

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

САРГСЯН АРСЕН СУРИКОВИЧ

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВЫХ ВОЛН В
СОСТАВНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по
специальности 01.02.04–Механика деформируемого твердого тела

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент Джилавян С.А.

ЕРЕВАН 2019 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА I ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ СДВИГА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ.....	14
§1.1. Основные соотношения и уравнения стационарной антиплоской задачи электроупругости.....	14
§1.2. О распространении поверхностных сдвиговых волн в пьезоэлектрическом полупространстве.....	20
§1.3. Распространение сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом полупространстве при разных электроупругих условиях на граничной поверхности.....	27
ГЛАВА II СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СОСТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ.....	33
§2.1. Сдвиговые электроупругие колебания в составном пьезоэлектрическом пространстве.....	33
§2.2. Волны сдвига в пространстве при полном электроупругом контакте между пьезоэлектрическими полупространствами.....	42
§2.3. Сдвиговые волны в составном пьезоэлектрическом пространстве с тонким металлическим слоем.....	51
ГЛАВА III ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ СДВИГА НА КРАЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СОСТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.....	59
§3.1. Дифракция электроупругой плоской волны сдвига в составном пьезоэлектрическом пространстве.....	59

§3.2. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом составном пространстве с металлическим слоем.....	77
§3.3. Дифракция локализованной (поверхностной) волны сдвига на крае полубесконечной трещины в составной пьезоэлектрической среде.....	91
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	109
ЛИТЕРАТУРА.....	112

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных и актуальных разделов механики сплошных сред является электроупругость, которая с возрастающей интенсивностью развивается как область теории сопряженных физических полей в механике. Исследования закономерностей и особенностей распространения электроупругих возмущений в пьезоэлектрических средах при взаимодействии упругих и электрических полей, занимают ключевое место в современной динамической теории механики деформируемого твердого тела. Задачи о взаимодействии различных полей физического происхождения интересны и с точки зрения математической физики. Возросли требования современной науки и техники к построению физико–математических новых моделей точно отражающих основные закономерности и свойства деформационных процессов в твердых телах при физических полях. В связи со сложной картиной этого взаимодействия вопросы распространения и дифракции электроупругих волн в неоднородных, составных средах, несомненно, представляют научный интерес и относятся к числу наиболее актуальных проблем динамики контактных взаимовлияний твердых, упругих конструкций.

Область применения пьезоэлектрических материалов расширяется с развитием инженерной техники и следовательно необходимо дальнейшее углубленное изучение процесса деформирования твердых тел обладающих пьезоэффектом. Вопросам физики пьезокристаллов и их практическим применениям посвящены ряд научных статей и монографий [12–14,18,33,35,43–45,49]. Особое место занимает проблема построения моделей упругих сред с неоднородностями, концентраторами электроупругих характеристик, при этом анализируя физико–математическую корректность этих моделей. При исследовании колебательных и волновых процессов в твердых деформируемых средах, физико–механические свойства и, особенно, неоднородность среды – слоистость, наличие в среде

локализованных или распределенных концентраторов напряжений или других компонентов электроупругого поля, существенно влияют на волновое поле. Конструктивная неоднородность среды, в том числе наличие в среде свободных от напряжений поверхностей, является одной из главных причин изменения картины классической теории волн [7,9,17,19,32,48,88]. При дифракции волн неоднородность среды приводит к существенной перестройке дифрагированных волновых полей. Дифракция на неоднородностях может стать причиной распространения поверхностных волн – локализованных у поверхности раздела. Поверхностные волны, в том числе сдвиговые электроупругие локализованные волны, имеют важное значение в разных областях физики твердого тела и механики сплошной среды [12,13,23,33,35,49,63,66,69]. Эти локализованные, поверхностные волны обладают относительно малой скоростью распространения, сравнительно легко доступны для внешних физических и силовых воздействий, в пьезоэлектрических средах возможно возбуждение поверхностных волн с малыми потерями. Из сказанного следует необходимость проведения интенсивных исследований в области распространения электроупругих волн в неоднородных средах.

Распространение поверхностных волн сдвига в неоднородных, твердых пьезоэлектриках разных кристаллографических классов и симметрии, представляющих материальные системы сложной, слоистой структуры исследованы в работах [2-6,11-12,15-17,34,36,37,44,49,60-64,74,77,94,97], при этом рассматриваются различные граничные и контактные условия на разделительных поверхностях сред, предварительное напряженное состояние. На основе дифференциальных уравнений движения упругого анизотропного тела и электростатики, а также структур пьезомодулей и упругих коэффициентов анизотропного тела изучена возможность реализации антиплоской деформации в средах из пьезоэлектрических материалов [1,3,12,49].

Рассмотрены задачи электроупругости в сложной постановке, когда принимается наличие внешнего электрического поля, при исследовании распространения электроупругих волн учитываются характерные свойства сред – дисперсию, вязкость, нелинейность [10,13,67,68,88,89]. Рассмотрены статические и нестационарные задачи электроупругости в антиплоской постановке, в некоторых случаях и в плоской, для биматериальных, разнородных слоистых пьезосред с разными электроупругими контактными условиями при наличии трещин и электропроводящих включений [69,72,73,80,81,86,91,96]

Результаты исследований волновых процессов в пьезоэлектриках актуальны также в прикладной механике, при разработке методов анализа напряженного состояния, колебательного процесса конструкционных элементов. Проблемы современной акустоэлектроники, неразрушающего контроля связаны с возбуждением и приемом волн в твердых телах, взаимодействием волн с физическими полями, с данными о распространении электроупругих волн [14,18,20]. Практические исследования пьезоэлектриков обнаружило, что пьезорезонаторы могут эффективно применяться как электрические фильтры. С помощью некоторых пьезоэлектрических кристаллов очень часто решают проблемы в задачах стабилизации и контролирования частот в радиотехнических устройствах. Области применения пьезокристаллов – пьезотрансформаторы, излучатели и приемники звука в гидроакустике, элементы зажигания, различные фильтры и измерительные устройства. Пьезокристаллы применяются при создании ультразвуковых линий задержки сигналов, применяются как пьезоп приводы в конструкциях микроволновых двигателей и волновых гироскопов. Электроупругие поверхностные волны имеют фундаментальное значение в ультразвуковой и микроэлектронной технике, при возбуждении ультразвука с поверхности пьезоэлектрика. Сопряженные электроупругие объемные и поверхностные волны имеют важное значение в

устройствах акустоэлектроники, в дефектоскопии, в инженерной медицине. Возбуждаемые пьезоэлектрическими преобразователями акустические волны используются при разработке различных радиотехнических устройств.

Задачам дифракции и распространения электроупругих сдвиговых плоских и поверхностных волн посвящены работы [8, 10, 28–33, 35–36, 38, 39, 46, 56, 64, 67, 76]. Исследованы волновые процессы в изотропных и пьезоэлектрических средах, содержащих полубесконечные трещины, включения, тонкие металлические слои (электроды). Принимается метод интегрального преобразования Фурье используя метод разработанный в [24], методы факторизации и теории функций комплексного переменного. Задачи дифракции волн сдвига сводятся к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси [22, 59]. Разработан новый метод определения асимптотических формул для компонент волнового поля в дальней зоне [8, 9, 25, 26, 24, 35, 36]. Для решения задач необходимо пользоваться методами динамической теории упругости, методом собственных колебаний в теории дифракции, методами математической физики [10, 12, 19–21, 46–50, 55, 56, 88]. Исследования задач дифракции и распространения электроупругих волн в составных средах с конструктивной неоднородностью имеют теоретическую и практическую значимость. Возникает идея о возможности усиления поверхностных электро-акустических волн в пьезоэлектрической слоистой структуре.

Диссертационная работа посвящена исследованию сопряженных физических полей, задач распространения и дифракции сдвиговых электроупругих волн. В работе рассмотрены задачи дифракции плоских, поверхностных волн сдвига на полубесконечной трещине в составном пьезоэлектрическом пространстве, исследованы задачи распространения электроупругих сдвиговых волн под действием линейного источника стационарных, установившихся колебаний.

В диссертационной работе рассматриваются задачи определения сдвигового волнового поля при взаимодействии двух пьезоэлектрических полупространств. Взаимосвязь разных физических полей – электрических и механических, взаимное влияние полупространств при электроупругом контакте и наличие полубесконечной трещины между ними существенно меняют дифрагированную картину электроупругих волн. Актуальность этих исследований в области сопряженных полей продиктована необходимостью развития теории распространения волн в неоднородных средах и разработки аналитических методов решения волновых задач новой постановки. В диссертации рассмотрены возникающие сдвиговые волны, когда действует линейный источник установившихся колебаний, или же происходит дифракция сдвиговой электроупругой волны. Выявлены основные характеристические свойства дифракции и распространения сдвиговых электроупругих волн. Задачи дифракции электроупругих волн сдвига на крае полубесконечной трещины сводятся к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси. Исследуемая в диссертационной работе проблема связана со сложными задачами контактного взаимовлияния двух упругих, обладающих пьезоэффектом полупространств. Основные результаты диссертации отражены в работах [40-42,51-54].

Цель диссертационной работы исследовать основные закономерности колебания и распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрических средах с разными физико-механическими свойствами. Ставится задача о выявлении особенностей при дифракции электроупругих сдвиговых волн на полубесконечной трещине между пьезоэлектрическими полупространствами, анализируя волновые и колебательные процессы в пьезоэлектрической составной среде. Цель заключается в изучении взаимовлияния физико-механических полей, в разработке математических методов и подходов для определения характеристических величин электроупругого волнового поля.

Исследование волнового процесса усложняется как анизотропией материала пьезоэлектрика, так и рядом новых свойств, проявляющихся в результате взаимодействия физических полей разной природы. Представлены результаты исследований математического моделирования электроупругих волновых процессов в неоднородных сплошных средах. Показано, что наличие полубесконечной трещины является причиной появления поверхностных электроупругих волн в составном пьезоэлектрическом пространстве. Доказано, что если пьезоэлектрические полупространства скреплены между собой, то при определенных значениях электромеханических параметров пьезосред могут распространяться локализованные у контактной, разделительной плоскости электроупругие волны сдвига. Получено, что дифракция плоской электроупругой волны сдвига на полубесконечной трещине может привести к распространению двух локализованных волн. В задачах дифракции электроупругой волны и в задаче источника механических возмущений показано, что вместе с дифрагированными объемными, цилиндрическими волнами, появляются обусловленные пьезоэффектом и наличием плоскости раздела сред волны, распространяющиеся от разделительной поверхности вглубь пьезоэлектрика, и имеющие неволновой характер на контактной плоскости. Полученные с помощью аналитических, строгих методов решения краевых задач – задач дифракции, могут служить надежной основой для развития численных и приближенных методов расчета сложных динамических задач деформируемого твердого тела. Результаты и рассмотренные постановки задач можно использовать при изучении прикладных задач рассеяния и дифракции волн для ограниченных и неограниченных тел, при рассмотрении многих других краевых задач математической физики и теории электроупругости, имеющих как математический, так и физико–технический интерес, при решении задач акустики анизотропных упругих сред. Практическая значимость диссертации основана на возрастающем применении составных

структур, так как повысились возможности технологии создания материалов с конструктивной неоднородностью. Результаты полученные в работе могут быть полезными при изучении вопросов излучателей акустических волн, резонансных элементов, открытых резонаторов, при создании измерительных приборов и дифракционных преобразователей.

Волны являются как физическими, так и математическими величинами, обладающими определенными свойствами и подчиняющимися определенным правилам. С помощью математических методов, принципов механики сплошных сред достигается лучшее понимание физической сущности волновых явлений. В диссертационной работе для исследования волновых процессов приняты известные модели сплошных сред, которые обоснованы с точки зрения математической физики. Полученные результаты сравнены с уже известными теоретическими и прикладными результатами в этой области электроупругости. Новая постановка волновых задач для неоднородных сред, строгие решения будут полезными при решении других задач механики сплошных сред о дифракции упругих волн, при изучении закономерностей и выявлении особенностей акустического и пьезоэлектрического эффектов в электроупругих средах. Достоверность полученных результатов основана на корректном применении строгого аппарата математического анализа и математической физики.

Некоторые результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на международной научной конференции „Актуальные проблемы механики сплошной среды,, – Цахкадзор, Армения, 2017г. Рассмотренные в диссертационной работе задачи, полученные результаты и диссертация в целом обсуждались на научных семинарах кафедры механики Ереванского госуниверситета, и на научных семинарах Института механики НАН Армении.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. В первой главе приведены основные соотношения и уравнения

стационарной антиплоской задачи электроупругости при квазистатическом приближении для пьезоэлектрической среды класса $6mm$ гексагональной симметрии, приведены основные сведения в области теории распространяющихся сдвиговых электроупругих волн. Поставлена задача изучения волн сдвига, ограничиваясь линейным приближением. Приведены электромеханические соотношения твердых диэлектрических сред с пьезоэффектом, обуславливающим связь между механическими деформациями и внутренним электрическим полем. Рассмотрены задачи существования сдвиговых поверхностных волн в пьезоэлектрическом полупространстве. На основе исследования известных характерных, эталонных задач, показано влияние связанности механической деформации и внутреннего электрического поля на волновые процессы электроупругого деформирования – в пьезоэлектрическом полупространстве могут распространяться поверхностные волны, локализованные у граничной поверхности. Существование поверхностной электроупругой сдвиговой волны в составном (неоднородном) упругом пространстве, у границы раздела двух диэлектрических упругих полупространств, при безакустическом контакте между ними, обусловлено пьезоэффектом в одном из полупространств. Решены задачи о распространении в пьезоэлектрическом полупространстве плоской сдвиговой электроупругой волны из бесконечности, при разных электроупругих условиях на граничной (контактной) плоскости. Показано, что в этих задачах отражения, несмотря на наличие пьезоэффекта, локализованные (поверхностные) волны не возбуждаются.

Во второй главе рассмотрены задачи распространения сдвиговых волн в составном пьезоэлектрическом пространстве, при взаимодействии двух полупространств–пьезоэлектриков класса $6mm$ гексагональной симметрии, когда в одном из полупространств действует линейный источник установившихся колебаний. Неоднородное пространство совершает установившиеся колебания.

Исследование электроупругого волнового процесса в составном пространстве выявило особые свойства присущие взаимосвязанным средам и полям. В пространстве появляются объемные волны распространяющиеся от контактной поверхности и имеющие неволновой характер на контактной поверхности. Рассматриваются задачи распространения волн сдвига в составном пространстве, когда между пьезоэлектрическими полупространствами не осуществляется акустический контакт, в другой задаче между ними имеется полный электроупругий контакт, в следующей – на разделительной плоскости контактирующих полупространств склеен тонкий металлический слой. Существование сдвиговых поверхностных волн в полупространствах обусловлено пьезоэффектом, и наличие источника механических колебаний приводит к распространению этих электроупругих волн. При удалении в глубь полупространств поверхностные волны затухают. Сдвиговые поверхностные волны локализованные у плоскости полного электромеханического контакта распространяются при некоторых определенных значениях электроупругих параметров.

В третьей главе рассмотрены задачи дифракции плоской электроупругой волны сдвига на крае полубесконечной трещины в составном пространстве из двух пьезоэлектрических полупространств. Считается, что между полупространствами в плоскости контакта имеется полубесконечная трещина и здесь пьезоэлектрики взаимодействуют без акустического контакта, по остальной части контакта полупространства сцеплены между собой. Рассмотрена задача дифракции плоской волны сдвига когда на границе раздела полупространств склеен электропроводящий металлический тонкий слой (электрод). Дифрагируется затухающая сдвиговая объемная волна и возбуждаются, обусловленные пьезоэффектом и дифракцией – наличием полубесконечной трещины, две поверхностные волны. Для распространения этих локализованных сдвиговых волн

получены условия для электроупругих параметров материалов полупространстве. В этой главе рассмотрены также задачи дифракции локализованных (поверхностных) волн сдвига на полубесконечной трещине между пьезоэлектрическими полупространствами. Наличие полубесконечной трещины является причиной возбуждения электроупругих поверхностных волн. Выявлены некоторые особенности волнового поля проявляющиеся в результате взаимодействия физических полей. Получено распределение дифрагированного волнового поля в полупространствах.

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ СДВИГА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

§ 1.1. Основные соотношения и уравнения стационарной антиплоской задачи электроупругости

В этой главе приведены основные сведения в области теории распространяющихся сдвиговых электроупругих волн, рассмотрены задачи существования поверхностных сдвиговых электроупругих волн в пьезоэлектрическом полупространстве, а также задачи распространения из бесконечности плоских электроупругих волн сдвига в полупространстве. Рассматривается пьезоэлектрическая среда класса 6mm гексагональной симметрии. Принимается прямоугольная система координат $Oxyz$, и ось Oz совпадает с главной осью кристалла. Соотношения, связывающие компоненты тензора деформации упругой среды с компонентами вектора перемещений в линейном приближении имеют вид [48]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

В данной системе координат уравнения движения свободного от объемных сил упругого тела представляются следующими дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{1.1.2}$$

здесь t – время, ρ –плотность среды. Картина взаимодействия электрических и механических явлений сложна, и ее изучение тесно связано с проблемами математического моделирования и разработки методов исследования состояния пьезоэлектрических сред. В основу линейной теории электроупругости ставятся уравнения движения сплошной среды в компонентах тензора напряжений (1.1.2). При постановке задачи движения пьезоэлектрической среды объемные пондеромоторные силы, возникающие в результате взаимодействия физических полей, индуцированных токов и поляризации материала среды, в уравнениях (1.1.2) не учитываются.

В основу рассмотренных в диссертационной работе задач определения электроупругого волнового поля в пьезоэлектрической среде, принимаются уравнения динамической задачи теории упругости и уравнения электродинамики в квазистатическом приближении. К настоящему времени достигнут значительный прогресс в изучении эффектов взаимодействия механических (акустических) полей с электромагнитными полями. В квазистатическом приближении, которое соответствует медленно изменяющимся во времени полям, из уравнений Максвелла получим уравнения относительно компонент вектора электрического поля E_x, E_y, E_z и компонент вектора электрической индукции D_x, D_y, D_z [12,45]

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0, \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0.$$

При квазистатическом приближении не учитывается конечность скорости распространения электромагнитных возмущений, которая предполагается настолько большей (бесконечной), что состояние рассматриваемой системы не успевает заметно измениться.

Первое равенство (1.1.3) тождественно удовлетворяется при введении электрического потенциала $\Phi(x, y, z, t)$

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (1.1.4)$$

Электрическое поле электроупругой волны зависит от времени, но связано с потенциалом статическим выражением. При квазистатическом приближении дифференциальные уравнения определяющие характеристические функции магнитного поля, не связаны с уравнениями распространения электроупругих волн и образуют отдельную систему уравнений.

Для некоторых упругих материалов их внутренняя структура не позволяет описать процессы деформирования соотношениями закона Гука. Эти упругие диэлектрики – пьезоэлектрические материалы, обладают внутренней поляризацией, которая изменяется под действием механических напряжений, при этом они, конечно, деформируются в электрическом поле. Из термодинамических соображений известны материальные линейные соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций и вектора электрического поля. Известны подобные соотношения и между компонентами вектора электрической индукции и компонентами тензора деформаций и вектора электрического поля. Для всех кристаллографических классов структуру

коэффициентов – компонентов тензоров второго, третьего и четвертого ранга, входящих в эти соотношения можно найти во многих работах.

С теоретической точки зрения для пьезосред особо важна постановка задач электроупругости. Математические трудности и методы решения краевых задач электроупругости для твердых тел произвольной геометрической формы и поляризации приводят к определению отдельных классов задач в зависимости от характера граничных условий и особенностей геометрических элементов. В анизотропных твердых телах, т.е. в кристаллах, упругие и электроупругие волны носят гораздо более сложный характер, чем в изотропных. Для некоторых классов кристаллов ромбической, тетрагональной, кубической и гексагональной симметрии, задача распространения электроупругих волн в пьезоэлектрических кристаллах разделяются на плоские и антиплоские задачи. Доказаны необходимые и достаточные условия для существования антиплоской задачи. В диссертационной работе рассматриваются задачи распространения и дифракции электроупругих волн сдвига в пьезоэлектрической среде класса 6mm гексагональной симметрии, для которой можно рассматривать антиплоскую задачу. Следовательно, для пьезоэлектрической среды этого класса можно ставить задачи изучения волн сдвига, для таких деформаций объемное расширение имеет нулевое значение

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (1.1.5)$$

Определение поля в пьезоэлектрическом теле производится одновременно с определением его деформации и представляет собой совместную задачу электростатики и теории упругости. Приведем основные электромеханические соотношения и уравнения линейной теории деформирования твердых диэлектрических сред с пьезоэффектом, обуславливающим связь между механическими деформациями и внутренним электрическим полем. Таким

образом, при антиплоской постановке задачи, для упругих перемещений $u_x = 0, u_y = 0, u_z = u_z(x, y, t)$, и материальные соотношения, связывающие напряжения и компоненты вектора электрической индукции с перемещением $u_z(x, y, t)$ и потенциалом электрического поля $\Phi(x, y, t)$, имеют вид [12,20,45]

$$\sigma_{yz}(x, y, t) = c_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1.1.6)$$

$$\sigma_{xz}(x, y, t) = c_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$D_x(x, y, t) = e_{15} \frac{\partial u_z}{\partial x} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (1.1.7)$$

$$D_y(x, y, t) = e_{15} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

где c_{44} —упругая постоянная, e_{15} —пьезоэлектрическая постоянная (пьезомодуль), ε_{11} —диэлектрическая постоянная (проницаемость). Экспериментально установлено, что пьезоэлектрический коэффициент имеет одинаковое значение для прямого и обратного пьезоэффектов. Для исследования процесса распространения сдвиговых электроупругих волн получим из (1.1.2),(1.1.3) дифференциальные уравнения относительно перемещения $u_z(x, y, t)$ и квазистатического электрического потенциала $\Phi(x, y, t)$

$$c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + e_{15} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (1.1.8)$$

$$e_{15} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) - \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Распространяющаяся волна – это возмущение, движущееся по пространству с конечной, и не обязательно постоянной, скоростью, и существование этих волн в физической системе принимается как некоторый вид неустойчивости эффектов,

которые больше, чем их причина. Распространение волны возможно только в материальной среде. При антиплоской постановке задачи смещение частиц перпендикулярны направлению распространения волны, а деформации являются деформациями сдвига. Очевидно, что система уравнений (1.1.8) сводится к виду

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (1.1.9)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (1.1.10)$$

$$c = \sqrt{\frac{c_{44}(1 + \chi)}{\rho}} \quad - \text{ скорость распространения сдвиговой электроупругой}$$

объемной волны, $\chi = \frac{e_{15}^2}{c_{44}\epsilon_{11}}$ – коэффициент электромеханической связи

пьезокристалла. В анизотропных твердых телах (кристаллах) сдвиговые волны распространяются только в определенных направлениях, причем фазовая скорость зависит от направления.

Если пьезоэлектрическое тело граничит с некоторой упругой или неупругой диэлектрической средой, то наряду с уравнениями электроупругости для пьезоэлектрической среды необходимо рассматривать и уравнения для определения перемещений и электрического потенциала для диэлектрической среды обладающей или не обладающей пьезоэффектом. Для полного описания волновых процессов в пьезоэлектрике, необходимо ввести электромеханические условия на контактной, граничной поверхности рассматриваемой среды. Изучается взаимодействие физических полей и сред, определяется фронт волны. Дальнейшее распространение волны в среде определяется принципами Гюйгенса и суперпозиции.

Помимо объемных электроупругих волн, в диэлектрических твердых телах обладающих пьезоэффектом могут распространяться особые волны—

поверхностные, локализованные у поверхности и не проникающие в глубь пьезоэлектрика. Скорость распространения этих волн несколько меньше скорости поперечных объемных волн. Для акустоэлектрических поверхностных волн в пьезоэлектриках характерна относительная простота возбуждения и приема, а также возможность управления волной по пути ее распространения.

§ 1.2. О распространении поверхностных сдвиговых волн в пьезоэлектрическом полупространстве

Как уже отметили, особым видом электроупругих волн являются волны, распространяющиеся вблизи граничной (контактной с другой средой), поверхности пьезоэлектрического полупространства и не проникающие в глубь полупространства. Рассматриваемая пьезоэлектрическая среда – пьезоэлектрик класса $6mm$ гексагональной симметрии, отнесена к декартовой системе координат $Oxyz$, занимает полупространство $y > 0$ ($-\infty < x < \infty, -\infty < z < \infty$), координатная ось Oz совпадает с главной осью пьезокристалла. Принимается, что тонкий металлический слой склеен к граничной плоскости полупространства $y = 0$, следовательно, здесь электрический потенциал $\Phi(x, y, t) = 0$ и металлизированная поверхность полупространства представляется как идеально проводящий тонкий слой – электрод, из-за тонкости жесткость слоя пренебрегается. Предположим граничная плоскость $y = 0$ свободна от напряжений, и пусть среда находится в условиях антиплоской деформации, т.е. рассматривается задача о сдвиговых

возмущениях. Для определения электроупругого волнового поля в пьезоэлектрическом полупространстве $y > 0$ имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

и граничные условия при $y = 0$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= 0, \\ \sigma_{yz}(x, y, t) &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Для решения задачи распространения поверхностных волн [12], естественно предположить, что амплитуда искомой поверхностной электроупругой волны при удалении в глубь пьезоэлектрического полупространства ($y \rightarrow \infty$) стремится к нулю. Требуя, чтобы при $y \rightarrow \infty$ амплитуды функций перемещения и электрического потенциала $u_z(x, y, t)$, $\Phi(x, y, t)$ убывали экспоненциально, получим задачу о собственных колебаниях полубесконечной пьезоэлектрической среды. Принимаем, что поверхностная волна распространяется по координатной оси Ox со скоростью ω/σ , где σ пока неопределенное волновое число $\sigma \in \mathbb{R}$, а ω – частота колебаний. Поверхностную волну представляем в виде:

$$\begin{aligned} u_z(x, y, t) &= w(y)e^{i(\sigma x - \omega t)}, \\ \Phi(x, y, t) &= \Phi(y)e^{i(\sigma x - \omega t)}. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Для определения функций $w(y)$, $\Phi(y)$ из (1.2.1) получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dy^2} - (\sigma^2 - k^2)w &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi}{dy^2} - \sigma^2 \Phi + k^2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w &= 0, \end{aligned} \quad y > 0 \quad (1.2.4)$$

здесь $k = \omega/c$ – волновое число, $c < \infty$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой объемной волны в пьезоэлектрике данной симметрии.

Для искомым функций амплитуд $w(y), \Phi(y)$ из (1.2.2) получим условия на граничной плоскости

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= 0, \\ c_{44} \frac{dw}{dy} + e_{15} \frac{d\Phi}{dy} &= 0. \end{aligned} \quad \text{при } y = 0 \quad (1.2.5)$$

Очевидно, решение системы (1.2.4), удовлетворяющее условиям (1.2.5) и экспоненциально убывающее при $y \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} w(y) &= Ae^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}y}, \quad A = \text{const} \\ \Phi(y) &= A \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}y} - e^{-|\sigma|y}). \end{aligned} \quad y > 0 \quad (1.2.6)$$

Рассматривая задачу о существовании поверхностной волны, принимается, что $\sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$, т.е. для волнового числа получим условие $|\sigma| > k$.

Для определения волнового числа σ , получим из условий (1.2.5) известное характеристическое уравнение [12,49]

$$1 + \chi - \frac{\chi|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k^2}} = 0, \quad (1.2.7)$$

где $\chi = \frac{e_{15}^2}{c_{44}\varepsilon_{11}}$ принятый коэффициент электромеханической связи.

