ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Քթրյան Գագիկ Ազատի

ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԱՅԻՆ ՄԻՋԱՐԿՄԱՆ ԵՎ ԳԱՍՔԱ-ՄԱԵԶԹՈՒԻ ՎԱՐԿԱԾԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա.01.07 «Հաշվողական մաթեմատիկա»
մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2010

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ктрян Гагик Азатович

О МНОГОМЕРНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ГИПОТЕЗЕ ГАСКА-МАЕЗТУ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.07 «Вычислительная математика»

Ереван – 2010

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր Հ.Ա. Հակոբյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր Ա.Ա. Սահակյան
ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու Յու.Գ. Դադայան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2010 թ. մայիսի 26-ին, ժ. 15^{00}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 "Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն" մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրը առաքված է 2010 թ. ապրիլի 23-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель : доктор физ.-мат. наук А.А. Акопян

Официальные оппоненты : доктор физ.-мат. наук А.А. Саакян
кандидат физ.-мат. наук Ю.Г. Дадаян

Ведущая организация : Институт математики НАН Армении

Защита состоится 26 мая 2010 г. в 15^{00} на заседании специализированного совета ВАК 044 "Математическая кибернетика и математическая логика", действующего в ЕГУ по адресу: 0025, Ереван, ул. А. Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 23 апреля 2010 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
канд. физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի արդիականությունը. Հաշվողական մեթոդներում խնդրի ձևակերպման մեջ մտնող ֆունկցիաները հաճախ փոխարինվում են իրենց որոշակի իմաստով մոտ և ավելի պարզ ֆունկցիաներով: Հայտնի են ֆունկցիաների մոտարկման տարբեր եղանակներ: Առավել տարածված և պատմականորեն ավելի շուտ առաջացած մեթոդներից է *միջարկումը*: Ներկայումս բազմանդամային միջարկումը մոտարկումների տեսության և հաշվողական մաթեմատիկայի կարևորագույն բաժիններից մեկն է: Միաչափ բազմանդամային միջարկման հիմնարար արդյունքները ստացել են դեռևս Լագրանժը և Նյուտոնը, ընդ որում սկզբունքորեն տարբեր մոտեցումներով: Նշենք, որ միաչափ դեպքում Լագրանժի և Նյուտոնի ստացած արդյունքները տալիս են միջարկման խնդրի սպառիչ պատասխան: Բազմաչափ դեպքում իրավիճակը ամբողջովին այլ է:

Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկումով հիմնավորապես սկսել են զբաղվել շատ ավելի ուշ՝ հիմնականում վերջին չորս-հինգ տասնամյակների ընթացքում: Այս ընթացքում մաթեմատիկայի ուրիշ շատ բաժիններում ևս հետազոտությունների հիմնական ուղղությունը մի փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքից տեղափոխվեց մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների դեպք: Ըստ էության մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկման առաջին կարևոր արդյունքները ստացել են Բերզոլարին, Ռադոնը, ինչպես նաև Չանգը և Յաոն: Միաչափ շատ կիրառական խնդիրների, ինչպես օրինակ թվային ինտեգրման, ոչ գծային հավասարումների համակարգերի և դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր լուծման մեջ առանցքային դեր է կատարում բազմանդամային միջարկումը: Մի քանի փոփոխականի համապատասխան խնդիրներում սկզբնապես կիրառվել է միաչափ միջարկումների թենզորական արտադրյալով ընդհանրացումը, որը, չնայած պարզությանը, ունի էական թերություն: Այն է, թենզորական արտադրյալի բազմանդամային տարածությունը և ցանցը ինվարիանտ չեն գծային ձևափոխությունների նկատմամբ: Այս հանգամանքը անհրաժեշտ է դարձնում նշված խնդիրներում ըստ էության մի քանի փոփոխականի միջարկման կիրառությունը: Ներկայումս մի քանի փոփոխականներով միջարկման ուղղությունը հանդիսանում է նաև հանրահաշվական երկրաչափության արդիական բաժիններից մեկը:

Ատենախոսական աշխատանքի նպատակը և խնդիրները. Եռաչափ բազմանդամային միջարկման համար Գասքա-Մաեզթուի վարկածի հետազոտությունը մաքսիմալ հարթության գոյության վերաբերյալ: Մաքսիմալ հարթությունների քանակի հետազոտությունը: Միջին արժեքներով բազմաչափ միջարկման մի խնդրի ուսումնասիրությունը:

Հետազոտման օբյեկտը. Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային տարածություններ, միջարկման ճշգրիտ ցանցեր, մաքսիմալ ուղիղներ և հարթություններ:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են միաչափ և բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեթոդները: Օգտագործվել են նաև որոշ մեթոդներ տարածական երկրաչափությունից, գծային հանրահաշվից և ինտեգրալ հաշվից:

Գիտական նորությունը. Ապացուցվել է Գասքա-Մաեզթուի վարկածի ընդհանրացումը եռաչափ դեպքում երկրորդ աստիճանի բազմանդամների համար: Տրվել է մաքսիմալ հարթությունների քանակի ճշգրիտ գնահատական վերը նշված դեպքում: Ապացուցվել է միջին արժեքներով մի բազմանդամային միջարկման խնդրի ճշգրտությունը:

Կիրառական նշանակությունը. Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքները ունեն տեսական բնույթ և միևնույն ժամանակ ունեն հստակ արտահայտված կիրառական ուղղվածություն: Վերը նշված արդյունքները վերաբերում են միջարկումների տեսության պրակտիկայում առավել հաճախ կիրառվող սխեմաներից մեկին՝ երկրաչափական բնութագրով ցանցերին: Դրանք կարող են արդյունավետորեն կիրառվել բոլոր այն խնդիրներում, որոնց լուծման մեջ օգտագործվում է բազմաչափ բազմանդամային միջարկում:

Պաշտպանությանը ներկայացվում են հետևյալ դրույթները.

- Եռաչափ բազմանդամային միջարկման համար մաքսիմալ հարթության գոյության վերաբերյալ Գասքա-Մաեզթուի վարկածի ապացույցը:
- Վերը նշված դեպքում մաքսիմալ հարթությունների քանակի ճշգրիտ գնահատականի ստացումը:
- Միջին արժեքներով բազմաչափ միջարկման մի խնդրի ճշգրտության անհրաժեշտ և բավարար պայմանի ստացումը ընդհանուր տիրույթների դեպքում, և այդ պայմանի ստուգումը մի մասնավոր խնդրի համար:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան. Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի գիտական սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի սեմինարներում և ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում:

Հրապարակումները. Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են երեք գիտական հոդվածներում:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլխից, ամփոփումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 47 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 120 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Միաչափ բազմանդամային միջարկման հիմնական հարցերին սպառիչ պատասխան են տվել դեռևս Լագրանժը և Նյուտոնը: Այնինչ բազմաչափ միջարկման դեպքում շատ սկզբունքային հարցեր մինչ այժմ բաց են մնացել:

Հիմնական դժվարությունն այն է, որ միաչափ դեպքի արդյունքները մի քանի փոփոխականի համար ընդհանրացնելիս առաջ են գալիս էական բարդություններ, կապված միջարկման խնդրի լուծելիության հետ:

Աշխատանքը սկսվում է միաչափ բազմանդամային միջարկման կարևորագույն արդյունքների շարադրմամբ:

Պարագրաֆ 1.1-ում ներկայացվում է մի փոփոխականի բազմանդամների համար Լագրանժի դասական միջարկման խնդիրը: Այդ խնդրի լուծում հանդիսացող միջարկիչ բազմանդամի համար ներկայացված են Լագրանժի և Նյուտոնի բանաձևերը, ինչպես նաև Այտկեն-Նևիլի բանաձևը: Բերված է նաև Հերմիթի միջարկման խնդիրը, որը Լագրանժի միջարկման խնդրի ընդհանրացումն է պատիկ հանգույցների դեպքում: Հերմիթի միջարկիչ բազմանդամի համար նշված է Լագրանժ-Թեյլորի տիպի միջարկային բանաձև:

Պարագրաֆ 1.2-ում դիտարկվում է Լագրանժի բազմաչափ միջարկման խնդիրը: Նշանակենք՝

$$\bar{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d,$$

որտեղ

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbf{Z}_+^d:$$

$\Pi_n^d = \Pi_n(\mathbf{R}^d)$-ով նշանակենք n-ից փոքր կամ հավասար գումարային աստիճան ունեցող d փոփոխականի հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը՝

$$\Pi_n^d = \left\{ p(\bar{x}) = \sum_{|\alpha| \le n} a_{\alpha} \cdot \bar{x}^{\alpha} : \quad a_{\alpha} \in \mathbf{R}, \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^d \right\},$$

որի չափողականությունը՝

$$N := \dim \Pi_n^d = \binom{n+d}{d}:$$

Միջարկման հանգույցների բազմությունը նշանակում ենք՝

$$\mathbf{X} = \left\{ \bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)} \right\} \subset \mathbf{R}^d:$$

Ընդհանուր դեպքում դիտարկում ենք հետևյալ՝

Լագրանժի բազմաչափ միջարկման խնդիրը.

Տրված են $\mathbf{X} = \left\{ \bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)} \right\} \subset \mathbf{R}^d$ հանգույցների բազմությունը և կամայական $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ իրական արժեքների բազմություն: Գտնել $p \in \Pi_n^d$ բազմանդամ այնպիսին, որ

$$p(\bar{x}^{(k)}) = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s: \tag{1}$$

Որոնելի $p \in \Pi_n^d$ բազմանդամը կավանենք միջարկիչ բազմանդամ, իսկ (1) պայմանները՝ միջարկման պայմաններ:

Սահմանում 1.2.1[1]. $(\Pi_n^d, \mathbf{X})$ *միջարկման խնդիրը կանվանենք ճշգրիտ, եթե ցանկացած $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ արժեքների բազմության համար գոյություն ունի միակ $p \in \Pi_n^d$ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

[1]Սահմանումների, պնդումների և թեորեմների համարակալումները համապատասխանեցված են ատենախոսության տեքստին:

$$p(\overline{x}^{(k)}) = c_k, \quad k = 1,2,\dots,s:$$

Այդ դեպքում X *միջարկման հանգույցների բազմությունը կանվանենք նաև* Π_n^d *– ճշգրիտ:*

Նկատենք, որ ինչպես և միաչափ դեպքում, միջարկման պայմանները իրենցից ներկայացնում են N անհայտներով s գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ՝

$$p(\overline{x}^{(k)}) = \sum_{|\alpha| \le n} a_\alpha \cdot (\overline{x}^{(k)})^\alpha = c_k, \quad k = 1,2,\dots,s, \tag{2}$$

որտեղ անհայտները a_α-ներն են:

Միջարկման խնդրի ճշգրտությունն այս իմաստով նշանակում է, որ (2) հանրահաշվական հավասարումների համակարգը ունի միակ լուծում ցանկացած աջակողմյան $\{c_1, c_2, \dots, c_s\}$ արժեքների բազմության դեպքում: Այստեղից ստացվում է ճշգրտության անհրաժեշտ պայմանը՝

$$s = N: \tag{3}$$

Դա նշանակում է, որ համակարգում անհայտների և հավասարումների քանակները հավասար են: Այսուհետ միշտ կենթադրենք, որ այս պայմանը տեղի ունի:

(3) պայմանը ներկայացնում է միջարկման համար միաչափ և բազմաչափ դեպքերի միջև եղած առաջին տարբերությունը, այն է.

- **Ճշգրիտ բազմաչափ միջարկման հանգույցների քանակը որոշակի տեսքի թիվ է:**

Հաջորդը Լագրանժի միաչափ և բազմաչափ միջարկումների էական տարբերությունն է, որով էլ պայմանավորված է *Սահմանում 1.2.1*-ը.

- **Նույնիսկ (3) պայմանի առկայությամբ կան ճշգրիտ և ոչ ճշգրիտ բազմաչափ միջարկման խնդիրներ:**

Այնուհետև (2) համակարգից հետևում է՝

Պնդում 1.2.1. (Π_n^d, X) *միջարկման խնդիրը*

$$\mathsf{X} = \{\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, \dots, \overline{x}^{(N)}\} \subset \mathsf{R}^d, \quad N = \binom{n+d}{d}$$

միջարկման հանգույցներով կլինի ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$p \in \Pi_n^d \quad և \quad p(\overline{x}^{(j)}) = 0, \quad j = 1,2,\dots,N \quad \Rightarrow \quad p = 0:$$

Նաև համարժեքորեն տեղի ունի հետևյալը՝

Պնդում 1.2.2. (Π_n^d, X) *միջարկման խնդիրը*

$$\mathsf{X} = \{\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, \dots, \overline{x}^{(N)}\} \subset \mathsf{R}^d, \quad N = \binom{n+d}{d}$$

միջարկման հանգույցներով կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի այսպես կոչված զրոյացնող *բազմանդամ՝*

$$\exists p^\circ \in \Pi_n^d, \quad p^\circ \ne 0, \quad \textit{այնպիսին, որ} \quad p^\circ(\overline{x}^{(j)}) = 0, \quad j = 1,2,\dots,N:$$

Ամեն մի $p \in \prod_n^d$, $\deg p = n \geq 1$ (ոչ զրո) բազմանդամի համապատասխանեցնենք $p(\bar{x}) = 0$ հավասարումով տրվող $\leq n$*-րդ կարգի հանրահաշվական հիպերմակերևույթը*: Այժմ *Պնդում 1.2.2*-ից ստացվում է.

- **Բազմաչափ միջարկման ճշգրտության երկրաչափական մեկնաբանությունը՝**

Պնդում 1.2.3. $\left(\prod_n^d, \mathsf{X}\right)$ *միջարկման խնդիրը կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի* $\leq n$*-րդ կարգի հանրահաշվական հիպերմակերևույթ, որն անցնում է* X *բազմության բոլոր* N *հանգույցներով:*

Այս մեկնաբանության տեսանկյունից հետաքրքիր է նշել, որ՝

- *Ցանկացած* $s < N$ *հանգույցների համար գոյություն ունի* $\leq n$*-րդ կարգի հիպերմակերևույթ, որն անցնում է այդ բոլոր հանգույցներով:*

Իսկապես, համապատասխան համասեռ գծային համակարգում ունենք N անհայտ և $s(< N)$ հավասարում, որը հետևաբար կունենա ոչ զրոյական լուծում:

Սահմանում 1.2.2. $p \in \prod_n^d$ *բազմանդամը կանվանենք* $A := \bar{x}^{(k)} \in \mathsf{X}$ *հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ կամ Լագրանժի բազմանդամ* $\prod_n^d$ *տարածության համապատասխան, եթե*

$$p \in \prod_n^d, \quad p(\bar{x}^{(k)}) \neq 0 \quad \text{և} \quad p(\bar{x}^{(j)}) = 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad j \neq k: \tag{4}$$

Այսուհետ $A := \bar{x}^{(k)} \in \mathsf{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը կնշանակենք $p_A^* := p_k^*$: Նկատենք, որ առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ p_k^* ֆունդամենտալ բազմանդամի արժեքը A կետում հավասար է 1-ի: Քանի որ դրան միշտ կարելի է հասնել p_k^*-ը բազմապատկելով $\gamma_k^* := 1 / p_k^*(\bar{x}^{(k)})$-ով: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\gamma_k^* \cdot p_k^*(\bar{x}^{(j)}) = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq N,$$

