատրիցի համար ունեն՝

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0.6667 & -0.3333 \\ 0.3333 & 0.3333 \\ -0.3333 & 0.6667 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} -0.6667 & 0.3333 \\ 0.3333 & -0.6667 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A(2) = \begin{bmatrix} 0.1111 & 0.1111 \\ -0.4444 & 0.5556 \\ 0.4444 & -0.5556 \end{bmatrix},$$

$$A(3) = \begin{bmatrix} 0.4444 & -0.5556 \\ 0 & 0 \\ -0.4444 & 0.5556 \end{bmatrix}, A(4) = \begin{bmatrix} -0.4815 & 0.5185 \\ 0.4815 & -0.5185 \\ -0.0370 & -0.0370 \end{bmatrix}, A(5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.4815 & 0.5185 \\ 0.5185 & -0.4815 \end{bmatrix},$$

$$A(6) = \begin{bmatrix} 0.4938 & -0.5062 \\ -0.0123 & -0.0123 \\ -0.5062 & 0.4938 \end{bmatrix}, A(7) = \begin{bmatrix} -0.4938 & 0.5062 \\ 0.5062 & -0.4938 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A(8) = \begin{bmatrix} -0.0041 & -0.0041 \\ -0.5021 & 0.4979 \\ 0.5021 & -0.4979 \end{bmatrix},$$

- $B(t)$ մատրիցի դիսկրետները կլինեն՝

$$B(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1.6667 & -2.6667 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} -3 & 4.6667 & -8.3333 \\ 7 & -7.6667 & 16.6667 \end{bmatrix},$$

$$B(2) = \begin{bmatrix} 3 & -4.2222 & 7.2222 \\ 3 & 3.3333 & 4.3333 \end{bmatrix}, B(3) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8.2222 \\ -5 & 6.8889 & -13.8889 \end{bmatrix},$$

$$B(4) = \begin{bmatrix} -5 & 8.4074 & -14.2963 \\ 2 & -8.3333 & 7.4444 \end{bmatrix}, B(5) = \begin{bmatrix} 1 & -7.7407 & 4.8889 \\ 3 & 1.3704 & 6.5185 \end{bmatrix},$$

$$B(6) = \begin{bmatrix} 4 & -0.7284 & 9.5432 \\ -5 & 7.0741 & -14 \end{bmatrix}, B(7) = \begin{bmatrix} -5 & 8.6420 & -14.5062 \\ 2 & -8.5309 & 7.4938 \end{bmatrix};$$

Հրոյական դիսկրետների (2.3.2) ոչ գծային մատրիցային հավասարման լուծման արդյունքում ստացվել են մի քանի լուծումներ.

$$\begin{aligned} X(0)_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, X(0)_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, X(0)_3 = \begin{bmatrix} 0.3780 & -1.1339 & 1.5119 \\ -1.5119 & 1.8898 & -3.4017 \end{bmatrix}, \\ X(0)_4 &= \begin{bmatrix} -0.3780 & 1.1339 & -1.5119 \\ 1.5119 & -1.8898 & 3.4017 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Մատրիցային հավասարումների լուծման Բարտելս-Ստյուարտի հայտնի եղանակով [27, 52, 67] հերթականությամբ լուծելով (2.3.5)-ին համապատասխան հավասարումները՝ կստացվեն $X(t)_1$, $X(t)_2$, $X(t)_3$ և $X(t)_4$ մատրիցների մատրիցային դիսկրետները.

$$\begin{aligned} X(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, X(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X(K) = \{0\}, K \geq 3; \\ X(1)_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, X(2)_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X(K)_1 = \{0\}, K \geq 3; \\ X(1)_2 &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, X(2)_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X(K)_2 = \{0\}, K \geq 3; \\ X(1)_3 &= \begin{bmatrix} 0.054 & -2.05181 & 1.34987 \\ -1.34987 & -1.24188 & -2.37578 \end{bmatrix}, X(2)_3 = \begin{bmatrix} -2.55319 & 2.85402 & -6.27112 \\ -2.8 & 4.02648 & -5.63861 \end{bmatrix}, \\ X(3)_3 &= \begin{bmatrix} 5.14 & -10.4833 & 15.3302 \\ 9.07555 & -17.5963 & 21.0409 \end{bmatrix}, X(4)_3 = \begin{bmatrix} -15.619 & 31.1165 & -45.1061 \\ -33.0052 & 66.2782 & -76.8380 \end{bmatrix}, \\ X(5)_3 &= \begin{bmatrix} 50.1109 & -98.7957 & 142.436 \\ 124.483 & -249.000 & 289.869 \end{bmatrix}, X(6)_3 = \begin{bmatrix} -165.338 & 325.884 & -464.118 \\ -472.967 & 941.295 & -1102.31 \end{bmatrix}, \dots \\ X(1)_4 &= \begin{bmatrix} -0.054 & 2.05181 & -1.34987 \\ 1.34987 & 1.24188 & 2.37578 \end{bmatrix}, X(2)_4 = \begin{bmatrix} 2.55319 & -2.85402 & 6.27112 \\ 2.8 & -4.02648 & 5.63861 \end{bmatrix}, \\ X(3)_4 &= \begin{bmatrix} -5.14 & 10.4833 & -15.3302 \\ -9.07555 & 17.5963 & -21.0409 \end{bmatrix}, X(4)_4 = \begin{bmatrix} 15.619 & -31.1165 & 45.1061 \\ 33.0052 & -66.2782 & 76.8380 \end{bmatrix}, \\ X(5)_4 &= \begin{bmatrix} -50.1109 & 98.7957 & -142.436 \\ -124.483 & 249.000 & -289.869 \end{bmatrix}, X(6)_3 = \begin{bmatrix} 165.338 & -325.884 & 464.118 \\ 472.967 & -941.295 & 1102.31 \end{bmatrix}, \dots \end{aligned}$$

Ստացված $X(K)_1, K \geq 0$ և $X(K)_2, K \geq 0$; մատրիցային դիսկրետներին համապատասխան, վերականգնված բնօրինակները կլինեն.

$$X(t)_1 = \begin{bmatrix} t & -1 + 2(t-1) + (t-1)^2 & 2 + (t-1) - (t-1)^2 \\ -t & 2t & -3t \end{bmatrix};$$