Характеристическое уравнение (1.2.7) имеет только решения $\sigma = \pm\sigma_n$, где

$$\sigma_n = k \frac{1 + \chi}{\sqrt{1 + 2\chi}} > k > 0, \quad (1.2.8)$$

Получили хорошо известные сдвиговые поверхностные электроупругие волны Блюстейна–Гуляева в полупространстве $y \geq 0$

$$\begin{aligned} u_z(x, y, t) &= A e^{-\sqrt{\sigma_n^2 - k^2} y} e^{i(\pm \sigma_n x - \omega t)}, \\ \Phi(x, y, t) &= A \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (e^{-\sqrt{\sigma_n^2 - k^2} y} - e^{-\sigma_n y}) e^{i(\pm \sigma_n x - \omega t)}, \end{aligned} \quad y \geq 0 \quad (1.2.9)$$

с волновым числом σ_n и со скоростью меньшей скорости распространения электроупругой объемной волны сдвига в пьезоэлектрике $\omega/\sigma_n < c$. Принимая $+\sigma_n$ – поверхностная волна распространяется в сторону $x = +\infty$, а в случае $-\sigma_n$ от $x = +\infty$ в сторону $x = -\infty$.

Здесь, несомненно, следует отметить общеизвестный научный факт, что в упругом однородном полупространстве (без пьезоэффекта) поверхностные сдвиговые волны не распространяются как при свободной от напряжений граничной плоскости, так и при заземленной.

Если рассматривать безграничную пьезосреду, т.е. пьезоэлектрик данного класса, занимающий все пространство, с металлическим, заземленным, идеально проводящим тонким слоем в плоскости $y = 0$, получим локализованную (поверхностную) у плоскости $y = 0$ сдвиговую волну, амплитуда которой стремится к нулю при $|y| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} u_z(x, y, t) &= A e^{-\sqrt{\sigma_n^2 - k^2} |y|} e^{i(\pm \sigma_n x - \omega t)}, \quad A = const \\ \Phi(x, y, t) &= A \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (e^{-\sqrt{\sigma_n^2 - k^2} |y|} - e^{-\sigma_n |y|}) e^{i(\pm \sigma_n x - \omega t)}, \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

т.е. в таком пьезоэлектрическом пространстве может распространяться поверхностная волна, при этом волновое число σ_n решение характеристического уравнения (1.2.7), и имеет вид (1.2.8), а решение (1.2.10), пренебрегая жесткостью слоя, удовлетворяет условиям на плоскости $y = 0$

$$\begin{aligned}\Phi(x, +0, t) &= 0, & u_z(x, +0, t) &= u_z(x, -0, t), \\ \Phi(x, -0, t) &= 0, & \sigma_{yz}(x, +0, t) &= \sigma_{yz}(x, -0, t)\end{aligned}$$

Рассмотрим еще одну задачу, когда пьезоэлектрическое полупространство $y > 0$, $(-\infty < x < \infty, -\infty < z < \infty)$ – пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии, граничит без акустического контакта с упругим диэлектрическим, имеющим диэлектрическую проницаемость ε_0 и не обладающим пьезоэффектом, полупространством $y < 0$, $(-\infty < x < \infty, -\infty < z < \infty)$. Граничная плоскость пьезоэлектрической среды $y = 0$ свободна от напряжений $\sigma_{yz}(x, 0, t) = 0$. Можно считать, что пространство пьезоэлектрик-диэлектрик имеет бесконечную трещину (в математическом смысле) в плоскости $y = 0$. Условия непрерывности при $y = 0$ электрических потенциалов и индукций $\Phi(x, y, t)$, $D_y(x, y, t)$ и $\Phi_1(x, y, t)$, $D_{1y}(x, y, t)$ соответственно для полупространств $y > 0$ и $y < 0$, имеют вид

$$\Phi(x, 0, t) = \Phi_1(x, 0, t), \quad D_y(x, 0, t) = D_{1y}(x, 0, t).$$

Ставится задача о распространении поверхностной–локализованной y свободной от напряжений граничной контактной поверхности $y = 0$, электроупругой волны сдвига в пьезоэлектрическом полупространстве. По постановке задачи между пьезоэлектрическим и упругим диэлектрическим полупространствами не осуществляется механический контакт, только имеет место непрерывность электрических характеристик, следовательно вместе с уравнениями для полупространства $y > 0$ (1.2.1), для диэлектрического полупространства $y < 0$ рассмотрим только уравнение относительно электрического потенциала

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0. \quad y < 0 \quad (1.2.11)$$

Условия указанного выше электромеханического контакта принимают вид

$$\begin{aligned}
 c_{44} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 0, \\
 \Phi(x, y, t) &= \Phi_1(x, y, t), \quad \text{при } y = 0 \\
 e_{15} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Искомая поверхностная электроупругая волна представляется в виде [12,39]

$$\begin{aligned}
 u_z(x, y, t) &= w(y)e^{i(\sigma x - \omega t)}, \\
 \Phi(x, y, t) &= \Phi(y)e^{i(\sigma x - \omega t)}, \\
 \Phi_1(x, y, t) &= \Phi_1(y)e^{i(\sigma x - \omega t)}.
 \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

Для определения амплитудных характеристик электроупругой волны из (1.2.12) получим следующие условия на граничной плоскости $y = 0$

$$\begin{aligned}
 c_{44} \frac{dw}{dy} + e_{15} \frac{d\Phi}{dy} &= 0, \\
 \Phi(0) &= \Phi_1(0), \\
 e_{15} \frac{dw}{dy} - \varepsilon_{11} \frac{d\Phi}{dy} &= -\varepsilon_0 \frac{d\Phi_1}{dy}.
 \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Решение поставленной задачи (1.2.1), (1.2.11), (1.2.12), представляющее локализованную у поверхности $y = 0$ электроупругую поверхностную волну, должно удовлетворять условиям $w \rightarrow 0$, $\Phi \rightarrow 0$, при $y \rightarrow \infty$ и $\Phi_1 \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$. Следовательно амплитуды составляющих поверхностной волны (1.2.13) принимают вид

$$\begin{aligned}
 w(y) &= Ae^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}y}, \quad y > 0 \\
 \Phi(y) &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A(e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}y} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}} e^{-|\sigma|y}), \quad y > 0
 \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

$$\Phi_1(y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11} + \varepsilon_0} A e^{|\sigma|y}, \quad y < 0$$

здесь $A = const$ и по условиям принимается $\sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$. Для определения волнового числа получается характеристическое уравнение

$$(1 + \chi)\sqrt{\sigma^2 - k^2} - \chi \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}} |\sigma| = 0. \quad (1.2.16)$$

Уравнение (1.2.16) имеет только решения $\sigma = \pm \sigma_{n1}$

$$\sigma_{n1} = \sigma_n \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})\sqrt{1 + 2\chi}}{\sqrt{(1 + \chi)^2(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})^2 - \varepsilon_0^2 \chi^2}}. \quad (1.2.17)$$

σ_{n1} и σ_n единственные положительные корни уравнений (1.2.16) и (1.2.7), соответственно, при этом очевидно, что $\sigma_n > \sigma_{n1} > k$, следовательно, для скоростей распространения соответствующих волн получим

$$\omega/\sigma_n < \omega/\sigma_{n1} < c. \quad (1.2.18)$$

Отметим, что, как и следовало ожидать, принимая $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$, получим уже рассмотренное решение (1.2.8), (1.2.9) с характеристическим уравнением (1.2.7).

Таким образом, в пьезоэлектрическом полупространстве существуют, т.е. могут возбуждаться поверхностные электроупругие волны, с волновым числом σ_{n1} , и скоростью распространения ω/σ_{n1} , когда пьезоэлектрик без акустического контакта граничит с упругим диэлектрическим полупространством без пьезоэффекта. Такие волны (1.2.15) типа поверхностных волн Блюстейна–Гуляева представляется в виде

$$\begin{aligned} u_z(x, y, t) &= A e^{-\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k^2}y} e^{i(\pm \sigma_{n1}x - \omega t)}, \quad A = const \\ \Phi(x, y, t) &= A \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left(e^{-\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k^2}y} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}} e^{-|\sigma_{n1}|y} \right) e^{i(\pm \sigma_{n1}x - \omega t)}. \end{aligned} \quad y > 0 \quad (1.2.19)$$

В упругом диэлектрике электрический потенциал примет вид

$$\Phi_1(x, y, t) = A \frac{e_{15}}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}} e^{|\sigma_{n1}|y} e^{i(\pm\sigma_{n1}x - \omega t)}. \quad y < 0 \quad (1.2.20)$$

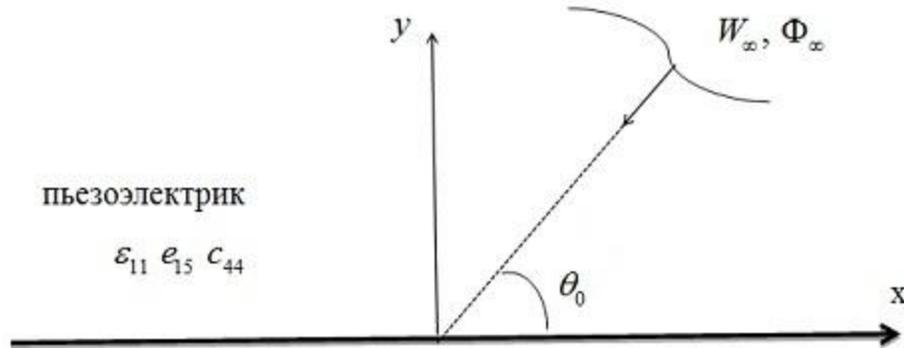
Локализованные у контактной поверхности волны (1.2.19), распространяются от $x = -\infty$ в сторону $x = +\infty$, или от $x = +\infty$ в сторону $x = -\infty$ при значениях $+\sigma_{n1}$ или $-\sigma_{n1}$, соответственно.

Существование поверхностной электроупругой сдвиговой волны в составном (неоднородном) упругом пространстве, у границы раздела двух диэлектрических полупространств, при безакустическом контакте между ними, обусловлено пьезоэффектом в одном из полупространств. Распространение волн типа Гуляева–Блюстейна в пьезоэлектрическом полупространстве обусловлено наличием в рассматриваемой среде взаимодействия механических (акустических) полей с электрическими полями. Этой связанностью физических полей – пьезоэффектом, обусловлены распространения поверхностных (локализованных) волн со смещениями частиц в направлении симметрии кристалла.

§ 1.3. Распространение сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом полупространстве при разных электроупругих условиях на граничной поверхности

Рассмотрим задачи распространения плоской волны сдвига в электроупругой среде обладающей пьезоэффектом. Принимаем, что пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии занимает полупространство $y > 0$. В этой упругой среде из бесконечности под углом θ_0 к граничной плоскости $y = 0$

распространяется электроупругая сдвиговая плоская волна с частотой ω , с неограниченным в пространстве плоским волновым фронтом (Фиг.1)



Фиг.1

$$\begin{aligned} u_\infty(x, y, t) &= w_\infty(x, y)e^{-i\omega t}, \\ \Phi_\infty(x, y, t) &= \Phi_\infty(x, y)e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

где в падающей сдвиговой плоской волне (возмущение в ней зависит лишь от расстояния, отсчитываемого вдоль некоторого фиксированного направления, и времени) для амплитуд упругого перемещения и электрического потенциала

принимаяем ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} w_\infty(x, y) &= e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0}, \\ \Phi_\infty(x, y) &= \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0}. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Ставится задача определения электроупругого волнового поля в пьезоэлектрическом полупространстве с диэлектрическим, пьезоэлектрическим и упругим параметрами $\epsilon_{11}, e_{15}, c_{44}$, при некоторых условиях на граничной плоскости полупространства. Представляя функции $u_z(x, y, t)$, $\Phi(x, y, t)$, характеризующие волновое электроупругое поле в полупространстве, в виде

$$\begin{aligned} u_z(x, y, t) &= w(x, y)e^{-i\omega t}, \\ \Phi(x, y, t) &= \Phi(x, y)e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

решаются следующие дифференциальные уравнения относительно амплитуд перемещения и потенциала электрического поля $w(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ (1.1.9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 w &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k^2 w &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

где $k = \omega/c$ – волновое число. Очевидно, что при падении из бесконечности плоской волны вида (1.3.2), решение данной задачи отражения волн представляется в виде

$$\begin{aligned} w(x, y) &= (e^{-iky \sin \theta_0} + Ae^{iky \sin \theta_0})e^{-ikx \cos \theta_0}, \\ \Phi(x, y) &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (e^{-iky \sin \theta_0} + Ae^{iky \sin \theta_0} + Be^{-ky \cos \theta_0})e^{-ikx \cos \theta_0}. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Для определения амплитуд составляющих электроупругой волны в полупространстве $y > 0$, в данной антиплоской задаче необходимо к уравнениям (1.3.4) добавить физико–механические условия на граничной – контактной со средой полупространства $y < 0$, плоскости $y = 0$.

Пусть плоскость $y = 0$ свободна от напряжений, и тонкий металлический слой занимает эту плоскость, т.е. электропроводящий слой (электрод) склеен с граничной плоскостью пьезоэлектрического полупространства. Из-за тонкости жесткость слоя пренебрегается. Решения (1.3.5) удовлетворяют условиям металлизированной свободной границы

$$\begin{aligned} \Phi(x, 0) &= 0, \\ \sigma_{yz}(x, y) &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Из этих условий определяются искомые коэффициенты амплитуд отраженной сдвиговой волны (1.3.5)

$$A = \frac{(1 + \chi)i \sin \theta_0 - \chi \cos \theta_0}{(1 + \chi)i \sin \theta_0 + \chi \cos \theta_0},$$

$$B = -\frac{2(1 + \chi)i \sin \theta_0}{(1 + \chi)i \sin \theta_0 + \chi \cos \theta_0}.$$
(1.3.7)

Получили, что в пьезоэлектрическом полупространстве поверхностная – локализованная у свободной граничной поверхности, волна в случае падения из бесконечности плоской волны сдвига, не возбуждается, хотя среда $y > 0$ обладает пьезоэффектом. В полупространстве волновое поле состоит из падающей и отраженной от граничной плоскости волн (1.3.5), (1.3.7).

Если на свободной от напряжений (1.3.6) граничной плоскости пьезоэлектрического полупространства $y > 0$ функция электрического потенциала имеет вид

$$\Phi(x, 0) = \Phi_s e^{-ikx \cos \theta_0} \neq 0, \quad \Phi_s = const$$
(1.3.8)

здесь Φ_s значение коэффициента амплитуды потенциала электрического поля при $y = 0$, для коэффициентов амплитуд отраженной сдвиговой волны получим

$$A = \frac{\varepsilon_{11} \Phi_s \chi \cos \theta_0 + e_{15} ((1 + \chi)i \sin \theta_0 - \chi \cos \theta_0)}{e_{15} ((1 + \chi)i \sin \theta_0 + \chi \cos \theta_0)},$$

$$B = \left(\frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}} \Phi_s - 2 \right) \frac{(1 + \chi)i \sin \theta_0}{(1 + \chi)i \sin \theta_0 + \chi \cos \theta_0}.$$
(1.3.9)

Из этих соотношений следует, что и в этом случае в пьезоэлектрическом полупространстве локализованная у контактной плоскости поверхностная волна не возникает – сдвиговое волновое поле состоит из падающей и отраженной волн.

В случае упругого полупространства $y > 0$ без пьезоэффекта ($\chi = 0$)

$$w(x, y) = e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0} + e^{-ikx \cos \theta_0 + iky \sin \theta_0}$$

В более общем случае, когда при контактной взаимодействии с остальной частью пространства, функции амплитуд электрического потенциала, касательного напряжения, перемещения и составляющей вектора электрической индукции пьезоэлектрика $y > 0$ принимают следующие значения на граничной плоскости $y = 0$

$$\begin{aligned}\Phi(x, 0) &= \Phi_s e^{-ikx \cos \theta_0}, & w(x, 0) &= \psi_s e^{-ikx \cos \theta_0}, \\ \sigma_{yz}(x, 0) &= q_s e^{-ikx \cos \theta_0}, & D_y(x, 0) &= D_s e^{-ikx \cos \theta_0},\end{aligned}\quad (1.3.10)$$

Φ_s, q_s, ψ_s, D_s – коэффициенты соответствующих амплитуд на граничной плоскости, значения коэффициентов амплитуд отраженной сдвиговой волны (1.3.5) в полупространстве $y > 0$ принимают вид

$$\begin{aligned}A &= \frac{c_{44} k \varepsilon_{11} \Phi_s \chi \cos \theta_0 + e_{15} q_s + c_{44} k e_{15} ((1 + \chi) i \sin \theta_0 - \chi \cos \theta_0)}{c_{44} k e_{15} ((1 + \chi) i \sin \theta_0 + \chi \cos \theta_0)}, \\ B &= \frac{(\varepsilon_{11} \Phi_s - 2e_{15}) c_{44} k i \sin \theta_0 (1 + \chi) - e_{15} q_s}{c_{44} k e_{15} ((1 + \chi) i \sin \theta_0 + \chi \cos \theta_0)}.\end{aligned}\quad (1.3.11)$$

Для других коэффициентов получим $\psi_s = 1 + A$, $D_s = e_{15} k B \cos \theta_0$.

Если граничная плоскость металлизирована, то принимается $\Phi_s = 0$.

В случае, когда упругое полупространство $y > 0$ не обладает пьезоэффектом ($\chi = 0$), но $q_s \neq 0$

$$w(x, y) = e^{-ikx \cos \theta_0 -iky \sin \theta_0} + A e^{-ikx \cos \theta_0 +iky \sin \theta_0}, \quad (1.3.12)$$

здесь коэффициент отраженной волны

$$A = \frac{q_s + c_{44} k i \sin \theta_0}{c_{44} k i \sin \theta_0}$$

В результате, можно утверждать, что несмотря на наличие пьезоэффекта, поверхностная волна–локализованная у граничной плоскости пьезоэлектрического полупространства, не возбуждается в полупространстве при распространении из

бесконечности плоской сдвиговой электроупругой волны, если на контактной плоскости – плоскости раздела от остальной части пространства, имеют место вышеприведенные условия. Рассмотренная задача дает возможность объяснить также законы отражения и преломления волн на границе раздела двух сред в составном электроупругом пространстве.

ГЛАВА II

СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СОСТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

§ 2.1. Сдвиговые электроупругие колебания в составном пьезоэлектрическом пространстве

Неоднородная упругая среда обладающая пьезоэффектом занимает пространство отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$. Пространство состоит из двух полупространств – пьезоэлектриков класса $6mm$ гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла и с разными электроупругими характеристиками [41]. Между пьезоэлектриками – занимающими полупространства $y > 0$ и $y < 0$, отсутствует акустический контакт в разделительной плоскости $y = 0$.

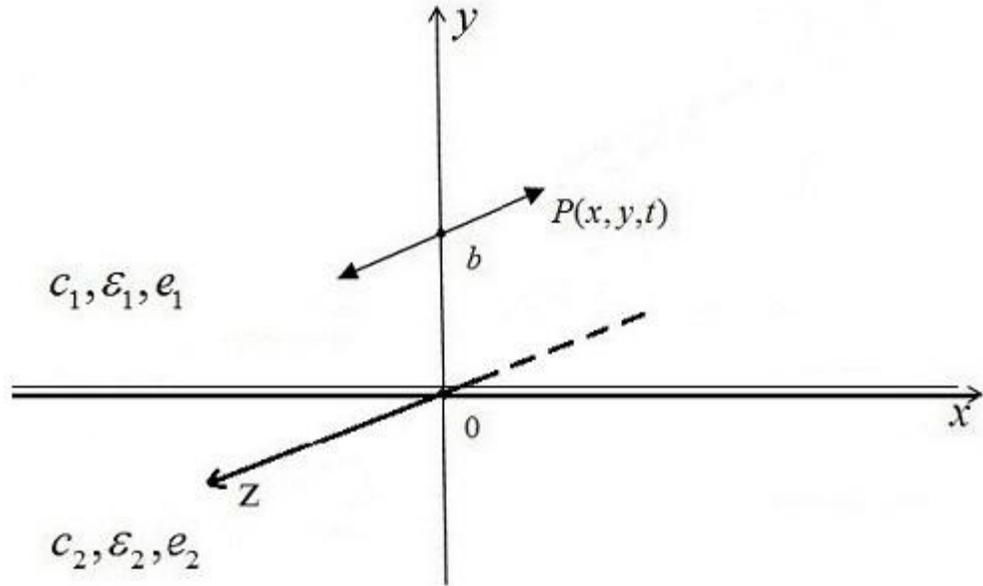
Составное пьезоэлектрическое пространство совершает установившиеся колебания под действием линейного источника по линии $P(x, y, t) = P\delta(x)\delta(y - b)e^{-i\omega t}$, где $P = const$ – интенсивность действующей силы, ω – частота колебаний, t – параметр времени $\delta(x)$ – функция Дирака. Колебания – ограниченные и чаще всего повторяющиеся движения. Распространение колебательного движения принято рассматривать как волновой процесс. С физической точки зрения упругость и инертность среды являются ее необходимыми важнейшими свойствами для того, чтобы в ней распространялись волны. Периодические возмущения, которые имеют место в каком-либо месте упругой среды из-за источника механических возмущений, не остаются локализованными в этом месте, а распространяются в среде с некоторой

скоростью, зависящей от ее физических – упругих и инерционных, свойств. По участкам среды передается только состояние деформаций, т.е. процесс распространения упругих волн является одним из механизмов передачи энергии от источника волн к частицам составляющим упругую среду. Механические волны возникают благодаря вынужденному движению некоторой части деформируемой среды. Волны огибают, т.е. дифрагируют на краю препятствия, или разделительной плоскости .

Рассматриваемая среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении сдвигового волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах. Принимаем дифференциальные уравнения динамической теории упругости и уравнения электродинамики в квазистатическом приближении. Учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих волнового поля (временной множитель $e^{-i\omega t}$), и задача решается в амплитудах. Для определения амплитуд перемещения $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$ и электрического потенциала $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ в соответствующих полупространствах имеем уравнения [12,30,39,41]:

$$\begin{aligned} c_1 \Delta w_1 + e_1 \Delta \Phi_1 + \omega^2 \rho_1 w_1 &= P \delta(x) \delta(y - b), \\ e_1 \Delta w_1 - \varepsilon_1 \Delta \Phi_1 &= 0, \end{aligned} \quad \begin{array}{l} y > 0 \\ \end{array} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} c_2 \Delta w_2 + e_2 \Delta \Phi_2 + \omega^2 \rho_2 w_2 &= 0, \\ e_2 \Delta w_2 - \varepsilon_2 \Delta \Phi_2 &= 0, \end{aligned} \quad \begin{array}{l} y < 0 \\ \end{array} \quad (2.1.2)$$



Фиг.2

В вышеприведенных уравнениях (2.1.1), (2.1.2) $\varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)}$, $e_i = e_{15}^{(i)}$, $c_i = c_{44}^{(i)}$, $i = 1, 2$ – диэлектрические, пьезоэлектрические и упругие постоянные соответствующих пьезоэлектрических полупространств $y > 0$ и $y < 0$, а ρ_i плотность материалов этих полупространств. По постановке задачи решения уравнений (2.1.1), (2.1.2) должны удовлетворять следующим уравнениям на плоскости контакта $y = 0$ (непрерывность электрического поля)

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_2(x, 0), \quad D_y^{(1)}(x, 0) = D_y^{(2)}(x, 0). \quad (2.1.3)$$

Отсутствие акустического контакта между полупространствами в плоскости $y = 0$ приводит к условию

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0) = 0, \quad (2.1.4)$$

т.е. в составном пространстве имеется бесконечная трещина (в математическом смысле) в этой плоскости.

Здесь $D_y^{(1)}(x, y)$, $D_y^{(2)}(x, y)$ – амплитуды составляющих вектора электрической индукции в соответствующих полупространствах, а $\sigma_{yz}^{(1)}(x, y)$, $\sigma_{yz}^{(2)}(x, y)$ – амплитуды напряжений, при этом [12,41,49]

$$\sigma_{yz}^{(i)} = c_i \frac{\partial w_i}{\partial y} + e_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}, \quad D_y^{(i)} = e_i \frac{\partial w_i}{\partial y} - \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}, \quad i = 1, 2 \quad (2.1.5)$$

Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной x к уравнениям (2.1.1), (2.1.2) и условиям контакта (2.1.3), (2.1.4) между пьезоэлектриками получим решение задачи (2.1.1) – (2.1.4), представляющее уходящую волну

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (2.1.6)$$

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_1(\sigma) e^{-|\sigma|y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_1,$$

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_2(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (2.1.7)$$

$$\Phi_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_2(\sigma) e^{|\sigma|y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{e_2}{\varepsilon_2} w_2,$$

где подынтегральные функции имеют вид

$$A_1(\sigma) = -\frac{Q\chi_1|\sigma|e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}b}}{(1 + \chi_1)(\sigma^2 - k_1^2)K_*(\sigma)}, \quad B_1(\sigma) = \frac{e_1}{\varepsilon_1} \frac{Qe^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}b}}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}K_*(\sigma)},$$

$$A_2(\sigma) = \frac{e_1}{e_2} \frac{\chi_2|\sigma|Qe^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}b}}{(1 + \chi_2)\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}K_*(\sigma)}, \quad B_2(\sigma) = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} B_1(\sigma), \quad (2.1.8)$$

$$Q_1(\sigma, y) = \frac{Q}{2\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} (e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}|y-b|} + e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}(y+b)}),$$

здесь

$$\frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}|y-b|}}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} e^{-i\sigma x} d\sigma = i \frac{Q}{4} H_0^{(1)}(k_1 r_b),$$

$r_b = \sqrt{(y-b)^2 + x^2}$, $H_0^{(1)}(k_1 r_b)$ – известная функция Ханкеля первого рода [30,41].

В этих формулах $k_i = \omega/C_i$, C_i , $\chi_i = e_i^2/c_i \varepsilon_i$, $i = 1, 2$ – волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в полупространствах $y > 0$ и $y < 0$, соответственно,

$$C_i = \sqrt{c_{44}^{(i)}(1 + \chi_i)/\rho_i}, Q = P/c_1(1 + \chi_1).$$

Характеристическая функция данной задачи

$$K_*(\sigma) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2} - \frac{\chi_1 |\sigma|}{(1 + \chi_1) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\chi_2 |\sigma|}{(1 + \chi_2) \sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}. \quad (2.1.9)$$

Выполняя условия уходящей волны, принимается, что $\sqrt{\sigma^2 - k_i^2} = -i\sqrt{\sigma^2 - k_i^2}$, $i = 1, 2$, $\sqrt{\sigma^2 - k_i^2} \rightarrow |\sigma|$, при $|\sigma| \rightarrow \infty$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ обходит точки ветвления двузначных функций $\gamma_i(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k_i^2}$ $-k_1, -k_2$ сверху, а k_1, k_2 – снизу [41,47].

Для однородного пьезоэлектрического пространства с бесконечной трещиной в $y = 0$, когда полупространства имеют одинаковые электроупругие характеристики – $\varepsilon_1, e_1, c_1, \rho_1$, характеристическое уравнение [12,26]

$$(1 + \chi_1) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} - \chi_1 |\sigma| = 0, \quad (2.1.10)$$

имеет решение $\sigma = \pm \sigma_0^{(1)}$, где $\sigma_0^{(1)}$ – единственный положительный корень уравнения (10)

$$\sigma_0^{(1)} = k_1 \frac{1 + \chi_1}{\sqrt{1 + 2\chi_1}} > k_1 > 0. \quad (2.1.11)$$

Следовательно, в пьезоэлектрических полупространствах возникают поверхностные сдвиговые электроупругие волны Гуляева–Блюстейна и распространяются по направлению x к $\pm\infty$ со скоростью ω/σ_0 .