որտեղ δ_{jk}-ն Կրոնեկերի նշանն է:

Նկատենք, որ *Սահմանում 1.2.2*-ից հետևում է՝

Պնդում 1.2.4. *Որպեսզի* $\left(\prod_n^d, \mathsf{X}\right)$ *միջարկման խնդիրը լինի ճշգրիտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունենան:*

Հետևանք 1.2.1. *Եթե բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունեն, ապա նրանք միակն են հաստատուն արտադրիչի ճշտությամբ:*

Հետագա շարադրանքում պայմանավորվենք h-ով նշանակել և հիպերհարթությունը, և հիպերհարթության $h(\bar{x}) = 0$ հավասարման մեջ մասնակցող $h \in \prod_1^d$ բազմանդամը:

Մեկ փոփոխականի դեպքում ֆունդամենտալ բազմանդամները ներկայացվում են գծային արտադրիչների արտադրյալի տեսքով՝

$$p_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j},\quad k=0,\dots,n:$$

Սակայն բազմաչափ դեպքում այսպիսի արտադրիչների վերլուծություն միշտ չէ, որ տեղի ունի: Մասնավորապես նման արդյունք է ստացվում այն դեպքում, երբ $\mathcal{X}$ բազմության հանգույցները բավարարում են Չանգի և Յաոյի կողմից ներմուծված *GC պայմանին* (տես ստորև՝ *Սահմանում 1.3.3.1*):

Պարագրաֆ 1.3-ում նկարագրվում են ճշգրիտ բազմությունների կառուցման մինչ այժմ հայտնի եղանակները:

Բազմաչափ միջարկման տեսության մեջ ամենավաղ կիրառվող եղանակը թենզորական արտադրյալով կոնստրուկցիան է: Այստեղ միջարկման ֆունդամենտալ բազմանդամները ստացվում են միաչափ ֆունդամենտալ բազմանդամների թենզորական արտադրյալով:

Թենզորական արտադրյալով միջարկման համար հեշտությամբ ընդհանրացվում են միաչափ միջարկման Լագրանժի բանաձևը և Նյուտոնի բանաձևն իր բաժանված տարբերություններով: Բայց, չնայած այս կոնստրուկցիայի և նրա համար ստացված միջարկման բանաձևերի պարզությանը, այն ունի էական թերություն: Այն է, թենզորական արտադրյալի բազմանդամային տարածությունը և ցանցը ինվարիանտ չեն գծային ձևափոխությունների նկատմամբ: Այդ պատճառով էլ այս տիպի կոնստրուկցիաները լայնորեն չեն կիրառվում բազմաչափ միջարկման տեսության մեջ:

Հաջորդ նկարագրված կոնստրուկցիան հայտնի Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիան է:

Այնուհետև դիտարկվում է Չանգ-Յաոյի երկրաչափական բնութագրի (GC_n) պայմանը.

Սահմանում 1.3.3.1. *Կասենք, որ* $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^d,\ \#\mathcal{X}=N=\binom{n+d}{d}$ *հանգույցների բազմությունը բավարարում է* GC_n *երկրաչափական բնութագրին, կամ կարճ ասած՝* GC_n*-բազմություն է, եթե ցանկացած* $A\in\mathcal{X}$ *հանգույցի համար գոյություն ունեն (ամենաշատը)* n *հիպերհարթություններ՝* $h_1^A,h_2^A,\dots,h_n^A$ *այնպիսին, որ՝*

$$\mathcal{X}\setminus\{A\}\subset h_1^A\cup h_2^A\cup\cdots\cup h_n^A,\quad \textit{բայց}\quad A\notin h_1^A\cup h_2^A\cup\cdots\cup h_n^A:$$

Այս դեպքում կասենք, որ $A\in\mathcal{X}$ հանգույցը օգտագործում է $h_1^A,h_2^A,\dots,h_n^A$ հիպերհարթությունները:

Նկատենք, որ վերը նշված սահմանումը համարժեք է այն պայմանին, որ ցանկացած $A\in\mathcal{X}$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը գոյություն ունի և ներկայացվում է գծային արտադրիչների արտադրյալի տեսքով՝

$$p_A^*=h_1^A\cdot h_2^A\cdots h_n^A,$$

որտեղ $h_1^A,h_2^A,\dots,h_n^A$-երը $A\in\mathcal{X}$ հանգույցի կողմից օգտագործվող հիպերհարթություններն են:

Պնդում 1.2.4-ից հետևում է, որ ցանկացած GC_n-բազմություն հանդիսանում է Π_n^d-ճշգրիտ: Մասնավորապես, ըստ *Պնդում 1.2.3*-ի կամայական GC_n-բազմության հանգույցները չեն կարող պատկանել n հատ հիպերհարթությունների:

Սահմանում 1.3.3.2. *Կասենք, որ իրարից տարբեր $h_1,h_2,\ldots,h_q$, $q>d$ հիպերհարթությունները R^d-ում գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ, եթե նրանցից ցանկացած d հատը հատվում են, և ոչ մի $d+1$ հատը մի կետով չեն անցնում:*

Այժմ բերենք GC_n երկրաչափական բնութագրին բավարարող հանգույցների ճշգրիտ կոնստրուկցիաների օրինակներ:

Հիմնականներից մեկը Չանգ-Յաոյի բնական ցանցն է:

Սահմանում 1.3.4.1. *Կասենք, որ* $\mathsf{X}\subset\mathsf{R}^d$, $\#\mathsf{X}=N=\binom{n+d}{d}$ *հանգույցների բազմությունը հանդիսանում է բնական ցանց, եթե գոյություն ունեն ընդհանուր դրության մեջ գտնվող $n+d$ հիպերհարթություններ՝ $h_1,h_2,\ldots,h_{n+d}$ այնպիսին, որ նրանց բոլոր հնարավոր d հատ հիպերհարթությունների հատման կետերը կազմում են X բազմության հանգույցները:*

Այսպիսով բնական ցանցում $h_1,h_2,\ldots,h_{n+d}$ հիպերհարթությունների բոլոր հնարավոր d-յակների հատման $\binom{n+d}{d}$ հանգույցները կազմում են հենց միջարկման X բազմությունը: Ընդ որում յուրաքանչյուր $A\in\mathsf{X}$ հանգույց ընկած է ճիշտ d հիպերհարթությունների վրա: Հետևաբար մյուս բոլոր $\mathsf{X}\setminus\{A\}$ հանգույցները պատկանում են մնացած n հատ հիպերհարթություններին: Այստեղից հետևում է, որ X բազմությունը հանդիսանում է GC_n-բազմություն:

Աշխատանքում բերված են նաև GC_n պայմանին բավարարող այլ ցանցերի օրինակներ: Այդ թվում՝ Նյուտոնի ցանցը կամ այսպես կոչված հիմնական ցանցը, որտեղ որպես միջարկման հանգույցերի բազմություն վերցվում է՝

$$\mathsf{X}=\{\alpha\in\mathsf{Z}_+^d:\ |\alpha|\le n\}$$

մուլտիինդեքսների բազմությունը կամ այդ բազմության փոխմիարժեք աֆինական ձևափոխությամբ ստացված պատկերը, և Նյուտոնի ընդհանրացված ցանցը:

Կարևոր է նշել, որ Չանգ-Յաոյի GC_n պայմանին բավարարող կոնստրուկցիաների (բնական ցանց, Նյուտոնի ցանց և Նյուտոնի ընդհանրացված ցանց) հիմքում ընկած է միջարկման Լագրանժի բանաձևի ընդհանրացումը, որտեղ ֆունդամենտալ բազմանդամները հանդիսանում են գծային արտադրիչների արտադրյալներ: Մինչդեռ Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի հիմքում ընկած է միջարկման Նյուտոնի բանաձևի ընդհանրացումը:

GC_n պայմանին բավարարող մինչ այժմ հայտնի կոնստրուկցիաները՝ Չանգ-Յաոյի բնական ցանցը, Նյուտոնի ցանցը և Նյուտոնի ընդհանրացված ցանցը հանդիսանում են Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի մասնավոր դեպքեր: Դրա հիման վրա Գասքան և Մաեզթուն 1982 թ. առաջադրել են վարկած, ըստ որի ցանկացած GC_n-բազմություն միևնույն ժամանակ հանդիսանում է Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիա: Այս վարկածն ավելի հանգամանորեն դիտարկում է հաջորդ գլխում:

Վերջում որպես ճշգրիտ կոնստրուկցիայի օրինակ դիտարկվում է նաև բնական ցանցի ընդհանրացված կոնստրուկցիան:

Դիտարկենք Չանգ-Յաոյի բնական ցանցը երկչափ դեպքում.