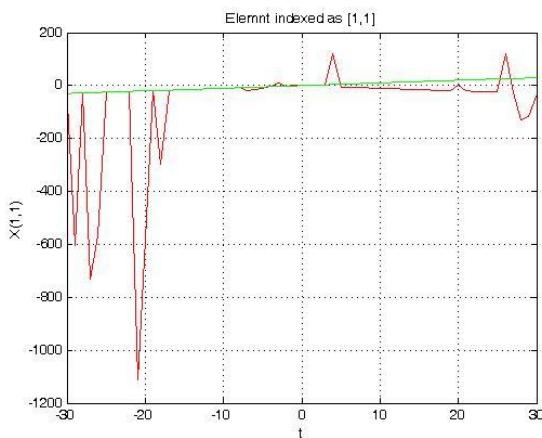
$$X(t)_2 = \begin{bmatrix} -t & 1 - 2(t-1) - (t-1)^2 & -2 - (t-1) + (t-1)^2 \\ t & -2t & 3t \end{bmatrix};$$

Նշենք, որ ստացված արտահայտությունները ճշգրտորեն բավարարում են նախնական մատրիցային հավասարմանը:

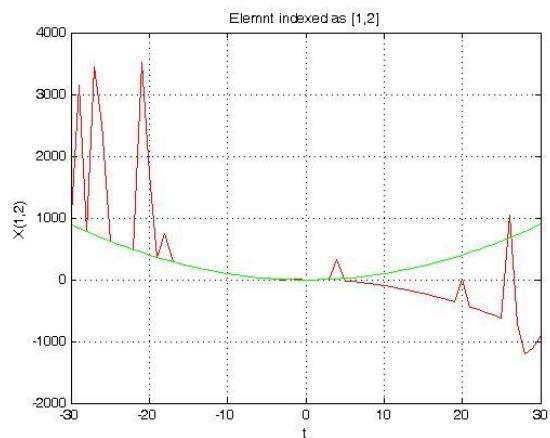
$X(K)_3, K = \overline{0,6} \dots \quad X(K)_4, K = \overline{0,6} \dots$ մատրիցային դիսկրետները 10^{-9} ճշտությամբ բավարարում են (2.3.4) հավասարմանը:

Համեմատենք ստացված արդյունքները t պարամետրի $[-30,30]$ միջակայքում ամրակայված արժեքների դեպքում ստացված արդյունքների հետ: Ներկայացնենք ստացված լուծման տարրերի համատեղ գրաֆիկները (նկ.4.3.1- նկ.4.3.6):

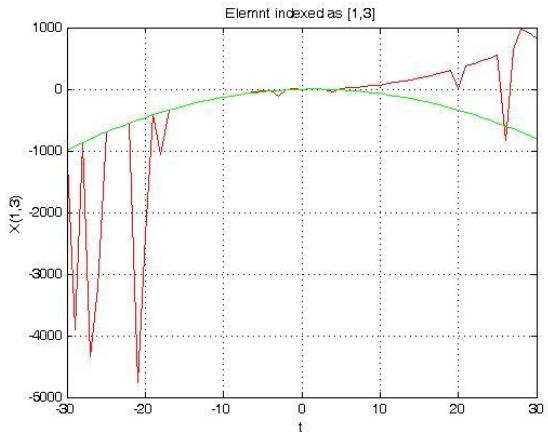
Գրաֆիկներից ակնհայտ երևում է, որ ամրակայված կետերում դասական եղանակով ստացված լուծման (կարմիր գույնով ներկայացված գրաֆիկներ) դեպքում ստացվում են բազմաթիվ խզումներ, որոնց առկայության դեպքում խնդրի լուծումը մոտարկել չի հաջողվում, մինչդեռ առաջարկված եղանակով ստացված անընդհատ լուծման բնօրինակը հեշտությամբ վերականգնվում է դիֆերենցիալ-թեյլորյան մոդելի միջոցով:



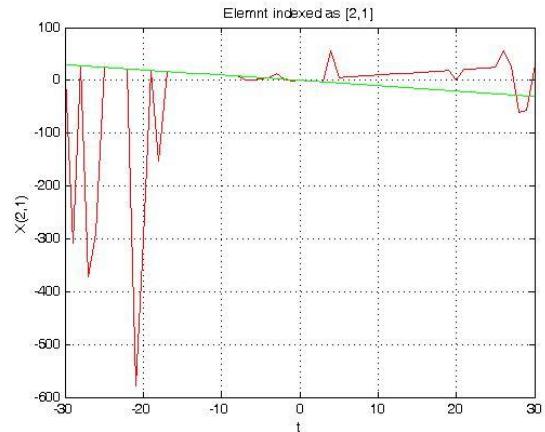
Նկ.4.3.1



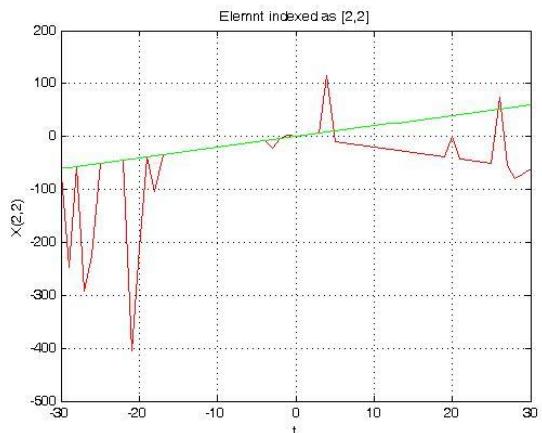
Նկ.4.3.2



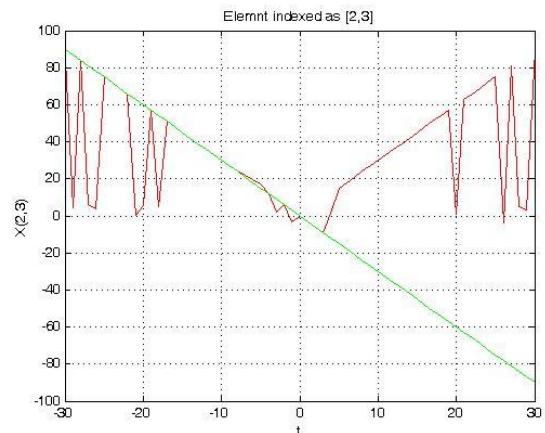
Նկ.4.3.3



Նկ.4.3.4



Նկ.4.3.5



Նկ.4.3.6

4.4. ՈՒԿԱՏԻԻ ՏԻՎԻ ՈՅ ԳԾԱՅԻՆ ՈՅ ԱՎՏՈՆՈՄ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԺՄԱՆ ՄՈԴԵԼԱՅԻՆ ՕՐԻՆԱԿ

Դիցուք տրված է հետևյալ ոչ գծային պարամետրական մատրիցային հավասարումը [13]՝

$$A(t)X(t) + X(t)B(t) - X(t)C(t)X(t) + D(t) = 0,$$

որտեղ

$$B(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 3 & t + 2 \\ t^3 + 1 & t^2 + 1 \end{bmatrix} \frac{1}{t+1}, \quad A(t) = B^T(t), \quad C(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t^3 + t \\ 2t^5 & \frac{1+3t}{3} \end{bmatrix},$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} 4t^{10} - 2t^8 - 2t^7 - 2t^6 + 5t^5 - \frac{10t^4}{3} - \frac{t^3}{3} + \frac{25t^2}{3} - 4t - \frac{19}{3} & 8t^{11} + 8t^9 - 8t^8 + 4t^7 - t^6 + t^5 - 6t^4 + \frac{11t^3}{3} - 6t^2 + \frac{7t}{3} + \frac{8}{3} \\ 6t^8 - 4t^7 - 6t^6 + 6t^5 + 3t^3 - t^2 - \frac{2t}{3} + \frac{16}{3} & 12t^9 - 8t^8 + 6t^7 - 8t^6 + 9t^5 - 7t^2 - 12t + \frac{16}{3} \end{bmatrix}.$$

Համապատասխան մատրիցային դիսկրետները $t_v = 0$ մոտարկման կենտրոնի և $H=1$ մասշտաբային գործակցի դեպքում կլինեն.

- $A(t)$ մատրիցի համար՝

$$A(0) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A(2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A(3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A(4) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A(5) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A(6) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A(7) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A(8) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A(9) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ և այլն;}$$

- $B(t)$ մատրիցի համար՝

$$B(0) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B(3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B(4) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B(5) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B(6) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B(7) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B(8) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B(9) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ և այլն:}$$

- $C(t)$ մատրիցի համար՝

$$C(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}, C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{bmatrix}, C(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, C(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix},$$

$$C(5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, C(6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8/3 \end{bmatrix}, C(7) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, C(8) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16/3 \end{bmatrix}, C(9) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \text{ և այլն:}$$

- $D(t)$ մատրիցի համար՝

$$D(0) = \begin{bmatrix} -6.3333 & 2.6667 \\ 5.3333 & 5.3333 \end{bmatrix}, D(1) = \begin{bmatrix} -4 & 2.3333 \\ -0.6667 & -12 \end{bmatrix}, D(2) = \begin{bmatrix} 8.3333 & -6 \\ -1 & -7 \end{bmatrix},$$

$$D(3) = \begin{bmatrix} -0.3333 & 3.6667 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, D(4) = \begin{bmatrix} -3.3333 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D(5) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}, D(6) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -8 \end{bmatrix},$$

$$D(7)=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, D(8)=\begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}, D(9)=\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}, D(10)=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} D(11)=\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ և այլն:}$$

(2.4.2) ոչ գծային մատրիցային հավասարման լուծման արդյունքում ստացվել է հետևյալ լուծումը՝

$$X(0)=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}:$$

Մատրիցային հավասարումների լուծման Բարտելս-Ստյուարտի հայտնի եղանակով [27, 52, 67] հերթականությամբ լուծելով (2.4.5)-ին համապատասխան հավասարումները՝ ստացվում են $X(t)$ մատրիցի հետևյալ մատրիցային դիսկրետ-ները.

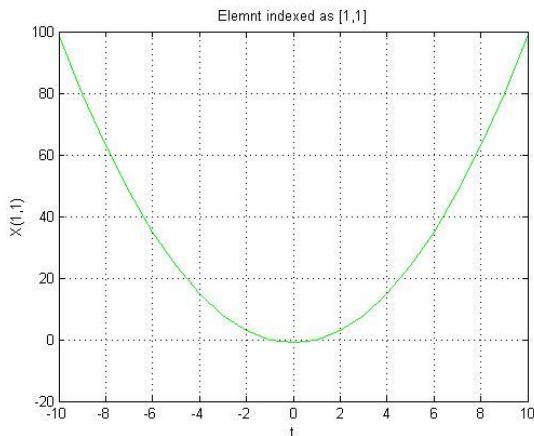
$$X(0)=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}: X(1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, X(2)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X(3)=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X(K)=\{0\}, K=\overline{4,8}...$$

$X(K), K=\overline{0,8}...$ մատրիցային դիսկրետները ճշտգրիտ բավարարում են (2.4.2) և (2.4.5) հավասարումներին, իսկ $X(t)$ բնօրինակը համաձայն դիֆենցիալ-թեյլորյան վերականգնող առնչության ստացվում է

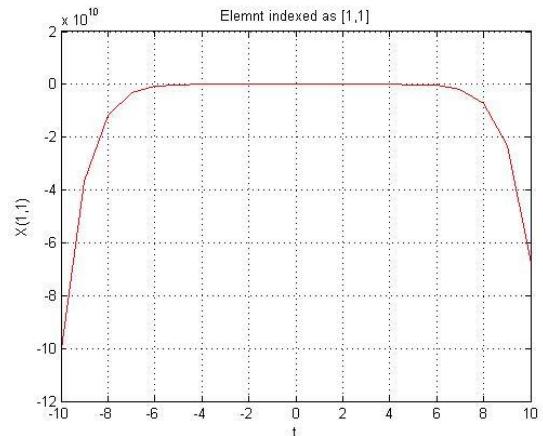
$$X(t)=\begin{bmatrix} t^2-1 & 2t^3+t-1 \\ t+1 & 3t-2 \end{bmatrix},$$

որը ճշգրիտ բավարարում է (2.4.1) հավասարմանը:

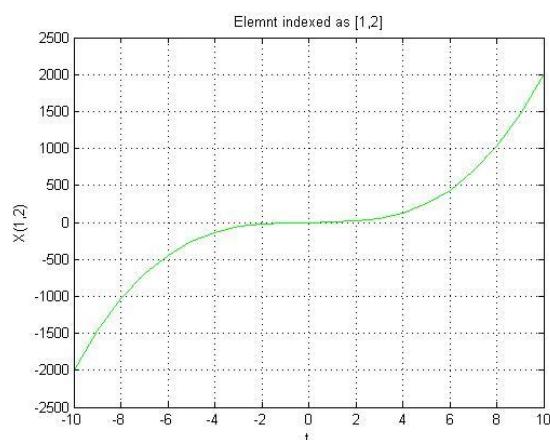
Համեմատենք ստացված արդյունքները t պարամետրի $[-30,30]$ միջակայքում ամրակայված արժեքների դեպքում ստացված արդյունքների հետ: Կողք կողքի ներկայացնենք ստացված լուծման տարրերի համատեղ գրաֆիկները (նկ.4.4.1-նկ.4.4.8):