Следует отметить, что амплитуды поверхностных (локализованных у граничной поверхности) волн при удалении вглубь полупространств ($y \rightarrow \pm\infty$) стремятся к нулю – волны затухают.

Интересно, что в случае другой частной задачи, когда пьезоэлектрическое полупространство граничит без акустического контакта с диэлектрическим полупространством $y < 0$ не обладающем пьезоэффектом ($e_2 = 0$), характеристическое уравнение для определения волнового числа поверхностной волны получим в виде [12,39,41]

$$(1 + \chi_1)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} - \chi_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} |\sigma| = 0. \quad (2.1.12)$$

Единственный положительный корень уравнения (2.1.12)

$$\sigma_1 = k_1 \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(1 + \chi_1)}{\sqrt{(1 + \chi_1)^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - \varepsilon_1^2 \chi_1^2}} < \sigma_0, \quad (2.1.13)$$

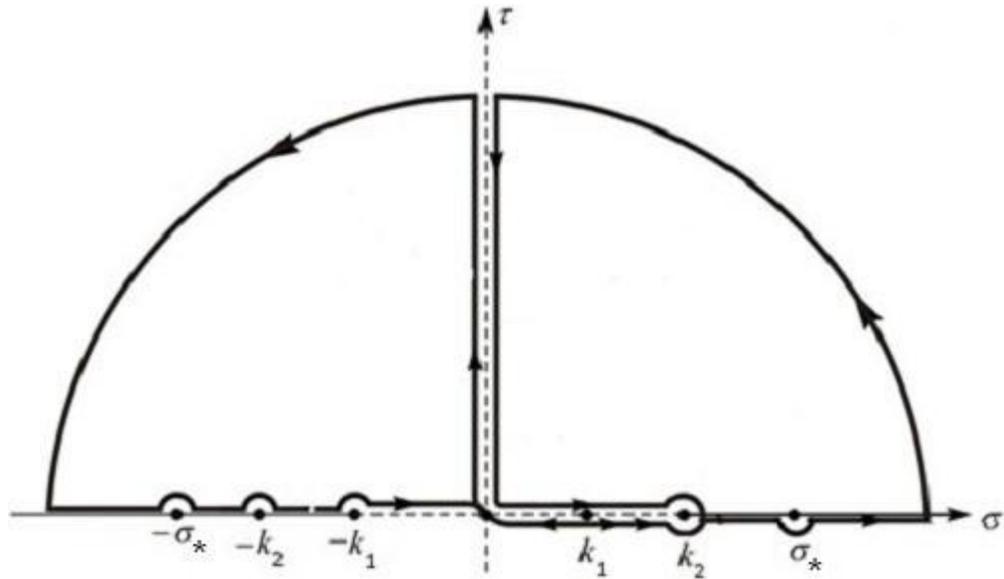
т.е. поверхностная волна типа Гуляева–Блюстейна распространяется со скоростью ω/σ_1 , при этом

$$\frac{\omega}{k_1} > \frac{\omega}{\sigma_1} > \frac{\omega}{\sigma_0^{(1)}}, \quad (2.1.14)$$

Таким образом, существование сдвиговых поверхностных волн в полупространствах обусловлено пьезоэффектом, и наличие источника механических колебаний приводит к распространению этих электроупругих волн.

Вернемся к полученным функциям амплитуд (2.1.6), (2.1.7). Для определенности принимается $k_2 > k_1$. Уравнение $K_*(\sigma) = 0$ имеет единственный положительный корень $\sigma = \sigma_* > k_2$, т.е. $\sigma = \pm\sigma_*$ нули функции $K_*(\sigma)$.

Рассмотрим волновое поле в составном пьезоэлектрическом полупространстве $x < 0$. Преобразуем интегралы методом контурного интегрирования в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. Действительная ось обходит как точки ветвления функций $\gamma_i(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_i^2}$, так и нули функции $K_*(\sigma)$, представляющие полюсы соответствующих подынтегральных функций. Обеспечивая условия уходящей волны, действительная ось комплексной плоскости обходит точку $\sigma = -\sigma_*$ сверху, а точку $\sigma = +\sigma_*$ снизу.



Фиг.3

Для выбора ветвей двузначных функций $\gamma_1(\alpha)$, $\gamma_2(\alpha)$, следует провести в комплексной плоскости разрезы до бесконечности от точек $\sigma = k_1$, $\sigma = k_2$ в верхней полуплоскости и от точек $\sigma = -k_1$, $\sigma = -k_2$ в нижней полуплоскости, в основу принимая принцип уходящей волны. Аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется в виде $|\alpha| = \alpha$ при $\text{Re } \alpha > 0$, $|\alpha| = -\alpha$ при $\text{Re } \alpha < 0$. Путь интегрирования замыкается в верхней полуплоскости комплексной плоскости [30,41,47].

Аналитические продолжения подынтегральных функций $A_1(\sigma)$, $A_2(\sigma)$, при таких разрезах в комплексной плоскости, внутри контура интегрирования имеют единственную особую точку $\sigma = \sigma_*$ – простой полюс, т.к. $K_*(\sigma_*) = 0$.

После контурного интегрирования получим представления функций амплитуд в виде суммы поверхностных волн и регулярных интегралов по берегам разрезов – характеризующих объемные волны. Амплитуды поверхностных волн распространяющихся в составном полупространстве $x < 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} w_{1n}(x, y) &= A_n^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma_* x}, & y > 0 \\ w_{2n}(x, y) &= A_n^{(2)} e^{\sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_* x}, & y < 0 \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

$$A_n^{(1)} = \frac{iQ\chi_1\sigma_*}{(1+\chi_1)(\sigma_*^2 - k_1^2)K_{*1}(\sigma_*)} e^{-\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} b} \quad K_{*1}(\sigma) = \frac{dK_*(\sigma)}{d\sigma}$$

$$A_n^{(2)} = \frac{e_1}{e_2} \frac{iQ\chi_2\sigma_*}{(1+\chi_2)\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2}\sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2}K_{*1}(\sigma_*)} e^{-\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} b}$$

Скорость распространения этих поверхностных волн – ω/σ_* , при этом $\sigma_0^{(1)} < \sigma_* < \sigma_0^{(2)}$ или $\sigma_0^{(2)} < \sigma_* < \sigma_0^{(1)}$, т.е. значение скорости обнаруженной поверхностной волны находится между значениями скоростей волн Гуляева–Блюстейна в полупространствах $y > 0$ и $y < 0$. При удалении в глубь полупространств ($y \rightarrow \pm\infty$) поверхностные волны затухают.

Рассматриваемая задача линейного источника сдвиговых колебаний симметрична по x , следовательно такие-же представления функций амплитуд имеют место и в составном полупространстве $x > 0$. Путь интегрирования замыкается уже в нижней полуплоскости комплексной плоскости с соответствующими разрезами. Аналитические продолжения подынтегральных

функций внутри контура интегрирования имеют единственную особую точку $\sigma = -\sigma_*$ простой полюс, $K_*(-\sigma_*) = 0$.

Амплитуды поверхностных волн распространяющихся в составном полупространстве $x > 0$, имеют вид

$$\begin{aligned} w_{1n}(x, y) &= A_n^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma_* x}, & y > 0 \\ w_{2n}(x, y) &= A_n^{(2)} e^{\sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2} y} e^{i\sigma_* x}. & y < 0 \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

На свободной $y = 0$ граничной поверхности полупространств амплитуда поверхностной волны принимает максимальное значение. Используется методика развита в [8,30,39]. Асимптотическое представление перемещений на граничной поверхности при $|x| \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\begin{aligned} w_1(x, 0) &= A_n^{(1)} e^{i\sigma_* |x|} + e^{ik_1 x} O(|k_1 x|^{-3/2}) + \chi_1 O(|k_1 x|^{-2}), \\ w_2(x, 0) &= A_n^{(2)} e^{i\sigma_* |x|} + \chi_2 e^{ik_2 x} O(|k_2 x|^{-3/2}) + \chi_2 O(|k_2 x|^{-2}). \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

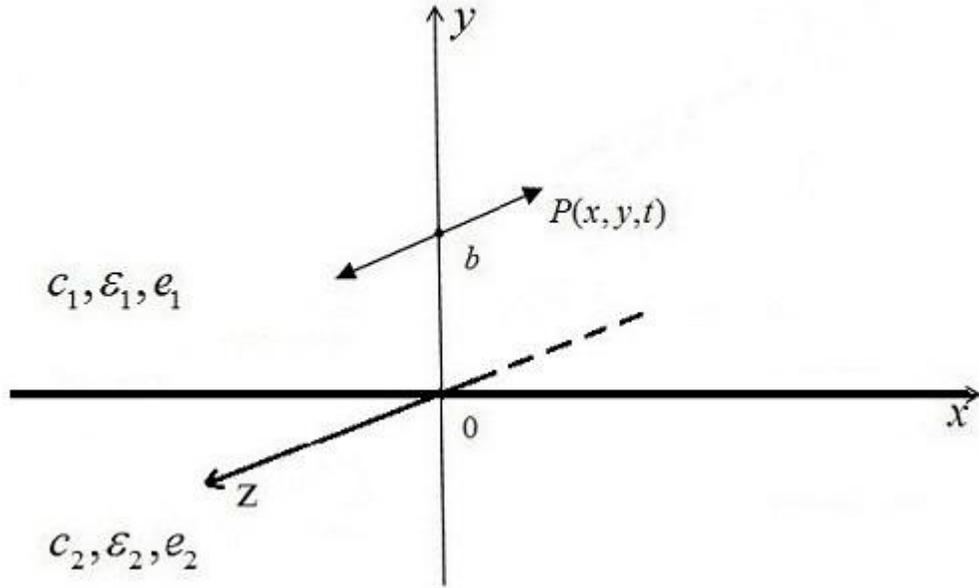
В пространстве появляются объемные волны распространяющиеся от контактной поверхности по направлению y и имеющие неволновой характер по x на контактной поверхности. Неоднородность электроупругой среды, пьезоэффект и наличие силового источника приводят к существенным изменениям волнового поля, хотя и между пьезоэлектрическими полупространствами нет механического контакта. Связанностью физических полей обусловлены распространения поверхностных (локализованных) волн со смещениями частиц в направлении симметрии кристалла. Результаты рассмотренной задачи о распространении сдвиговых колебаний в составном пьезоэлектрическом пространстве, могут быть использованы при изучении прикладных задач распространения электроупругих локализованных и объемных волн.

§2.2. Волны сдвига в пространстве при полном электроупругом контакте между пьезоэлектрическими полупространствами

Твердая, упругая диэлектрическая среда, обладающая пьезоэффектом, занимает пространство отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$. Рассматриваемое пространство состоит из двух полупространств–пьезоэлектриков класса $6mm$ гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла и с разными электроупругими характеристиками. Для данного класса гексагональной симметрии задача распространения электроупругих волн в пьезоэлектрических кристаллах разделяется на плоскую и антиплоскую. Между пьезоэлектриками–занимающими полупространства $y > 0$ и $y < 0$, осуществляется акустический контакт в плоскости $y = 0$ [54].

Составное пьезоэлектрическое пространство совершает установившиеся колебания под действием линейного источника действующего в верхнем полупространстве $P(x, y, t) = P_1 \delta(x) \delta(y - b) e^{-i\omega t}$, где $P_1 = const$ –интенсивность действующей силы, ω –частота колебаний, t –параметр времени, $\delta(x)$ –функция Дирака. При такой силе действующей по линии $y = b$, среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении сдвигового волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах. В основу принимаем дифференциальные уравнения динамической теории упругости и уравнения электродинамики в квазистатическом приближении. Учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих волнового поля (временной множитель $e^{-i\omega t}$), следовательно, задача решается в амплитудах. Для определения амплитуд перемещения $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$ и электрического потенциала $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ в соответствующих полупространствах имеем уравнения [6,30,54]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (c_i w_i + e_i \Phi_i) + \omega^2 \rho_i w_i &= P_i \delta(x) \delta(y - b), \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (e_i w_i - \varepsilon_i \Phi_i) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$



Фиг.4

В этих уравнениях $P_2 = 0$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)}$, $e_i = e_{15}^{(i)}$, $c_i = c_{44}^{(i)}$, $i = 1, 2$ – диэлектрические, пьезоэлектрические и упругие постоянные соответствующих пьезоэлектрических полупространств $y > 0$ и $y < 0$, а ρ_i плотность материалов этих полупространств.

По постановке задачи решения уравнений (2.2.1) должны удовлетворять следующим условиям на плоскости контакта $y = 0$ (полный электромеханический контакт)

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_2(x, 0), \quad D_y^{(1)}(x, 0) = D_y^{(2)}(x, 0), \quad (2.2.2)$$

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0), \quad w_1(x, +0) - w_2(x, -0) = 0. \quad (2.2.3)$$

Здесь $D_y^{(1)}(x, y)$, $D_y^{(2)}(x, y)$ – амплитуды составляющих вектора электрической индукции в соответствующих полупространствах, а $\sigma_{yz}^{(1)}(x, y)$, $\sigma_{yz}^{(2)}(x, y)$ – амплитуды напряжений

$$\sigma_{yz}^{(i)} = c_i \frac{\partial w_i}{\partial y} + e_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}, \quad D_y^{(i)} = e_i \frac{\partial w_i}{\partial y} - \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}. \quad i = 1, 2$$

Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной x к уравнениям (2.2.1) и условиям контакта (2.2.2), (2.2.3) получим уравнения относительно трансформантов искомых функций

$$\bar{w}_i = \int_{-\infty}^{\infty} w_i(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad \bar{\Phi}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(x, y) e^{i\sigma x} dx,$$

$$\frac{d^2 \bar{w}_1}{dy^2} - (\sigma^2 - k_1^2) \bar{w}_1 = Q_1 \delta(y - b), \quad y > 0 \quad (2.2.4)$$

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_1}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_1 + k_1^2 \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{w}_1 = \frac{e_1}{\varepsilon_1} Q_1 \delta(y - b),$$

$$\frac{d^2 \bar{w}_2}{dy^2} - (\sigma^2 - k_2^2) \bar{w}_2 = 0, \quad y > 0 \quad (2.2.5)$$

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_2}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_2 + k_2^2 \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2 = 0.$$

и следующие условия при $y = 0$

$$c_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} = c_2 \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial y}, \quad \bar{w}_1 - \bar{w}_2 = 0, \quad (2.2.6)$$

$$\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_2, \quad \varepsilon_1 (1 + \chi_1) \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} = \varepsilon_2 (1 + \chi_2) \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial y}. \quad (2.2.7)$$

В этих формулах $k_i = \omega / C_i$, C_i , $\chi_i = e_i^2 / c_i \varepsilon_i$, $i = 1, 2$ – волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент

электромеханической связи в полупространствах $y > 0$ и $y < 0$, соответственно,

$$C_i = \sqrt{c_{44}^{(i)}(1 + \chi_i)/\rho_i}, \quad Q_1 = P_1 / c_1(1 + \chi_1).$$

Трансформанты функций амплитуд перемещения и потенциала электрического поля для пьезоэлектрических полупространств представляются в виде ограниченного решения [54]

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(\sigma, y) &= A(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}y} - Q(\sigma, y), \\ \bar{\Phi}_1(\sigma, y) &= B(\sigma)e^{-|\sigma|y} + \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{w}_1, \end{aligned} \quad y > 0 \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2(\sigma, y) &= A(\sigma)e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}y}, \\ \bar{\Phi}_2(\sigma, y) &= -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} B(\sigma)e^{|\sigma|y} + \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2, \end{aligned} \quad y < 0 \quad (2.2.9)$$

где из-за контактных условий (2.2.6), (2.2.7)

$$\begin{aligned} A(\sigma) &= -\frac{c_1(1 + \chi_1)Q_1}{|\sigma|K_0(\sigma)} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}b}, \\ B(\sigma) &= -\frac{e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} A(\sigma), \\ Q(\sigma, y) &= \frac{Q_1}{2\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} (e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}|y-b|} - e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}(y+b)}). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Характеристическая функция данной задачи [28,54]

$$K_0(\sigma) = \frac{c_1(1 + \chi_1)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}{|\sigma|} + \frac{c_2(1 + \chi_2)\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{|\sigma|} - \frac{(e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \quad (2.2.11)$$

Решение задачи(2.2.1)–(2.2.3), представляющее уходящую волну, имеет вид

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (2.2.12)$$

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\sigma) e^{-|\sigma|y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_1,$$

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (2.2.13)$$

$$\Phi_2(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \int_{-\infty}^{\infty} B(\sigma) e^{|\sigma|y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{e_2}{\varepsilon_2} w_2.$$

Выполняя условия уходящей волны, принимается, что $\sqrt{\sigma^2 - k_i^2} = -i\sqrt{\sigma^2 - k_i^2}$, $i=1,2$, $\sqrt{\sigma^2 - k_i^2} \rightarrow |\sigma|$, при $|\sigma| \rightarrow \infty$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha = \sigma + it$ обходит точки ветвления $-k_1, -k_2$ двузначных функций $\gamma_i(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_i^2}$ сверху, а k_1, k_2 – снизу [47].

В случае частной задачи, когда пьезоэлектрическое полупространство граничит с диэлектрическим полупространством $y < 0$ не обладающем пьезоэффектом ($e_2 = 0$), характеристическое уравнение для определения волнового числа поверхностной волны получим в виде [28,54]

$$\frac{c_1(1 + \chi_1)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}{|\sigma|} + \frac{c_2\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{|\sigma|} - \frac{e_1^2 \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = 0. \quad (2.2.14)$$

Вернемся к полученным функциям амплитуд (12), (13). Характеристическое уравнение

$$\frac{c_1(1 + \chi_1)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}{|\sigma|} + \frac{c_2(1 + \chi_2)\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{|\sigma|} - \frac{(e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = 0, \quad (2.2.15)$$

имеет единственный положительный корень $\sigma = \sigma_0 > k_2 > k_1 > 0$, если только

$$\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}} < \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(1 - \frac{e_2 \varepsilon_1}{e_1 \varepsilon_2}\right)^2. \quad (2.2.16)$$

При $k_1 > k_2$, $\sigma_0 > k_1$ и условие имеет вид

$$\sqrt{1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}} < \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(1 - \frac{e_1 \varepsilon_2}{e_2 \varepsilon_1}\right)^2. \quad (2.2.17)$$

Таким образом, как при (2.2.16), если $k_2 > k_1$, так и при (2.2.17), если $k_1 > k_2$, уравнение (2.2.15) имеет положительный корень $\sigma = \sigma_0$, следовательно $\sigma = \pm \sigma_0$ нули функции (2.2.11) $K(\pm \sigma_0) = 0$. Для частного случая, если полупространство $y < 0$ не обладает пьезоэффектом $e_2 = 0$, условия существования корней $\pm \sigma_{01}$ характеристического уравнения (2.2.14) принимают вид [28,40,42]

$$\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}} < \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad k_2 > k_1$$

$$\sqrt{1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}} < \frac{c_1}{c_2} \frac{\chi_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad k_1 > k_2$$

при этом $\sigma_0 < \sigma_{01}$.

В интегральных представлениях действительная ось обходит, как точки ветвления функций $\gamma_i(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_i^2}$, так и нули функции $K_0(\sigma)$, представляющие полюсы соответствующих подынтегральных функций. Обеспечивая условия уходящей волны, действительная ось комплексной плоскости обходит точку $\sigma = -\sigma_0$ сверху, а точку $\sigma = +\sigma_0$ снизу. Для выбора ветвей двузначных функций $\gamma_1(\alpha)$, $\gamma_2(\alpha)$, следует провести в комплексной плоскости разрезы до бесконечности от точек $\sigma = k_1$, $\sigma = k_2$ в верхней полуплоскости и от точек $\sigma = -k_1$, $\sigma = -k_2$ в нижней полуплоскости, в основу

принимая принцип уходящей волны. Аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется в виде $|\alpha| = \alpha$ при $\text{Re } \alpha > 0$, $|\alpha| = -\alpha$ при $\text{Re } \alpha < 0$. Для определенности принимается $k_2 > k_1$.

Рассмотрим волновое поле в составном пьезоэлектрическом полупространстве $x < 0$. Представим функции амплитуд $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$ в виде интегралов

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^{(1)}(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^{(1)}(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (2.2.18)$$

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^{(1)}(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^{(1)}(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (2.2.19)$$

где

$$A^{(1)}(\sigma) = -\frac{c_1(1 + \chi_1)Q_1}{\sigma K_0^{(1)}(\sigma)} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} b}, \quad (2.2.20)$$

$$B^{(1)}(\sigma) = -\frac{c_1(e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1)^2(1 + \chi_1)(|\sigma| - \sigma)Q_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)K_0(\sigma)K_0^{(1)}(\sigma)} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} b},$$

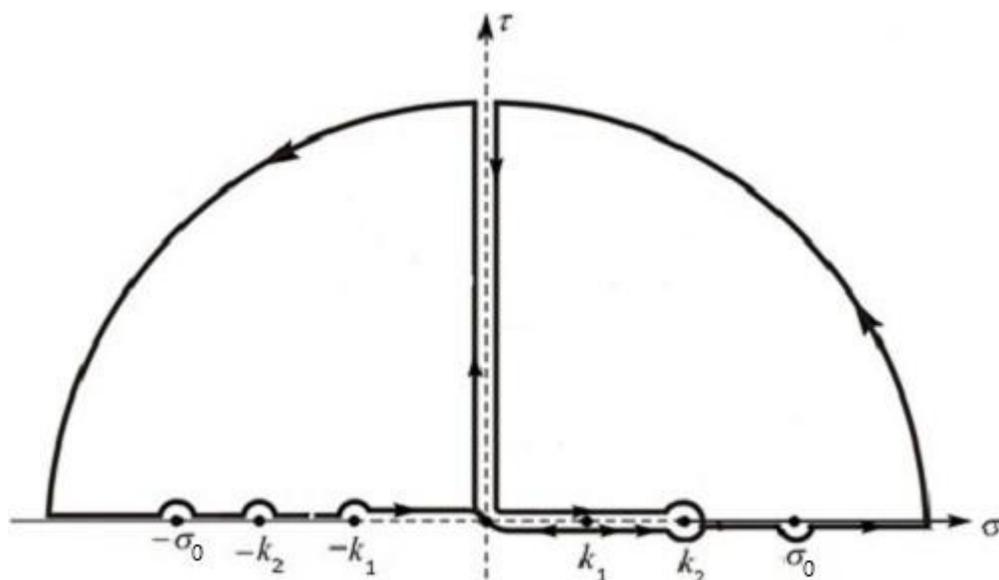
$$K_0^{(1)}(\sigma) = \frac{c_1(1 + \chi_1)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}{\sigma} + \frac{c_2(1 + \chi_2)\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{\sigma} - \frac{(e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \quad (2.2.21)$$

Преобразуем интегралы (2.2.18), (2.2.19) методом контурного интегрирования в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. Путь интегрирования замыкается в верхней полуплоскости комплексной плоскости [8,9,30,39,54].

Аналитические продолжения подынтегральных функций $A^{(1)}(\sigma)$, $B^{(1)}(\sigma)$, при таких разрезах в комплексной плоскости, внутри контура интегрирования имеют единственную особую точку $\sigma = \sigma_0$ – простой полюс $K_0^{(1)}(\sigma_0) = 0$.

Задача симметрична по x , следовательно такие же представления функций амплитуд имеют место и в составном полупространстве $x > 0$. Путь интегрирования замыкается уже в нижней полуплоскости комплексной плоскости. Аналитические продолжения подынтегральных функций внутри контура интегрирования в этом случае имеют единственную особую точку $\sigma = -\sigma_0$.

Существование сдвиговых поверхностных волн в полупространствах обусловлено пьезоэффектом, и наличие источника механических колебаний приводит к распространению этих электроупругих волн. На контактной плоскости раздела амплитуда поверхностной волны принимает максимальное значение.



Фиг.5

После контурного интегрирования получим представления функций амплитуд в виде суммы поверхностных волн, если имеют место условия (2.2.16), (2.2.17), и регулярных интегралов по берегам разрезов – характеризующих объемные затухающие волны. В пространстве появляются обусловленные наличием пьезоэффекта объемные волны распространяющиеся от контактной поверхности по направлению y и имеющие неволновой характер по x на контактной поверхности.

Функции амплитуд поверхностных волн распространяющихся в составном полупространстве $x < 0$, имеют вид

$$\begin{aligned} w_{1n}(x, y) &= A_n^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma_0 x}, & y > 0 \\ w_{2n}(x, y) &= A_n^{(2)} e^{\sqrt{\sigma_0^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_0 x}, & y < 0 \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

где

$$A_n^{(1)} = A_n^{(2)} = \frac{ic_1(1 + \chi_1)Q_1}{\sigma_0 K_1(\sigma_0)} e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2} b}, \quad K_1(\sigma) = \frac{dK_0^{(1)}}{d\sigma}.$$

Амплитуды поверхностных волн, распространяющихся в составном полупространстве $x > 0$

$$\begin{aligned} w_{1n}(x, y) &= A_n^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma_0 x}, & y > 0 \\ w_{2n}(x, y) &= A_n^{(2)} e^{\sqrt{\sigma_0^2 - k_2^2} y} e^{i\sigma_0 x}. & y < 0 \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Доказывается, что, если распространяются поверхностные волны (имеют место условия (2.2.16), (2.2.17)), то скорость локализованной поверхностной волны ω / σ_0 больше скорости локализованной волны типа Гуляева–Блюстейна [28,42,54] ω / σ_{01} распространяющейся в пространстве, если полупространство $y < 0$ не обладает пьезоэффектом

$$\frac{\omega}{\sigma_0} > \frac{\omega}{\sigma_{01}}. \quad (2.2.24)$$

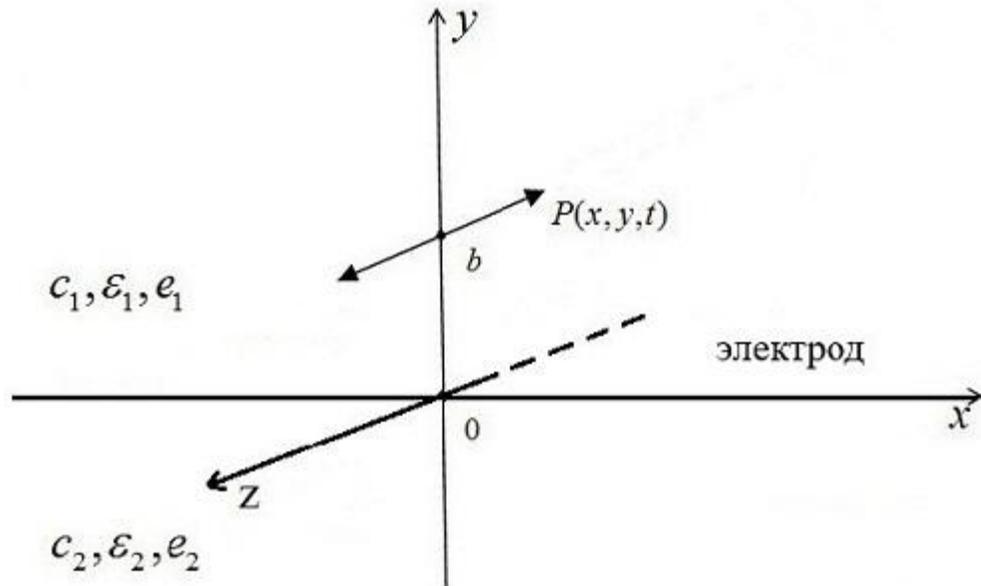
Исследование электроупругого волнового процесса в составном пространстве выявило особые свойства присущие взаимосвязанным средам и полям. Наличие источника механических колебаний приводит к распространению сдвиговой поверхностной волны – локализованной у плоскости полного электро-механического контакта и обусловленной пьезоэффектом полупространств, если имеют место полученные условия распространения поверхностных волн в составном электроупругом пространстве.

