ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ԽԱՉԱՏՈՒՐ ԱԲՈՎՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱԻԴԱ ԳՐԻՇԱՅԻ ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

«ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑԻ ԱՊԱԳԱ ՈՒՍՈՒՑՉԻ ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ՄՏԱԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԸ»

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ

ԺԳ.00.02 – «Դասավանդման և դաստիարակության մեթոդիկա»
(մաթեմատիկա) մասնագիտությամբ մանկավարժական
գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճան
հայցելու համար

Գիտական ղեկավար՝
ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու,
դոցենտ Հ.Հ.
Հարությունյան

ԵՐԵՎԱՆ 2018

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Հետազոտության արդիականությունը: Տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի մասնագիտական-մեթոդական, գիտական-տեսական և գործնական պատրաստման հիմնահարցը չափազանց արդիական է և՛ ՀՀ-ում, և՛ ամբողջ աշխարհում: 21-րդ դարում Հայաստանի Հանրապետությունում տեղի ունեցող արմատական սոցիալ-տնտեսական փոփոխությունները անմիջական ազդեցություն ունեն բարձրագույն՝ հատկապես մանկավարժական, մասնագիտական կրթության վրա: Էապես բարեփոխվել են (ՀՊՄՀ-ի միջազգային համագործակցական կապերի ընդլայման շնորհիվ) «Մանկավարժություն և մեթոդիկա (տարրական կրթություն)» ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի և՛ չափորոշիչները, և՛ ուսումնական պլանները, և՛ առարկայական ծրագրերը: Դրանցում էական նորամուծություն է ստոխաստիկայի (հավանականությունների տեսության, միացությունների տեսության (կոմբինատորիկա)) ներառումը առարկայական ծրագրերում:

Այդ նորամուծությունը զուգահեռվում է հանրակրթության մեջ համապատասխան փոփոխությունների հետ: Հանրակրթության «Մաթեմատիկա» բովանդակային ուղղության (և՛ տարրական, և՛ հիմնական, և՛ ավագ դպրոցի) ծրագրերում իր ուրույն տեղն է գտել ստոխաստիկան, չնայած պետք է խոստովանել՝ համարյա մարգինալ կարգավիճակում: Նշենք, որ արևմուտքում (սկսած 20-րդ դարի կեսերից) և ՌԴ-ում (սկսած 20-րդ դարի վերջերից) ստոխաստիկան կայուն (և ոչ մարգինալ) տեղ ունի հանրակրթության մեջ:

Ստոխաստիկական բաղադրիչի ներառումը տարրական դպրոցի և ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրերի մաթեմատիկայի դասընթացին ինքնանպատակ չէ և ոչ էլ տուրք է արևմուտքում ու ՌԴ-ում առկա ուղղընթացներին (тенденции, trends): Հայտնի է, որ աշխարհի գիտական պատկերի նկարագրման հիմքում ընկած են հիմնականում հավանական օրենքներ: Ինչպես արդարացիորեն նշում է հունգարացի հայտնի մանկավարժ-մաթեմատիկոս Տ. Վարգան՝ «... աշխարհը, որը երևում է դպրոցական դասագրքերի պրիզմայի միջով, խիստ պատճառահետևանքային է. դրանում պատահականությունը տեղ չունի, այնինչ իրական աշխարհում «պատահականությունը» բնավ էլ երկրորդական դեր չի խաղում» [121, էջ 29]: Իսկ Մ. Գարդները ավելացնում է. «Ստոխաստիկան ժամանակակից կյանքի քաոսային կերպը հասկանալու մի ուղղորդիչ է» [45, էջ 3]:

Ստոխաստիկայի ներառումը ՄՄ(ՏԿ) առարկայական ծրագրեր նաև (և հատկապես) այլ նպատակներ է հետապնդում: Ստոխաստիկական (մեր հետազոտության տեսակետից՝ կոմբինատորային) մտածողությունը ընդհանուր գիտական մտածողության կարևոր բաղադրիչ է: Ինչպես ցույց է տալիս TIMSS (Third International Mathematics and Science Study – Մաթեմատիկայի և բնագիտության միջազգային երրորդ ուսումնասիրություն) միջազգային մոնիթորինգի (գնահատման) արդյունքների վերլուծությունը, ՀՀ-ի չորրորդ դասարանցիների արդյուքները ցածր լինելը բացատրվում է նաև ստոխաստիկական կերպի մտածողության ոչ բավարար մակարդակով: Նշենք, որ TIMSS-ը գիտելիքների գնահատման չափազանց հեղինակավոր և արժանահավատ համակարգ է, և շատ երկրների մաթեմատիկա առարկայական բնագավառի բովանդակությունը համուղղվում-բարեփոխվում է՝ ըստ TIMSS-ի արդյունքների:

Բայց կրտսեր դպրոցականի մեջ ստոխաստիկական մտածողություն (գոնե պարզագույն մակարդակով) պետք է ձևավորի տարրական դպրոցի ապագա ուսուցիչը, ով, բնականաբար, պետք է օժտված լինի այդ մտածողությամբ:

Այսպիսով, ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագիրն ուսումնասիրող ուսանողի՝ տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի ստոխաստիկական (կոմբինատորային) մտածողության զարգացման և, ընդհանրապես, ստոխաստիկական մշակույթի ձևավորման հիմնախնդիրն արդիական գիտական ուղղություն է: Այդ չափազանց ընդգրկուն գիտական ուղղության տարբեր ենթաուղղություններով հետազոտություններ են կատարվել ինչպես ՌԴ-ում, այնպես էլ Արևմուտքի և Արևելքի տարբեր երկրներում:

ՌԴ-ում

- Ստոխաստիկական պատկերացումների ձևավորման մեթոդիկա (և՛ տարրական, և՛ հիմնական դպրոցում). Վ.Ա. Բոլոտնյուկ (Болотнюк В.А.), Լ.Օ. Բիչկովա (Бычкова Л.О.), Դ.Վ. Մանևիչ (Маневич Д.В.), Ս.Ի. Վորոբյովա (Воробьева С.И.), Վ.Դ. Սելյուտին (Селютин В.Д.) և այլք:

- Հանրակրթության մեջ ստոխաստիկական գծի կիրառական ուղղվածության ուժեղացում. Ե.Ա. Բունիամինովիչ (Буниаминевич Е.А), Ս.Ն. Դվորյատկինա (Дворяткина С.Н.), Ա.Կ. Պլոցկի (Плоцки А.), Օ.Ն. Տռոիցկայա, (Троицкая О.Н.) Վ.Վ. Ֆիրսով (Фирсов В. В.) և այլք:

- Մաթեմատիկայի ուսուցչի (հիմնական և ավագ դպրոց) ստոխաստիկական պատրաստվածությունն ապահովող մեթոդիկաների մշակում. Դ.Վ. Մանևիչ (Маневич Д.В.), Տ.Ա. Պոլյակով (Поляков Т.А.), Վ.Դ. Սելյուտին (Селютин В.Д.), Ա.Վ. Վանյուրին (Ванюрин А.В.) և այլք:

- Բուն կոմբինատորիկայի ուսուցման մեթոդիկայի հարցեր. Ե.Ե. Բելոկուրովա (Белакурова Е.Е.), Գ.Վ. Բուրմենսկայա (Бурменская Г.В.), Գ.Ս. Եվդակիմովա և Ե.Պ. Ստվոլոկովա (Евдокимова Г.С., Столкова В.И.) և այլք:

Այլ երկրներում

Ստոխաստիկական մշակույթի և ստոխաստիկական մտածողության ձևավորման մեթոդիկաներ. Պ. Քոբ (Совв Р.), Ճ. Ինգլիշը (English E.), Ե. Ֆիշբեյն (Fischbein E.), Ջ. Գարֆիլդ (Garfield J.), Ջ. Ճոգենսի (Shaughenssy J.), Կ. Բատաներո (Batanero C.), Գ. Ջոնս (Jones G.), Ի. Գալ (Gal I.) և այլք:

Ստոխաստիկայի մի կարևոր մաս է կոմբինատորիկան, որը գիտություն է դիսկրետ բազմության տարրերը որոշակի կանոններով դասավորելու ձևերի քանակը գտնելու մասին: Կոմբինատորիկան հավանականությունների տեսության ուսուցման գործընթացում առանցքային դեր ունի: Բայց կոմբինատորիկայի ուսուցման նշանակությունը նաև բուն (և հատկապես) կոմբինատորիկայի մեջ է: Պիաժեն և Ինհելդերը ընդգծում են [73], որ կոմբինատորային մտածողությունը կոգնիտիվ մտածողության կարևորագույն աստիճան է:

Ինգլիշը իր աշխատանքում [106] ուսումնասիրելով կրտսեր դպրոցականների կոմբինատորային մտածողության հիմնահարցը, հանգել է հետևյալ եզրակացություններին.

- «Կոմբինատորիկան էական ներուժ ունի ստեղծելու իրադրություններ, որոնցում երեխաները ներառվում են իրենք իրենց կողմից ուղղորդված ուսումնասիրության» [105, էջ 26]:
- «Կոմբինատորիկայի խնդիրների լուծումը հասանելի է ամենատարբեր տարիքների համար, քանի որ դրանք կարող են լուծվել առանց բանաձևերի և ալգորիթմների օգտագործման, մի բան, որը լավագույն այլընտրանքն է տարբեր տեսակի բանաձևերը մեխանիկորեն սերտելու (անգիր անելու)» [105, էջ 133, 104, էջ 463]:
- «Կոմբինատորային խնդիրները հատկապես կարևոր են, որովհետև դրանք օգնում են կոնցեպտուալ հասկացմանը և գիտելիքների փոխանցմանը» [106, էջ 74]:

Այս համատեքստում նշված (և այլ) ուսումնասիրությունները, անշուշտ, լուրջ ավանդ ունեն կոմբինատորային մտածողության ձևավորման-զարգացման և այդ ուղղությամբ ուսուցչի մասնագիտական պատրաստման հիմնախնդրում: Բայց, չնայած առկա նվաճումներին, մի շարք հարցեր մնում են չուսումնասիրված: Խոսքը վերաբերում է տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության ձևավորման-զարգացման հիմնախնդրին:

Այսպիսով, ***հետազոտության արդիականությունը*** որոշվում է ժամանակակից տարրական դպրոցի համար ստոխաստիկական (և հատկապես՝ կոմբինատորային) մտածողությամբ օժտված ապագա ուսուցիչ պատրաստելու անհրաժեշտությամբ:

Հետազոտության հիմնախնդիրը ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի շրջանավարտի կոմբինատորային մտածողության զարգացմանը նպաստող արդյունավետ և օպտիմալ մեթոդական համակարգի (ուսուցման՝ նպատակներ, բովանդակություն, մեթոդներ) մշակումն է:

Հետազոտության օբյեկտը ՄՄ(ՏԿ) բակալավրի կրթական ծրագրի «Մաթեմատիկա–տարրական դպրոցի մաթեմատիկա բովանդակային ուղղության տեսական հիմունքները (ՏԴՄԲՈՒՏՀ)» դասընթացի «Ստոխաստիկա» մոդուլի ուսումնասիրության գործընթացն է:

Հետազոտության առարկան տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի ստոխաստիկական կրթության կոմբինատորային մտածողության զարգացման մեթոդական համակարգն է:

Հետազոտության նպատակն է մշակել և գիտականորեն հիմնավորել տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացումն ապահովող ուսուցման գործուն մեթոդական համակարգ:

Հետազոտության վարկածը մեր այն ենթադրությունն է, որ տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի ստոխաստիկական մշակույթի ձևավորումը և կոմբինատորային մտածողության զարգացումը կլինի արդյունավետ, եթե՝

1. որոշվեն ստոխաստիկական (և հատկապես՝ կոմբինատորային) մտածողության ձևավորման հոգեբանական հիմքերը,
2. մշակվեն կոմբինատորային մտածողության ձևավորման մակարդակը որոշող մեթոդիկաներ,
3. կոմբինատորիկա բովանդակային գծի ուսուցման մեթոդիկան իրագործվի դիսկրետ (հատընդհատ) մաթեմատիկայի ուսուցման համատեքստում,
4. կոմբինատորիկա բովանդակային գծի ուսուցումն իրագործվի ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի «Մաթեմատիկա» դասընթացի այլ բովանդակային գծերի հետինտեգրման միջոցով,
5. կոմբինատորիկա բովանդակային գծի ուսուցման մեթոդիկան իրագործվի տարրական դպրոցի «Մաթեմատիկա» դասընթացի բովանդակության համատեքստում:

Հետազոտության հիմնախնդրի նպատակին, առարկային, օբյեկտին, առաջադիր վարկածին համապատասխան որոշվել են հետազոտության հետևյալ ***խնդիրները***.

1. իրականացնել ուսուցման և զարգացման փոխկապակցվածության հիմնախնդրի վերլուծություն՝ տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման համատեքստում,
2. մշակել տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի ստոխաստիկական մշակույթի ձևավորման և կոմբինատորային մտածողության զարգացման հոգեբանական-մանկավարժական հայեցակարգ,

3. շրջանակել և տեսականորեն հիմնավորել ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրում ստոխաստիկական մոդուլի կոմբինատորիկա բաժնի բովանդակության կառուցման սկզբունքները,

4. այդ բովանդակության կառուցումը իրագործել դիսկրետ մաթեմատիկայի և ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի «Մաթեմատիկա» դասընթացի հետինտեգրման պայմաններում,

5. մշակել տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացմանն ուղղված մեթոդիկաներ,

6. փորձարարական ճանապարհով հիմնավորել մշակված մեթոդիկաների արդյունավետությունը:

Հետազոտության տեսական-մեթոդաբանական հիմք են՝

- իմացության տեսության հիմնական դրույթները, ինտել եկտի զարգացման օպերացիոնալ հայեցակարգը (Ժ. Պիաժե, Բ. Ինհելդեր, Ե. Ֆիշբեյն),
- ուսուցման մեջ գործունեական մոտեցման հայեցակարգը (Պ.Յա. Գալպերին (Гальперин П.Я.), Ա.Ն. Լեոնտև (Левнтев А.Н.), Ս.Լ. Ռուբինշտեյն (Рубинштейн С.Л.), Ա. Սֆարդ (Sfard A.)),
- մաթեմատիկայի կիրառական ուղղորդվածության հայեցակարգը (Վ.Ա. Դալինգեր (Далингер В.А.), Ն.Ա. Տերեշին (Терешин Н.А.), Վ.Վ. Ֆիրսով (Фирсов В.В.), Ջ. Քիլպատրիկ (Kilpatrick J.), Ֆ. Լեսթեր (Lester F.), Ա. Շոենֆելդ (Schoenfeld A.)),
- կրթության սոցիոմշակութային տեսությունները (Լ.Ս. Վիգոտսկի, Պ. Քոբ),
- մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդիկայի հայեցակարգեր (Ա.Ն. Կոլմոգորով, Ա.Գ. Մորդկովիչ (Мордкович А.Г.), Ն.Մ. Ամոսով (Амосов Н.М.), Գ.Ի. Սարանցև (Саранцев Г.И.)):

Դրված խնդիրների լուծման համար օգտագործվել են ***հետազոտության մեթոդներ.***

1. ***Տեսական***

- հետազոտության թեմային վերաբերող հոգեբանամանկավարժական, մեթոդական և ուսումնական գրականության քննարկման վերլուծություն,