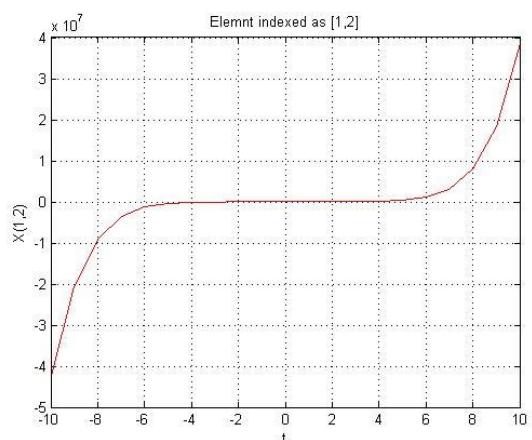
Նկ.4.4.1



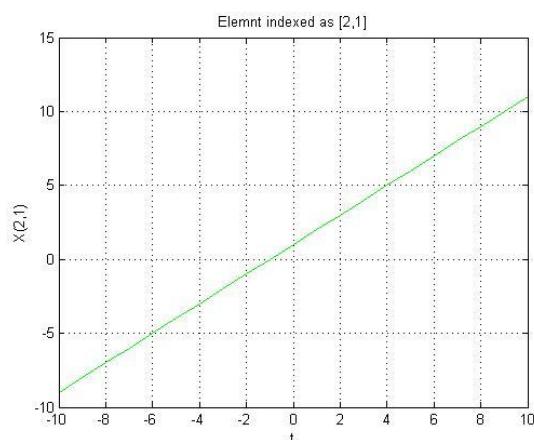
Նկ.4.4.2



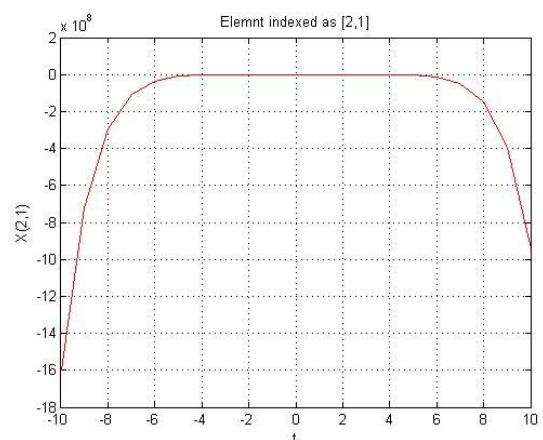
Նկ.4.4.3



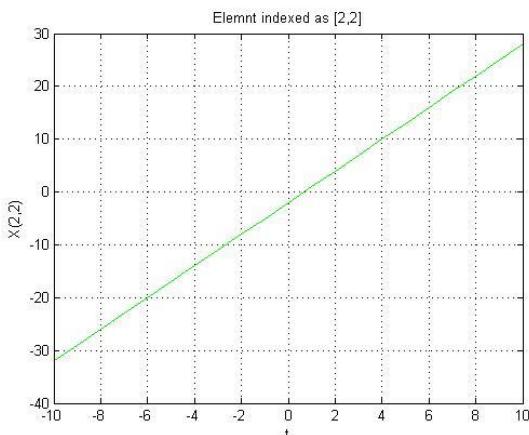
Նկ.4.4.4



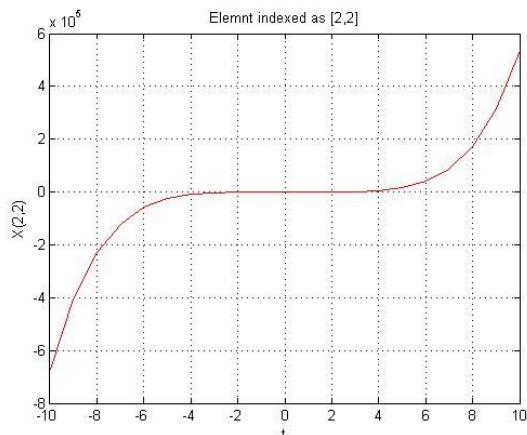
Նկ.4.4.5



Նկ.4.4.6



Նկ.4.4.7



Նկ.4.4.8

Ստացված գրաֆիկներում տեսանելի են ամրակայված կետերում ստացված արդյունքների զգալի շեղումները (տես կարմիր գույնով ներկայացված կորերը), որը թույլ չի տալիս բավարար ճշտությամբ մոտարկել լուծման տարրերը:

4.5. Եզրակացություններ 4-րդ գլխի վերաբերյալ

Մշակված ոչ ավտոնոմ գծային և ոչ գծային մատրիցային հավասարումների լուծման դիֆերենցիալ եղանակների կիրառմամբ լուծվել են հետևյալ տիպի ոչ ավտոնոմ մոդելային մատրիցային հավասարումները.

- պարզագոյն գծային, $A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) = C(t)$ տեսքի մատրիցային հավասարումներ, ինչպես քառակուսային (վերլուծության վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակ) այնպես էլ ուղղանկյուն (Տիխոնովի ռեգուլյարացման եղանակի վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակ) գործակից մատրիցների դեպքում,
- Սիլվեստրի տիպի, $A_{m \times m}(t) \cdot X_{m \times n}(t) + X_{m \times n}(t) \cdot B_{n \times n}(t) = C_{m \times n}(t)$ տեսքի գծային մատրիցային հավասարում (իրական և կոմպլեքս տարրերով մատրիցների համար):
- պարզագոյն ոչ գծային, $X_{n \times m}(t) \cdot A_{m \times n}(t) \cdot X_{n \times m}(t) = B_{n \times m}(t)$ տեսքի մատրիցային հավասարում,
- Ռիկատիի տիպի, ոչ գծային

$$A(t)_{n \times n} X_{n \times m}(t) + X_{n \times m}(t)B_{m \times m}(t) + X_{n \times m}(t)C_{m \times n}(t)X_{n \times m}(t) = D_{n \times m}(t),$$

տեսքի մատրիցային հավասարում:

Իրականացվել է համեմատական վերլուծություն ստացված լուծումների և t պարամետրի $[-30,30]$ միջակայքում ամրակայված 117 արժեքների դեպքում գոյություն ունեցող եղանակով ստացված արդյունքների հետ:

ԵԶՐԱՀԱՆԳՈՒՄ

Ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծմանը նվիրված աշխատանքների վերլուծությունը ցուց է տալիս, որ դրանց լուծման եղանակները սակավաթիվ են: Իրականացված աշխատանքներն ուղղված են ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման այնպիսի եղանակների մշակմանը, որոնք պահանջում են մեծաքանակ գործողություններ մատրիցների կրոնեկերյան արտադրյալների օգտագործման պատճառով:

Գոյություն ունեցող մեթոդները, նոյնիսկ պարզ մատրիցային հավասարումների լուծման համար սահմանափակ կիրառություններ ունեն՝ ոչ ավտոնոմ մատրիցի տեսքին և հատկություններին ներկայացվող մի շարք սահմանափակումների (օրինակ սինգուլյարություն, սիմետրիկություն և այլն) պատճառով: Ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման հայտնի եղանակները ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման համար կարելի է կիրառել օգտվելով սառեցված գործակիցների մեթոդից: Վերջինս հանգեցնում է այնպիսի խնդիրների, ինչպիսիք են՝ մոտարկման միջակայքի երկարության ընտրությունը, միջակայքի վրա ընտրված կետերի քանակի որոշումը, մոտարկման բազմանդամի ընտրությունը, հատվածի եզրերում ի հայտ եկող Ռունգեկի էֆեկտի նվազեցումը, ճյուղավորման խնդիրը և այլն: Նշված խնդիրներից խուսափելու նպատակով անհրաժեշտություն է առաջանում մշակել ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման այնպիսի մեթոդներ, որոնք, իհմնվելով դիֆերենցիալ ծևափոխությունների առանձնահատկությունների և տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ընձեռած հնարավորությունների կիրառման վրա, կապահովեն բարձր արդյունավետություն: Կառավարման և համակարգային վերլուծության մի շարք խնդիրների ուսումնասիրման ժամանակ անհրաժեշտություն է առաջանում լուծել ոչ

ավտոնոմ գծային կամ ոչ գծային մատրիցային հավասարումներ, որոնց լուծման համար աշխատանքում մշակվել են թվա-անալիտիկ մեթոդներ՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա, մասնավորապես.

1. գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Շոլի վերլուծության վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակը [3],
2. գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Տիխոնովի ռեգուլյարացման եղանակի վրա հիմնված դիֆերենցիալ եղանակը [2],
3. Սիլվեստրի (Լյապունովի) տիպի գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի Դ-նմանակը [7],
4. պարզագույն ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը [4],
5. Ռիկկատիի տիպի ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակի Դ-նմանակը [5]:

Մշակված եղանակների համար ստացվել են հաշվողական բնութագրերի (մասնավորապես, բազմապատկման և գումարման գործողությունների քանակների) անալիտիկ արտահայտություններ կախված գործակից մատրիցների չափայնություններից և ընտրված դիսկրետների քանակից: Առաջարկված եղանակների առանձնահատկությունների բացահայտման նպատակով կառուցվել են հաշվողական բնութագրերի կախվածությունները, ինչպես նաև իրականացվել է պարզագույն գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման դիֆերենցիալ եղանակների համեմատական վերլուծություն ըստ հաշվողական բնութագրերի:

Մշակված ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների լուծման թվա-անալիտիկ մեթոդների [1-7] հիման վրա, հաշվողական գործընթացներն ավտոմա-

տացնելու նպատակով մշակվել է ամբողջովին օբյեկտ-կողմնորոշված, բազմափաստաթղթային ռեժիմով համալրված կիրառական ծրագրերի փաթեթ [8], որն աշխատում է երկխոսային ռեժիմի պատուհանների օգտագործմամբ, որոնք հագեցված են անհրաժեշտ մենյուններով, գործիքների վահանակներով, օգնող հաղորդագրություններով: Փաթեթի հիմնական ֆունկցիաներն ու ալգորիթմներն իրականացվել են ծրագրավորման C++ լեզվով, իսկ գրաֆիկական ինտերֆեյսը՝ Qt գրադարանի օգտագործմամբ: Ի տարբերություն այլ համանման ծրագրային միջոցների՝ այստեղ դիֆերենցիալ պատկերների հաշվարկն իրականացվել է դիֆերենցիալ հանրահաշվի կանոնների հիման վրա, որը հնարավորություն է ընձեռում զգալիորեն փոքր ժամանակում ստանալ մեծ չափայնությամբ, ողորկ ֆունկցիաներով նկարագրվող ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների մատրիցային դիսկրետները և լուծումները:

Փաթեթի կիրառմամբ լուծվել են տարբեր տիպերի մատրիցային հավասարումներ ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս տարբերով մատրիցների համար: Մատրիցային հավասարումների լուծումների արդյունքների համեմատական վերլուծությունը պարամետրի ամրակայված արժեքների դեպքում ստացված լուծումների հետ հաստատում է մշակված եղանակների արդյունավետությունը:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

- 1. Ավետիսյան Ա.Գ., Ավինյան Վ.Ռ., Սիմոնյան Ա.Ս.** Պարամետրական մատրիցների հակադարձների որոշման սիմպլեքս եղանակ՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա //ՀՊՃՀ Բանբեր, «Մոդելավորում, օպտիմալացում, կառավարում» սերիա.- 2010.- Թող. 13, Հ.1. - 9-15 էջ:
- 2. Ավետիսյան Ա.Գ., Գյուլգաղյան Լ.Ս.** Քառակուսային պարամետրական ծրագրավորման խնդիրների լուծման սիմպլեքս եղանակ՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա //Արդի տեղեկատվական տեխնոլոգիաներ երիատասարդական միջբուհական գիտաժողով. – Երևան, 2013:
- 3. Ավինյան Վ.Ռ., Թամազյան Մ.Զ., Վասիլյան Ա.Կ., Սիմոնյան Ա.Ս.** Ոչ ավտոնոմ մատրիցների մի քանի բնութագրիչների որոշման կիրառական ծրագրերի փաթեթ// ՀՊՃՀ Լրաբեր, գիտական և մեթոդական հոդվածների ժողովածու 2012.- Մ.1. էջ. 331-345:
- 4. Ավինյան Վ.Ռ., Մելիքյան Ա.Վ., Կյուրեղյան Ա.Լ., Ղազարյան Դ.Ա.** Պարամետրական մատրիցների կեղծ հակադարձների որոշման եղանակ՝ հիմնված Տիխոնովի ռեզուլյարացման մեթոդի վրա // ՀՊՃՀ Բանբեր, «Մոդելավորում, օպտիմալացում, կառավարում» սերիա.- 2010.- Թող. 13, հ.2. - էջ 135-140:
- 5. Ավետիսյան Ա.Գ., Սիմոնյան Ա.Ս., Ավինյան Վ.Ռ.** Պարամետրական մատրիցների Մոլո-Պենրոուզի ընդհանրացված հակադարձների որոշման Դ-նմանակների համեմատական վերլուծությունը // ՀՊՃՀ Լրաբեր, գիտական և մեթոդական հոդվածների ժողովածու: - 2011.- Հ. 3. №1. - էջ 248–254:

- 6. Բարեյան Գ.Ա.** Ոչ ավտոնոմ համակարգերի մի քանի ինվարիանտների որոշման մեթոդների մշակումն ու հաշվողական գործընթացների ավտոմատացումը //Տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության սեղմագիր: Երևան, 2006. -21 էջ:
- 7. Սիմոնյան Ս.Հ., Ավետիսյան Ա.Գ., Ավինյան Վ.Ռ., Սիմոնյան Ա.Ս.** Պարամետրական մատրիցների լոնդիանդացված հակադարձների որոշման մի մեթոդի մասին //ՀՃԱ Լրաբեր, 2009, Հ.6, N2.- էջ 160-167:
- 8. Սիմոնյան Ս.Հ., Ավինյան Վ.Ռ., Ղազարյան Դ.Ա., Ադամյան Գ.Վ.** Ոչ գծային ոչ ավտոնոմ մատրիցային հավասարումների մեկ դասի խնդիրների լուծման եղանակի Դ-նմանակի մշակումը //ՀՊՃՀ Լրաբեր, գիտական և մեթոդական հոդվածների ժողովածու: ՀՊՃՀ Լրաբեր, գիտական և մեթոդական հոդվածների ժողովածու 2012.- Մ.1. էջ. 335-341.
- 9. Ավետիսյան Ա.Գ.** Прикладная теория численно-аналитических методов в области дифференциальных преобразований и автоматизация вычислительных процедур //Автореф. ... д.т.н., Ереван, 2013. - 39 с.
- 10. Ավետիսյան Ա.Գ., Ավինյան Վ.Բ. Метод определения обратных многопараметрических матриц, основанный на симплекс-преобразованиях и многомерных дифференциальных преобразованиях // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.- 2012.- Т. LXV, N1. - С.94-99.**
- 11. Ավետիսյան Ա. Գ., Գյուլզադյան Լ. Ս.** Метод решения задач параметрического линейного программирования, основанный на дифференциальных преобразованиях // Известия томского политехнического университета. Серия “Математика и механика. Физика”. – Томск, 2014. – Т. 324, № 2. – С. 25-29.
- 12. Ավետիսյան Ա.Գ., Գյուլզադյան Լ. Ս.** Метод решения многопараметрических задач ЛП, основанный на дифференциальных преобразованиях // Известия НАН РА и ГИУА.- Т. LXVII, N2.- Ереван, 2014.- С.235-243.

- 13. Авинян В.Р.** Метод решения нелинейных параметрических матричных уравнений на основе дифференциальных преобразований //Вестник ГИУА. Сер. Информационные технологии, электроника, радиотехника. -2012.- Вып.15, - том 1.- С.21-25.
- 14. Авинян В.Р., Казарян Д.А., Кюргян А.Л.** К решению параметрических линейных матричных уравнений // Вестник ИАА. 2011.-Т8, N 3.-С. 436-440.
- 15. Авинян В.Р., Казарян Д.А., Кюргян А.Л.** К решению параметрических линейных матричных уравнений на основе дифференциальных преобразований Пухова и метода приведения матриц к форме Шура //Вестник ГИУА. Сер. "Моделирование, оптимизация, управление". -2011.-Вып.14, том 1.- С.135-141.
- 16. Бадалян Л.А.** Разработка методов определения псевдообратных нестационарных матриц и автоматизация вычислительных процедур: Автор. дис. ... к.т.н. – Ереван, 2007. - 21с.
- 17. Баранов В.Л.** Дифференциально-тейлоровская модель нелинейных краевых задач // Электрон. моделирование. - 2000, Т.22, N4. -С.25-31.
- 18. Баранов В.Л.** Дифференциально-тейлоровская модель оптимальных процессов управления. // Электрон. моделирование. -2000. - Т.22, N 5. -С.3-11.
- 19. Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц.- М.: Физматлит, 2010. - 560 с.
- 20. Демиденко Г.В.** Матричные уравнения. Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2009. 203 с.
- 21. Гильгурт С.Я.** Использование дифференциальных преобразований для моделирования реальных сигналов с применением программируемой логики //Электрон. Моделирование. - 2004. Т26, N1. - С. 51-62.
- 22. Головин Е.Д., Стукач О.В.** Использование ортогональных полиномов при расчете переходных процессов в нелинейных электрических цепях с помощью дифференциальных преобразований // В сб. “Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании”. Вып. 2 / Под ред. проф. А.А. Шелупанова. - Томск: 2002. - С. 91-105.

23. **Головин Е.Д., Стукач О.В.** Критерии оценки точности расчета нестационарных систем методом дифференциально-тейлоровских преобразований // В сб. Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании. Вып. 4 / Под ред. А.А. Шелупанова. - Томск: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2005. - С. 68-75.
24. **Егоров А. И.** Уравнения Риккати, - Физматлит, Москва, 2001.
25. **Засядько А.А.** Дифференциально-тейлоровская модель задачи восстановления в спектроскопии // Электрон. моделирование. - 2002. Т24, №6. - С. 97-105.
26. **Зеликин М. И.** К теории матричного уравнения Риккати // Матем. сб., 182:7 (1991), 970–984.
27. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений. Под редакцией Д.К. Фаддеева.-М.: Наука.- 1984.- 192с.
28. **Казарян Д.А.** Решение задач оптимального управления с многоточечными краевыми условиями с применением дифференциальных преобразований // Автореф. ... к.т.н., Ереван, 2010. - 22 с.
29. **Кучатян О.С.** Разъяснение и обеспечение наблюдаемости линейных неавтономных систем управления при помощи дифференциальных преобразований // Автореф. дисс. ... к.т.н. Ереван. 2008.-22 с.
30. **Кюрегян А.Л.** Разработка дифференциально-падеевских моделей решения конечных задач и создание пакета прикладных программ // Автореф. дисс. ... к.т.н. Ереван. 2002.- 20 с.
31. **Ланкастер П.** Теория матриц. - М.: Наука, 1978. -280 с.
32. **Меликян А.В.** Исследование устойчивости и стабилизируемости линейных нестационарных систем управления применением дифференциальных преобразований // Автореф. дисс. ... к.т.н. Ереван. 2007.-20 с.
33. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. Киев: Наукова думка, 1983.-158с.

34. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. Математическое моделирование физических процессов. Киев: Наукова думка, 1980. -419с.
35. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные спектры и модели.-Киев: Наукова думка, 1990. -230 с.
36. **Пухов Г.Е.** Математическое моделирование и расчет переходных процессов в сложных физико-технических объектах на основе дифференциальных преобразований и разделения процессов на составляющие //Электрон. моделирование. 1993. -Т.16, N3. - С. 44-46.
37. **Пухов Г.Е.** Преобразования Тейлора и их применение в электротехнике и электронике. Киев: Наукова думка, 1978.-159с.
38. **Пухов Г.Е.** Приближенные методы математического моделирования основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. Киев: Наукова думка, 1988. 216с.
39. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований /ГИУА-Ереван: Чартарагет, 2010.-364с.
40. **Симонян С.О., Аветисян А.Г., Варданян Г.А.** К решению функциональных матричных уравнений операторным методом дифференциальных преобразований // Вестник ГИУА. Сер. “Моделирование, оптимизация, управление”. -2003.-Вып.6, том 2.- С.8-15.
41. **Степанов А.В.** Дифференциальные, дифференциально-комплексные преобразования и анализ динамической устойчивости сложных электротехнических систем .-М. -2008. 168 с.
42. **Стукач О.В.** Дифференциально-тейлоровская минимизация зависимости времени фронта импульсного отклика от амплитуды воздействия в нелинейной цепи // Доклады ТУСУРа, Электроника, измерительная техника, радиотехника и связь. - 2008, N2(18). - С. 48-52.
43. **Стукач О.В.** Моделирование и оптимизация сверхвысокочастотных регулирующих устройств //Автореф. дисс. ... д.т.н. -Томск, ТУСУР. - 2010. - 43с.
44. **Стукач О.В.** Решение задачи идентификации на основе дифференциального преобразования //Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер.

Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. - 2007. - Вып 6. - N 23(95).
- С. 60-62.

45. **Стукач О.В.** Сигнальная и параметрическая инвариантность радиотехнических устройств. -Томск: ТУСУР.- 2007. -230 с.
46. **Фролова Е.Г.** Моделирование и оптимизация динамических объектов и процессов на основе смещенных дифференциальных преобразований //Автореф. ...к.т.н.: 01.05.02 /Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. - К., 2003.
47. **Abou-Kandil Hisham** Matrix Riccati equations in control and systems theory // Springer Science & Business Media, Jul 24, 2003 - Language Arts & Disciplines - 571 pages.
48. **Arikoglu A, Ozkol I.** Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method // Appl Math Comput 2005;168:1145–58.
49. **Avetisyan A.G., Avinyan V.R., Ghazaryan D.A.** A method for solving Sylvester type parametric matrix equation // Հայաստանի ԳԱՍՏ և ՀՊՃՀ Տեղեկագիր. Տեխնիկական գիտություններ սերիա.- 2013.- Հ. 66, Ա .4.- էջ. 376-383.
50. **Avinyan V.R.** An application package for solution of parametric matrix equations based on differential transforms // Proceedings of Engineering Academy of Armenia. Vol.12, N 2. – P.170-174.
51. **Ayaz F.** Applications of differential transform method to differential-algebraic equations, Appl. Math. Comput. 152 (2004) 649–657.
52. **Bartels, R. H.; Stewart, G. W.** (1972). "Algorithm 432: Solution of the matrix equation $AX + XB = C$ ". Comm. ACM 15 (9): 820–826.
53. **Ben-Israel A., Greville T.N.E.** Generalized Inverses Theory and Applications. –A Wiley-Interscience Publication, 1974. –395p.
54. **Benner P.** Factorized Solution of Sylvester Equations with Applications in Control In: B. De Moor, B. Mot-mans, J. Willems, P. Van Dooren and V. Blondel, Eds., Proceedings of the

16th International Symposium on Mathematical Theory of Network and Systems, Leuven, 5-9 July 2004.

55. **Benner Peter, Li Jing-Rebecca, Penzl Thilo** Numerical solution of large-scale Lyapunov equations, Riccati equations, and linear-quadratic optimal control problems // Numerical Linear Algebra with Applications Special Issue: Special Issue on 'Matrix Equations' Volume 15, Issue 9, pages 755–777, November 2008.
56. **Biazar J., Eslami M.** Differential transform method for solving Helmholtz equation // World applied sciences journal, 2010,10(2).- pp. 166-168.
57. **Biazar J., Eslami M.** Differential Transform Method for Quadratic Riccati Differential Equation //International Journal of Nonlinear Science Vol.9(2010) No.4,pp.444-447.
58. **Bjarne Stroustrup** The C++ programming language / Bjarne Stroustrup.— Addison-Wesley Professional; 4 edition (May 19, 2013). 1368 p.
59. **Cansu U., Eozkan O.** Differential Transform Solution of Some Linear Wave Equations with Mixed Nonlinear Boundary Conditions and its Blow up //Applied Mathematical Sciences, - Vol. 4, 2010, no. 10, 467 – 475.
60. **Chiang Chun-Yueh, Chu King-Wah Eric , Lin Wen-Wei** On the Sylvester equation $AX \pm X^*B^* = C$. Applied Mathematics and Computation 218(17): 8393-8407 (2012).
61. **Constantine Paul G.** Spectral Methods for Parameterized Matrix Equations. Front Cover. Yves Emilius. BiblioBazaar, 2011 - 154 pages.
62. **Constantine P. G., Gleich D. F., Iaccarino G.** A factorization of the spectral Galerkin system for parameterized matrix equations: Derivation and applications // *SIAM J. Scientific Computing* 33(5):2995-3009 (2011).
63. **Du D., Hwang I.** A computational approach to solve optimal control problems using differential transformation //Proceeding of the American Control Conference, 2007, pp. 2322-2327.
64. **Efimov I.N., Golovin E.D., Stoukatch O.V.** Exactitude of the Electronic Devices Analysis by the Differential Transformations Method. In "Fourth Siberian Russian Workshop and

Tutorials on Electron Devices and Materials EDM 2003". Workshop Proceedings. Novosibirsk, 1-4 July 2003, -pp. 150-151.