§ 2.3. Сдвиговые волны в составном пьезоэлектрическом пространстве с тонким металлическим слоем

Рассматриваемая электроупругая среда состоит из двух полупространств— пьезоэлектриков класса $6mm$ гексагональной симметрии с разными электроупругими характеристиками. Среда занимает пространство отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$. Главная ось кристалла совпадает с осью Oz . На разделительной плоскости $y = 0$ склеен тонкий металлический слой, который можно рассматривать как электрод.

Среда совершает установившиеся колебания под действием линейного источника действующего в верхнем полупространстве по линии $y = b, x = 0$ $P(x, y, t) = P_1 \delta(x) \delta(y - b) e^{-i\omega t}$, где $P_1 = const$ —интенсивность действующей силы, ω —частота колебаний, t —параметр времени, $\delta(x)$ —функция Дирака. Среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении сдвигового волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах. В основу принимаем дифференциальные уравнения динамической теории упругости и уравнения электродинамики в квазистатическом приближении [51]. Учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих волнового поля (временной множитель $e^{-i\omega t}$), следовательно, задача решается в амплитудах. Для определения амплитуд перемещения $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$ и электрического потенциала $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ в соответствующих полупространствах имеем уравнения [6,12,51]:

$$\begin{aligned} c_i \Delta w_i + e_i \Delta \Phi_i + \omega^2 \rho_i w_i &= P \delta(x) \delta(y - b), \\ e_i \Delta w_i - \varepsilon_i \Delta \Phi_i &= 0. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$



Фиг.6

В этих уравнениях $P_2 = 0$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)}$, $e_i = e_{15}^{(i)}$, $c_i = c_{44}^{(i)}$, $i = 1, 2$ – диэлектрические, пьезоэлектрические и упругие постоянные соответствующих пьезоэлектрических полупространств $y > 0$ и $y < 0$, а ρ_i плотность материалов этих полупространств.

Решения уравнений (2.3.1) должны удовлетворять следующим условиям на плоскости $y = 0$

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, 0) &= \Phi_2(x, 0) = 0, \\ \sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) &= \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0), \\ w_1(x, +0) &= w_2(x, -0). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Здесь $\sigma_{yz}^{(1)}(x, y)$, $\sigma_{yz}^{(2)}(x, y)$ – амплитуды напряжений в соответствующих полупространствах

$$\sigma_{yz}^{(i)} = c_i \frac{\partial w_i}{\partial y} + e_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}, \quad i = 1, 2$$

Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной x к уравнениям (2.3.1) и условиям контакта (2.3.2) получим уравнения относительно трансформантов искомых функций [30,51]

$$\bar{w}_i = \int_{-\infty}^{\infty} w_i(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad \bar{\Phi}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(x, y) e^{i\sigma x} dx,$$

$$\frac{d^2 \bar{w}_1}{dy^2} - (\sigma^2 - k_1^2) \bar{w}_1 = Q \delta(y - b), \quad (2.3.3)$$

$$\frac{d^2 \bar{w}_2}{dy^2} - (\sigma^2 - k_2^2) \bar{w}_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_1}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_1 + k_1^2 \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{w}_1 = \frac{e_1}{\varepsilon_1} Q \delta(y - b), \quad (2.3.4)$$

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_2}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_2 + k_2^2 \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2 = 0.$$

и следующие условия при $y = 0$

$$c_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} = c_2 \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial y}, \quad \bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_2 = 0, \quad \bar{w}_1 - \bar{w}_2 = 0, \quad (2.3.5)$$

Здесь $k_i = \omega / C_i$, C_i , $\chi_i = e_i^2 / c_i \varepsilon_i$, $i = 1, 2$ – волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в полупространствах $y > 0$ и $y < 0$, соответственно,

$$C_i = \sqrt{c_{44}^{(i)} (1 + \chi_i) / \rho_i}, \quad Q = P_1 / c_1 (1 + \chi_1).$$

Трансформанты функций амплитуд перемещения и потенциала электрического поля имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(\sigma, y) &= A(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} - Q_1(\sigma, y), \\ \bar{\Phi}_1(\sigma, y) &= B(\sigma) e^{-|\sigma| y} + \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{w}_1, \end{aligned} \quad y > 0 \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2(\sigma, y) &= A(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y}, \\ \bar{\Phi}_2(\sigma, y) &= \frac{e_2 \varepsilon_1}{e_1 \varepsilon_2} B(\sigma) e^{|\sigma| y} + \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2, \end{aligned} \quad y < 0 \quad (2.3.7)$$

где, из-за контактных условий (2.3.5)

$$\begin{aligned}
 A(\sigma) &= -\frac{(1+\chi_1)Qe^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}b}}{K_3(\sigma)}, \\
 B(\sigma) &= -\frac{e_1}{\varepsilon_1}A(\sigma), \\
 Q_1(\sigma, y) &= \frac{Q}{2\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}(e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}|y-b|} - e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}(y+b)}).
 \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Характеристическая функция данной задачи

$$\begin{aligned}
 K_3(\sigma) &= K_1(\sigma) + \frac{c_2}{c_1}K_2(\sigma), \\
 K_1(\sigma) &= (1+\chi_1)\sqrt{\sigma^2-k_1^2} - \chi_1|\sigma|, \\
 K_2(\sigma) &= (1+\chi_2)\sqrt{\sigma^2-k_2^2} - \chi_2|\sigma|.
 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Решение задачи (2.3.1), представляющее уходящую волну, имеет вид

$$\begin{aligned}
 w_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(\sigma, y)e^{-i\sigma x} d\sigma, \\
 \Phi_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\sigma)e^{-|\sigma|y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{e_1}{\varepsilon_1}w_1,
 \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

$$\begin{aligned}
 w_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma)e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma, \\
 \Phi_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \frac{e_2\varepsilon_1}{e_1\varepsilon_2} \int_{-\infty}^{\infty} B(\sigma)e^{|\sigma|y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{e_2}{\varepsilon_2}w_2.
 \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Выполняя условия уходящей волны, принимается, что $\sqrt{\sigma^2-k_i^2} = -i\sqrt{\sigma^2-k_i^2}$, $i=1,2$, $\sqrt{\sigma^2-k_i^2} \rightarrow |\sigma|$, при $|\sigma| \rightarrow \infty$, т.е. действительная ось комплексной

плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ обходит точки ветвления $-k_1, -k_2$ двузначных функций $\gamma_i(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_i^2}$ сверху, а k_1, k_2 – снизу [47,51].

В случае частной задачи, когда между пьезоэлектрическими полупространствами отсутствует акустический контакт в плоскости $y = 0$ характеристическое уравнение для определения волнового числа поверхностной волны получим в виде

$$(1 + \chi_1)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} - \chi_1|\sigma| = 0, \quad (2.3.12)$$

который имеет единственный положительный корень

$$\sigma_1 = k_1 \frac{1 + \chi_1}{\sqrt{1 + 2\chi_1}} > k_1 > 0, \quad (2.3.13)$$

т.е. в пьезоэлектрических полупространствах возникают поверхностные сдвиговые электроупругие волны Гуляева–Блюстейна со скоростью $\frac{\omega}{\sigma_1} < C_1$.

Рассмотрим волновое поле в составном пьезоэлектрическом полупространстве $x < 0$. Представим функции амплитуд $w_1(x, y), w_2(x, y)$ в виде интегралов

$$\begin{aligned} w_1(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^{(1)}(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^{(1)}(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^{(1)}(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^{(1)}(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (2.3.15)$$

где

$$A^{(1)}(\sigma) = -\frac{(1 + \chi_1)Qe^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}b}}{K_3^{(1)}(\sigma)},$$

$$B^{(1)}(\sigma) = -\frac{(1 + \chi_1)(c_1\chi_1 + c_2\chi_2)Q(|\sigma| - \sigma)}{c_1K_3(\sigma)K_3^{(1)}(\sigma)}e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}b}, \quad (2.3.16)$$

$$K_3^{(1)}(\sigma) = (1 + \chi_1)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} - \chi_1\sigma + \frac{c_2}{c_1}\left((1 + \chi_2)\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - \chi_2\sigma\right).$$

Функция $K_3(\sigma)$ имеет нули только в точках $\pm\sigma_3$ [4], σ_3 – единственный положительный корень уравнения $K_3(\sigma) = 0$, при $\sigma = \sigma_3 > k_2 > k_1 > 0$, [6,51] если

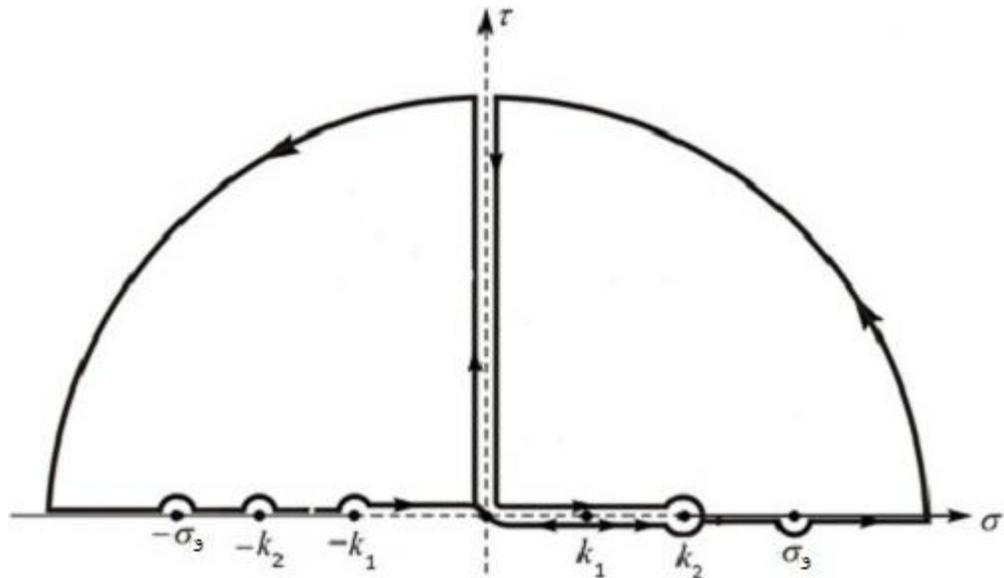
$$\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}} < \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \left(1 + \frac{c_2\chi_2}{c_1\chi_1}\right), \quad (2.3.17)$$

Преобразуем интегралы (2.3.14), (2.3.15) методом контурного интегрирования в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. Действительная ось обходит, как точки ветвления функций $\gamma_i(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_i^2}$, так и нули функции $K_3(\sigma)$, представляющие полюсы соответствующих подынтегральных функций. Обеспечивая условия уходящей волны, действительная ось комплексной плоскости обходит точку $\sigma = -\sigma_3$ сверху, а точку $\sigma = +\sigma_3$ снизу. Для выбора ветвей двузначных функций $\gamma_1(\alpha)$, $\gamma_2(\alpha)$, следует провести в комплексной плоскости разрезы до бесконечности от точек $\sigma = k_1$, $\sigma = k_2$ в верхней полуплоскости и от точек $\sigma = -k_1$, $\sigma = -k_2$ в нижней полуплоскости, в основу принимая принцип уходящей волны [46,47,51]. Аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется в виде $|\alpha| = \alpha$ при $\text{Re } \alpha > 0$, $|\alpha| = -\alpha$ при $\text{Re } \alpha < 0$. Путь интегрирования замыкается в верхней полуплоскости комплексной плоскости [8,51].

Аналитические продолжения подынтегральных функций $A^{(1)}(\sigma)$, $B^{(1)}(\sigma)$, при таких разрезах в комплексной плоскости, внутри контура интегрирования имеют единственную особую точку $\sigma = \sigma_3$ – простой полюс $K_3(\sigma_3) = 0$.

Задача симметрична по x , следовательно такие-же представления функций амплитуд имеют место и в составном полупространстве $x > 0$. Путь интегрирования замыкается уже в нижней полуплоскости комплексной плоскости. Аналитические продолжения подынтегральных функций внутри контура интегрирования в этом случае имеют единственную особую точку $\sigma = -\sigma_3$.

Существование сдвиговых поверхностных волн в полупространствах обусловлено пьезоэффектом, и наличие источника механических колебаний приводит к распространению этих электроупругих волн. На контактной плоскости раздела амплитуда поверхностной волны принимает максимальное значение.



Фиг.7

После контурного интегрирования [8,30,51] получим представления функций амплитуд в виде суммы поверхностных волн, если имеет место условие (2.3.17), и регулярных интегралов по берегам разрезом – характеризующих объемные затухающие волны. В пространстве появляются обусловленные наличием

пьезоэффекта объемные волны распространяющиеся от контактной поверхности по направлению y и имеющие неволновой характер по x на контактной поверхности.

Функции амплитуд поверхностных волн распространяющихся в составном полупространстве $x < 0$, имеют вид

$$\begin{aligned} w_{1\beta}(x, y) &= A_3 e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma_3 x}, & y > 0 \\ w_{2\beta}(x, y) &= A_3 e^{\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_3 x}, & y < 0 \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

где

$$A_3 = \frac{i(1 + \chi_1)Q}{K_3'(\sigma_3)} e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} b}, \quad K_3'(\sigma) = \frac{dK_3(\sigma)}{d\sigma}.$$

и в составном полупространстве $x > 0$

$$\begin{aligned} w_{1\beta}(x, y) &= A_3 e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma_3 x}, & y > 0 \\ w_{2\beta}(x, y) &= A_3 e^{\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2} y} e^{i\sigma_3 x}. & y < 0 \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Асимптотическое представление перемещений на граничной плоскости $y = 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$w_1(x, 0) = A_3 e^{i\sigma_0 |x|} + e^{ik_1 x} O(|k_1 x|^{-3/2}) + \chi_1 O(|k_1 x|^{-2}). \quad (2.3.24)$$

Неоднородность среды, пьезоэффект и наличие тонкого металлического электропроводящего слоя приводят к существенным изменениям электроупругого волнового поля. Источник стационарных механических колебаний в составной пьезоэлектрической среде, приводит к распространению сдвиговой поверхностной волны локализованной у плоскости полного электромеханического контакта при некоторых определенных значениях электроупругих параметров.

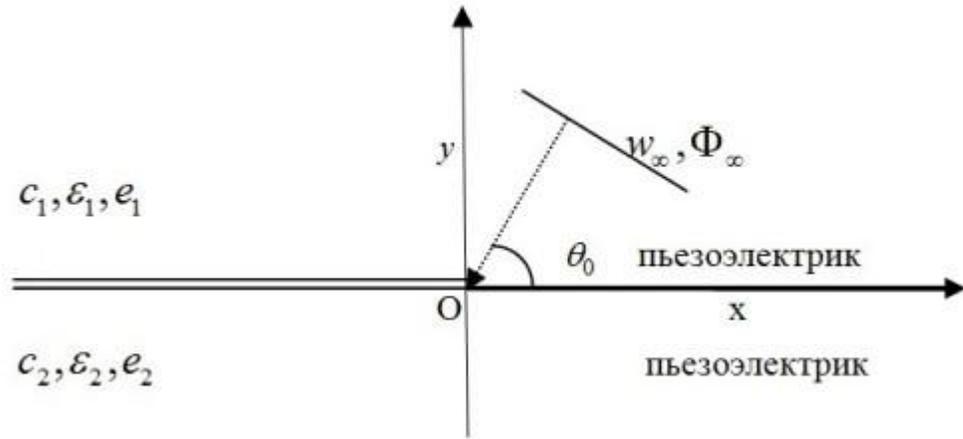
ГЛАВА III

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ СДВИГА НА КРАЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СОСТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 3.1. Дифракция электроупругой плоской волны сдвига в составном пьезоэлектрическом пространстве

Рассматривается задача определения волнового поля в неоднородном (составном) пьезоэлектрическом пространстве, отнесённом к декартовой системе координат $Oxuz$, при распространении электроупругой плоской волны сдвига из бесконечности в полупространстве $y > 0$. Неоднородность среды обусловлена наличием двух пьезоэлектрических полупространств $y > 0$ и $y < 0$ – пьезоэлектриков класса $6mm$ гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла, с разными электроупругими характеристиками, на плоскости $y = 0$ физические свойства среды претерпевают разрыв. Отметим, что в настоящее время повысились возможности технологии создания конструктивно неоднородных материалов для инженерной практики. Конструктивная неоднородность анизотропных упругих сред – обладающих свойством пьезоэффекта, вносит существенное изменение в классическую теорию электроупругих волновых процессов в деформируемых средах. Пьезоэлектрические полупространства скреплены по плоскости $y = 0, x > 0, -\infty < z < \infty$, т.е. считаем, что между полупространствами осуществляется акустический контакт в плоскости Oxz при $x > 0$. В плоскости Oxz при $x < 0$ пьезоэлектрические полупространства взаимодействуют без акустического (механического) контакта. Можно принять, что рассматриваемая составная среда

имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x < 0$. В пьезоэлектрическом полупространстве $y > 0$ из бесконечности под углом $\theta_0 \left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \right)$ к плоскости раздела $y = 0$ распространяется плоская электроупругая волна сдвига [42]



Фиг.8

$$\begin{aligned} u_z^\infty(x, y, t) &= w_\infty(x, y) e^{-i\omega t} \\ \Phi^\infty(x, y, t) &= \Phi_\infty(x, y) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического поля, соответственно [39,40,42]

$$\begin{aligned} w_\infty(x, y) &= e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0}, \\ \Phi_\infty(x, y) &= \frac{e_1}{\varepsilon_1} e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0}. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Здесь ω – частота колебаний, t – параметр времени, $k_i = \omega / C_i$, $C_i = \sqrt{c_{44}^{(i)} (1 + \chi_i) / \rho_i}$, $\chi_i = e_i^2 / c_i \varepsilon_i$, $i = 1, 2$ – волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в пьезоэлектрических средах $y > 0$ и $y < 0$, соответственно. В этих соотношениях $c_i = c_{44}^{(i)}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)}$, $e_i = e_{15}^{(i)}$ – упругая,

диэлектрическая и пьезоэлектрическая постоянные в пьезоэлектрических полупространствах, а ρ_i плотность, $i = 1, 2$.

Край полубесконечной трещины является источником концентрации компонентов электроупругого поля. Рассматривается обусловленная наличием полубесконечной трещины, дифракция падающей сдвиговой плоской электроупругой волны (3.1.1) в составной среде. Теория дифракции рассматривает волновые процессы в тех случаях, когда на пути распространения волны имеется какое-либо препятствие – наличие вершин трещины или источники возмущения, полуплоскости. При наличии в среде некоторых неоднородностей, локализованных или распределенных в пространстве, порождается дифракция волн. Дифракция волн в широком смысле отклонения волновых движений от принятых законов акустики. Отклонение которое нельзя объяснить отражением или преломлением. Явление дифракции можно объяснить искривлением волны после прохождения преграды – разделительной плоскости. Дифракция уникальное свойство волн, это способность волн огибать встречающиеся на их пути препятствия и заходить в область позади них, переносить энергию в области, лежащие за препятствием. Волны огибают или как говорят дифрагируют на краю препятствия.

Для рассматриваемого класса гексагональной симметрии задача распространения электроупругих волн в пьезоэлектрических средах разделяется на плоскую и антиплоскую. По постановке задачи среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах. Для полной характеристики волнового процесса необходимо знать величину смещения частиц среды как функцию двух пространственных переменных и времени. Изучается линейное взаимодействие электрического и механического полей при контакте двух пьезоэлектрических полупространств. Учитывая гармоническую зависимость от времени (временной

множитель $e^{-i\omega t}$) всех составляющих волнового поля, для определения амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах, имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + k_i^2 w_i &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + k_i^2 \frac{e_i}{\varepsilon_i} w_i &= 0. \end{aligned} \quad i=1,2 \quad (3.1.3)$$

Понятно, что в приведенных уравнениях $w_1(x, y), \Phi_1(x, y)$ функции амплитуд перемещения и электрического потенциала пьезоэлектрика $y > 0, -\infty < x < \infty$, а $w_2(x, y), \Phi_2(x, y)$ – пьезоэлектрика $y < 0, -\infty < x < \infty$.

На берегах трещины для амплитуд напряжений $\sigma_{yz}^{(1)}, \sigma_{yz}^{(2)}$, соответственно для пьезоэлектриков $y > 0$ и $y < 0$, имеем условия

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{(1)} &= c_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0, & y=0, x < 0 \\ \sigma_{yz}^{(2)} &= c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0. & y=0, x < 0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Разница перемещений на берегах трещины пока неопределенная величина [26,42]

$$w_1(x, +0) - w_2(x, -0) = w_0(x). \quad \text{при } x < 0 \quad (3.1.5)$$

Решения уравнений (3.1.3) должны удовлетворять контактными условиям скрепления при $y = 0, x > 0$

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0) = q_0(x), \quad w_1(x, +0) = w_2(x, -0). \quad (3.1.6)$$

Функции $q_+(x) = q_0(x)\vartheta(x)$ и $\psi_-(x) = w_0(x)\vartheta(-x)$, где $\vartheta(x)$ – известная функция Хевисайда, представляют касательное напряжение при $y = 0$ и разницу перемещений на $y = \pm 0$, соответственно.

Тогда условия на контактной плоскости разнородных полупространств (3.1.4)–(3.1.6) принимают вид

$$c_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = q_+(x), \quad y = 0 \quad (3.1.7)$$

$$w_1(x, +0) - w_2(x, -0) = \psi_-(x).$$

Из физических соображений ясно, что для характеристических функций электрического поля данного составного пространства имеют место условия непрерывности по плоскости $y = 0$. Амплитуды электрического потенциала и составляющей вектора электрической индукции в полупространствах удовлетворяют следующим контактными условиям:

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_2(x, 0), \quad D_1(x, 0) = D_2(x, 0), \quad y = 0 \quad (3.1.8)$$

$$D_i = e_i \frac{\partial w_i}{\partial y} - \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \quad i = 1, 2$$

Таким образом поставленная задача определения дифрагированного электроупругого волнового поля в составном пространстве при дифракции падающей из бесконечности плоской электроупругой волны сдвига (3.1.1), (3.1.2) на полубесконечной трещине в рассматриваемой пьезосреде, сведена к решению дифференциальных уравнений (3.1.3) при контактных условиях (3.1.7)–(3.1.8). Задаче дифракции плоской электроупругой волны на полубесконечной трещине между скрепленными диэлектрическими полупространствами, когда только одно из полупространств обладает пьезоэффектом, посвящена работа [28].

Применяется интегральное преобразование Фурье по переменной x , и относительно трансформантов Фурье искомых функций из (3.1.3) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k_1^2) \bar{u} &= 0, \\ \frac{d^2 \bar{\Phi}}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi} + k_1^2 \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{u} &= 0, \end{aligned} \quad y > 0 \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}_2}{dy^2} - (\sigma^2 - k_2^2) \bar{w}_2 &= 0, \\ \frac{d^2 \bar{\Phi}_2}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_2 + k_2^2 \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2 &= 0. \end{aligned} \quad y < 0 \quad (3.1.10)$$

Здесь введены функции

$$\begin{aligned} u(x, y) &= w_1(x, y) - w_\infty(x, y), \\ \varphi(x, y) &= \Phi_1(x, y) - \Phi_\infty(x, y), \end{aligned} \quad y > 0 \quad (3.1.11)$$

следовательно

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(\sigma, y) &= \bar{u}(\sigma, y) + 2\pi e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0), \\ \bar{\Phi}_1(\sigma, y) &= \bar{\Phi}(\sigma, y) + 2\pi \frac{e_1}{\varepsilon_1} e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0), \end{aligned} \quad y > 0 \quad (3.1.12)$$

$\delta(\sigma)$ – функция Дирака.

Решения уравнений (3.1.9), (3.1.10) должны удовлетворять следующим условиям на граничной плоскости раздела двух сред, т.е. контактными условиям

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(\sigma + 0) - \bar{w}_2(\sigma, -0) &= \bar{\psi}_-(\sigma), \quad \bar{\Phi}_1(\sigma, +0) = \bar{\Phi}_2(\sigma, -0), \\ e_1 \frac{d\bar{w}_1}{dy} - \varepsilon_1 \frac{d\bar{\Phi}_1}{dy} &= e_2 \frac{d\bar{w}_2}{dy} - \varepsilon_2 \frac{d\bar{\Phi}_2}{dy}, \\ c_1 \frac{d\bar{w}_1}{dy} + e_1 \frac{d\bar{\Phi}_1}{dy} &= c_2 \frac{d\bar{w}_2}{dy} + e_2 \frac{d\bar{\Phi}_2}{dy} = \bar{q}_+(\sigma). \end{aligned} \quad y = 0 \quad (3.1.13)$$

$\bar{\psi}_-(\sigma), \bar{q}_+(\sigma)$ трансформанты Фурье функций $\psi_-(x)$ и $q_+(x)$.

Выражения для искомым функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах получим после обратного преобразования Фурье

$$\{w_i(x, y), \Phi_i(x, y)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{w}_i(\sigma, y), \bar{\Phi}_i(\sigma, y)\} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad i=1,2$$

Трансформанты функций амплитуд перемещения и потенциала электрического поля для пьезоэлектрических полупространств представляются в виде

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= A_1(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} + 2\pi e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0), \\ \bar{\Phi}_1 &= B_1(\sigma) e^{-|\sigma| y} + \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{w}_1, \end{aligned} \quad y > 0 \quad (3.1.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 &= A_2(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y}, \\ \bar{\Phi}_2 &= B_2(\sigma) e^{|\sigma| y} + \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2, \end{aligned} \quad y < 0 \quad (3.1.15)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(\sigma) &= -\frac{e_2 \varepsilon_1}{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1} \bar{\psi}_-(\sigma) - \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1} B_1 - 2\pi \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0), \\ B_1(\sigma) &= \frac{K_3(\sigma)}{|\sigma| K_*(\sigma)} \bar{q}_+(\sigma) - 4\pi \frac{e_1}{\varepsilon_1} \frac{\delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0)}{K_*(k_1 \cos \theta_0)}, \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

$$A_2(\sigma) = A_1(\sigma) - \bar{\psi}_-(\sigma) + 2\pi \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0), \quad B_2(\sigma) = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} B_1(\sigma),$$

$$K_3(\sigma) = \frac{\chi_1}{e_1 (1 + \chi_1)} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} + \frac{\chi_2}{e_2 (1 + \chi_2)} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}.$$

Характеристические функции данной задачи, со смешанным условием на контактной плоскости, имеют вид [28,41,42,54]

$$\begin{aligned} K_*(\sigma) &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2} - \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}, \\ K_0(\sigma) &= c_1 (1 + \chi_1) \frac{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}{|\sigma|} + c_2 (1 + \chi_2) \frac{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{|\sigma|} - \frac{(e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Выполняя условия уходящей волны, принимается, что $\gamma_1(\sigma) \rightarrow |\sigma|$, $\gamma_2(\sigma) \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ и $\gamma_1(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} = -i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2}$, $\gamma_2(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} = -i\sqrt{k_2^2 - \sigma^2}$, т.е. предполагается, что действительная ось обходит точки ветвления $\sigma = -k_1$, $\sigma = -k_2$ функций комплексного переменного $\gamma_1(\alpha)$, $\gamma_2(\alpha)$ сверху, а $\sigma = k_1$, $\sigma = k_2$ – снизу [28,46,47].