Հարթության վրա ունենք $n+2$ ուղիղներ՝ ℓ_k, $k=1,\dots,n+2$, այնպես որ

(ա) *Ուղիղների ոչ մի զույգ զուգահեռ չէ,*

(բ) *Ուղիղների ոչ մի եռյակ չի անցնում մի կետով:*

Ըստ (բ)-ի ուղիղների տարբեր զույգերի հատման կետերը տարբեր են և հետևաբար բոլոր հատման կետերի քանակը $\binom{n+2}{2}$ $(=N_n)$ է:

Հերմիթի միջարկման դեպքում վերը նշված $n+2$ ուղիղներից պահանջում ենք միայն, որ բավարարվի (ա) պայմանը՝

(ա) *Ուղիղների ոչ մի զույգ զուգահեռ չէ:*

Իհարկե, եթե տեղի չունի Չանգ-Յաոյի (բ) պայմանը, ապա հատման կետերի քանակը կլինի N_n-ից փոքր և կխախտվի ճշգրտության անհրաժեշտ պայմանը՝ (3)-ը: Բայց պարզվում է, որ այս դեպքը լիովին համապատասխանում է Հերմիթի միջարկմանը:

Պարագրաֆ 1.4-ում ապացուցվում են երկչափ ճշգրիտ բազմություններում մաքսիմալ ուղիղների վերաբերյալ մի շարք պնդումներ, որոնք հանդիսանում են GC_n-բազմությունների համար Քարնիսերի և Գասքայի[2] կողմից ապացուցված հայտնի պնդումների ընդհանրացումները:

Հարթության վրա X հանգույցների բազմության $n+1$ հանգույցով անցնող ուղիղը կանվանենք *մաքսիմալ ուղիղ*:

Այնուհետև ընդհանրացնում ենք Այտկեն-Նևիլի միջարկային բանաձևը երկչափ դեպքում:

Դիցուք X-ը Π_n^2-ճշգրիտ բազմություն է և գոյություն ունեն երեք մաքսիմալ ուղիղներ (X-ից $n+1$ հանգույց պարունակող), նշանակենք՝ L_0, L_1, L_2 :

Ցույց է տրվում, որ $\mathsf{X}\setminus L_i$, $i=0,1,2$ հանգույցների բազմությունները ճշգրիտ են: Այդ բազմությունների համար միջարկիչ բազմանդամները համապատասխանաբար նշանակենք՝ p_0, p_1, p_2 : Այդ դեպքում X բազմության համապատասխան p միջարկիչ բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ ներկայացումը՝

$$p = L_0 p_0 + L_1 p_1 + L_2 p_2, \tag{5}$$

որը իրենից ներկայացնում է միջարկիչ բազմանդամի համար Այտկեն-Նևիլի բանաձևի անալոգը երկչափ դեպքում:

Պարագրաֆ 2.1-ում նկարագրված է Գասքա-Մաեզթուի վարկածը երկչափ դեպքում՝

---

[2] J. M. Carnicer and M. Gasca, *Classification of bivariate configurations with simple Lagrange interpolation formulae*, - Advances in Computational Mathematics, 20 (2004), p. 5-16.

GM **-վարկած**[3]. *Եթե $\mathcal{X}$ հանգույցների բազմությունը $\mathbb{R}^2$ -ում բավարարում է GC_n երկրաչափական բնութագրին, ապա գոյություն ունի ուղիղ, որն անցնում է $\mathcal{X}$ բազմության $n+1$ հանգույցով, կամ այլ կերպ ասած գոյություն ունի մաքսիմալ ուղիղ:*

Նշենք, որ մինչ այժմ GM *-վարկածը* ապացուցված է[4] միայն $n \le 4$ աստիճանի բազմանդամների համար:

Աշխատանքում բերված է GM *-վարկածի* ապացույցը[4] միայն $n \le 3$ աստիճանի բազմանդամների համար: $n = 4$ դեպքում վարկածի ապացույցը շատ ավելի բարդ է:

Իրականում GM *-վարկածը* պնդում է, որ ցանկացած Չանգ-Յաոյի GC_n-բազմություն հանդիսանում է $\mathbb{R}^2$-ում Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի մասնավոր դեպք, այսինքն գոյություն ունեն $n+1$ ուղիղներ՝ $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n$ այնպիսին, որ $\ell_i \setminus (\ell_0 \cup \ell_1 \cup \cdots \cup \ell_{i-1})$-ը պարունակում է ճիշտ $n+1-i$ հանգույց:

Այնուհետև սահմանվում է GC-բազմությունների բնութագրման համար Քարնիսերի և Գասքայի կողմից ներմուծված *դեֆեկտի* գաղափարը:

Սահմանում 2.1.1. *Դիցուք $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ հանդիսանում է GC_n-բազմություն: Կասենք, որ $\mathcal{X}$ բազմությունն ունի $\mathcal{D}$ դեֆեկտ, կամ $\mathcal{X}$-ը $\sqsubset$-ցանց է, եթե օգտագործվող մաքսիմալ ուղիղների քանակը $n+2-\mathcal{D}$ է:*

Ենթադրենք $L_1, L_2, \ldots, L_m$, $m = n+2-\mathcal{D}$ ուղիղները $\mathcal{D}$ դեֆեկտով $\mathcal{X}$ բազմության մաքսիմալ ուղիղներն են: *Պնդում 1.4.3*-ից հետևում է, որ այդ ուղիղների բոլոր հատման կետերը հանդիսանում են $\mathcal{X}$ բազմության հանգույցներ:

Համաձայն *Պնդում 1.4.5*-ի՝

$$m \le n+2:$$

GM *-վարկածը* նշանակում է, որ $m \ge 1$: Կամ, այլ կերպ ասած, GM *-վարկածը* նշանակում է, որ $\mathcal{X}$ բազմության $\mathcal{D}$ դեֆեկտը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$\mathcal{D} \le n+1:$$

$\mathbb{R}^2$-ում Քարնիսերը և Գասքան GM *-վարկածի* վերաբերյալ ապացուցում են հետևյալը՝

Թեորեմ 2.1.1[5]. *Եթե GM -վարկածը ճիշտ է, ապա գոյություն ունեն առնվազն երեք մաքսիմալ ուղիղներ:*

Այստեղից կարող ենք եզրակացնել, որ եթե GM *-վարկածը* ճիշտ է, ապա

$$\mathcal{D} \le n-1:$$

Թեորեմ 2.1.1-ից հետևում է՝

---

[3] M. Gasca, J. I. Maeztu, *On Lagrange and Hermite interpolation in* $\mathbb{R}^n$, - Numer. Math., 39 (1982), p. 1-14.

[4] H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann, *A new proof of the Gasca-Maeztu conjecture for* $n = 4$, - J. Approx. Theory (2009), v. 159, № 2, doi: 10. 1016. /j. jat. 2009.04.006, p. 224-242.