65. **Eurice de Souza, Bhattacharyya S.P.** Controllability, observability and the solution of $AX - XB = C$ // Linear Algebra and its Applications.- August 1981.- Volume 39, Pages 167–188.
66. **Ezust Alan, Ezust Paul** Introduction to Design Patterns in C++ with Qt (2nd Edition) // Prentice Hall.- 2011.- 768P. (ISBN 978-0-132-82645-7).
67. **Gene H. Golub, Charles F. Van Loan** Matrix Computations // JHU Press, 2013. 756 pages.
68. **Giesl P., Hafstein S.** Computation of Lyapunov functions for nonlinear discrete time systems by linear programming // Journal of Difference Equations and Applications.- Volume 20, Issue 4, 2014.- pages 610-640.
69. **Golub G.H., Nash S., Loan V.** A Hessenberg-Schur method for the problem $AX+XB=C$ // IEEE Transaction on automatic control.- Vol. AC-24, No6. Dec. 1979.- pages 909-913.
70. **Guerra J.** A matrix sign function based solution of parameter dependent Sylvester equations // Control Conference (ECC), 2014 European.- P400 – 405.
71. **Guo Chun-Hua, Lancaster Peter** Analysis and modificaton of Newton's method for algebraic Riccati equations // Math. Comp. **67** (1998), 1089-1105
72. **Hoskins W. D., Walton D. J.** The numerical solution of the time-dependent matrix equation $A(t)V(t) + WA(t) = G(t)$ //International Journal of Systems Science Volume 9, Issue 9, 1978 pages 1019-1028.
73. **Hu D.Y. and Reichel L.** Krylov-subspace methods for the Sylvester equation. Linear Algebra Appl., 172(1992), 283-313.
74. **Hu Q., Cheng D.** The polynomial solution to the Sylvester matrix equation. // Applied Mathematics Letters 19 (2006) 859–864.
75. **Hwang I., Li J., Du D.** Differential Transformation and Its Application to Nonlinear Optimal Control //Sys., Meas., Control -September 2009 -Volume 131, Issue 5,051010. 11p.

76. **Jódar L., Ponsoda E.** Non-autonomous Riccati-type matrix differential equations: existence interval, construction of continuous numerical solutions and error bounds // Oxford Journals, Science & Mathematics IMA Journal of Numerical Analysis Volume 15, Issue 1 Pp. 61-74.
77. **Kitagawa G.** (1977). "An Algorithm for Solving the Matrix Equation $X = F X F' + S$ ". International Journal of Control 25 (5): 745–753.
78. **Kressner D., Plesinger M., Tobler Ch.** A preconditioned low-rank CG method for parameter-dependent Lyapunov matrix equations //Numer. Linear Algebra Appl. 2010;00:1–22.
79. **Kučera Vladimír** The Matrix Equation $AX+XB=C$ // SIAM J. Appl. Math., 26(1), 15–25. (11 pages).
80. **Kuzmanović I., Truhar N.** Optimization of the solution of the parameter-dependent Sylvester equation and applications, Journal of computational and applied mathematics, 237 (2013) , no. 1, 136–144.
81. **Lancaster Peter** Algebraic Riccati equations, Leiba Rodman (1995), , Oxford University Press, p. 504.
82. **Laub, A.J.** A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations. // IEEE Transactions on Automatic Control (Impact Factor: 2.72). 01/1980; P85.
83. **Li Shuai, Li Yangming** Nonlinearly Activated Neural Network for Solving Time-Varying Complex Sylvester Equation // Cybernetics, IEEE Transactions.- Volume 44.-Issue 8.- 2013.- p. 1397 – 1407.
84. **Marchuk N.G.** Gauge fields of the matrix Dirac equation // Nuovo Cim. B113 (1998) 1287-1295.
85. **Mark Summerfield** (23 August 2010). "Advanced Qt Programming: Creating Great Software with C++ and Qt 4" (1st ed.). Addison-Wesley. ISBN 978-0-321-63590-7.
86. **Morris K.A., Navasca C.** Solution of Algebraic Riccati Equations Arising in Control of Partial Differential Equations, in Control of Distributed Parameter Systems, ed. J.P. Zolesio and J. Cagnol, Marcel Dekker, 2004, pg. 259-281.

87. **Nazarzadeha J., Razzaghib M., Nikraveshc K.Y.** Solution of the matrix Riccati equation for the linear quadratic control problems // Mathematical and Computer Modelling Volume 27, Issue 7, April 1998, Pages 51–55.
88. **Radicic B., Malesevic B.** Some considerations in relation to the matrix equation AXB=C // Mediterranean Journal of Mathematics (Impact Factor: 0.64). 08/2014; 11:841-856.
89. **Scott Meyers** (2005). Effective C++ (Third ed.). Addison-Wesley. ISBN 0-321-33487-6.
90. **Scottedward Hodel A., Tenison Bruce, Poolla Kameshwar R.** Numerical solution of the Lyapunov equation by approximate power iteration // Linear Algebra and its Applications.- Volume 236, 15 March 1996, Pages 205–230.
91. **Simoncini V.** Extended Krylov subspace for parameter dependent systems // Applied Numerical Mathematics Volume 60, Issue 5, May 2010, Pages 550–560.
92. **Sorensen C. Danny, Zhou Yunkai** Direct methods for matrix sylvester and lyapunov equations // Journal of Applied Mathematics.- Volume 2003 (2003), Issue 6, Pages 277-303.
93. **Stanley B. Lippman, Josée Lajoie, Moo Barbara E.** (2011). C++ Primer (Fifth ed.). Addison-Wesley. ISBN 0-470-93244-9.
94. **Wimmer Harald K.** The Algebraic Riccati Equation: Conditions for the Existence and Uniqueness of Solutions. // Linear Algebra and its Applications (Impact Factor: 0.97). 01/1984; 58(1):441-452.
95. **Xue Jungong, Xu Shufang, Li Ren-Cang** Accurate Solutions of M-Matrix Sylvester Equations. // Numerische Mathematik.- Volume 120 Issue 4, April 2012.- Pages 639-670.
96. **Zeidan Vera** The Riccati Equation for Optimal Control Problems with Mixed State-Control Constraints: Necessity and Sufficiency // SIAM J. Control Optimization. 32(5). - 1994, 1297–1321. (25 pages).
97. **Zitouni Foued, Lefebvre Mario** Linearization of a Matrix Riccati Equation Associated to an Optimal Control Problem // International Journal of Differential Equations Volume 2014 (2014), Article ID 741390, 7 pages.
98. http://en.wikipedia.org/wiki/Algebraic_Riccati_equation

99. http://en.wikipedia.org/wiki/Linear-quadratic-Gaussian_control#Mathematical_description_of_the_problem_and_solution

100. http://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_equation

101. http://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester_equation

102. <http://en.wikipedia.org/wiki/Model%20view%20controller>