Относительно неизвестных функций $\bar{\psi}_-(\sigma)$, $\bar{q}_+(\sigma)$ в формулах (3.1.14), (3.1.15) получим из (3.1.13) следующее уравнение

$$c_1 \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \Lambda_1(\sigma) \bar{\psi}_-(\sigma) + \mu_0 \Lambda_2(\sigma) \bar{q}_+(\sigma) + 4\pi i k_1 c_1 \frac{\mu_1}{1 + \varepsilon_0} \sin \theta_0 \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0) = 0, \quad (3.1.18)$$

здесь

$$\Lambda_1(\sigma) = \frac{(1 + \chi_1)(1 + \chi_2) \varepsilon_2}{\varepsilon_1(1 + \chi_1) + \varepsilon_2(1 + \chi_2)} K_*(\sigma), \quad (3.1.19)$$

$$\Lambda_2(\sigma) = \frac{1}{(c_1 + c_2)(1 + \chi_0)} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}} K_0(\sigma),$$

$$\lambda_0 = \frac{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1}{e_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \frac{ik_1 \cos \theta_0}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0}},$$

$$\mu_0 = \frac{(1 + c_0)(1 + \chi_0)}{1 + \varepsilon_0}, \quad \mu_1 = (1 + \chi_1)(1 + \chi_2)(1 + \lambda_0),$$

$$c_0 = \frac{c_1}{c_2}, \quad \chi_0 = \frac{(e_1 + e_2)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(c_1 + c_2)}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 \chi_1 + \varepsilon_2 \chi_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Рассмотрим частный случай, когда между пьезоэлектрическими полупространствами осуществляется только электрический контакт – они взаимодействуют без акустического контакта, т.е. в составном

пьезоэлектрическом пространстве существует бесконечная трещина по плоскости $y = 0$, следует принять, что $q_+(x) = 0$. Тогда получим значения функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в пьезоэлектрическом полупространстве $y > 0$

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= e^{-ik_1x \cos \theta_0 - ik_1y \sin \theta_0} + A_{1*} e^{-ik_1x \cos \theta_0 + ik_1y \sin \theta_0}, \\ \Phi_1(x, y) &= \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_1(x, y) - \frac{2e_1}{\varepsilon_1 K_*(k_1 \cos \theta_0)} e^{-ik_1x \cos \theta_0} e^{-k_1y \cos \theta_0}, \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

а в пьезоэлектрической среде $y < 0$

$$\begin{aligned} w_2(x, y) &= A_{2*} e^{-ik_1x \cos \theta_0 - i\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0} y}, \\ \Phi_2(x, y) &= \frac{e_2}{\varepsilon_2} w_2(x, y) + \frac{2e_1}{\varepsilon_2 K_*(k_1 \cos \theta_0)} e^{-ik_1x \cos \theta_0} e^{k_1y \cos \theta_0}, \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

где

$$\begin{aligned} A_{1*} &= 1 + 2i \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{K_*(k_1 \cos \theta_0)} \\ A_{2*} &= -2i \frac{\chi_2}{e_2 (1 + \chi_2)} \frac{e_1 k_1 \cos \theta_0}{K_*(k_1 \cos \theta_0) \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0}} \end{aligned}$$

Наличие локализованной волны, в виде последних членов в выражениях (3.1.20), (3.1.21), обусловлено падающей волной и особенностями уравнений электростатики. Как и следовало ожидать, $w_2 = 0$ как при отсутствии пьезоэффекта в среде $y < 0$, так и при отсутствии пьезоэффекта в полупространстве $y > 0$ $A_{1*} = 1$, $A_{2*} = 0$. Как видно из полученных формул электроупругое волновое поле в составном пьезоэлектрическом пространстве, в данном случае, состоит из падающей, отраженной и проходящей волн. Наличие локализованной волны для электрических потенциалов обусловлено падающей волной и особенностями уравнений электростатики.

Необходимо рассматривать и другой частный случай, когда пьезоэлектрические полупространства скреплены по всей плоскости $y = 0$. В этом случае имеет место полный электромеханический (акустический) контакт между пьезоэлектриками. Уже следует принять $\psi_-(x) = 0$, и для этой задачи отражения и преломления волн получим значения функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в пьезоэлектрическом полупространстве $y > 0$ в виде

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0} - A_{10} e^{-ik_1 x \cos \theta_0 + ik_1 y \sin \theta_0}, \\ \Phi_1(x, y) &= \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_1(x, y) - B_{10} e^{-ik_1 x \cos \theta_0} e^{-k_1 y \cos \theta_0}, \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

а в полупространстве $y < 0$

$$\begin{aligned} w_2(x, y) &= (1 - A_{10}) e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - i \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0} y}, \\ \Phi_2(x, y) &= \frac{e_2}{\varepsilon_2} w_2(x, y) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} B_{10} e^{-ik_1 x \cos \theta_0} e^{k_1 y \cos \theta_0}, \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

где

$$\begin{aligned} A_{10} &= 1 + \frac{2ic_1(1 + \chi_1) \operatorname{tg} \theta_0}{K_0(k_1 \cos \theta_0)}, \\ B_{10} &= \frac{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} (A_{10} - 1). \end{aligned}$$

Плоская волна, падающая на плоскую границу, разделяющую две разные пьезоэлектрические среды, разделяется на две волны: проходящую во вторую среду и отраженную. Таким образом, и в этой частной задаче электроупругое волновое поле сдвига состоит из падающей и отраженной волны в пьезоэлектрическом полупространстве $y > 0$ и из проходящей в пьезоэлектрическом полупространстве $y < 0$. Локализованные (поверхностные) у поверхности контакта электроупругие волны, как и в первом частном случае, не возбуждаются.

В случае отсутствия пьезоэффекта в пространстве

$$A_{10} = \frac{c_2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0} - c_1 k_1 \sin \theta_0}{c_2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0} + c_1 k_1 \sin \theta_0},$$

очевидно, что при $\cos \theta_0 = \frac{k_2}{k_1} < 1$ формулы соответствуют известному случаю

полного внутреннего отражения ($A_{10} = -1$)

$$w_1(x, y) = e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0} + e^{-ik_1 x \cos \theta_0 + ik_1 y \sin \theta_0},$$

$$w_2(x, y) = 2e^{-ik_1 x \cos \theta_0}.$$

Функциональное уравнение для определения искомых функций $\bar{q}_+(\sigma), \bar{\psi}_-(\sigma)$ (3.1.18) рассматривается как краевая задача типа Римана в теории аналитических функций на действительной оси [24,26,28]. Анализируя функцию $K_*(\sigma)$, доказывается, что $K_*(\sigma)$ имеет нули только в точках $\pm\sigma_*$, σ_* – единственный положительный корень уравнения $K_*(\sigma) = 0$. Рассматривая нули функции $K_0(\sigma)$, доказывается, что уравнение $K_0(\sigma) = 0$ имеет единственный положительный корень $\sigma = \sigma_0 > k_2$, для определенности принимается $k_2 > k_1$, если

$$\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}} < \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(1 - \frac{e_2 \varepsilon_1}{e_1 \varepsilon_2} \right)^2. \quad (3.1.24)$$

Функция $K_0(\sigma)$ при приведенном выше условии имеет нули только в точках $\pm\sigma_0$. Рассматривая области монотонности функций $K_i(\sigma)$, $i = 1, 2$, доказывается, что $\sigma_0 < \sigma_*$. При решении функционального уравнения (3.1.18) и факторизации функции $L(\sigma)$ принимается, что действительная ось обходит, как точки ветвления $\pm k_1, \pm k_2$ функций $\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha)$, так и нули функций $K_*(\sigma), K_0(\sigma)$

$\pm\sigma_*$ и $\pm\sigma_0$, т.е. действительная ось обходит точки $\sigma = -\sigma_*$, $\sigma = -\sigma_0$ сверху, а точки $\sigma = \sigma_0$, $\sigma = \sigma_*$ – снизу, обеспечивая условия уходящей волны [3,5]. В случае, когда диэлектрическое полупространство $y < 0$ не обладает пьезоэффектом $e_2 = 0$, то для нулей соответствующих функций $K_*(\sigma)$, $K_0(\sigma)$ $\pm\sigma_{*1}$ и $\pm\sigma_{01}$, доказываем, что $\sigma_{01} < \sigma_{*1}$, при этом $\sigma_0 < \sigma_{01}$, $\sigma_{*1} < \sigma_*$.

Функциональное уравнение (3.1.18) решается используя методику развитую в [2–5], решения строятся факторизуя функцию $L(\sigma)$, представляя ее в виде

$$L(\sigma) = L^+(\sigma)L^-(\sigma),$$

$$L(\sigma) = \frac{\Lambda_1(\sigma)}{\Lambda_2(\sigma)} \quad (3.1.25)$$

Метод факторизации успешно используется для нахождения точного решения краевых задач акустики, электродинамики и теории распространения упругих волн [8,9,24,39]. Функции $\Lambda_1(\sigma) \rightarrow 1$, $\Lambda_2(\sigma) \rightarrow 1$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$,

$$\Lambda_i^\pm(\alpha) \rightarrow 1, \text{ при } |\alpha| \rightarrow \infty,$$

где функции $L^\pm(\alpha)$, $\alpha = \sigma + i\tau$ регулярны и не имеют нулей при $\text{Im}\alpha > 0$ и $\text{Im}\alpha < 0$, соответственно. $L^\pm(\sigma)$ граничные значения этих функций.

$$L^+(\sigma) = \exp(F^+(\sigma)), \quad L^-(\sigma) = \exp(F^-(\sigma)),$$

$$F^+(\sigma) = \int_0^\infty F(x)e^{ix(\sigma+i0)} dx, \quad F^-(\sigma) = F^+(-\sigma),$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \ln L(\sigma)e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad L^-(\sigma) = L^+(\sigma)$$

Аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется $|\alpha| = \alpha$ при $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $|\alpha| = -\alpha$ при $\operatorname{Re} \alpha < 0$. При контурном интегрировании имеется в виду, что

$$\frac{1}{s - (\sigma - i0)} = \frac{1}{s - \sigma} - i\pi\delta(s - \sigma),$$

и используется формула

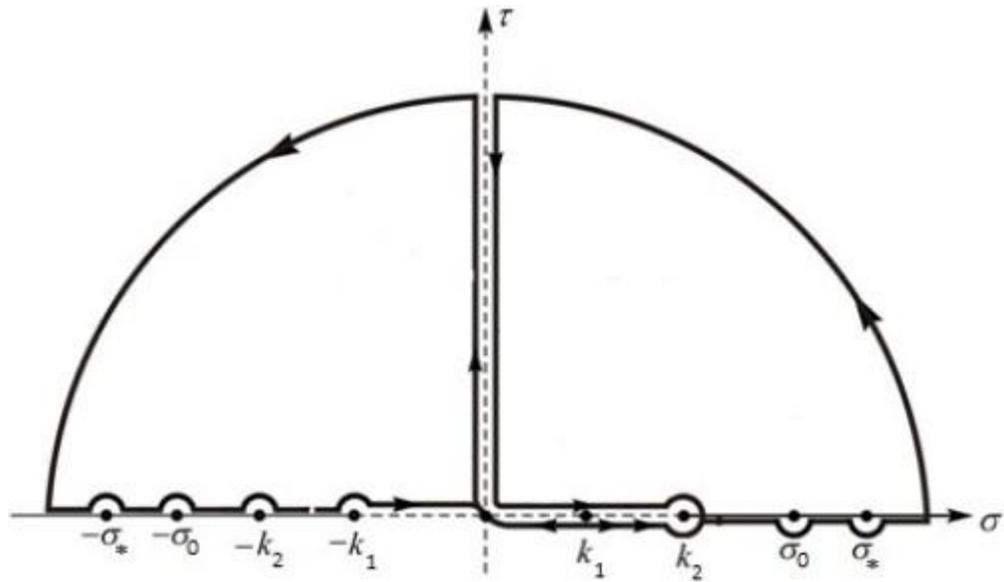
$$2\pi i\delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 + i0}$$

Выражения искомым функций принимают вид

$$\bar{\psi}_-(\sigma) = -\frac{b}{\sqrt{\sigma - k_1} L^-(\sigma)(\sigma - k_1 \cos \theta_0 - i0)},$$

$$\bar{q}_+(\sigma) = \frac{c_1 b \sqrt{\sigma + k_1} L^+(\sigma)}{\mu_0 (\sigma - k_1 \cos \theta_0 + i0)},$$

$$b = \frac{2\sqrt{2k_1} \mu_1 \sin \frac{\theta_0}{2}}{\Lambda_2(k_1 \cos \theta_0) L^+(k_1 \cos \theta_0)(1 + \varepsilon_0)},$$



Фиг.9

Функции амплитуд перемещения в пьезоэлектрических полупространствах при $x < 0$ принимают вид

$$\begin{aligned}
 w_1(x, y) &= e^{-ik_1x \cos \theta_0 - ik_1y \sin \theta_0} + A_{1*} e^{-ik_1x \cos \theta_0 + ik_1y \sin \theta_0} - \\
 &- \frac{b}{2\pi\mu_0(1+\chi_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e_1 \frac{K_3(\sigma)}{K_*(\sigma)} \right) \frac{\sqrt{\sigma+k_1} L^+(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-k_1^2} (\sigma - k_1 \cos \theta_0 + i0)}, \\
 w_2(x, y) &= A_{2*} e^{-ik_1x \cos \theta_0 - i\sqrt{k_2^2-k_1^2} \cos^2 \theta_0 y} - \\
 &- \frac{bc_1}{2\pi c_2 \mu_0 (1+\chi_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + e_2 \frac{\varepsilon_1 K_3(\sigma)}{\varepsilon_2 K_*(\sigma)} \right) \frac{\sqrt{\sigma+k_1} L^+(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-k_2^2} (\sigma - k_1 \cos \theta_0 + i0)},
 \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

а при $x > 0$

$$\begin{aligned}
 w_1(x, y) &= e^{-ik_1x \cos \theta_0 - ik_1y \sin \theta_0} - A_{10} e^{-ik_1x \cos \theta_0 + ik_1y \sin \theta_0} + \\
 &+ \frac{b}{2\pi} \frac{e_2 \varepsilon_1}{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{e_1 K_4(\sigma)}{\varepsilon_1 K_0(\sigma)} \right) \frac{e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma-k_1} L^-(\sigma) (\sigma - k_1 \cos \theta_0 - i0)}, \\
 w_2(x, y) &= (1 - A_{10}) e^{-ik_1x \cos \theta_0 - i\sqrt{k_2^2-k_1^2} \cos^2 \theta_0 y} + \\
 &+ \frac{b}{2\pi} \frac{e_1 \varepsilon_2}{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{e_2 K_4(\sigma)}{\varepsilon_2 K_0(\sigma)} \right) \frac{e^{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma-k_1} L^-(\sigma) (\sigma - k_1 \cos \theta_0 - i0)}. \\
 K_4(\sigma) &= e_1 \frac{1+\chi_1}{\chi_1} \frac{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}{|\sigma|} + e_2 \frac{1+\chi_2}{\chi_2} \frac{\sqrt{\sigma^2-k_2^2}}{|\sigma|}
 \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

Получены соответствующие регулярные интегралы:

при $x < 0$

$$I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e_1 \frac{K_3(\sigma, \gamma(\sigma))}{K_*(\sigma, \gamma(\sigma))} \right) \frac{\sqrt{\sigma+k_1} L^+(\sigma, \gamma(\sigma)) e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-k_1^2} (\sigma - k_1 \cos \theta_0 + i0)},$$

$$\begin{aligned}
I_1(x, y) &= \int_0^{\infty} \left(1 - e_1 \frac{K_3(i\tau, i\sqrt{k^2 + \tau^2})}{K_*(i\tau, i\sqrt{k^2 + \tau^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 + i\tau} L^+(i\tau, i\sqrt{k^2 + \tau^2}) e^{\tau x} e^{-i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} y} d\tau}{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} (i\tau - k_1 \cos \theta_0)}, \\
I_2(x, y) &= - \int_0^{\infty} \left(1 - e_1 \frac{K_3(-i\tau, -i\sqrt{k^2 + \tau^2})}{K_*(-i\tau, -i\sqrt{k^2 + \tau^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 - i\tau} L^+(-i\tau, -i\sqrt{k^2 + \tau^2}) e^{\tau x} e^{i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} y} d\tau}{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} (-i\tau - k_1 \cos \theta_0)}, \\
I_3(x, y) &= -i \int_0^{k_1} \left(1 - e_1 \frac{K_3(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})}{K_*(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 + \sigma} L^+(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{-i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (\sigma - k_1 \cos \theta_0)}, \\
I_4(x, y) &= -i \int_0^{k_1} \left(1 - e_1 \frac{K_3(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})}{K_*(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 + \sigma} L^+(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (\sigma - k_1 \cos \theta_0)}, \\
I_5(x, y) &= \int_{k_1}^{k_2} \left(1 - e_1 \frac{K_3(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})}{K_*(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 + \sigma} L^+(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} (\sigma - k_1 \cos \theta_0)}, \\
I_6(x, y) &= - \int_{k_1}^{k_2} \left(1 - e_1 \frac{K_3(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})}{K_*(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 + \sigma} L^+(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} (\sigma - k_1 \cos \theta_0)},
\end{aligned}$$

при $x > 0$

$$\begin{aligned}
I(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{e_1 K_4(\sigma, \gamma(\sigma))}{\varepsilon_1 K_0(\sigma, \gamma(\sigma))} \right) \frac{e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma - k_1} L^-(\sigma, \gamma(\sigma)) (\sigma - k_1 \cos \theta_0 - i0)}, \\
I_1(x, y) &= \int_{-\infty}^0 \left(1 - \frac{e_1 K_4(-i\tau, i\sqrt{k^2 + \tau^2})}{\varepsilon_1 K_0(-i\tau, i\sqrt{k^2 + \tau^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 - i\tau} e^{-i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} y} e^{-\tau x} d\tau}{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} L^-(-i\tau, i\sqrt{k^2 + \tau^2}) (i\tau + k_1 \cos \theta_0)}, \\
I_2(x, y) &= \int_{-\infty}^0 \left(1 - \frac{e_1 K_4(i\tau, -i\sqrt{k^2 + \tau^2})}{\varepsilon_1 K_0(i\tau, -i\sqrt{k^2 + \tau^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 + i\tau} e^{i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} y} e^{\tau x} d\tau}{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} L^-(i\tau, -i\sqrt{k^2 + \tau^2}) (i\tau - k_1 \cos \theta_0)}, \\
I_3(x, y) &= i \int_{-k_1}^0 \left(1 - \frac{e_1 K_4(-\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})}{\varepsilon_1 K_0(-\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 - \sigma} e^{-i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} y} e^{i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} L^-(-\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) (\sigma + k_1 \cos \theta_0)},
\end{aligned}$$

$$I_4(x, y) = i \int_{-k_1}^0 \left(1 - \frac{e_1 K_4(-\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})}{\varepsilon_1 K_0(-\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 - \sigma} e^{i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} y} e^{i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} L(-\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})(\sigma + k_1 \cos \theta_0)},$$

$$I_5(x, y) = - \int_{-k_2}^{-k_1} \left(1 - \frac{e_1 K_4(-\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})}{\varepsilon_1 K_0(-\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 - \sigma} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} L(-\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})(\sigma + k_1 \cos \theta_0)},$$

$$I_6(x, y) = \int_{-k_2}^{-k_1} \left(1 - \frac{e_1 K_4(-\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})}{\varepsilon_1 K_0(-\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})} \right) \frac{\sqrt{k_1 - \sigma} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} L(-\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})(\sigma + k_1 \cos \theta_0)},$$

Распределение контактного напряжения при $x \rightarrow +0$

$$\sigma_{yz}(x, 0) = C \frac{\sin \theta_0 / 2}{\sqrt{k_1 x}} + O(1).$$

Интегралы преобразуются методом контурного интегрирования в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. Показаны разрезы в комплексной плоскости и путь интегрирования. Путь интегрирования при $x < 0$ замыкается в верхней полуплоскости и действительная ось обходит точки $\mp \sigma_*$ сверху и снизу, соответственно. Аналитическое продолжение функции $K_*(\sigma)$, т.е. функция $K_*(\alpha)$, при таких разрезах в комплексной плоскости не имеет чисто мнимых, а также комплексных нулей, это следует из постановки задачи (принцип уходящей волны). Единственная особая точка простой полюс $\sigma = \sigma_*$. Интеграл представляется в виде суммы полученных регулярных интегралов [31,39,42]. Волновое поле состоит из падающей и отраженной волн, дифрагированных затухающих объемных волн, а также дифрагированной поверхностной волны локализованной у контактной поверхности

$$\begin{aligned} w_{1*}(x, y) &= A_*^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma_* x}, & y > 0 \\ w_{2*}(x, y) &= A_*^{(2)} e^{\sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_* x}, & y < 0 \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

$$A_*^{(1)} = -\frac{ie_1 b}{\mu_0(1+\chi_1)} \frac{\sqrt{\sigma_* + k_1} L^+(\sigma_*) K_3(\sigma_*)}{\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} K_*'(\sigma_*)(\sigma_* - k_1 \cos \theta_0)}, \quad A_*^{(2)} = \frac{e_1 \chi_2}{e_2 \chi_1} A_*^{(1)}.$$

Эта волна распространяется по оси x с волновым числом σ_* и скоростью ω/σ_* и затухает при $y \rightarrow \infty$. Дифрагированные объемные волны обусловлены наличием полубесконечной трещины, а появление поверхностной волны обусловлено также пьезоэффектом. Асимптотическое представление перемещений на граничной плоскости $y = +0$ при $x \rightarrow -\infty$ имеет вид

$$w_1(x, 0) = (1 + A_{1*}) e^{-ik_1 x \cos \theta_0} + A_*^{(1)} e^{i\sigma_* |x|} + e^{i(kx - \frac{\pi}{4})} O(|kx|^{-\frac{3}{2}}) + O(|kx|^{-\frac{3}{2}}).$$

Функция перемещений точек полупространства $x > 0$ представляется в виде суммы регулярных интегралов, падающей и отраженной волн, а также дифрагированной поверхностной волны локализованной у контактной поверхности

$$\begin{aligned} w_{10}(x, y) &= A_0^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma_0 x}, & y > 0 \\ w_{20}(x, y) &= A_0^{(1)} e^{\sqrt{\sigma_0^2 - k_2^2} y} e^{i\sigma_0 x}, & y < 0 \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

$$A_0^{(1)} = \frac{ie_1 e_2 \varepsilon_1 b}{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1} \frac{\sqrt{k_1 - \sigma_0} K_4(-\sigma_0)}{\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2} L^-(\sigma_0) K_0'(-\sigma_0)(\sigma_0 + k_1 \cos \theta_0)}.$$

Действительная ось обходит точки $\mp \sigma_0$ сверху и снизу, соответственно. При некоторых значениях электроупругих характеристик составного пространства— условия (3.1.24), $-\sigma_0$ является корнем уравнения $K_0(\sigma) = 0$. Путь интегрирования замыкается в нижней полуплоскости. Аналитическое продолжение подынтегральной функции при таких разрезах в комплексной плоскости имеет только единственную особую точку простой полюс $\sigma = -\sigma_0$.

Асимптотическое представление на контактной плоскости $y = 0$ при $x \rightarrow \infty$

$$w_1(x, 0) = (1 - A_{10}) e^{-ik_1 x \cos \theta_0} + A_0^{(1)} e^{i\sigma_0 x} + e^{i(kx + \frac{\pi}{4})} O((kx)^{-\frac{3}{2}}) + O((kx)^{-\frac{3}{2}}).$$

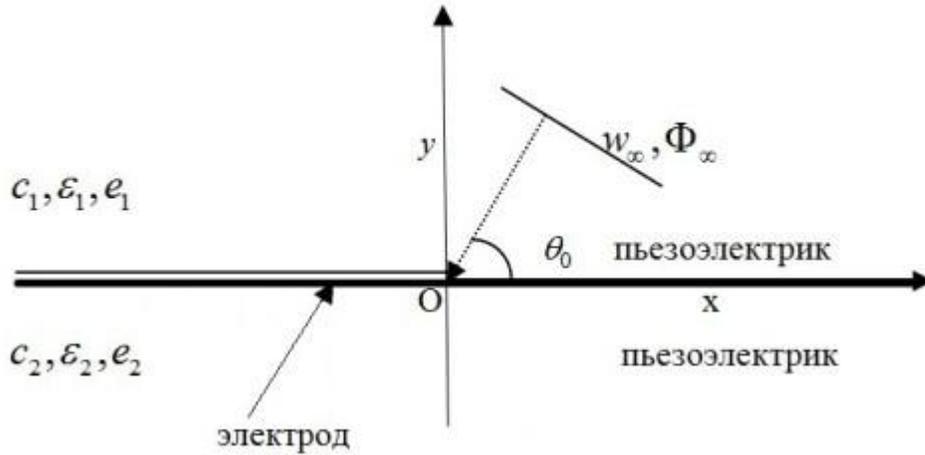
Волновое поле перемещений состоит из падающей волны, отраженной волны и дифрагированных затухающих объемных волн и распространяющаяся по направлению x к $+\infty$ со скоростью ω/σ_0 (σ_0 – волновое число) локализованной волны. Следует отметить, что $\omega/\sigma_0 > \omega/\sigma_*$, т.е. если локализованная волна существует – электромеханические характеристики удовлетворяют условию (3.1.24), то ее скорость распространения больше чем скорость поверхностной волны $w_{1*}(x, y)$ распространяющаяся по x к $-\infty$, когда между полупространствами отсутствует акустический контакт.

В случае $e_2 = 0$ (отсутствует пьезоэффект в полупространстве $y < 0$) для скоростей поверхностных волн имеем $\omega/\sigma_{01} > \omega/\sigma_{*1}$, при этом $\omega/\sigma_0 > \omega/\sigma_{01} > \omega/\sigma_{*1} > \omega/\sigma_*$, как уже следует из приведенных выше соотношений.

Выявлены новые, обусловленные дифракцией и пьезоэффектом, свойства и особенности. Наличие полубесконечной трещины приводит к существенному изменению волнового поля в составном пьезоэлектрическом пространстве – при определенных условиях физикомеханических параметров могут возбуждаться две поверхностные, локализованные у контактной плоскости, волны с разными скоростями распространения, а также появляются цилиндрическая волна и волна, распространяющаяся от контактной поверхности и имеющая неволновой характер на этой поверхности.

§3.2 Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом составном пространстве с металлическим слоем

Рассматривается задача дифракции падающей из бесконечности сдвиговой электроупругой волны в составной пьезоэлектрической среде. Дифракция обусловлена наличием полубесконечной трещины между пьезоэлектрическими полупространствами с разными электроупругими характеристиками. Рассматриваемая электроупругая среда приведена к декартовой системе координат $Oxyz$, пьезоэлектрические полупространства – пьезоэлектрики класса $6mm$ гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла, занимают полупространства $y > 0$ и $y < 0$. Тонкий металлический слой занимает граничную плоскость Oxz , из-за малой толщины пренебрегается жесткость. Электропроводящий слой можно рассматривать как тонкий электрод. Пьезоэлектрические полупространства скреплены по плоскости $y = 0, x > 0, -\infty < z < \infty$, т.е. считаем, что между полупространствами осуществляется акустический контакт в плоскости Oxz при $x > 0$. В плоскости Oxz при $x < 0$ ($y = 0, x < 0, -\infty < z < \infty$) между пьезоэлектрическими полупространствами взаимодействие происходит без акустического контакта. Принимается, что рассматриваемая составная диэлектрическая среда с пьезоэффектом имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x < 0$. Таким образом, в пьезоэлектрическом полупространстве из бесконечности под углом θ_0 ($0 < \theta_0 < \pi/2$) к плоскости $y = 0$ распространяется плоская электроупругая волна сдвига



Фиг.10

со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического потенциала, соответственно [29,31,42,52]

$$\begin{aligned}
 w_{\infty}(x, y) &= e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0}, \\
 \Phi_{\infty}(x, y) &= \frac{e_1}{\varepsilon_1} e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0}.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1}$$

Задача заключается в определении волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах, учитывая гармоническую зависимость от времени всех составляющих волнового поля – временной множитель $e^{-i\omega t}$. Здесь ω – частота колебаний, t – параметр времени, $k_i = \omega/C_i$, $C_i = \sqrt{c_{44}^{(i)}(1 + \chi_i)/\rho_i}$, $\chi_i = e_i^2/c_i \varepsilon_i$ – волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в пьезоэлектрических средах $y > 0$ и $y < 0$, соответственно. В этих соотношениях $c_i = c_{44}^{(i)}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)}$, $e_i = e_{15}^{(i)}$ – упругая, диэлектрическая и пьезоэлектрическая постоянные в пьезоэлектрических полупространствах, ρ_i – плотность, $i = 1, 2$.