[5] J. M. Carnicer and M. Gasca, *On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation*, - Curve and Surface Design: Saint-Malo 2002 (Tom Lyche, Marie- Laurence Mazure, and Larry L. Schumaker Eds.) (2003), p. 11-30.

Պնդում 2.1.1[6]. *GM -վարկածը ճիշտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած հանգույց օգտագործում է մաքսիմալ ուղիղ:*

Այժմ նկատենք, որ *Պարագրաֆ 1.4*-ում դուրս բերված Այտկեն-Նևիլի (5) ընդհանրացված բանաձևի համար արված ենթադրությունները տեղի ունեն մասնավորապես ցանկացած GC_n-բազմության դեպքում, եթե GM *-վարկածը* ճիշտ է: Իրոք, այդ դեպքում հանգույցների բազմությունը ճշգրիտ է, և *Թեորեմ 2.1.1*-ի համաձայն գոյություն ունեն առնվազն երեք մաքսիմալ ուղիղներ:

Այսպիսով, եթե $\mathcal{X}$-ը GC_n-բազմություն է, և նրա համար GM *-վարկածը* ճիշտ է, ապա նրա միջարկիչ բազմանդամի համար տեղի ունի Այտկեն-Նևիլի (5) ընդհանրացված բանաձևը՝

$$p = L_0 p_0 + L_1 p_1 + L_2 p_2,$$

որտեղ L_0, L_1, L_2-ը $\mathcal{X}$-ի մաքսիմալ ուղիղներն են, իսկ p_0, p_1, p_2-ը՝ համապատասխանաբար $\mathcal{X} \setminus L_i$, $i = 0,1,2$ հանգույցների բազմությունների միջարկիչ բազմանդամները:

Պարագրաֆ 2.2-ում շարադրված են 0, 1 և 2 դեֆեկտով ցանցերի բնութագրերը[7]: Աշխատանքում որպես հետևանք մենք ստանում ենք այդ ցանցերում n հանգույց պարունակող ուղիղների քանակի ճշգրիտ վերին գնահատականներ:

Մասնավորապես 0-ցանցի կամ բնական ցանցի համար ստացված է հետևյալ արդյունքը՝

Պնդում 2.2.3. *Դիցուք $n > 2k + 2$, այսինքն $k = 0,1,\ldots,[n/2]-2$: Այդ դեպքում բնական ցանցում գոյություն չունի ճիշտ $n-k$ հանգույց պարունակող ուղիղ:*

Մասնավորապես $k = 0$ դեպքում կունենանք՝

Հետևանք 2.2.2. *$n > 2$ դեպքում բնական ցանցում գոյություն չունի ճիշտ n հանգույց պարունակող ուղիղ:*

Բացառություն է կազմում $n = 2$ դեպքը, քանի որ այստեղ ունենք երեք հատ երկու հանգույց պարունակող ուղիղ:

Այնուհետև կառուցված է բնական ցանցի օրինակ, որում գոյություն ունի ճիշտ $n-1$ հանգույց պարունակող ուղիղ, որով էլ ցույց ենք տալիս, որ *Հետևանք 2.2.2*-ի արդյունքը հնարավոր չէ լավացնել:

1 դեֆեկտով ցանցերի համար ապացուցված է հետևյալը՝

Պնդում 2.2.5. *$n > 4$ դեպքում 1-ցանցում գոյություն ունի n հանգույց պարունակող ամենաշատը մեկ ուղիղ:*

Բացի այդ նշված է, որ $n = 3$ դեպքում երեք հանգույցով ուղիղները ամենաշատը երեքն են: Իսկ $n = 4$ դեպքում գոյություն ունեն չորս հանգույց պարունակող ամենաշատը երկու ուղիղ:

---

[6] J. M. Carnicer and M. Gasca, *Classification of bivariate configurations with simple Lagrange interpolation formulae*, - *Advances in Computational Mathematics*, 20 (2004), p. 5-16.

[7] J. M. Carnicer and M. Gasca, *Planar Configurations with Simple Lagrange Interpolation Formulae*, - Mathematical Methods in CAGD: Oslo 2000, Tom Lyche and Larry L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 2000, p. 55-62.

2 դեֆեկտով ցանցերի համար աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալը՝

Պնդում 2.2.7. $n>3$ *դեպքում 2-ցանցում գոյություն ունեն* n *հանգույց պարունակող ամենաշատը երկու ուղիղ:*

Պնդում 2.2.7-ի արդյունքն ամբողջացնելու համար բերված է 2-ցանցի օրինակ, որն ունի n հանգույց պարունակող ճիշտ երկու ուղիղ:

Այնուհետև ցույց է տրվում, որ $n=3$ դեպքում 2-ցանցում գոյություն ունեն երեք հանգույց պարունակող ճիշտ երեք ուղիղ:

Պարագրաֆ 2.3-ում ուսումնասիրվում է դե Բորի կողմից ընդհանրացված Գասքա-Մաեզթուի վարկածը R^d -ի համար:

GM_d **-վարկած.** *Եթե* X *հանգույցների բազմությունը* R^d *-ում բավարարում է* GC_n *երկրաչափական բնութագրին, ապա գոյություն ունի հիպերհարթություն, որն անցնում է* X *բազմության* $\dim\prod_n^{d-1}$ *հանգույցով:*

X բազմության $\dim\prod_n^{d-1}$ հանգույցով անցնող հիպերհարթությունը կանվանենք մաքսիմալ հիպերհարթություն: GC_n-բազմությունների ուսումնասիրության ժամանակ կարևոր դեր են խաղում մաքսիմալ հիպերհարթությունները:

Թեորեմ 2.1.1-ի հիման վրա դե Բորն առաջադրել է հետևյալ վարկածը՝

CG_d **-վարկած**[8]**.** *Ցանկացած* GC *-բազմության համար* R^d *-ում գոյություն ունեն առնվազն* $d+1$ *մաքսիմալ հիպերհարթություններ:*

Դե Բորը բերում է[8] նաև հակաօրինակ $\prod_2^3$-ում, որով ցույց է տրվում, որ CG_d *-վարկածը* ընդհանուր դեպքում ճիշտ չէ: Որպես հետևանք ստացվում է, որ կամ GM_d *-վարկածը* ճիշտ չէ $\prod_2^3$-ում, կամ *Թեորեմ 2.1.1* –ի հետևյալ բնական ընդհանրացումը տեղի չունի՝

Թեորեմ 2.3.1. *Եթե* GM_d *-վարկածը ճիշտ է, ապա գոյություն ունեն առնվազն* $d+1$ *մաքսիմալ հիպերհարթություններ:*

Հաջորդ պարագրաֆում ապացուցում ենք, որ GM_d *-վարկածը* ճիշտ է $\prod_2^3$-ում: Հետևաբար կարող ենք եզրակացնել, որ *Թեորեմ 2.3.1*-ը ճիշտ չէ:

GM_d *-վարկածը* ակնհայտորեն ճիշտ է $n=1$ դեպքում ցանկացած d-ի համար:

Դիտարկենք GM_d *-վարկածը* $n=2$ և $d=3$ դեպքում: Այսինքն այս դեպքում (GM_3-) վարկածը հետևյալն է.

Ունենք $\mathsf{X}\subset\mathsf{R}^3$, $\#\mathsf{X}=\binom{2+3}{3}=10$ *հանգույցների բազմություն, որը բավարարում է* GC_2 *պայմանին, այդ դեպքում գոյություն ունի հարթություն (մաքսիմալ), որն անցնում է* X *բազմության* $\dim\prod_2^2=6$ *հանգույցով:*

---

[8] C. de Boor, *Multivariate polynomial interpolation: Conjectures concerning GC-sets*, - Numer. Alg., 45 (2007), p. 113-125.