Среда находится в условиях антиплоской деформации. Принимаются дифференциальные уравнения динамической теории упругости и уравнения электродинамики в квазистатическом приближении. Для определения амплитуд

перемещения и электрического потенциала в полупространствах, имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + k_i^2 w_i &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + k_i^2 \frac{e_i}{\varepsilon_i} w_i &= 0. \end{aligned} \quad i = 1, 2 \quad (3.2.2)$$

В приведенных уравнениях $w_1(x, y), \Phi_1(x, y)$ функции амплитуд перемещения и электрического потенциала пьезоэлектрика $y > 0, -\infty < x < \infty$, а $w_2(x, y), \Phi_2(x, y)$ – пьезоэлектрика $y < 0, -\infty < x < \infty$.

Амплитуды электрического потенциала удовлетворяют следующим контактными условиям, из-за наличия металлического слоя в плоскости контакта:

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y) = 0. \quad \text{при } y = 0 \quad (3.2.3)$$

На берегах трещины для амплитуд напряжений $\sigma_{yz}^{(1)}, \sigma_{yz}^{(2)}$ имеем условия

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{(1)} &= c_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0, & y = 0, x < 0 \\ \sigma_{yz}^{(2)} &= c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0. & y = 0, x < 0 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Разница перемещений на берегах трещины неизвестная пока величина

$$w_1(x, +0) - w_2(x, -0) = w_0(x). \quad \text{при } x < 0 \quad (3.2.5)$$

Решения уравнений (3.2.3) должны удовлетворять контактными условиям скрепления при $y = 0, x > 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) &= \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0) = q_0(x), \\ w_1(x, +0) &= w_2(x, -0). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Функции $q_+(x) = q_0(x)\mathfrak{H}(x)$ и $\psi_-(x) = w_0(x)\mathfrak{H}(-x)$, $\mathfrak{H}(x)$ – функция Хевисайда, представляют касательное напряжение при $y = 0$ и разницу

перемещений на $y = \pm 0$, соответственно. Контактные условия на граничной плоскости раздела полупространств (3.2.4)–(3.2.6) принимают вид

$$c_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = q_+(x), \quad (3.2.7)$$

$$w_1(x, +0) - w_2(x, -0) = \psi_-(x). \quad (3.2.8)$$

Задача определения дифрагированного электроупругого волнового поля в составном пьезоэлектрическом пространстве при дифракции падающей из бесконечности плоской электроупругой волны сдвига (3.2.1) сведена к решению дифференциальных уравнений (3.2.2) при контактных условиях (3.2.3), (3.2.7), (3.2.8).

Применяется интегральное преобразование Фурье по переменной x , и выражения для искомым функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах получим после обратного преобразования Фурье в виде

$$\begin{aligned} w_i(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{w}_i(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma, \\ \Phi_i(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}_i(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma, \end{aligned} \quad i = 1, 2 \quad (3.2.9)$$

где трансформанты Фурье искомым функций представляются в виде

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(\sigma, y) &= A_1(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} + 2\pi e^{-ik_1 y \sin \theta_0} \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0), \\ \bar{\Phi}_1(\sigma, y) &= B_1(\sigma) e^{-|\sigma| y} + \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{w}_1, \end{aligned} \quad y > 0 \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2(\sigma, y) &= A_2(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y}, \\ \bar{\Phi}_2(\sigma, y) &= B_2(\sigma) e^{|\sigma| y} + \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2, \end{aligned} \quad y < 0 \quad (3.2.11)$$

здесь

$$A_1(\sigma) = -\frac{\bar{q}_+(\sigma)}{c_1|\sigma|K_1(\sigma)} + 2\pi\left(1 + \frac{2\chi_1}{K_1(k_1 \cos \theta_0)}\right)\delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0),$$

$$B_1(\sigma) = -\frac{e_1}{\varepsilon_1}A_1 - 2\pi\frac{e_1}{\varepsilon_1}\delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0), \quad (3.2.12)$$

$$A_2(\sigma) = \frac{\bar{q}_+(\sigma)}{c_2|\sigma|K_2(\sigma)}, \quad B_2(\sigma) = -\frac{e_2}{\varepsilon_2}A_2$$

$$\delta(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} dx - \text{функция Дирака.}$$

Трансформанты функций амплитуд перемещения и потенциала электрического поля для пьезоэлектрических полупространств удовлетворяют как соответствующим уравнениям, так и следующим контактными условиям на плоскости раздела двух сред

$$\bar{w}_1(\sigma + 0) - \bar{w}_2(\sigma, -0) = \bar{\psi}_-(\sigma),$$

$$c_1 \frac{d\bar{w}_1}{dy} + e_1 \frac{d\bar{\Phi}_1}{dy} = c_2 \frac{d\bar{w}_2}{dy} + e_2 \frac{d\bar{\Phi}_2}{dy} = \bar{q}_+(\sigma), \quad \text{при } y = 0 \quad (3.2.13)$$

$$\bar{\Phi}_1(\sigma, +0) = \bar{\Phi}_2(\sigma, -0) = 0.$$

$\bar{\psi}_-(\sigma), \bar{q}_+(\sigma)$ трансформанты Фурье функций $\psi_-(x)$ и $q_+(x)$.

Характеристические функции $K_1(\sigma), K_2(\sigma)$, как известно [12,26,29,52], представляются в виде

$$K_1(\sigma) = (1 + \chi_1) \frac{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}{|\sigma|} - \chi_1, \quad (3.2.14)$$

$$K_2(\sigma) = (1 + \chi_2) \frac{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{|\sigma|} - \chi_2.$$

Выполняя условия уходящей волны, принимается, что $\gamma_1(\sigma) \rightarrow |\sigma|$, $\gamma_2(\sigma) \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, действительная ось обходит точки ветвления $\sigma = -k_1$,

$$\sigma = -k_2 \text{ сверху, а } \sigma = k_1, \sigma = k_2 \text{ - снизу, } \gamma_1(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} = -i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2},$$

$$\gamma_2(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} = -i\sqrt{k_2^2 - \sigma^2}.$$

Относительно функций $\bar{\psi}_-(\sigma), \bar{q}_+(\sigma)$ получим из (3.2.13) следующее уравнение

$$c_1 c_2 |\sigma| K_1(\sigma) K_2(\sigma) \bar{\psi}_-(\sigma) + (c_1 + c_2) K(\sigma) \bar{q}_+(\sigma) + 4\pi i k_1 c_1 c_2 \sin \theta_0 (1 + \chi_1) K_2(k_1 \cos \theta_0) \delta(\sigma - k_1 \cos \theta_0) = 0. \quad (3.2.15)$$

здесь характеристическая функция данной задачи, со смешанным условием на контактной плоскости, имеет вид [6,52]

$$K_3(\sigma) = \frac{c_1 K_1(\sigma) + c_2 K_2(\sigma)}{c_1 + c_2}.$$

Функциональное уравнение (3.2.15) рассматривается как краевая задача типа Римана в теории аналитических функций на действительной оси. Функции $K_1(\sigma), K_2(\sigma)$ имеют нули только в точках $\pm\sigma_1$ и $\pm\sigma_2$, соответственно, при этом

$$\sigma_i = k_i \frac{1 + \chi_i}{\sqrt{1 + 2\chi_i}} > k_i > 0. \quad i = 1, 2$$

Функция $K_3(\sigma)$ имеет нули только в точках $\pm\sigma_3$ [6,28,39,52], σ_3 – единственный положительный корень уравнения $K_3(\sigma) = 0$, при $\sigma = \sigma_3 > k_2 > k_1 > 0$, если

$$\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}} < \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \left(1 + \frac{c_2 \chi_2}{c_1 \chi_1} \right), \quad (3.2.16)$$

при $k_1 > k_2, \sigma_3 > k_1$ условие имеет вид

$$\sqrt{1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}} < \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \left(1 + \frac{c_1 \chi_1}{c_2 \chi_2} \right).$$

Рассматривая области монотонности функций $K_3(\sigma), K_1(\sigma), K_2(\sigma)$ доказывается, что $\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$ или $\sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1$. В работе [6] рассмотрена возможность существования локализованной (поверхностной) электроупругой волны в составном пьезоэлектрическом пространстве, когда между скрепленными пьезосредами находится металлический тонкий слой.

Для определения искомых функций $\bar{q}_+(\sigma), \bar{\psi}_-(\sigma)$ функциональное уравнение (3.2.15) решается используя уже известную методику, решения строятся факторизуя функцию $L(\sigma)$, представляя ее в виде

$$\begin{aligned} L(\sigma) &= L^+(\sigma)L^-(\sigma), \\ L(\sigma) &= \frac{K_1(\sigma)K_2(\sigma)}{K_3(\sigma)}, \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

функции $K_3(\sigma) \rightarrow 1, K_1(\sigma) \rightarrow 1, K_2(\sigma) \rightarrow 1$, при $|\sigma| \rightarrow \infty$,

$$K_i^\pm(\alpha) \rightarrow 1, K_3(\alpha) \rightarrow 1 \text{ при } |\alpha| \rightarrow \infty,$$

где функции $L^\pm(\alpha), \alpha = \sigma + i\tau$ регулярны и не имеют нулей при $\text{Im}\alpha > 0$ и $\text{Im}\alpha < 0$, соответственно. $L^\pm(\sigma)$ граничные значения этих функций.

$$L^+(\sigma) = \exp(F^+(\sigma)), \quad L^-(\sigma) = \exp(F^-(\sigma)),$$

$$F^+(\sigma) = \int_0^\infty F(x)e^{ix(\sigma+i0)} dx, \quad F^-(\sigma) = F^+(-\sigma),$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \ln L(\sigma)e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad L(-\sigma) = L^+(\sigma).$$

При решении функционального уравнения (3.2.15) и факторизации функции $L(\sigma)$ принимается, что действительная ось обходит, как точки ветвления $\pm k_1, \pm k_2$ функций $\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha)$, так и нули функций $K_3(\sigma), K_1(\sigma), K_2(\sigma) \pm \sigma_3, \pm \sigma_1$ и

$\pm\sigma_2$, т.е. действительная ось обходит точки $\sigma = -\sigma_3, \sigma = -\sigma_1, \sigma = -\sigma_1$ сверху, а точки $\sigma = \sigma_3, \sigma = \sigma_1, \sigma = \sigma_1$ – снизу, обеспечивая условия уходящей волны.

Аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется $|\alpha| = \alpha$ при $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $|\alpha| = -\alpha$ при $\operatorname{Re} \alpha < 0$. При контурном интегрировании имеется в виду, что

$$\frac{1}{s - (\sigma - i0)} = \frac{1}{s - \sigma} - i\pi\delta(s - \sigma),$$

используется формула

$$2\pi i\delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 + i0}.$$

Имея в виду (3.2.17) и представление

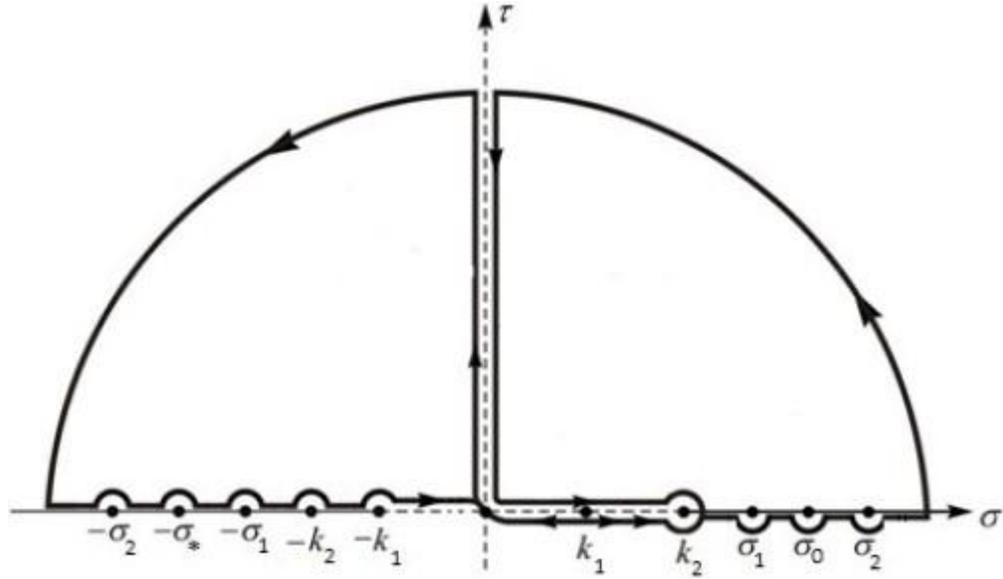
$$|\sigma| = (\sigma - i0)^{\frac{1}{2}} (\sigma + i0)^{\frac{1}{2}}$$

выражения искомых функций принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_-(\sigma) &= \frac{(c_1 + c_2)b}{c_1 c_2 (\sigma - i0)^{1/2} L^-(\sigma)(\sigma - k_1 \cos \theta_0 - i0)}, \\ \bar{q}_+(\sigma) &= -\frac{b(\sigma + i0)^{1/2} L^+(\sigma)}{\sigma - k_1 \cos \theta_0 + i0}, \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

где

$$b = -\frac{2c_1 c_2 k_1 \sin \theta_0 (1 + \chi_1) K_2(k_1 \cos \theta_0)}{(c_1 + c_2) \sqrt{k_1 \cos \theta_0} K_3(k_1 \cos \theta_0) L^+(k_1 \cos \theta_0)},$$



Фиг.11

Функции амплитуд перемещения в пьезоэлектрических полупространствах при $x < 0$ принимают вид

$$w_1(x, y) = e^{-ik_1 x \cos \theta_0 - ik_1 y \sin \theta_0} + A^{(1)} e^{-ik_1 x \cos \theta_0 + ik_1 y \sin \theta_0} - \frac{b}{2\pi c_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma + i0)^{1/2} L^+(\sigma) e^{-i\sigma x} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} d\sigma}{|\sigma| K_1(\sigma) (\sigma - k_1 \cos \theta_0 + i0)}, \quad (3.2.19)$$

$$w_2(x, y) = \frac{b}{2\pi c_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma + i0)^{1/2} L^+(\sigma) e^{-i\sigma x} e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y} d\sigma}{|\sigma| K_2(\sigma) (\sigma - k_1 \cos \theta_0 + i0)},$$

$$A^{(1)} = 1 + \frac{2\chi_1}{K_1(k_1 \cos \theta_0)} = \frac{i(1 + \chi_1) \sin \theta_0 - \chi_1 \cos \theta_0}{i(1 + \chi_1) \sin \theta_0 + \chi_1 \cos \theta_0}$$

а при $x > 0$

$$\begin{aligned}
w_1(x, y) &= e^{-ik_1x \cos \theta_0 - ik_1y \sin \theta_0} + A^{(2)} e^{-ik_1x \cos \theta_0 + ik_1y \sin \theta_0} + \pi \\
&\quad + \frac{b}{2\pi c_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_2(\sigma) e^{-i\sigma x} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} d\sigma}{(\sigma - i0)^{1/2} K_3(\sigma) L^-(\sigma) (\sigma - k_1 \cos \theta_0 - i0)}, \\
w_2(x, y) &= (1 + A^{(2)}) e^{-ik_1x \cos \theta_0 - i\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_0} y} - \\
&\quad - \frac{b}{2\pi c_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\sigma) e^{-i\sigma x} e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y} d\sigma}{(\sigma - i0)^{1/2} K_3(\sigma) L^-(\sigma) (\sigma - k_1 \cos \theta_0 - i0)}, \\
A^{(2)} &= -1 - 2i \frac{c_1 (1 + \chi_1) \operatorname{tg} \theta_0}{(c_1 + c_2) K_3(k_1 \cos \theta_0)}
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Соответствующие регулярные интегралы представляются в виде:
при $x < 0$

$$\begin{aligned}
I(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma + i0)^{1/2} L^+(\sigma, \gamma(\sigma)) e^{-i\sigma x} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} d\sigma}{|\sigma| K_1(\sigma, \gamma(\sigma)) (\sigma - k_1 \cos \theta_0 + i0)}, \\
I_1(x, y) &= -i \int_0^{\infty} \frac{L^+(i\tau, i\sqrt{k^2 + \tau^2}) e^{i\tau x} e^{-i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} y} d\tau}{(i\tau)^{1/2} K_1(i\tau, i\sqrt{k^2 + \tau^2}) (i\tau - k_1 \cos \theta_0)}, \\
I_2(x, y) &= i \int_0^{\infty} \frac{L^+(-i\tau, -i\sqrt{k^2 + \tau^2}) e^{\tau x} e^{i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} y} d\tau}{(-i\tau)^{1/2} K_1(-i\tau, -i\sqrt{k^2 + \tau^2}) (i\tau + k_1 \cos \theta_0)}, \\
I_3(x, y) &= \int_0^{k_1} \frac{L^+(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{-i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{(\sigma)^{1/2} K_1(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) (\sigma - k_1 \cos \theta_0)}, \\
I_4(x, y) &= - \int_0^{k_1} \frac{L^+(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{(\sigma)^{1/2} K_1(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) (\sigma - k_1 \cos \theta_0)},
\end{aligned}$$

$$I_5(x, y) = \int_{k_1}^{k_2} \frac{L^+(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{(\sigma)^{1/2} K_1(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})(\sigma - k_1 \cos \theta_0)},$$

$$I_6(x, y) = - \int_{k_1}^{k_2} \frac{L^+(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{(\sigma)^{1/2} K_1(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})(\sigma - k_1 \cos \theta_0)},$$

а в случае $x > 0$

$$I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_2(\sigma, \gamma(\sigma)) e^{-i\sigma x} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} d\sigma}{(\sigma - i0)^{1/2} K_3(\sigma, \gamma(\sigma)) L^-(\sigma, \gamma(\sigma)) (\sigma - k_1 \cos \theta_0 - i0)},$$

$$I_1(x, y) = i \int_{-\infty}^0 \frac{K_2(-i\tau, i\sqrt{k^2 + \tau^2}) e^{-i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} y} e^{-\tau x} d\tau}{(-i\tau)^{1/2} K_3(-i\tau, i\sqrt{k^2 + \tau^2}) L^-(i\tau, i\sqrt{k^2 + \tau^2})(i\tau + k_1 \cos \theta_0)},$$

$$I_2(x, y) = -i \int_{-\infty}^0 \frac{K_2(i\tau, -i\sqrt{k^2 + \tau^2}) e^{i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} y} e^{\tau x} d\tau}{(i\tau)^{1/2} K_3(i\tau, -i\sqrt{k^2 + \tau^2}) L^-(i\tau, -i\sqrt{k^2 + \tau^2})(i\tau - k_1 \cos \theta_0)},$$

$$I_3(x, y) = - \int_{-k_1}^0 \frac{K_2(-\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{-i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} y} e^{i\sigma x} d\sigma}{(-\sigma)^{1/2} K_3(-\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) L^-(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})(\sigma + k_1 \cos \theta_0)},$$

$$I_4(x, y) = \int_{-k_1}^0 \frac{K_2(-\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} y} e^{i\sigma x} d\sigma}{(-\sigma)^{1/2} K_3(-\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) L^-(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})(\sigma + k_1 \cos \theta_0)},$$

$$I_5(x, y) = - \int_{-k_2}^{-k_1} \frac{K_2(-\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma x} d\sigma}{(-\sigma)^{1/2} K_3(-\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) L^-(\sigma, i\sqrt{k^2 - \sigma^2})(\sigma + k_1 \cos \theta_0)},$$

$$I_6(x, y) = \int_{-k_2}^{-k_1} \frac{K_2(-\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma x} d\sigma}{(-\sigma)^{1/2} K_3(-\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}) L^-(\sigma, -i\sqrt{k^2 - \sigma^2})(\sigma + k_1 \cos \theta_0)}.$$

Отметим, что в частном случае, при контакте пьезоэлектрического полупространства $y > 0$ с диэлектрическим полупространством $y < 0$ без пьезоэффекта, следует в вышеприведенных формулах принять $e_2 = 0$.

Интегралы преобразуются методом контурного интегрирования в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. Показаны разрезы в комплексной плоскости и путь интегрирования. Путь интегрирования при $x < 0$ замыкается в верхней полуплоскости и действительная ось обходит точки $\mp\sigma_1, \mp\sigma_2$ сверху и снизу, соответственно для полупространств $y > 0$ и $y < 0$. Аналитические продолжения функций $K_1(\sigma), K_2(\sigma)$, т.е. функции $K_1(\alpha), K_2(\alpha)$, при таких разрезах в комплексной плоскости, не имеют чисто мнимых, а также комплексных нулей, это следует из постановки задачи (принцип уходящей волны). Особые точки являются простыми полюсами $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$. Интеграл представляется в виде суммы регулярных интегралов. Волновое поле состоит из падающей и отраженной волн, дифрагированных затухающих объемных волн, а также дифрагированной поверхностной волны Гуляева–Блюстейна, локализованной у контактной плоскости

$$\begin{aligned} w_{1*}(x, y) &= A_*^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_1^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma_1 x}, & y > 0 \\ w_{2*}(x, y) &= A_*^{(2)} e^{\sqrt{\sigma_2^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_2 x}, & y < 0 \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$\begin{aligned} A_*^{(1)} &= -\frac{ibL^+(\sigma_1)}{c_1 \sqrt{\sigma_1} K_1'(\sigma_1) (\sigma_1 - k_1 \cos \theta_0)}, \\ A_*^{(2)} &= \frac{ibL^+(\sigma_2)}{c_2 \sqrt{\sigma_2} K_2'(\sigma_2) (\sigma_2 - k_1 \cos \theta_0)}. \end{aligned}$$

Эта волна распространяется по оси x с волновым числом σ_1 и σ_2 , скоростью ω/σ_1 и ω/σ_2 в полупространствах $y > 0$ и $y < 0$, соответственно, и затухает при

$|y| \rightarrow \infty$. Дифрагированные волны обусловлены наличием полубесконечной трещины, а появление поверхностной волны обусловлено также пьезоэффектом. Асимптотическое представление перемещений на граничной плоскости $y = +0$ при $x \rightarrow -\infty$ имеет вид [8,26,52]

$$w_1(x, 0) = (1 + A^{(1)})e^{-ik_1 x \cos \theta_0} + A_*^{(1)} e^{i\sigma_1 |x|} + e^{i(kx - \frac{\pi}{4})} O(|kx|^{-\frac{3}{2}}) + O(|kx|^{-\frac{3}{2}}),$$

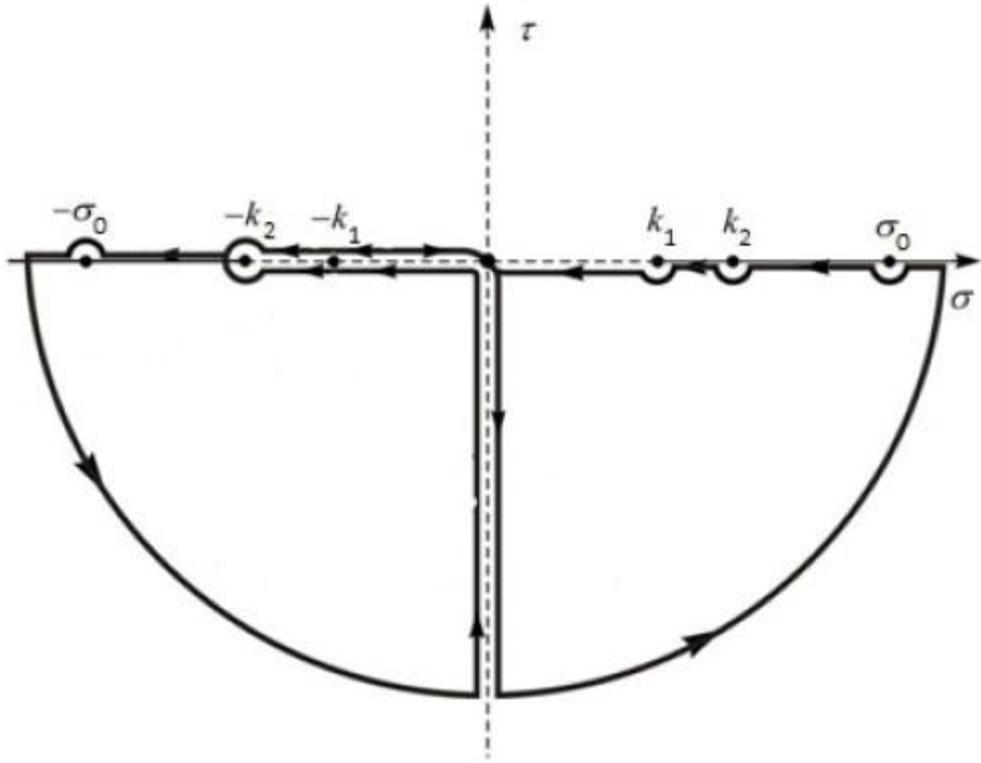
а на граничной плоскости $y = -0$ при $x \rightarrow -\infty$

$$w_2(x, 0) = A_*^{(2)} e^{i\sigma_2 |x|} + e^{i(kx - \frac{\pi}{4})} O(|kx|^{-\frac{3}{2}}) + O(|kx|^{-\frac{3}{2}}).$$

Функция перемещений точек полупространства $x > 0$ представляется в виде суммы регулярных интегралов, падающей, отраженной и проходящей волн, и дифрагированной поверхностной волны локализованной у контактной плоскости

$$\begin{aligned} w_{10}(x, y) &= A_0 e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma_3 x}, & y > 0 \\ w_{20}(x, y) &= A_0 e^{\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2} y} e^{i\sigma_3 x}, & y < 0 \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

$$A_0 = -\frac{ibK_2(-\sigma_3)}{c_1 \sqrt{\sigma_3} K_3'(-\sigma_3) L(-\sigma_3)(\sigma_3 - k_1 \cos \theta_0)}.$$



Фиг.12

Действительная ось обходит точки $\mp\sigma_3$ сверху и снизу, соответственно. При некоторых значениях электроупругих характеристик составного пространства– условия (3.2.16), $-\sigma_3$ является корнем уравнения $K_3(\sigma) = 0$. Путь интегрирования замыкается в нижней полуплоскости. Аналитическое продолжение подынтегральной функции при таких разрезах в комплексной плоскости имеет только единственную особую точку – простой полюс $\sigma = -\sigma_3$. Асимптотическое представление на контактной плоскости $y = 0$, при $x \rightarrow \infty$

$$w_1(x, 0) = (1 + A^{(2)}) e^{-ik_1 x \cos \theta_0} + A_0^{(1)} e^{i\sigma_3 x} + e^{i(kx + \frac{\pi}{4})} O((kx)^{-\frac{3}{2}}) + O((kx)^{-\frac{3}{2}}).$$

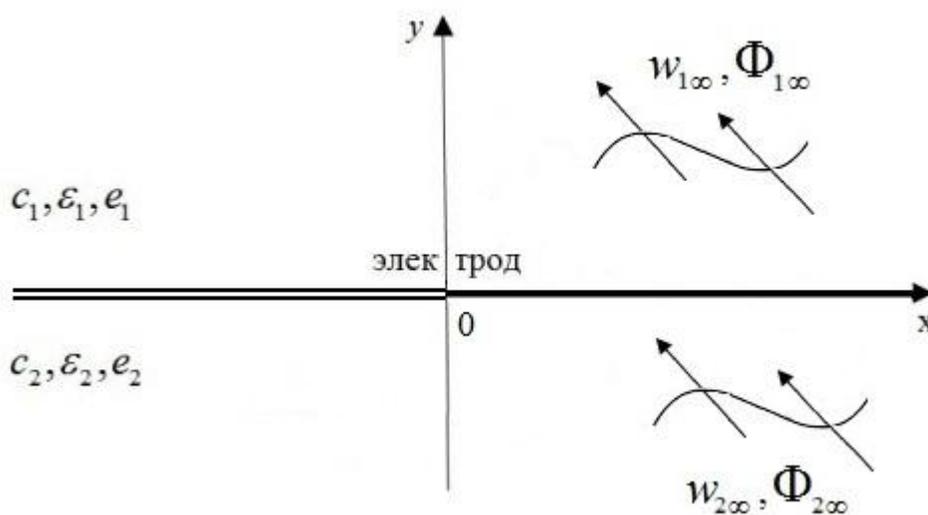
Волновое поле перемещений состоит из падающей волны, отраженной и проходящей волны, дифрагированных затухающих объемных волн и распространяющаяся по направлению x к $+\infty$ со скоростью ω/σ_3 (σ_3 – волновое

число), локализованной волны. Следует отметить, что $\omega/\sigma_1 < \omega/\sigma_3 < \omega/\sigma_2$, если $\sigma_1 > \sigma_2$ и $\omega/\sigma_2 < \omega/\sigma_3 < \omega/\sigma_1$, если $\sigma_2 > \sigma_1$, т.е. если локализованная сдвиговая волна существует – электромеханические характеристики удовлетворяют условию (3.2.16), то значение ее скорости распространения находится между значениями скоростей поверхностной волны Гуляева–Блюстейна $w_{1*}(x, y)$ и $w_{2*}(x, y)$ распространяющаяся по x к $-\infty$, когда между полупространствами отсутствует акустический контакт. Как видно из (3.2.19), (3.2.20) и асимптотических представлений, вместе с цилиндрической волной появляется и волна, распространяющаяся от контактной плоскости и имеющая неволновой характер на этой плоскости. Результаты работы могут быть использованы при рассмотрении других задач механики сплошных сред и объяснения физико-технических и экспериментальных результатов при проектировании и создании новых инженерных приборов и устройств.

§3.3 Дифракция локализованной (поверхностной) волны сдвига на крае полубесконечной трещины в составной пьезоэлектрической среде

В составной пьезоэлектрической среде рассматривается задача дифракции падающей из бесконечности сдвиговой поверхностной электроупругой волны. Рассматриваемая электроупругая среда приведена к декартовой системе координат $Oxyz$, с разными электроупругими характеристиками пьезоэлектрические полупространства – пьезоэлектрики класса $6mm$ гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла, занимают полупространства $y > 0$ и $y < 0$. Тонкий металлический слой приклеен

к контактной плоскости Oxz , из-за малой толщины пренебрегается жесткость. Электропроводящий слой можно рассматривать как электрод. Пьезоэлектрические полупространства скреплены по плоскости $y = 0, x > 0, -\infty < z < \infty$, т.е. считаем, что между полупространствами осуществляется акустический контакт только в плоскости Oxz при $x > 0$. В плоскости Oxz при $x < 0$ ($y = 0, x < 0, -\infty < z < \infty$) между пьезоэлектрическими полупространствами взаимодействие происходит без акустического контакта. Принимается, что рассматриваемая составная диэлектрическая среда с пьезоэффектом имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x < 0$, чем и обусловлена дифракция [53]. Таким образом, в пьезоэлектрическом составном пространстве из бесконечности $x > 0$ распространяется локализованная у контактной плоскости электроупругая поверхностная волна сдвига со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического потенциала, соответственно



Фиг.13

$$\begin{aligned}
w_{1\infty}(x, y) &= e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma_3 x}, \\
\Phi_{1\infty}(x, y) &= \frac{e_1}{\varepsilon_1} \left(e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} - e^{-\sigma_3 y} \right) e^{-i\sigma_3 x}, \\
w_{2\infty}(x, y) &= e^{\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_3 x}, \\
\Phi_{2\infty}(x, y) &= \frac{e_2}{\varepsilon_2} \left(e^{\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2} y} - e^{\sigma_3 y} \right) e^{-i\sigma_3 x},
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Здесь принимается, что при $k_2 > k_1$ имеет место условие [6,52,53]

$$\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}} < \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \left(1 + \frac{c_2 \chi_2}{c_1 \chi_1} \right), \tag{3.3.2}$$

а при $k_1 > k_2$

$$\sqrt{1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}} < \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \left(1 + \frac{c_1 \chi_1}{c_2 \chi_2} \right). \tag{3.3.3}$$

Следовательно может распространяться рассматриваемая поверхностная волна со скоростью ω / σ_3 , где волновое число σ_3 определяется из соотношения [6,52]

$$c_1 (1 + \chi_1) \frac{\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2}}{\sigma_3} + c_2 (1 + \chi_2) \frac{\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2}}{\sigma_3} = c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2. \tag{3.3.4}$$

Задача заключается в определении волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах, учитывая гармоническую зависимость от времени всех составляющих волнового поля – временной множитель $e^{-i\omega t}$. Здесь ω – частота колебаний, t – параметр времени, $k_i = \omega / C_i$, $C_i = \sqrt{c_{44}^{(i)} (1 + \chi_i) / \rho_i}$, $\chi_i = e_i^2 / c_i \varepsilon_i$ – волновое число, скорость распространения объемной сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в пьезоэлектрических средах $y > 0$ и $y < 0$, соответственно. В этих соотношениях $c_i = c_{44}^{(i)}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)}$, $e_i = e_{15}^{(i)}$ – упругая, диэлектрическая и пьезоэлектрическая постоянные в пьезоэлектрических

полупространствах , ρ_i – плотность, $i=1,2$. Среда находится в условиях антиплоской деформации. Принимаются дифференциальные уравнения динамической теории упругости и уравнения электродинамики в квазистатическом приближении. Для определения амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах, имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + k_i^2 w_i &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + k_i^2 \frac{e_i}{\varepsilon_i} w_i &= 0. \end{aligned} \quad i=1,2 \quad (3.3.5)$$

В приведенных уравнениях $w_1(x, y), \Phi_1(x, y)$ функции амплитуд перемещения и электрического потенциала пьезоэлектрика $y > 0, -\infty < x < \infty$, а $w_2(x, y), \Phi_2(x, y)$ – пьезоэлектрика $y < 0, -\infty < x < \infty$. Амплитуды электрического потенциала из-за наличия металлического слоя в плоскости контакта, удовлетворяют следующим контактными условиям:

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_2(x, y) = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (3.3.6)$$

На берегах трещины для амплитуд напряжений $\sigma_{yz}^{(1)}, \sigma_{yz}^{(2)}$ имеем условия

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{(1)} = c_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} &= 0, \\ \sigma_{yz}^{(2)} = c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad \begin{aligned} y = 0, x < 0 \\ y = 0, x < 0 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Разница перемещений на берегах трещины неизвестная пока величина

$$w_1(x, +0) - w_2(x, -0) = w_0(x) \quad \text{при } x < 0 \quad (3.3.8)$$

Решения уравнений (3.3.5) должны удовлетворять контактными условиям скрепления при $y = 0, x > 0$

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0) = q_0(x), \quad w_1(x, +0) = w_2(x, -0). \quad (3.3.9)$$

Функции $q_+(x) = q_0(x)\mathfrak{G}(x)$ и $\psi_-(x) = w_0(x)\mathfrak{G}(-x)$, $\mathfrak{G}(x)$ – функция Хевисайда, представляют касательное напряжение при $y=0$ и разницу перемещений на $y = \pm 0$, соответственно. Контактные условия на граничной плоскости раздела полупространств (3.3.7)–(3.3.9) принимают вид

$$c_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = q_+(x), \quad \text{при } y=0 \quad (3.3.10)$$

$$w_1(x, +0) - w_2(x, -0) = \psi_-(x)$$

Задача определения дифрагированного электроупругого волнового поля в составном пьезоэлектрическом пространстве при дифракции падающей из бесконечности локализованной электроупругой волны сдвига (3.3.1) сведена к решению дифференциальных уравнений (3.3.5) при контактных условиях (3.3.6), (3.3.10).

Применяется интегральное преобразование Фурье по переменной x , и выражения для искомым функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах получим после обратного преобразования Фурье в виде

$$w_i(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{w}_i(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad i=1,2 \quad (3.3.11)$$

$$\Phi_i(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}_i(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

где трансформанты Фурье искомым функций представляются в виде

$$\bar{w}_1(\sigma, y) = A_1(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} + 2\pi e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} \delta(\sigma - \sigma_3),$$

$$\bar{\Phi}_1(\sigma, y) = B_1(\sigma) e^{-|\sigma| y} + \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{w}_1 - 2\pi \frac{e_1}{\varepsilon_1} e^{-\sigma_3 y} \delta(\sigma - \sigma_3), \quad y > 0 \quad (3.3.12)$$

$$\begin{aligned}\bar{w}_2(\sigma, y) &= A_2(\sigma)e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}y} + 2\pi e^{\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2}y}\delta(\sigma - \sigma_3), \\ \bar{\Phi}_2(\sigma, y) &= B_2(\sigma)e^{|\sigma|y} + \frac{e_2}{\varepsilon_2}\bar{w}_2 - 2\pi\frac{e_2}{\varepsilon_2}e^{\sigma_3 y}\delta(\sigma - \sigma_3),\end{aligned}\quad y < 0 \quad (3.3.13)$$

здесь

$$\begin{aligned}A_1(\sigma) &= \frac{c_2 K_2(\sigma)}{c_1 K_1(\sigma) + c_2 K_2(\sigma)}\psi_-(\sigma), \quad B_1(\sigma) = -\frac{e_1}{\varepsilon_1}A_1(\sigma), \\ A_2(\sigma) &= A_1(\sigma) - \psi_-(\sigma), \quad B_2(\sigma) = -\frac{e_2}{\varepsilon_2}A_2(\sigma)\end{aligned}\quad (3.3.14)$$

Трансформанты функций амплитуд перемещения и потенциала электрического поля для пьезоэлектрических полупространств удовлетворяют как соответствующим уравнениям, так и следующим контактными условиям на плоскости раздела двух сред

$$\begin{aligned}\bar{w}_1(\sigma + 0) - \bar{w}_2(\sigma, -0) &= \bar{\psi}_-(\sigma), \\ c_1 \frac{d\bar{w}_1}{dy} + e_1 \frac{d\bar{\Phi}_1}{dy} &= c_2 \frac{d\bar{w}_2}{dy} + e_2 \frac{d\bar{\Phi}_2}{dy} = \bar{q}_+(\sigma), \quad \text{при } y = 0 \\ \bar{\Phi}_1(\sigma, +0) &= \bar{\Phi}_2(\sigma, -0) = 0.\end{aligned}\quad (3.3.15)$$

$\bar{\psi}_-(\sigma), \bar{q}_+(\sigma)$ трансформанты Фурье функций $\psi_-(x)$ и $q_+(x)$.

Характеристические функции $K_1(\sigma), K_2(\sigma)$, как известно [12,29], представляются в виде

$$K_1(\sigma) = (1 + \chi_1)\frac{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}{|\sigma|} - \chi_1, \quad K_2(\sigma) = (1 + \chi_2)\frac{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{|\sigma|} - \chi_2. \quad (3.3.16)$$

Выполняя условия уходящей волны, принимается, что $\gamma_1(\sigma) \rightarrow |\sigma|$, $\gamma_2(\sigma) \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, действительная ось обходит точки ветвления $\sigma = -k_1$,

$$\sigma = -k_2 \quad \text{сверху,} \quad \text{а} \quad \sigma = k_1, \sigma = k_2 \text{-снизу,} \quad \gamma_1(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} = -i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2},$$

$$\gamma_2(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} = -i\sqrt{k_2^2 - \sigma^2}.$$

Относительно функций $\bar{\psi}_-(\sigma), \bar{q}_+(\sigma)$ получим из (3.3.15) следующее уравнение

$$\frac{c_1 c_2 |\sigma| K_1(\sigma) K_2(\sigma)}{(c_1 + c_2) K_3(\sigma)} \bar{\psi}_-(\sigma) + \bar{q}_+(\sigma) + 2\pi c_1 \sigma_3 K_1(\sigma_3) \delta(\sigma - \sigma_3) = 0 \quad (3.3.17)$$

ясно, что $c_1 K_1(\sigma_3) = -c_2 K_2(\sigma_3)$, $K_1(\sigma_1) = K_2(\sigma_2) = 0$, здесь характеристическая функция данной задачи, со смешанным условием на контактной плоскости, имеет вид [6,23,52]

$$K_3(\sigma) = \frac{c_1 K_1(\sigma) + c_2 K_2(\sigma)}{c_1 + c_2}$$

Функциональное уравнение (3.3.17) рассматривается как краевая задача типа Римана в теории аналитических функций на действительной оси. Функции $K_1(\sigma), K_2(\sigma)$ имеют нули только в точках $\pm\sigma_1$ и $\pm\sigma_2$, соответственно, при этом

$$\sigma_i = k_i \frac{1 + \chi_i}{\sqrt{1 + 2\chi_i}} > k_i > 0 \quad i = 1, 2$$

Функция $K_3(\sigma)$ имеет нули только в точках $\pm\sigma_3$, σ_3 – единственный положительный корень уравнения $K_3(\sigma) = 0$, при $\sigma = \sigma_3 > k_2 > k_1 > 0$, если имеет место условие (3.3.2), а при $k_1 > k_2$, $\sigma_3 > k_1$ условие имеет вид (3.3.3). Рассматривая области монотонности функций $K_3(\sigma), K_1(\sigma), K_2(\sigma)$ доказывається, что $\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$ или $\sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1$. Для определения искомым функций $\bar{q}_+(\sigma), \bar{\psi}_-(\sigma)$ функциональное уравнение (3.3.17) решается используя методику развитую в [24,29], решения строятся факторизуя функцию $\Lambda(\sigma)$, представляя ее в виде

$$\Lambda(\sigma) = \Lambda^+(\sigma)\Lambda^-(\sigma),$$

$$\Lambda(\sigma) = \frac{K_1(\sigma)K_2(\sigma)}{K_3(\sigma)}. \quad (3.3.18)$$

функции $K_3(\sigma) \rightarrow 1, K_1(\sigma) \rightarrow 1, K_2(\sigma) \rightarrow 1$, при $|\sigma| \rightarrow \infty$,

$K_i^\pm(\alpha) \rightarrow 1, K(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$, где функции $\Lambda^\pm(\alpha), \alpha = \sigma + i\tau$ регулярны и не имеют нулей при $\text{Im}\alpha > 0$ и $\text{Im}\alpha < 0$, соответственно. $\Lambda^\pm(\sigma)$ граничные значения этих функций

$$\Lambda^+(\sigma) = \exp(F^+(\sigma)), \quad \Lambda^-(\sigma) = \exp(F^-(\sigma)),$$

$$F^+(\sigma) = \int_0^\infty F(x)e^{ix(\sigma+i0)} dx, \quad F^-(\sigma) = F^+(-\sigma),$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \ln \Lambda(\sigma)e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad \Lambda^-(-\sigma) = \Lambda^+(\sigma).$$

При решении функционального уравнения (3.3.17) и факторизации функции $\Lambda(\sigma)$ принимается, что действительная ось обходит, как точки ветвления $\pm k_1, \pm k_2$ функций $\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha)$, так и нули функций $K_3(\sigma), K_1(\sigma), K_2(\sigma) \pm \sigma_0, \pm \sigma_1$ и $\pm \sigma_2$, т.е. действительная ось обходит точки $\sigma = -\sigma_3, \sigma = -\sigma_1, \sigma = -\sigma_1$ сверху, а точки $\sigma = \sigma_3, \sigma = \sigma_1, \sigma = \sigma_1$ —снизу, обеспечивая условия уходящей волны.

Аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется $|\alpha| = \alpha$ при $\text{Re}\alpha > 0$, $|\alpha| = -\alpha$ при $\text{Re}\alpha < 0$. При контурном интегрировании имеется в виду, что

$$2\pi i \delta(\sigma - \sigma_3) = \frac{1}{\sigma - \sigma_3 - i0} - \frac{1}{\sigma - \sigma_3 + i0}$$

Имея в виду (3.3.18) и представление

$$|\sigma| = (\sigma - i0)^{\frac{1}{2}} (\sigma + i0)^{\frac{1}{2}}$$

выражения искомым функций принимают вид

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_-(\sigma) &= \frac{(c_1 + c_2)b}{c_1 c_2 (\sigma - i0)^{1/2} \Lambda^-(\sigma)(\sigma - \sigma_3 - i0)}, \\ \bar{q}_+(\sigma) &= -\frac{b(\sigma + i0)^{1/2} \Lambda^+(\sigma)}{\sigma - \sigma_3 + i0},\end{aligned}\tag{3.3.19}$$

где

$$b = \frac{ic_1 \sqrt{\sigma_3} K_1(\sigma_3)}{\Lambda^+(\sigma_3)}$$

Функции амплитуд перемещения в пьезоэлектрических полупространствах при $x < 0$ принимают вид

$$\begin{aligned}w_1(x, y) &= \frac{b}{2\pi c_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma + i0)^{1/2} \Lambda^+(\sigma) e^{-i\sigma x} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} d\sigma}{|\sigma| K_1(\sigma)(\sigma - \sigma_3 + i0)}, \\ w_2(x, y) &= \frac{b}{2\pi c_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma + i0)^{1/2} \Lambda^+(\sigma) e^{-i\sigma x} e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y} d\sigma}{|\sigma| K_2(\sigma)(\sigma - \sigma_3 + i0)},\end{aligned}\tag{3.3.20}$$

а при $x > 0$

$$\begin{aligned}w_1(x, y) &= e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma_3 x} + \frac{b}{2\pi c_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_2(\sigma) e^{-i\sigma x} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} d\sigma}{(\sigma - i0)^{1/2} K_3(\sigma) \Lambda^-(\sigma)(\sigma - \sigma_3 - i0)}, \\ w_2(x, y) &= e^{\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_3 x} - \frac{b}{2\pi c_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\sigma) e^{-i\sigma x} e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y} d\sigma}{(\sigma - i0)^{1/2} K_3(\sigma) \Lambda^-(\sigma)(\sigma - \sigma_3 - i0)}.\end{aligned}\tag{3.3.21}$$

Интегралы преобразуются методом контурного интегрирования в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. Путь интегрирования при $x < 0$ замыкается в верхней полуплоскости комплексной плоскости и действительная ось обходит точки $\mp\sigma_1$, $\mp\sigma_2$ сверху и снизу, соответственно для полупространств $y > 0$ и $y < 0$.

Аналитические продолжения функций $K_1(\sigma)$, $K_2(\sigma)$, т.е. функции $K_1(\alpha)$, $K_2(\alpha)$ не имеют чисто мнимых, а также комплексных нулей, это следует из постановки задачи (принцип уходящей волны). Особые точки являются простыми полюсами $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$. Интеграл представляется в виде суммы регулярных интегралов. Волновое поле состоит из дифрагированных затухающих объемных волн, а также дифрагированной поверхностной волны Гуляева–Блюстейна, локализованной у контактной плоскости

$$\begin{aligned} w_{1*}(x, y) &= A_*^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_1^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma_1 x}, & y > 0 \\ w_{2*}(x, y) &= A_*^{(2)} e^{\sqrt{\sigma_2^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_2 x}, & y < 0 \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

$$A_*^{(1)} = -\frac{ib\Lambda^+(\sigma_1)}{c_1\sqrt{\sigma_1}K_1'(\sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$A_*^{(2)} = \frac{ib\Lambda^+(\sigma_2)}{c_2\sqrt{\sigma_2}K_2'(\sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

Эта волна распространяется по оси x с волновым числом σ_1 и σ_2 , скоростью ω/σ_1 и ω/σ_2 в полупространствах $y > 0$ и $y < 0$, соответственно, и затухает при $|y| \rightarrow \infty$. Дифрагированные волны обусловлены наличием полубесконечной трещины, а появление поверхностной волны обусловлено также пьезоэффектом. Асимптотическое представление перемещений на граничной плоскости $y = +0$ при $x \rightarrow -\infty$ имеет вид

$$w_1(x, 0) = A_*^{(1)} e^{i\sigma_1|x|} + e^{i(k_1x - \frac{\pi}{4})} O(|k_1x|^{-\frac{3}{2}}) + O(|k_1x|^{-\frac{3}{2}})$$

а на граничной плоскости $y = -0$ при $x \rightarrow -\infty$

$$w_2(x, 0) = A_*^{(2)} e^{i\sigma_2|x|} + e^{i(k_2x - \frac{\pi}{4})} O(|k_2x|^{-\frac{3}{2}}) + O(|k_2x|^{-\frac{3}{2}})$$

Функция перемещений точек полупространства $x > 0$ представляется в виде суммы регулярных интегралов, падающей и дифрагированной поверхностной волны локализованной у контактной плоскости

$$\begin{aligned} w_{10}(x, y) &= A_0 e^{-\sqrt{\sigma_3^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma_3 x}, & y > 0 \\ w_{20}(x, y) &= A_0 e^{\sqrt{\sigma_3^2 - k_2^2} y} e^{i\sigma_3 x}, & y < 0 \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

$$A_0 = -\frac{ibK_2(-\sigma_3)}{2c_1\sigma_3\sqrt{\sigma_3}K_3'(-\sigma_3)\Lambda^-(-\sigma_3)}$$

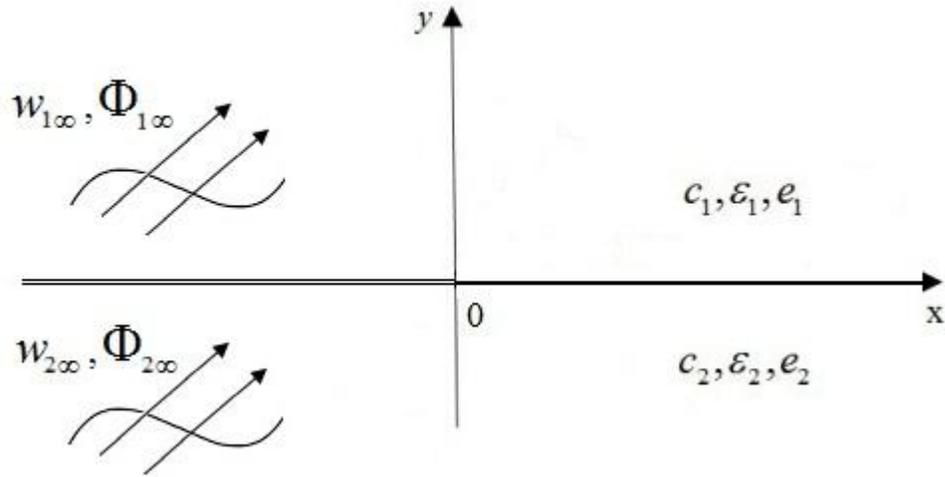
Действительная ось обходит точки $\mp\sigma_3$ сверху и снизу, соответственно. При некоторых значениях электроупругих характеристик составного пространства– условия (3.3.2), (3.3.3) $-\sigma_3$ является корнем уравнения $K_3(\sigma) = 0$. Путь интегрирования замыкается в нижней полуплоскости комплексной плоскости. Аналитическое продолжение подынтегральной функции при таких разрезах в комплексной плоскости имеет только единственную особую точку – простой полюс $\sigma = -\sigma_3$. Асимптотическое представление на контактной плоскости $y = 0$, при $x \rightarrow \infty$

$$w_1(x, 0) = e^{-i\sigma_3 x} + A_0 e^{i\sigma_3 x} + e^{i(k_1 x + \frac{\pi}{4})} O((k_1 x)^{-\frac{3}{2}}) + O((k_1 x)^{-\frac{3}{2}}).$$

Волновое поле перемещений состоит из падающей волны, дифрагированных затухающих объемных волн и распространяющаяся по направлению x к $+\infty$ со скоростью ω/σ_3 (σ_3 – волновое число) локализованной волны. Следует отметить, что $\omega/\sigma_1 < \omega/\sigma_3 < \omega/\sigma_2$, если $\sigma_1 > \sigma_2$ и $\omega/\sigma_2 < \omega/\sigma_3 < \omega/\sigma_1$, если $\sigma_2 > \sigma_1$, т.е. если локализованная сдвиговая волна существует – электромеханические характеристики удовлетворяют условиям (3.3.2), (3.3.3), то значение ее скорости распространения находится между значениями скоростей поверхностной волны Гуляева–Блюстейна $w_{1*}(x, y)$ и $w_{2*}(x, y)$ распространяющаяся по x к $-\infty$, когда

между полупространствами отсутствует акустический контакт. Как видно из (3.3.20), (3.3.21) и асимптотических представлений, вместе с цилиндрической волной появляется и волна, распространяющаяся от контактной плоскости и имеющая неволновой характер на этой плоскости. Конструктивная неоднородность (слоистость) анизотропных твердых сред – обладающих свойством пьезоэффекта, существенно влияет на классическую теорию электроупругих волн – появляются поверхностные волны относительно малой скоростью распространения, и при этом возбуждаются волны в пьезоэлектриках с малыми потерями при распространении из бесконечности локализованной электроупругой волны.

Рассмотрим еще одну задачу дифракции поверхностной сдвиговой волны – локализованной у контактной плоскости $y = 0, x < 0$, в составной пьезоэлектрической среде, состоящей из двух полупространств – пьезоэлектриков гексагональной симметрии класса $6mm$ с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла. В плоскости Oxz при $x < 0$ пьезоэлектрические полупространства взаимодействуют между собой без акустического контакта. В этой же плоскости контакта при $x > 0$ между полупространствами осуществляется электромеханический полный контакт. Из бесконечности ($x < 0$) по направлению оси Ox распространяется электроупругая поверхностная волна сдвига, обусловленная наличием пьезоэффекта в полупространствах [40].



Фиг.14

Амплитудные составляющие перемещений и электрических потенциалов волны распространяющейся из бесконечности имеют вид

$$w_{1\infty}(x, y) = e^{i\sigma_* x} e^{-\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} y},$$

$$\Phi_{1\infty}(x, y) = \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_{1\infty}(x, y) - \frac{e_1}{\varepsilon_1} D e^{i\sigma_* x} e^{-\sigma_* y}, \quad y > 0 \quad (3.3.24)$$

$$w_{2\infty}(x, y) = \frac{e_1}{e_2} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - D \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) e^{i\sigma_* x} e^{\sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2} y},$$

$$\Phi_{2\infty}(x, y) = \frac{e_2}{\varepsilon_2} w_{2\infty}(x, y) + \frac{e_1}{\varepsilon_2} D e^{i\sigma_* x} e^{\sigma_* y}. \quad y < 0 \quad (3.3.25)$$

В этих соотношениях $\sigma_* > k_n$ – волновое число поверхностной волны, при этом

$$\frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \frac{\sigma_*}{\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2}} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \frac{\sigma_*}{\sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2}} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2}, \quad D = \frac{1 + \chi_1}{\chi_1} \frac{\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2}}{\sigma_*},$$

$$k_n = \omega / v_n, \quad v_n = \sqrt{c_n (1 + \chi_n) / \rho_n}, \quad \chi_n = e_n^2 / \varepsilon_n c_n, \quad n = 1, 2.$$

Рассматривается, обусловленная наличием полубесконечной трещины, дифракция сдвиговой электроупругой волны (3.3.24), (3.3.25) в составном пространстве. Задача заключается в определении электроупругого волнового поля в полупространствах. Данная конструктивная неоднородность среды приводит к

важной, с точки зрения волновых процессов, перестройке дифрагированных волновых полей, и полубесконечная трещина является причиной этих новых особенностей при дифракции волн сдвига. Для определения амплитудных функций перемещений $w_1(x, y), w_2(x, y)$ и электрических потенциалов $\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)$ в полупространствах, имеем следующие уравнения [31,40]

$$\begin{aligned}\Delta w_1 + k_1^2 w_1 &= 0, \\ \Delta w_2 + k_2^2 w_2 &= 0, \\ \varepsilon_1 \Delta \Phi_1 + e_1 k_1^2 w_1 &= 0, \\ \varepsilon_2 \Delta \Phi_2 + e_2 k_2^2 w_2 &= 0,\end{aligned}\tag{3.3.26}$$

Решения уравнений (3.3.26) должны удовлетворять условиям без акустического контакта при $x < 0$ и условиям полного контакта при $x > 0$. Для характеристических функций электрического поля – амплитуд электрических потенциалов и составляющих векторов электрических индукций, имеют место условия непрерывности при $y = 0$.