Նախ ապացուցում ենք հետևյալ կարևոր լեմմաները, որոնք տեղի ունեն ցանկացած n-ի համար R^3-ում:

Լեմմա 2.4.1. *Դիցուք $\mathsf{X} \subset \mathsf{R}^3$ հանգույցների բազմությունը բավարարում է GC_n պայմանին: Եթե որևէ ℓ ուղիղ անցնում է X բազմության $n+1$ հանգույցով, ապա ℓ ուղղին չպատկանող ցանկացած հանգույց իր ֆունդամենտալ բազմանդամում օգտագործում է ℓ ուղղով անցնող հարթություն:*

Հաջորդ լեմման ինչ-որ իմաստով լրացնում է *Լեմմա 2.4.1*-ը:

Լեմմա 2.4.2. *Դիցուք $\mathsf{X} \subset \mathsf{R}^3$ հանգույցների բազմությունը բավարարում է GC_n պայմանին: Այդ դեպքում գոյություն չունի X բազմության $n+2$ հանգույցով անցնող ուղիղ:*

Հաշվի առնելով վերը նշված լեմմաները և որոշ օժանդակ պնդումներ, ապացուցում ենք հետևյալ հիմնական արդյունքը՝

Թեորեմ 2.4.1. *GM_d-վարկածը ճիշտ է Π_2^3-ի համար:*

Վերջում ապացուցում ենք մի կարևոր փաստ, որը օգտագործվում է հետագայում՝

Դիտողություն 2.4.1. *Մաքսիմալ հարթության հանգույցները բավարարում են GC_2 պայմանին R^2-ում, այսինքն մաքսիմալ հարթության ցանկացած հանգույց ֆիքսելիս մնացած հինգ հանգույցները ընկած են երկու ուղիղների վրա, որոնք չեն անցնում ֆիքսած հանգույցով:*

Պարագրաֆ 2.5-ում ուսումնասիրվում են R^3-ում կամայական GC_2-բազմության մաքսիմալ հարթությունները: Արդյունքում ստանում ենք այդ բազմության մաքսիմալ հարթությունների քանակի ճշգրիտ ստորին գնահատական:

Ենթադրենք $\mathsf{X} \subset \mathsf{R}^3, \ \#\mathsf{X} = \binom{2+3}{3} = 10$ հանգույցների բազմությունը հանդիսանում է GC_2-բազմություն: *Թեորեմ 2.4.1*-ի համաձայն այդ բազմության համար, այսինքն $d=3, \ \ n=2$ դեպքում GM_d *-վարկածը* ճիշտ է: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի (մաքսիմալ) հարթություն, որն անցնում է X բազմության $\dim \Pi_2^2 = 6$ հանգույցով:

Օգտագործելով որոշ օժանդակ պնդումներ՝ ապացուցում ենք մաքսիմալ հարթությունների քանակին վերաբերող հետևյալ հիմնական արդյունքը՝

Թեորեմ 2.5.1. *Ցանկացած X GC_2-բազմության համար R^3-ում գոյություն ունեն առնվազն երեք մաքսիմալ հարթություններ:*

Նշենք, որ երկչափ դեպքում համաձայն *Պնդում 2.1.1*-ի, GM *-վարկածը* ճիշտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած հանգույց օգտագործում է մաքսիմալ ուղիղ: Ի հակադրություն սրան դե Բորի հակաօրինակը[8] ցույց է տալիս, որ եռաչափ դեպքում գոյություն ունի GC_2-բազմություն, որի մի հանգույցը չի օգտագործում մաքսիմալ հարթություն:

Արդյունքում ապացուցվում է հետևյալը՝

Դիտողություն 2.5.2. *Ցանկացած GC_2-բազմության համար $\mathbb{R}^3$-ում ամենաշատը մեկ հանգույց իր ֆունդամենտալ բազմանդամում չի օգտագործում մաքսիմալ հարթություն:*

Պարագրաֆ 2.6-ում *Թեորեմ 2.5.1*-ն ամբողջացնելու համար բերում ենք երկու օրինակ, որոնք ցույց են տալիս, որ այդ թեորեմի արդյունքը հնարավոր չէ լավացնել:

Պարագրաֆ 3.1-ը նվիրված է միջարկման համար դասականից տարբեր այլ մոտեցումների ուսումնասիրմանը: Մասնավորապես կետային արժեքների փոխարեն վերցվում են միջին արժեքներ հատվածներով, եռանկյուններով և այլն: Նշենք, որ այս դասի առաջին միջարկումը ներմուծել է Կերգինը[9]:

Π_n-ով նշանակենք n-ից փոքր կամ հավասար գումարային աստիճան ունեցող երկու փոփոխականի հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը՝

$$\Pi_n = \left\{ p(x,y) = \sum_{i+j\le n} a_{ij} x^i y^j : \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}:$$

Նշանակենք՝

$$N := \dim \Pi_n = \binom{n+2}{2}:$$

Լագրանժի դասական միջարկման պարամետրերը ֆունկցիայի արժեքներն են տրված $(x_i, y_i),\ \ i = 1,2,\ldots,N$ կետերում: Այստեղ կդիտարկենք Լագրանժի միջարկման խնդիր, որտեղ միջարկման պարամետրերը ինտեգրալներ են որոշակի սահմանափակ տիրույթներով:

Աշխատանքի այս մասում բերված են միջին արժեքներով միջարկման համար որոշ հայտնի ընդհանուր արդյունքներ, որտեղ որպես միջարկման պարամետրեր հանդես են գալիս ինտեգրալներ հատվածներով, եռանկյուններով և ընդհանուր դեպքում սիմպլեքսով:

Պարագրաֆ 3.2-ում դիտարկվում է միջին արժեքներով միջարկման խնդիր, որտեղ միջարկման պարամետրերը ինտեգրալներ են կամայական Լեբեգի ոչ զրոյական վերջավոր չափով տիրույթներով:

Այսուհետ Լեբեգի ոչ զրոյական վերջավոր չափով տիրույթը կանվանենք ℓ_*-*տիրույթ*:

Դիցուք ունենք $\mathsf{D}_s = \{D_1, D_2, \ldots, D_s\}$ ℓ_*-տիրույթների բազմությունը:

Սահմանում 3.2.1. *Կասենք, որ (Π_n, D_s) միջարկման խնդիրը ճշգրիտ է, եթե ցանկացած $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ արժեքների բազմության համար գոյություն ունի միակ $p \in \Pi_n$ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

$$\iint_{D_k} p(x,y)\,dxdy = c_k, \quad k = 1,\ldots,s: \tag{6}$$

[9] Sh. Waldron, *Integral error formulae for the scale of mean value interpolations which includes Kergin and Hakopian interpolations,* - Numerische Math., 77 (1977), p. 105-122.

Նկատենք, որ (6) պայմանները կարելի է ներկայացնել D_k տիրույթների վրա ընդունած p-ի միջին արժեքներով՝

$$\frac{1}{\mu(D_k)}\iint_{D_k} p(x,y)dxdy = c'_k, \quad k=1,\ldots,s,$$

որտեղ $\mu(D_k)$-ն D_k տիրույթի մակերեսն է, և $c'_k = \dfrac{c_k}{\mu(D_k)}$-երը կամայական նախապես հայտնի արժեքներ են: Այդ պատճառով էլ վերը նշված միջարկումը կոչվում է *միջին արժեքներով միջարկում*.