Для амплитуд напряжений и перемещений условия на контактной плоскости представляются в виде

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0) = q_+(x), \quad w_1(x, +0) - w_2(x, -0) = \psi_-(x) \quad \text{при } y = 0,$$

где $q_+(x) = 0$ при $x < 0$, $\psi_-(x) = 0$ при $x > 0$. $q_+(x)$ – напряжение при $y = 0$, $\psi_-(x)$ – представляет разницу перемещений на $y = \pm 0$.

Задача решается методом интегрального преобразования Фурье используя методы факторизации и теории функций комплексного переменного и сводится к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси.

Для трансформантов искомых функций имеем:

$$\begin{aligned}\bar{w}_1(\sigma, y) &= \bar{u}_1(\sigma, y) + 2\pi e^{-\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} y} \delta(\sigma + \sigma_*), \\ \bar{\Phi}_1(\sigma, y) &= \bar{\varphi}_1(\sigma, y) + \bar{\Phi}_{1\infty}(\sigma, y),\end{aligned}\quad y > 0\tag{3.3.27}$$

$$\begin{aligned}\bar{w}_2(\sigma, y) &= \bar{u}_2(\sigma, y) + \bar{w}_{2\infty}(\sigma, y), \\ \bar{\Phi}_2(\sigma, y) &= \bar{\varphi}_2(\sigma, y) + \bar{\Phi}_{2\infty}(\sigma, y),\end{aligned}\quad y < 0 \quad (3.3.28)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(\sigma, y) &= A_1(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}y}, \\ \frac{\varepsilon_1}{e_1}\bar{\varphi}_1(\sigma, y) &= B_1(\sigma)e^{-|\sigma|y} + A_1(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}y},\end{aligned}\quad y > 0 \quad (3.3.29)$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_2(\sigma, y) &= A_2(\sigma)e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}y}, \\ \frac{\varepsilon_2}{e_2}\bar{\varphi}_2(\sigma, y) &= B_2(\sigma)e^{|\sigma|y} + A_2(\sigma)e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}y},\end{aligned}\quad y < 0 \quad (3.3.30)$$

из контактных условий приведенных выше получим

$$\begin{aligned}c_1(1 + \chi_1)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}A_1(\sigma) + c_1B_1(\sigma)\chi_1|\sigma| &= -\bar{q}_+(\sigma), \\ A_1(\sigma) - A_2(\sigma) &= \bar{\psi}_-(\sigma) - 2\pi D_1\delta(\sigma + \sigma_*), \\ B_2(\sigma) &= -\frac{e_1}{e_2}B_1(\sigma),\end{aligned}\quad (3.3.31)$$

$$B_1(\sigma)e_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + e_1\varepsilon_2A_1(\sigma) - e_2\varepsilon_1A_2(\sigma) = 0,$$

$$D_1 = e_1DK_3(\sigma_*)$$

$$e_2\varepsilon_1D_1 = e_2\varepsilon_1 - e_1\varepsilon_2 + De_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

Здесь $\delta(\sigma + \sigma_*)$ —функция Дирака. Относительно функций $\bar{\psi}_-(\sigma), \bar{q}_+(\sigma)$

получим следующее функциональное уравнение

$$\begin{aligned}c_1\left[2\pi D_1\delta(\sigma + \sigma_*) - \bar{\psi}_-(\sigma)\right](1 + \chi_1)(1 + \chi_2)\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}K_*(\sigma) - \\ - \bar{q}_+(\sigma)\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)|\sigma|}{\varepsilon_2c_2\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}K_0(\sigma) = 0.\end{aligned}\quad (3.3.32)$$

В этих уравнениях

$$\begin{aligned}
 K_*(\sigma) &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2} - \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}, \\
 K_0(\sigma) &= c_1(1 + \chi_1) \frac{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}{|\sigma|} + c_2(1 + \chi_2) \frac{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{|\sigma|} - \frac{(e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.
 \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

Для определения искоемых функций $\bar{q}_+(\sigma), \bar{\psi}_-(\sigma)$ функциональное уравнение (3.3.32) решается используя методику развитую в [9,28,42], решения строятся факторизуя функцию $L(\sigma)$, представляя ее в виде

$$\begin{aligned}
 L(\sigma) &= \frac{\Lambda_*(\sigma)}{\Lambda_0(\sigma)}, \\
 \Lambda_*(\sigma) &= \frac{K_*(\sigma)}{K_{*\infty}}, \\
 \Lambda_0(\sigma) &= \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}} \frac{K_0(\sigma)}{K_{0\infty}},
 \end{aligned}$$

функции $\Lambda_*(\sigma) \rightarrow 1, \Lambda_0(\sigma) \rightarrow 1$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Выражения искоемых функций принимают вид

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_-(\sigma) &= -\frac{i\Lambda_*^+(\sigma_*)\sqrt{\sigma_* - k_1}D_1}{\Lambda_0^-(-\sigma_*)L^-(\sigma)\sqrt{\sigma - k_1}(\sigma + \sigma_* - i0)}, \\
 \bar{q}_+(\sigma) &= \frac{i\mu_*\Lambda_*^+(\sigma_*)\sqrt{\sigma_* - k_1}D_1\sqrt{\sigma + k_1}L^+(\sigma)}{\mu_0\Lambda_0^-(-\sigma_*)(\sigma + \sigma_* + i0)}.
 \end{aligned} \tag{3.3.34}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_* &= c_1(1 + \chi_1)(1 + \chi_2)K_{*\infty}, \\
 \mu_0 &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 c_2} K_{0\infty}.
 \end{aligned} \tag{3.3.35}$$

Следовательно, для амплитуд волнового поля получим

$$\begin{aligned}
 w_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_1(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma + w_{1\infty}(x, y), \\
 w_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_2(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma + w_{2\infty}(x, y).
 \end{aligned}
 \tag{3.3.36}$$

$i = 1, 2$

Для локализованных у контактной поверхности сдвиговых волн в полупространстве $x < 0$ получим

$$\begin{aligned}
 w_{1*}(x, y) &= A_*^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma_* x}, & y > 0 \\
 w_{2*}(x, y) &= A_*^{(2)} e^{\sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2} y} e^{i\sigma_* x}, & y < 0
 \end{aligned}
 \tag{3.3.37}$$

$$\begin{aligned}
 A_*^{(1)} &= \frac{c_2 \mu_* \Lambda_*^+(\sigma_*) D_1 L^+(\sigma_*) (1 + \lambda_0)}{2c_1 \sigma_* \Lambda_0^-(-\sigma_*) K_*'(\sigma_*)} \\
 A_*^{(2)} &= -\frac{i\mu_* \chi_2 \sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} \Lambda_*^+(\sigma_*) D_1 L^+(\sigma_*) (1 + \lambda_0)}{2\mu_0 (1 + \chi_2) \sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2} \Lambda_0^-(-\sigma_*) K_*'(\sigma_*)}. \\
 \lambda_0 &= \frac{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1}{e_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{\chi_2 |\sigma|}{(1 + \chi_2) \sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2}}.
 \end{aligned}$$

Для составного полупространства $x > 0$ получим локализованную волну с новым волновым числом σ_0

$$\begin{aligned}
 w_{10}(x, y) &= A_0^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma_0 x}, & y > 0 \\
 w_{20}(x, y) &= A_0^{(1)} e^{\sqrt{\sigma_0^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_0 x}, & y < 0
 \end{aligned}
 \tag{3.3.38}$$

$$A_0^{(1)} = \frac{\Lambda_*^+(\sigma_*) \sqrt{\sigma_* - k_1} D_1 \left[c_1 (1 + \chi_1) \frac{\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2}}{\sigma_0} - \frac{e_1 (e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \right]}{\Lambda_0^-(-\sigma_*) L(-\sigma_0) \sqrt{\sigma_0 + k_1} K_0'(-\sigma_0) (-\sigma_0 + \sigma_*)}.$$

Рассматривая дифрагированное волновое поле в составном полупространстве $x < 0$ находим, что возбуждается поверхностная–локализованная у граничной поверхности $y = 0$, волна распространяющаяся со скоростью падающей волны. В составном полупространстве $x > 0$, кроме дифрагированных объемных электроупругих волн, распространяются, если только среда допускает такое распространение (получены условия), локализованные у контактной плоскости между пьезоэлектрическими полупространствами, сдвиговые поверхностные (интерфейсные) волны – обусловленные пьезоэффектом и дифракцией падающей электроупругой волны сдвига.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе исследованы задачи распространения и дифракции волн сдвига в составном пространстве, когда пьезоэлектрические полупространства представляют пьезоэлектрики гексагональной симметрии класса $6mm$, с разными электроупругими параметрами. Задачи рассмотрены на основе линейной теории электроупругости при квазистатическом приближении. Изучены вопросы распространения поверхностных акустоэлектрических волн в пьезоэлектрической среде. При решении рассмотренных задач установившихся колебаний и дифракции электроупругих волн на полубесконечной трещине построены корректные с физической и математической точки зрения волновые модели для сплошных сред. Точное решение рассмотренных задач и изучение особенностей возможно только решением волнового уравнения с соответствующими условиями на контактной поверхности раздела тел, зависящими еще и от электроупругих свойств материала тел. Для решения задач использованы методы теории упругости и математической физики, эти методы и решения поставленных задач имеют значение с точки зрения разработки эффективных методов решения краевых задач. Используются методы интегрального преобразования Фурье, теории функции комплексного переменного и метод факторизации. Задачи дифракции волн сдвига на крае полубесконечной трещины сводятся к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси.

Эффект связанности электрической и деформационной полей выявляется как физико-механическими процессами, происходящими в отдельных пьезоэлектрических полупространствах, так и процессами возникающими при взаимодействии этих сред. В рассмотренных задачах выявлены основные характеристические свойства распространения и дифракции сдвиговых

электроупругих волн, выведены асимптотические формулы в контактной плоскости полупространств. Разность электромеханических свойств контактирующих сред приводит к существенным изменениям сдвигового волнового поля. Выявлены новые свойства и особенности волн, присущие взаимосвязанным физическим полям и средам:

– Связанностью физических полей– пьезоэффектом, обусловлены как распространения локализованных у плоскости раздела полупространств поверхностных волн, со смещениями частиц в направлении симметрии пьезокристалла, так и появление объемной волны, распространяющейся от контактной плоскости в глубь пьезоэлектрических полупространств.

– Показано, что в составном пространстве, когда имеет место полный электромеханический контакт между пьезоэлектрическими полупространствами, при определенных условиях значений электроупругих параметров материалов сред, могут распространяться локализованные у контактной поверхности электроупругие сдвиговые волны, и скорость распространения этих волн больше, чем скорость поверхностных волн при безакустическом контакте между полупространствами.

– Дифракция падающей плоской электроупругой волны сдвига на полубесконечной трещине между пьезоэлектрическими полупространствами, когда по остальной части контактной плоскости полупространства скреплены, приводит к распространению одной или двух локализованных (поверхностных) волн с разными скоростями.

– Дифракция падающей плоской электроупругой волны сдвига на полубесконечной трещине в составном пьезоэлектрическом пространстве, когда тонкий металлический слой занимает всю контактную плоскость, приводит к распространению одной или двух локализованных (поверхностных) волн с разными скоростями.

– В задачах о дифракции локализованных (поверхностных) сдвиговых волн появляются сдвиговые локализованные волны, обусловленные наличием полубесконечной трещины в контактной плоскости.

– Наличие источника установившихся механических колебаний в одном из пьезоэлектрических полупространств приводит к распространению сдвиговой поверхностной волны в составном пространстве, как при безакустическом контакте между полупространствами, так и, для определенных условиях электроупругих параметров, при полном контакте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1985, т. 38, № 1, с. 12–19.
2. Аветисян А.С. Поверхностные электроупругие волны Лява в случае неоднородного пьезоэлектрического слоя. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1987, т. 40, № 1, с. 21–28.
3. Аветисян А.С. О распространении электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике, Изв. АН Арм. ЦЦР, Механика, 1988, Том 38, № 1, с. 12–19.
4. Аветисян А.С., Белубекян М.В. Нелинейные поверхностные электроупругие волны в керамике. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1988, т. 41, № 4, с 9–18.
5. Аветисян А.С., Белубекян М.В. Распространение поверхностных волн в пьезоэлектрической среде при наличии внешнего электрического поля. В кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван, Изд. АН Арм. ССР, 1987, с. 85–91.
6. Аветисян А.С., Маргарян Дж.М. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. //Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №3–4. С.31–36.
7. Агаян К.Л. Дифракция электроупругих сдвиговых плоских волн на краях полубесконечных электродов в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. Эколог. вестник научн. центров. 2011, № 1, с. 13–18
8. Агаян К. Л., Григорян Э.Х., О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн. Докл. НАН РА. 2010г. Т. 110. №3 с.261–271.
9. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. Известия НАН РА Механика 2010, т.63 №1. с 50 – 69.

10. Багдасарян Г.Е. Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Изд. ЕГУ, Ереван, 2006. 492 с.
11. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. “Актуальные проблемы неоднородной механики”. Ереван, 1991, с. 49–54.
12. Балакирев М.К. Гилинской И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск, Наука, 1982, 239с.
13. Бардзокас Д. И. Фильштинский М.Л. Электрическое возбуждение пьезокерамического пространства с частично электродированным отверстием и туннельной трещиной. Изв. НАН РА, Механика, 2004, т. 57, № 4, с. 23–34
14. Басс Ф.Г., Гредескул С.А., Каганов М.И. Взаимодействие заряженных частиц с пьезоэлектриком. ФТТ 1964 т. 6, № 12, с. 3577–3584.
15. Белубекян М.В. Экранированная поверхностная сдвиговая волна в пьезоактивном полупространстве гексагональной симметрии. В сб. “Проблемы динамики взаимодействие деформируемых сред” Труды VI межд. конф., изд. Инст. Механики НАН Армении, Ереван 2008, с. 125–130.
16. Белубекян М.В. Локализованные сдвиговые электроупругие волны при движении слоя вдоль полупространства. Док. НАН Армении. 2009, т.109, №4 с. 297–303.
17. Белубекян М.В., Белубекян В.М. Поверхностные электро–упругие сдвиговые волны в пьезоактивной системе слой полупространство. Ученые записи. ЕГУ Естественные науки, 2006, №3, с. 25 –30.
18. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. Физическая акустика, т. 1, ч. А /Под ред. У. Мезона. М.: Мир, 1966, с. 204–326.

19. Бреховских Л. М. Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М. Наука, 1982. 335 с.
20. Вайнштейн Л. А. Теория диффракции и метод факторизации. Изд. “Сов. Радио” Москва, 1966, 426с.
21. Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. – М.: Наука, 1977, 416 с.
22. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ. – мат. литературы, 1963, 640 с.
23. Гишинский И. А., Попов В.В. Возбуждение акустоэлектрических волн в пьезоэлектриках внешними источниками. Журнал Технической Физики, 1976г. , Том 46, №11, с. 2233 – 2243.
24. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. Ученые записки ЕГУ, естественные науки, 1979, № 3, с. 29–34.
25. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А. Дифракция локализованной сдвиговой волны на крае полубесконечной трещины в составном упругом пространстве. Изв. НАН Армении, Механика, т.67, N 4, 2014г, с.10–20.
26. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. Изв. НАН Арм., Механика, 2005, т. 58, № 1, с. 38–50.
27. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом пространстве с двумя параллельными полубесконечными трещинами. В кн. «Проблемы взаимодействия деформированных сред», V межд. конф. Горис 2005г. с. 163–168.
28. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик–диэлектрик.«Проблемы взаимодействия деформированных сред» VII межд. конф. Горис–Степанакерт 2011г. с. 137–143.

29. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краю полубесконечного металлического слоя. Изв. НАН Арм., Механика, 2004, т. 57. № 4, с.43– 52.
30. Григорян Э.Х., Синянян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №1, с.40–51.
31. Григорян Э.Х., Синянян С.С. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. // Изв. НАН РА Механика 2010.Т.63. №2,с.56–66
32. Гринченко В.Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. 283с.
33. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. /Механика связанных полей в элементах конструкций, т.5. /– Киев, Наук. думка., 1989, 230 с.
34. Гуляев Ю.В. Поверхностные электрорезонансные волны в твердых телах. Письма в ЖЭТФ, 1969, т. 9, № 1, с. 63–65.
35. Гуляев Ю.В., Пустовойт В.Н. Усиление поверхностных волн в полупроводниках. ЖЭТФ, 1964, т. 47, № 6, с. 2251–2253.
36. Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З. Электроупругие поверхностные волны Лява в слоистой структуре из пьезоэлектрического полупространства и диэлектрического слоя при наличии электрического экрана. Изв. НАН Арм., Механика, т.66, № 2, 2013, с. 25–33.
37. Даноян З. Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и мягким диэлектрическим слоем. (Исследование характеристического уравнения.) Изв. НАН РА, ‘Механика’, 2006, т.59, № 3, с. 34–44.

38. Джилавян С. А. Дифракция поверхностной сдвиговой волны в пьезоэлектрическом пространстве с полубесконечной трещиной. В сб. “Смешанные задачи механики деформируемого тела”. Саратов, Россия, 2005, с.133–136.
39. Джилавян С.А. Казарян А. А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в диэлектрике. Изв. НАН Арм., Механика, т.68, № 1, 2015, с. 45–57.
40. Джилавян С.А., Саргсян А.С. Дифракция поверхностной волны сдвига на полубесконечной трещине в составном пьезоэлектрическом пространстве. //Материалы 5–ой межд.конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван: 2017. С.79–80.
41. Джилавян С.А., Саргсян А.С. Сдвиговые колебания в составном пьезоэлектрическом пространстве. Вестник НПУА, Механика, машиноведение, машиностроение, 2018, № 2, с.29–38.
42. Джилавян С.А., Саргсян А.С. Дифракция плоской волны сдвига в составном пьезоэлектрическом пространстве. Изв. НАН Армении, Механика, т.72, №1, 2019г, с.35–48.
43. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практические применения. М.: Ин.Лит., 1949, 719 с.
44. Кессених Г.Г., Любимов В.Н., Филиппов В.В. Поперечные поверхностные акустические волны для изотропной подложки с пьезоэлектрическим слоем. Акуст. журн. 1985, т. 31, вып. 4, с. 492–495.
45. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982, 620 с.
46. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. Изд. Мир, Москва, 1974, 323 с.
47. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Изд. иностранной литературы, 1962, 280 с.
48. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир 1975, 872 с.

49. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988, 472 с.
50. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986, 328 с.
51. Саргсян А.С. Электроупругие сдвиговые колебания в составном пьезоэлектрическом пространстве с металлическим слоем. Известия НАН Армении и Гос. инж. университета Армении. Серия техн. наук, т.72, № 2, 2019г, с.153–163.
52. Саргсян А.С. Дифракция плоской сдвиговой волны на крае полубесконечной трещины в пьезоэлектрическом составном пространстве с металлическим слоем, Изв. НАН Армении. Механика, т.72, № 2, 2019г, с. 53–63.
53. Саргсян А.С. Дифракция локализованной сдвиговой волны на крае полубесконечной трещины в пьезоэлектрической составной среде, Межд. сб. научн. трудов ДонНТУ «Прогрессивные технологии и системы машиностроения», т.65, № 2, 2019г, с. 43–51.
54. Саргсян А.С., Григорян А.А. Электроупругие волны в составном пьезоэлектрическом пространстве при линейном источнике сдвиговых колебаний. Известия НАН Армении и Гос. инж. университета Армении. Серия техн. наук, т.71, № 4, 2018г, с.397–407.
55. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1972, 283 с.
56. Сумбатьян М. А., Скалия А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. – М.: Физматлит. 2013. – 328с.
57. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976, 616 с.
58. Фильштинский Л.А., Хворост В.А. Возбуждение составного пьезоэлектрического пространства сосредоточенными гармоническими источниками. Теоретическая и прикладная механика, № 34, с. 121–125.

59. Шилов Г.Е. Математический анализ, второй специальный курс. – М.: Наука, 1965, 328 с.
60. Bagheri R. Several horizontal cracks in a piezoelectric half-plane under transient loading. Arch. Appl. Mech. **87**, 1979–1992 (2017)
61. Belubekyan M. V., Belubekyan V. M. Surface waves in piezoactive elastic system of a layer on a semi-space. Proc. of the Yerevan State University. Phys. & Math. Sei. 2013, 3. pp. 45–48
62. Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V., Plessky V. Surface acoustic waves in inhomogeneous media, Springer series on wave phenomena, Vol. 20, 1995, p.388.
63. Bleustein J.L. A new surface wave in piezoelectric materials. Applied Physics Letters, № 13 (12), 1968, pp. 412–413.
64. Chen W. Surface effect on Bleustein–Gulyaev wave in a piezoelectric half-space. Theor. Appl. Mech. Lett. **1**, 041001 (2011)
65. Collet B., Destrade M. Explicit secular equations for piezoacoustic surface waves: Shear–horizontal modes. J. Acoust. Soc. Am. 116, pp. 3432–3442 (2004)
66. Curtis R. G., Redwood M. Transvers surface wave on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness. // L. Appl. Phys., 1973, vol.44, №5, p.2002–2007
67. Danoyan Z.N., Piliposian G.T.: Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and two isotropic layer Internation Journal of Solids and Structures 46 (2009), pp.1345– 1353.
68. Darinskii A.N., Weihnacht M. Supersonic Love waves in strong piezoelectrics of symmetry mm2. Journal of Applied Physics, 2001, № 90(1), pp. 383–388.
69. Deng W., Meguid S.A. Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezoelectric materials. J. Appl. Mech. 65, 76–84 (1998)
70. Du J., Jin X., Wang J. Love wave propagation in layered magneto-electro-elastic structures with initial stress. Acta Mech. **192**, 169 (2007).

71. Ganguly M. Bleustein-Gulyaev waves in a pre-stressed piezoelectric half space. Proc. Indian Natl. Sci. Acad. **50A**(4), 375–381 (1984)
72. Govorukha V., Sheveleva A., Kamlah M. A crack along a part of an interface elektrod in a piezoelectric bimaterial under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings. Acta Mechanica, June 2019, vol.230, 6, pp.1999–2012.
73. Häusler C., Gao C.F., Balke H. Collinear and periodic electrode–ceramic interfacial cracks in piezoelectric bimaterials. J. Appl. Mech. **71**, 486–492 (2004)
74. Hu Y., Yang J., Jiang Q. Surface waves in electrostrictive materials under biasing fields. J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) **55**, 678–700 (2004)
75. Ing Y.S., Wang M.J. Explicit transient solutions for a mode III crack subjected to dynamic concentrated loading in a piezoelectric material. International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, 2004, pp. 3849–3864.
76. Jiao F.Y., Wei P.J., Li L. Wave propagation through an inhomogeneous slab sandwiched by the piezoelectric and the piezomagnetic half spaces. Ultrasonics **73**, 22–33 (2017)
77. Jin F., Wang Z., Wang Tiejun The Bleustein–Gulyaev (B–G) wave in a piezoelectric layered half-space. Int. J. Eng. Sci. **39**, 1271–1285 (2001)
78. Leise T.L. A general solution method for an anti-plane shear crack dynamically accelerating along a bilateral interface. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 53, 2005, pp. 639–653.
79. Li P. Jin. F., Qian Z. Propagation of the Bleustein–Gulyaev waves in a functionally graded transversely isotropic electro–magneto–elastic half–space. //European Journal of Mechanics A/ Solids. 37, 2013, pp. 17–23.
80. Li S. Transient wave propagation in piezoelectric half space. Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik (ZAMP), Vol. 51, 2000, pp. 236–266.

81. Li X.F. Electroelastic field induced by thin interface electrodes between two bonded dissimilar piezoelectric ceramics. *Sci. China Ser. G Phys. Mech. Astron.* **49**, 526–539 (2006)
82. Li X.F. Transient response of a piezoelectric material with a semi-infinite mode-III crack under impact loads. *Int. J. Fract.* **111**, 119–130 (2001)
83. Li X.Y., Wang Z.K., Huang S.H Love waves in functionally graded piezoelectric materials. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, 2004, pp. 7309–7328.
84. Li Y.D., Zhang N., Lee K.Y. Effect of a finite interface on the electrode in a non-homogeneous piezoelectric structure. *Smart Mater. Struct.* **18**, 125028 (2009)
85. Lin Y., Wang C., Ying C.F. Head waves in a piezoelectric half-space. *IEEE Ultrasonics Symposium*, 1993, pp. 773–776.
86. Loboda V., Mahnken R. An investigation of an electrode at the interface of a piezoelectric bimaterial space under remote electromechanical loading. *Acta Mech.* **221**, 327–339 (2011)
87. Maerfeld C., Tournous P. Pure shear elastic surface wave guided by the interface of two semi-infinite media. *Applied Physics Letters*, 1971, Vol. 19, pp. 117–118.
88. Miklowitz J. *The theory of elastic waves and waveguides*. North – Holland Pub., 1978, pp. 618.
89. Nakamura K. Shear–horizontal piezoelectric surface acoustic waves. *Jpn. J. Appl. Phys.* **46**, pp. 4424–4427 (2007).
90. Narita F., Yoshida M., Shindo Y. Electroelastic effect induced by electrode embedded at the interface of two piezoelectric half-planes. *Mech. Mater.* **36**, 999–1006 (2004)
91. Pak Y.E. Crack extension force in a piezoelectric material. *J. Appl. Mech.* **57**, 647–653 (1990)
92. Qian Z., Jin F., Wang Z., Kishimoto K. Love waves propagation in a piezoelectric layered structure with initial stresses. *Acta Mechanica*, Vol. 171, 2004, pp. 41–57.

93. Rokne J., Singh B.M., Dhaliwal R.S. Moving anti-plane shear crack in a piezoelectric layer bonded to dissimilar elastic infinite spaces. *Eur. J. Mech. A Solids* **31**, 47–53 (2012)
94. Singh B. Wave propagation in a prestressed piezoelectric half-space. *Acta Mech.* **211**(3), 337–344 (2010)
95. Wang Q. Wave propagation in a piezoelectric coupled solid medium. *J. Appl. Mech.* **69**, 819–824 (2002)
96. Wang X., Shen Y.P. Exact solution for mixed boundary value problems at anisotropic piezoelectric bimaterial interface and unification of various interface defects. *Int. J. Solids Struct.* **39**, 1591–1619 (2002)
97. Yang J. Bleustein–Gulyaev waves in strained piezoelectric ceramics. *Mech. Res. Commun.* **28**, 679–683 (2001)
98. Zhang P., Wei P.J., Li Y.Q. In-plane wave propagation through a microstretch slab sandwiched by two half-spaces. *Eur. J. Mech. A Solid* **63**, 136–148 (2017)