Կետային միջարկման վերաբերյալ սկզբում արված դատողությունները տեղի ունեն նաև այս դեպքում, քանի որ այս խնդիրը նույնպես բերվում է գծային հավասարումների համակարգի՝

$$\iint_{D_k} p(x,y)dxdy = \iint_{D_k}\sum_{i+j\le n} a_{ij}x^i y^j dxdy =$$
$$= \sum_{i+j\le n} a_{ij}\iint_{D_k} x^i y^j dxdy = c_k, \quad k=1,\ldots,s:$$

Այստեղից մասնավորապես կստանանք, որ միջին արժեքներով միջարկման ճշգրտության անհրաժեշտ պայման է՝

$$s=\binom{n+2}{2}:$$

Այսպիսով ունենք, որ՝

Պնդում 3.2.2. $\mathsf{D}_3=\{D_1,D_2,D_3\}$ *տիրույթներով և* Π_1*-ով միջարկումը կլինի ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$p\in\Pi_1 \quad \text{և} \quad \iint_{D_j} p(x,y)dxdy = 0, \quad j=1,2,3 \quad \Rightarrow \quad p=0: \tag{7}$$

Այսուհետ կդիտարկենք միջին արժեքներով այնպիսի միջարկում, որի տիրույթները առաջանում են ընդհանուր դրության մեջ գտնվող ուղիղների հատման արդյունքում: Այդ սահմանափակ տիրույթները կանվանենք *b-տիրույթներ:*

Տեղի ունի հետևյալը՝

Լեմմա 3.2.1[10]**.** *Դիցուք* $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{n+3}$ *ուղիղները, որտեղ* $n\ge 0$ *ամբողջ թիվ է, գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ: Այդ դեպքում կառաջանան ճիշտ* $\binom{n+2}{2}$ *b-տիրույթ:*

Դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը.

Ենթադրենք հարթության վրա տրված են $n+3$ հատ իրարից տարբեր ուղիղներ ($n\ge 0$ ամբողջ թիվ է), որոնք գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ: Ըստ *Լեմմա 3.2.1*-ի այդ ուղիղների հատման արդյունքում առաջանում են $\binom{n+2}{2}$ հատ

[10] Kh. Rahsepar Fard, *An Approach to Interpolation by Integration*, - Proceedings of the Yerevan State Univercity, Yerevan, Armenia, 2 (2009), p. 21-25.

b-տիրույթ: Այդ տիրույթները նշանակենք $\boldsymbol{\Delta}_i$-ով, $i=1,\ldots,N$ և թող՝

$$\mathcal{D}_N=\{\boldsymbol{\Delta}_1,\boldsymbol{\Delta}_2,\ldots,\boldsymbol{\Delta}_N\}:$$

Հ. Հակոբյանը առաջադրել է հետևյալ վարկածը՝

Վարկած. *Ցանկացած $\{c_1,c_2,\ldots,c_N\}$ թվերի բազմության համար գոյություն ունի միակ $p\in\Pi_n$ բազմանդամ այնպիսին, որ*

$$\iint\limits_{\boldsymbol{\Delta}_i} p(x,y)dxdy=c_i,\quad i=1,\ldots,N:$$

Այլ կերպ ասած, $(\Pi_n,\mathcal{D}_N)$ խնդիրը ճշգրիտ է:

Այս վարկածը մինչ այժմ ապացուցված է[10] միայն ≤ 1 աստիճանի բազմանդամների համար:

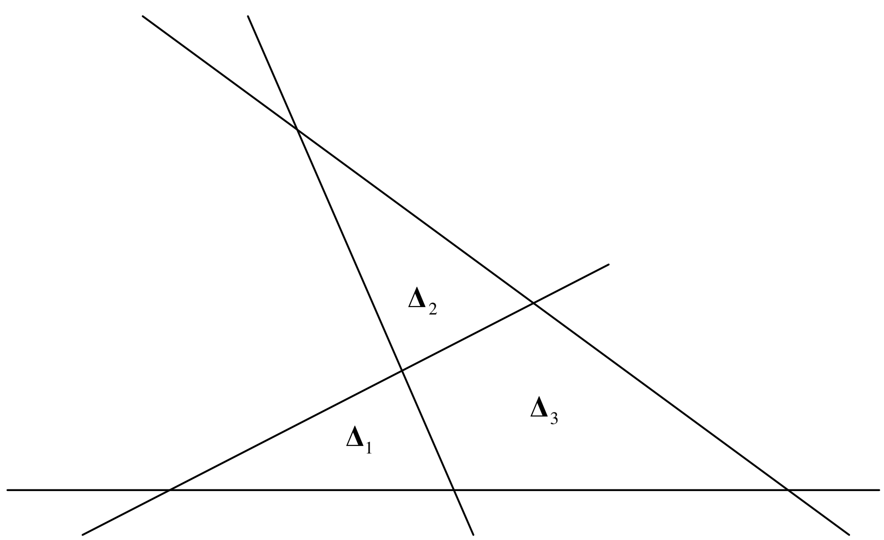
Զրո աստիճանի բազմանդամի համար պնդումն ակնհայտ է, քանի որ, եթե ունենք երեք ուղիղ, որոնցով կազմվում է մեկ b-տիրույթ, ապա կիրառելով *Պնդում 3.2.2*-ը կստանանք՝

$$\iint\limits_{\boldsymbol{\Delta}} p_0dxdy=0,\quad p_0=const\quad\Rightarrow\quad p_0=0:$$

Դիտարկենք $n=1$ դեպքը:

Տրված են չորս ուղիղներ, որոնք գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ: Նկատենք, որ ցանկացած դեպքում այդ ուղիղների հատման արդյունքում առաջացող սահմանափակ տիրույթները բոլորը ընկած կլինեն ուղիղներից երկուսով կազմված անկյուններից մեկի մեջ: Կառաջանան երկու եռանկյուն և մի քառանկյուն: Եռանկյունները նշանակենք $\boldsymbol{\Delta}_1,\boldsymbol{\Delta}_2$-ով, իսկ քառանկյունը՝ $\boldsymbol{\Delta}_3$-ով (տես՝ *Գծագիր*):

Այս դեպքում վարկածի իրավացիությունը ապացուցված է[10]՝ հաշվելով համապատասխան Վանդերմոնդի որոշիչը: Այս աշխատանքում բերվում է նոր ապացույց, ընդ որում նախապես խնդիրը լուծվում է ավելի ընդհանուր դրվածքով:



Գծագիր

Նախապես պարզենք մի հարց:

Ինչ պայման պետք է դնենք ուղղի վրա, որպեսզի ուղղի ինտեգրալը ℓ_*-տիրույթով լինի զրո: Պարզվում է, որ դա առնչվում է տիրույթի կենտրոնի հետ:

Սահմանում 3.2.2. *D տիրույթի կենտրոն կանվանենք*

$$x^* = \frac{\iint\limits_D x dxdy}{S_D}, \quad y^* = \frac{\iint\limits_D y dxdy}{S_D}$$

կոորդինատներ ունեցող կետը, որտեղ S_D-ն D տիրույթի մակերեսն է:

Այստեղից անմիջապես կունենանք, որ

$$\iint\limits_D (Ax + By + C)dxdy = (Ax^* + By^* + C)\cdot S_D : \tag{8}$$

(8)-ից հետևում է, որ տեղի ունի հետևյալ պնդումը՝

Պնդում 3.2.3. *Եթե D-ն ℓ_*-տիրույթ է, իսկ $\ell(x, y) = Ax + By + C$ գծային բազմանդամ է, ապա $\iint\limits_D \ell(x, y)dxdy = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ ℓ ուղիղն անցնում է D տիրույթի կենտրոնով:*

Այժմ դիտարկենք միջարկման խնդիր Π_1-ով և ցանկացած $\mathsf{D}_3 = \{D_1, D_2, D_3\}$ ℓ_*-տիրույթներով:

Ապացուցվում է, որ (Π_1, D_3) միջարկման խնդիրը ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ճշգրիտ է D_1, D_2, D_3 տիրույթների կենտրոններով կետային միջարկումը՝

Թեորեմ 3.2.2. *(Π_1, D_3) միջարկման խնդիրը կլինի ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ D_1, D_2, D_3 տիրույթների կենտրոնները չեն գտնվում մի ուղղի վրա:*

Օգտագործելով հայտնի փաստը, որ եռանկյան կենտրոնը միջնագծերի հատման կետն է, *Թեորեմ 3.2.2*-ից ստանում ենք՝

Հետևանք 3.2.1. *Եթե ունենք հարթության վրա կամայական երեք եռանկյուն, ապա միջին արժեքներով միջարկման խնդիրն այդ եռանկյուններով ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ եռանկյունների միջնագծերի հատման կետերը չեն գտնվում մի ուղղի վրա:*

Վերադառնանք այժմ ապացուցված[10] թեորեմին՝

Թեորեմ 3.2.3. *Դիցուք ունենք չորս ուղիղներ, որոնք գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ և հատման արդյունքում առաջանում են $\mathbf{\Delta}_i$, $i = 1,2,3$ սահմանափակ տիրույթները: Այդ դեպքում $(\Pi_1, \mathcal{Д}_3)$ միջին արժեքներով միջարկման խնդիրը, որտեղ $\mathcal{Д}_3 = \{\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_2, \mathbf{\Delta}_3\}$, ճշգրիտ է:*

Այստեղ բերում ենք *Թեորեմ 3.2.3*-ի մի նոր ապացույց, որը հիմնված է *Թեորեմ 3.2.2*-ի վրա:

Դրա համար նախ ապացուցում ենք հետևյալ լեմման՝

Լեմմա 3.2.2. *Եթե* $p(x,y)=Ax+By+C$ *գծային բազմանդամ է,* Δ *-ն* (x_1,y_1), (x_2,y_2) *և* (x_3,y_3) *գագաթներով եռանկյուն է,* S_D *-ն՝ նրա մակերեսը, ապա*

$$\iint_{\Delta} p(x,y)dxdy = \frac{S_\Delta}{3}\left[p(M_1)+p(M_2)+p(M_3)\right],$$

որտեղ M_1, M_2, M_3 *կետերը* Δ *եռանկյան կողմերի միջնակետերն են:*

Վերջում երկչափ դեպքում տիրույթի կենտրոնի համար արված մեր բոլոր դատողությունները ընդհանրացվում են ցանկացած d չափանի տարածության համար:

Այս դեպքում դիտարկվող միջարկման խնդրի պարամետրերը ինտեգրալներ են d չափանի տարածության ℓ_*-տիրույթներով:

Դիցուք ունենք $\mathsf{D}_s=\{D_1,D_2,\ldots,D_s\}$ ℓ_*-տիրույթների բազմությունը R^d -ում:

Սահմանում 3.2.3. *Կասենք, որ* $\left(\Pi_n^d,\mathsf{D}_s\right)$ *միջարկման խնդիրը ճշգրիտ է, եթե ցանկացած* $\{c_1,c_2,\ldots,c_s\}$ *արժեքների բազմության համար գոյություն ունի միակ* $p\in\Pi_n^d$ *բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

$$\int_{D_k} p(\bar{x})d\bar{x}=c_k,\quad k=1,\ldots,s,$$

որտեղ $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathsf{R}^d$, $\quad d\bar{x}=dx_1\cdots dx_d$:

Սահմանում 3.2.4. R^d *-ում* D *տիրույթի կենտրոն կանվանենք*

$$x_1^*=\frac{\int_D x_1 d\bar{x}}{V_D},\quad \cdots,\quad x_d^*=\frac{\int_D x_d d\bar{x}}{V_D}$$

կոորդինատներ ունեցող կետը, որտեղ V_D *-ն* D *տիրույթի* d *-չափանի ծավալն է:*

Սահմանումից հետևում է, որ՝

$$\int_D (A_1x_1+\cdots+A_dx_d+A_{d+1})d\bar{x}=(A_1x_1^*+\cdots+A_dx_d^*+A_{d+1})\cdot V_D :$$

Այսինքն տեղի ունի հետևյալ պնդումը՝

Պնդում 3.2.5. *Եթե* D *-ն որևէ* ℓ_* *-տիրույթ է* R^d *-ում, իսկ* $h(\bar{x}):=A_1x_1+\cdots+A_dx_d+A_{d+1}$ *գծային բազմանդամ է, ապա* $\int_D h(\bar{x})d\bar{x}=0$ *այն և միայն այն դեպքում, երբ* h *հիպերհարթությունն անցնում է* D *տիրույթի կենտրոնով:*

Այժմ դիտարկենք միջարկման խնդիր Π_1^d-ով և ցանկացած $\mathsf{D}_{d+1}=\{D_1,\ldots,D_{d+1}\}$ ℓ_*-տիրույթներով:

Թեորեմ 3.2.2-ը ընդհանրացնելով կստանանք, որ $\left(\Pi_1^d,\mathsf{D}_{d+1}\right)$ միջարկման խնդիրը ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ճշգրիտ է $D_1,\ldots,D_{d+1}$ տիրույթների կենտրոններով կետային միջարկումը՝

Թեորեմ 3.2.4. $\left(\Pi_1^d,\mathsf{D}_{d+1}\right)$ *միջարկման խնդիրը կլինի ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ* $D_1,\ldots,D_{d+1}$ *տիրույթների կենտրոնները չեն գտնվում մի հիպերհարթության վրա:*

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- *Ապացուցված է մի քանի փոփոխականներով բազմանդամային միջարկման վերաբերյալ Գասքա-Մաեզթուի ընդհանրացված վարկածը երկրորդ աստիճանի բազմանդամների համար եռաչափ դեպքում:*
- *Եռաչափ դեպքում երկրորդ աստիճանի բազմանդամներով միջարկման համար ստացված է Չանգ-Յաոյի երկրաչափական բնութագրով հանգույցների բազմության մաքսիմալ հարթությունների քանակի ճշգրիտ գնահատական:*
- *Առաջին աստիճանի երկու փոփոխականով բազմանդամների համար ստացված է միջին արժեքներով միջարկման խնդրի ճշգրտության անհրաժեշտ և բավարար պայման Լեբեգի կամայական ոչ զրոյական վերջավոր չափով տիրույթների դեպքում, և այդ պայմանը ստուգված է ցանկացած b-տիրույթների համար:*

Վերջում իմ խորին երախտագիտությունն եմ հայտնում իմ գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտությունների դոկտոր Հ.Ա. Հակոբյանին:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅԻ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՊԱՐԱԿԱԾ ԱՇԽԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ

1. A. Apozyan, G. Avagyan and G. Ktryan, *On the Gasca-Maeztu conjecture in* R^3, East J. on Approx., v. 16, 1 (2010), p. 25-33.

2. G. A. Ktryan, *Bivariate Interpolation with Integrals,* - Proceedings of the Yerevan State Univercity, Yerevan, Armenia, 2 (2009), p. 26-31.

3. G. A. Ktryan, *On a conjecture on Lagrange interpolation in* R^3, Հայաստանի ԳԱԱ Զեկույցներ (Reports of the NAS of Armenia), v. 110, 1 (2010), p. 22-29.

РЕЗЮМЕ

Ктрян Гагик Азатович

О МНОГОМЕРНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ГИПОТЕЗЕ ГАСКА-МАЕЗТУ

В диссертации получены следующие основные результаты:

- *Доказана гипотеза Гаска–Маезту, относящейся к полиномиальной интерполяции с несколькими переменными, для полиномов второй степени в трехмерном случае;*
- *Получена точная нижняя оценка количества максимальных плоскостей множества с геометрической характеристикой Чанга-Яо для интерполяции с полиномами второй степени в трехмерном случае;*
- *Получено необходимое и достаточное условие корректности интерполяционной задачи со средними значениями для полиномов первой степени с двумя переменными в случае произвольных областей с конечными ненулевыми мерами Лебега, и это условие проверено для произвольных b-областей.*

Gagik A. Ktryan

ON MULTIVARIATE POLYNOMIAL INTERPOLATION AND GASCA-MAEZTU CONJECTURE