- ստոխաստիկային վերաբերող բուհական և դպրոցական առարկայական ծրագրերի, դասագրքերի և ուսումնական ձեռնարկների վերլուծություն և համակարգում:

2. ***Էմպիրիկ՝***

- ուղղակի և անուղղակի դիտում, անկետավորում և թեստավորում,
- փորձարարական ուսուցում, ուսանողների ինքնուրույն աշխատանքների վերլուծություն,
- մանկավարժական փորձարկում՝ հաստատագրող, որոնողական և ձևավորող փուլերով:

3. ***Փորձարարական-վիճակագրական՝*** փորձարարական տվյալների քանակական և որակական մշակում՝ մաթեմատիկական վիճակագրության մեթոդներով:

Հետազոտության բազա են հանդիսացել Խաչատուր Աբովյանի անվան ՀՊՄՀ-ի սկզբնական կրթության ֆակուլտետը, Վանաձորի Հ. Թումանյանի անվան մանկավարժական ինստիտուտը, Հայ-ռուսական (սլավոնական) համալսարանը, Երևանի թիվ 57, 137 դպրոցները, Մասիս քաղաքի թիվ 2 դպրոցը, «Ուսմունք» կրթահամալիրը:

Հետազոտության անցկացման փուլերը.

Առաջին փուլում (2010-2011թթ.)

Կատարվել է ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագիրն ուսումնասիրող ուսանողների ստոխաստիկական պատրաստվածության, ինչպես նաև տարրական դպրոցի ուսուցիչների կոմբինատորային մտածողության մակարդակի հետազոտում, որի արդյունքում շրջանակվել են ատենախոսական հետազոտության հայեցակարգային հիմքերը, ընտրվել և նախագծվել են հետազոտության մեթոդները:

- ուսումնասիրվել են ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի, ինչպես նաև տարրական դպրոցի «Մաթեմատիկա» դասընթացի չափորոշիչները և համապատասխան առարկայական ծրագրերը:

Երկրորդ փուլում (2011-2013թթ.) տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման մեթոդիկայի մշակման նպատակով ծրագրվել և անցկացվել է մանկավարժական գիտափորձ:

Երրորդ փուլում (2013-2014թթ.) ավարտվել է գիտափորձը, վերլուծվել են դրա արդյունքները: Յամակարգվել, ընդհանրացվել և ամփոփվել են հետազոտության արդյուքները, շարադրվել և ձևավորվել է ատենախոսությունը:

Յետազոտության գիտական նորույթը:

1. Առաջ է քաշվել տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման մեթոդական պատրաստվածության հայեցակարգ:

2. Գիտականորեն հիմնավորվել և իրականացվել է ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի կոմբինատորային բաղադրիչի ուսուցման մեթոդիկայի կառուցման նոր մոտեցում.

- ի հայտ են բերվել կոմբինատորային համախմբերի կառուցման գործողությունների ուղղորդող հիմքերը,
- հիմնավորվել է, որ համախմբերի կառուցմանն ուղղորդված գործողությունները տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման հոգեբանամանկավարժական անհրաժեշտպայման են,
- մշակվել և գիտականորեն հիմնավորվել են կոմբինատորային մտածողության զարգացման բավարար պայման հանդիսացող մեթոդական մոտեցումներ:

3. Յստակեցվել են ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրում կոմբինատորիկա մոդուլի բովանդակության ընտրության սկզբունքները.

-դիսկրետմաթեմատիկայի շրջանակներ,

-նյութի մատուցման պարուրաձև մոդել,

-դպրոցուղղորդ խնդիրների համակարգ:

Յետազոտության տեսական նշանակությունը

1. Մշակվել են (ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի համար) կոմբինատորային կրթության բովանդակային մեթոդական գծի տեսական այն հիմունքները, որոնք հիմք են տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման համար:

2. Առաջադրվել և հիմնավորվել են այդ բովանդակային-մեթոդական գծի կառուցման սկզբունքները:

3. Տեսականորեն հիմնավորվել է տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի ստոխաստիկական մշակույթի ձևավորման համակարգը՝ դիսկրետ մաթեմատիկայի ներառական համատեքստում:

4. Տեսականորեն հիմնավորվել է, որ կոմբինատորային հիմնական հասկացությունների ձևավորման հոգեբանամանկավարժական պայմանները կարող են հիմք հանդիսանալ այլ հիմնային տրամաբանական կառույցների կայացման համար:

Հետազոտության գործնական նշանակությունը

1. Մշակվել է (ՄՄ(ՏԿ) կրթականծրագրի) ստոխաստիկա մոդուլի առարկայական ծրագիր՝ կոմբինատորային մտածողության զարգացման համատեքստում:

2. Մշակվել է տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման մեթոդիկա:

3. Մշակվել է տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի ստոխաստիկական մշակույթի ձևավորմանն ու կոմբինատորային մտածողության զարգացմանն ուղղված խնդիրների համաշար:

4. Մշակված մեթոդիկաների և խնդիրների համաշարի դիդակտիկական հարմարեցումը (ադապտացիան) հնարավորություն կտա տարրական դպրոցի ուսուցչին՝ արդյունավետ կազմակերպել ու կրտսեր դպրոցականի ստոխաստիկական պատկերացումների ձևավորումը:

Հետազոտության հավաստիությունն ու հիմնավորվածությունը ապահովված են՝

- ատենախոսության ելակետային դրույթների տեսական-մեթոդաբանական հիմքերի օպտիմալ ընտրությամբ,
- ատենախոսության գիտական արդյունքների հիմքում մանկավարժության, հոգեբանության և մաթեմատիկական կրթության տեսությունների հիմնական դրույթները դնելու փաստով,
- հետազոտության նպատակներին հասնելու և հետազոտության խնդիրները լուծելու համապատասխան մեթոդների ընտրությամբ,
- ատենախոսության տեսական դրույթների և դրանց՝ փորձարարական ճանապարհով հաստատվելու անհակասելիությամբ:

Հետազոտության անցած փորձաքննությունը

Ատենախոսության հիմնական դրույթները, եզրակացությունները և հանձնարարականներն ընդհանրացվել են հրատարակումներում և զեկուցվել տարբեր մակարդակի գիտական համաժողովներում:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները.

- Ավանդական մեթոդներով կոմբինատորիկայի ուսուցումը ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի «Մաթեմատիկա-ՏԴՄԲՈՒՏՅ» դասընթացում հանգեցնում է նրան, որ տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության մակարդակը մնում է կրտսեր դպրոցականի կոմբինատորային պատկերացումների մակարդակի վրա:
- Տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման պայման է բազմության (ենթաբազմության) կազմի, դրանում եղած կարգի և տարրերի հիմնավորվածության նկատմամբ ***ուղղորդված հիմքը***:
- Կոմբինատորային համախմբվածությունների (տեղափոխություններ, զուգորդություններ, կարգավորություններ) ուղղորդման հիմքը պետք է կառուցվի որպես միասնական ամբողջական համակարգ. այդ տեսակ ուղղորդումը հնարավորություն է տալիս կառուցելու կոմբինատորային խնդիրների լուծման ***ընդհանրական միջոց:***
- Կոմբինատորային մտածողության զարգացման մանկավարժական պայմանները՝

  - համարժեքության դասեր,
  - առանցքային-կամրջող խնդիրներ,
  - ընդհանրացնող ռեֆլեքսիվ կրկնություններ,
  - լուծել կարողանալուց հասկանալ կարողանալուն տեղափոխություններ:

- Տարրական դպրոցի ուսուցիչների կոմբինատորային մտածողության զարգացումը իրագործվում է դիսկրետ մաթեմատիկայի բովանդակային համատեքստում՝ ընդհանրական միջոցով կիրառական խնդիրների լուծման արդյունքում:
- Այդ խնդիրների համակարգը կառուցվում է տարրական դպրոցի «Մաթեմատիկա» դասընթացի բովանդակային հենքի վրա:

- ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի կոմբինատորիկա մոդուլի ուսուցման մեթոդիկան, որի հիմնական դրույթներն են.

-տվյալ բաժնի ուսուցում՝ ուղղորդման հիմքի համատեքստում,

-բաժինների հաջորդական ներմուծում պարուրաձև քայլերով,

- ամբողջ մոդուլի ուսուցման արդյունքի նկատմամբ ռեֆլեքսիա՝ տարրական դպրոցի «Մաթեմատիկա» դասընթացի շրջանակներում:

Ատենախոսության կառուցվածքը

Ատենախոսությունը բաղկացած է երկու գլուխներից.

1. Տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման տեսական-մեթոդաբանական հիմունքները,
2. Տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման մեթոդական համակարգը:

Ատենախոսության առաջին գլուխը բաղկացած է երեք ենթագլխից.

- Կոմբինատորային բովանդակային գիծը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում,
- Կոմբինատորային մտածողության զարգացման հոգեբանամանկա-վարժական հիմունքները,
- ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագիրն ուսումնասիրող ուսանողի կոմբինատորային մտածողության զարգացման մանկավարժական պայմանները:

Ատենախոսության երկրորդ գլուխը բաղկացած է երեք ենթագլխից.

- Տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման մոդելը,
- Տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման մեթոդիկան,
- Մանկավարժական փորձարկման կազմակերպումն ու արդյունքները:

ԳԼՈՒԽ 1
ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑԻ ԱՊԱԳԱ ՈՒՍՈՒՑՉԻ ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ՄՏԱԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ՏԵՍԱԿԱՆ-ՄԵԹՈԴԱԲԱՆԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

1.1. ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ԲՈՎԱՆԴԱԿԱՅԻՆ ԳԻԾԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ

Բարձրագույն մանկավարժական կրթության համակարգի վերակառուցման արդի փուլը ընթանում է խորը գիտելիքների, հետազոտական հմտությունների, կարողությունների, մանկավարժական և հաղորդակցական տեխնոլոգիաների, մանկավարժական և մեթոդական վարպետության և այս ամենին տիրապետող մասնագետների պատրաստվածության որակի բարձրացման ձևերի և ուղիների ինտենսիվ որոնմամբ: Այդ խնդրի լուծման կարևորագույն ճանապարհներից մեկը մանկավարժի մասնագիտական պատրաստվածությանը, ինչպես նաև` նրա անձի ձևավորմանը նպատակաուղղված մոտեցումն է, ինչը կարելի է իրականացնել ուսուցման ինտենսիֆիկացման, ուսանողի գործնական պատրաստվածության օպտիմալացման, նրա մոտ տրամաբանական և հավանական-վիճակագրական մտածողության ձևավորման և զարգացման, ուսումնական գործընթացում անհատական մոտեցման, այդ գործընթացի պարբերականացման և մանկավարժական ուղղորդվածության միջոցով:

Ապագա ուսուցիչների մասնագիտական պատրաստվածության որակի բարձրացման զգալի հնարավորություններ են բացվում մանկավարժական բուհերում` նոր պետական կրթական չափորոշիչներով (ՊԿՉ) աշխատանքի անցնելու կապակցությամբ. առաջին հերթին, նախատեսում են բարձրագույն կրթության բազմաշերտ կառուցվածք, երկրորդ` ուսուցչի (մասնավորաբար` տարրական դպրոցի ուսուցչի) պատրաստվածությունը համալսարանում մեկնաբանում են որպես որակավորման ձեռքբերում: Ընդսմին, ենթադրվում է, որ մանկավարժի մասնագիտության մեջ հավասարապես կարևոր են ինչպես հենքային առարկաների հիմնարար կրթության մակարդակը, այնպես էլ հոգեբանական-մանկավարժական և մեթոդական գիտելիքների մակարդակը: Այդ իմաստով, ուսուցչի մասնագիտական պատրաստվածությունը ձևավորվում է կրթական և կրթական-որակավորման բաղադրիչներից:

Այդ համատեքստում տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի մասնագիտական պատրաստվածության արդյունավետության բարձրացմանը կարող է նպաստել ինչպես մասնագիտական, այնպես էլ ընտրովի դասընթացների հիման վրա ստոխաստիկական կրթության համակարգի կատարելագործումը:

Մի շարք ատենախոսական հետազոտություններում (Ս.Ի. Վորոբյովա (Воробьева С.И.), Լ.Ն. Եվելինա (Евелина Л. Н.), Ն.Պ. Ռիժովա (Рыжова Н.П.), Ս.Ա. Սամսոնովա (Самсонова С.А.), Տ.Կ. Յուրզանովա (Юрзанова Т.К.) և այլք), ուսումնասիրվում են ուսուցման մասնագիտական ուղղորդվածության հարցեր՝ հատուկ դասընթացների հիման վրա:

«Մանկավարժություն և մեթոդիկա (տարրական կրթություն)» ՄՄ(ՏԿ) պետական կրթական չափորոշչում նշվում է, որ ստոխաստիկական գիծը նպատակ ունի աշակերտներին ծանոթացնել ու շրջակա միջավայրի երևույթների հավանական էությանը: Ստոխաստիկական գծի բովանդակության մեջ բնական ձևով առանձնանում են երեք փոխկապակցված ուղղություններ, որոնցից յուրաքանչյուրն այս կամ այն կերպ դրսևորվում է հանրակրթության աստիճաններում.

1. պատրաստվածություն կոմբինատորիկայի բնագավառում՝ հավանական խնդիրների լուծման միջոցներ ստեղծելու, աշակերտի լեզվական-տրամաբանական մտածողությունը արգացնելու, ինչպես նաև գործնականորեն կողմնորոշված մաթեմատիկական գործունեության կարևոր տեսակներ ձևավորելու նպատակով,
2. տվյալների հավաքման, ներկայացման, վերլուծության և մեկնաբանության հետ կապված ունակությունների ձևավորում,

3. պատահական երևույթների հավանականության և հավանական խնդիրներ լուծելու կարողությունների ձևավորման մասին կազմավորում:

Հանրակրթության ծրագրերում հավանական-վիճակագրական նյութ մտցնելու անհրաժեշտության մասին խոսել են Բ.Վ. Գնեդենկոն (Гнеденко Б.В.), Ա.Ն. Կոլմոգորովը, Ա.Յա. Խինչինը (Хинчин А.Я.) և ուրիշներ:

Ստոխաստիկան (կոմբինատորիկա, հավանականությունների տեսություն, պատահական գործընթացների տեսություն և մաթեմատիկական վիճակագրություն) ՀՊՄ համալսարանում ուսուցանվող առարկաներից մեկն է: Հավանականությունների տեսության ուսուցումը նպաստում է ապագա ուսուցչի հավանական մտածողության ձևավորմանը: Դա թույլ է տալիս խիստ տրամաբանական մտածողության հնարքներ կիրառել անորոշության, հասկացությունների ոչ հստակության և տերմինաբանության ոչ ճշգրտության իրավիճակներում: Ընդսմին, ստոխաստիկական պատկերացումներին տիրապետելու գործընթացում մենք հիմնականում պետք է հիմնվենք այն գիտելիքների, ունակությունների և հմտությունների վրա, որոնք ուսանողները ստացել են բազմությունների տեսության, մաթեմատիկական տրամաբանության, կոմբինատորիկայի, երկրաչափության և այլ առարկաների ուսուցման գործընթացում:

Պատահականի և անհրաժեշտի կապի, վիճակագրական և դինամիկ օրինաչափությունների մասին պատկերացումը ժամանակակից մարդու կրթվածության պարտադիր պայմանն է: Մինչդեռ ուսուցիչների, հետևաբար և աշակերտների, մեծամասնությունը թույլ է տիրապետում հավանականությունների տեսության հիմունքներին: Այդ պատճառով հատուկ նշանակություն է ստանում ստոխաստիկայի մասնագիտական մանկավարժական ուղղվածության հետազոտման խնդիրը մանկավարժական համալսարանում, մասնավորաբար, տարրական դպրոցի ուսուցչի որակավորում ստացող ուսանողների համար:

Ստոխաստիկայի ուսուցման գործընթացում կոմբինատորիկայի դերը դժվար է գերագնահատել:

Կոմբինատորիկան զբաղվում է տարատեսակ համակցություններով, որոնք կարելի է կազմել վերջավոր բազմության տարրերից: Կոմբինատորիկայի որոշ տարրեր հայտնի էին Հնդկաստանում դեռևս մ.թ.ա II դ.: Ենթադրվում է, որ հնդիկ գիտնականներն ուսումնասիրել են համակցությունները պոեզիայում (պոետական ստեղծագործություններում) և բանաստեղծության կառուցվածքի մասին գիտության մեջ դրանք կիրառելու կապակցությամբ: Որպես գիտական առարկա՝ կոմբինատորիկան ձևավորվել է XVII դարում: Ֆրանսիացի հեղինակ Ա. Տակեն «Թվաբանության տեսություն և պրակտիկա» (1656 թ.) գրքում մի ամբողջ գլուխ է նվիրել զուգորդություններին և տեղափոխություններին: «Թվաբանական եռանկյան մասին տրակտատում» (1665թ.) Բ. Պասկալը ներկայացրել է բինոմական գործակիցների մասին ուսմունք: ***«Կոմբինատորիկա»*** տերմինը սկսել է կիրառվել Լայբնիցի «Դատողություն կոմբինատորային արվեստի մասին» 1665 թվականին հրապարակած աշխատությունից հետո, որտեղ առաջին անգամ տրվում է զուգորդությունների և տեղափոխությունների տեսության գիտական հիմնավորումը:

Ամենաընդհանուր ձևով, կոմբինատորիկան «որևէ խնդրի նպատակով և պայմաններով որոշվող տարատեսակ միացությունների (տեղափոխություններ, զուգորդություններ և կարգավորություններ) որոնման միջոցների և եղանակների համակարգ է» (Математика: большой энциклопедический словарь, изд-во «Большой энциклопедический словарь»,-М.: 1998, էջ 276): Ներկայումս կոմբինատորիկան լինելով հավանականությունների տեսության ապարատի անքակտելի մաս, կիրառության լայն ոլորտ է ստացել և, այդպիսով, ձեռք է բերել ինքնուրույն նշանակություն, դարձել է դպրոցական մաթեմատիկական կրթության անհրաժեշտ տարր:

ԲՈՒՀ-ում կոմբինատորիկայի ուսուցման հիմնական նպատակը հավանականությունների տեսության խնդիրների լուծման միջոցներ ստանալն է: Իսկ տարրական և հիմնական դպրոցում կոմբինատորիկան կոչված է ձևավորելու, այսպես կոչված, ***կոմբինատորային մտածողություն***, որը թույլ է տալիս մարդուն ողջամիտ ձևով կազմակերպելու սահմանափակ քանակությամբ տվյալների փնտրտուք, հաշվարկել որոշակի կանոնով կազմված տարրերի տարատեսակ համակցություններ: Կոմբինատորային ունակությունները համարվում են մտածողության «անկյունաքար»՝ ուղղված փոխկապակցված կառույցներում փորձնական միջոցով պատճառական կապերի հայտնաբերմանը:

Մաթեմատիկոսների մեծամասնության կարծիքով կրտսեր դպրոցականների մոտ կոմբինատորային դատողություններ անելու կարողությունների ձևավորման միջոցը կոմբինատորային խնդիրների համակարգն է: Այն թույլ է տալիս ընդլայնել խնդրի արդյունքի և բնույթի մասին աշակերտների ունեցած գիտելիքները (խնդիրների լուծման փորձի կուտակում, խնդիրներ, որոնցում հնարավոր է տալ մի քանի տարբեր պատասխան, ինչպես նաև պատկերացում այն մասին, որ խնդիրը կարող է լուծում չունենալ): Ծանոթությունը տարրերի փնտրտուքի եղանակի հետ ընդլայնում է դպրոցականի պատկերացումները նաև խնդրի արդյունքը գտնելու գործընթացի մասին. աշակերտները համոզվում են, որ դրա համար պարտադիր չէ միշտ թվաբանական գործողություններ կատարել: Բացի այդ, վերջավոր և փոքրաթիվ տարրերով կոմբինատորային խնդիրներում և փնտրտուքի եղանակի կիրառումը թույլ է տալիս ստեղծագործության տարրեր մտցնել դպրոցականների գործունեության մեջ և հնարավորություն է տալիս կազմակերպելու տարրական հետազոտական գործունեություն, որի ընթացքում աշակերտները փորձարկումներ են կատարում, զննում, համեմատում են ստացված փաստերը, հետևություններ են անում:

Առտնին նյութի վրա կազմված կոմբինատորային խնդիրները օգնում են ավելի լավ կողմնորոշվել շրջակա միջավայրում, սովորեցնում են դիտարկել բոլոր առկա հնարավորությունները և օպտիմալ ընտրություն կատարել տվյալ իրավիճակում, նպաստում են մաթեմատիկա ուսումնառելու դրդապատճառների ձևավորմանը: Նկատենք, որ մանկավարժ-մաթեմատիկոսների կողմից «հետազոտական գործունեություն, որի ընթացքում աշակերտները փորձարկում, ուսումնասիրում, համեմատում են ստացված փաստերը, հետևություններ են անում» դատողություն անելը ավելի շուտ ***բացառություն*** է, մինչդեռ կանոնը մաթեմատիկական գիտելիքների մատուցման խոսքային (վերբալ) եղանակն է և ձևայնացված օրինաչափություններ մտցնելը (բանաձևերի ներմուծելը)՝ առանց հենվելու աշակերտի գործնական փորձառության վրա:

Այնուամենայնիվ, աշակերտի մտածողության կոմբինատորային հնարավորությունների զարգացման կարևորությունն ակնհայտ է և՛ զարգացման տեսության ընդհանուր դիրքերից, և՛ տարատեսակ գործնական կիրառությունների տեսանկյունից, օրինակ՝ վիճակագրական օրինաչափությունների մասին պատկերացումների զարգացման, տեղեկատվական մշակույթի ձևավորման, պատահույթի ի հայտ գալու հնարավորությունների գնահատման (և այլ) առումով: Սակայն, չնայած դպրոցականի կոմբինատորային պատկերացումների զարգացման հատուկ կարևորությանը՝ անցյալ դարի 70-ականներին «Կոմբինատորիկա» թեման մի շարք պատճառներով հանվել է մաթեմատիկայի դպրոցական ծրագրից և միայն XXI դարասկզբին կրկին բարձրացավ կոմբինատորիկայի տարրերի պարտադիր ուսուցման անհրաժեշտության հարցը տարրական, հիմնական և ավագ դպրոցում: Նշենք, որ կոմբինատորիկան ծրագրից հանելը պայմանավորված էր ոչ թե այդ նյութի երկրորդականությամբ, այլ այն դժվարություններով (ավելի շատ, քան մաթեմատիկայի մյուս բաժիններում), որոնք կրում էին աշակերտները:

Մեր կարծիքով հնարավոր է, որ տարրական կոմբինատորային պատկերացումների ձևավորումն իրականացվի «սովորական» դպրոցական ուսուցման շրջանակներում: Իհարկե, բազմաթիվ հետազոտությունների արդյունքները (Մեդվեդևա (Медведева О.С.)՝ 1990, Բելոկուրովա (Белокурова Е.Е.)՝ 1993, Վորոբյովա (Воробьева С.И.)՝ 1999) ցույց են տալիս, որ հանրակրթական դպրոցների աշակերտների միայն աննշան մասն է ինչ-որ չափով տիրապետում կոմբինատորային դատողություններ անելու ունակությանը: Սակայն առավել հաճախ կոմբինատորային խնդիրների լուծման ժամանակ նրանք չեն կարողանում դատողություններն այնպես կառուցել, որպեսզի գտնեն պայմանին համապատասխանող բոլոր հնարավոր տարբերակները և թույլ չտան կրկնություններ: Ընդսմին, մեծամասամբ երեխաները գործում են քաոսային կերպով. որոշակի համակարգով տարբերակների փնտրտուք իրականացնող աշակերտների քանակը տատանվում է 5%-ից մինչև 15% (տարբեր խնդիրներում). դա կախված է ինչպես սկզբնական տարրերի քանակից, այնպես էլ հավաքածուի մեջ տարրերի թվից: Չնայած տարիքի հետ կոմբինատորային խնդիրների լուծման հաջողությունը փոքր-ինչ մեծանում է, բայց և այնպես այն ամբողջությամբ մնում է բավականին ցածր մակարդակի վրա՝ նույնիսկ մանկավարժական ԲՈՒՀ-ի դասվար պատրաստող ֆակուլտետի ուսանողների մոտ (Վորոբյովա՝ 1999):

Հայտնի իրողություն է, որ գոյություն ունեցող ավանդական ուսուցումը ընդհանուր առմամբ բավարար ազդեցություն չունի կոմբինատորային ունակությունների զարգացման վրա, իսկ մաթեմատիկայի մյուս բաժինների լավ իմացությունն ինքնին սովորողներին չի ապահովում գործոններն արդյունավետ զուգակցելու, դրանց փոխազդեցությունը վերլուծելու կարողություններով: Այդ պատճառով առաջ է գալիս երեխաներին հավանականությունների տեսության և կոմբինատորիկայի հիմունքներին ծանոթացնելու անհրաժեշտության հարցը՝ ***հատուկ ուսուցանող*** գործունեության հենքի վրա՝ կոմբինատորային-հավանական մտածողության ձևավորման նպատակով:

Դիտարկենք կոմբինատորիկան մաթեմատիկայի դպրոցական ծրագիր մտցնելու փորձերի պատմությունը՝ ՌԴ-ում (նախկին Խորհրդային միությունում) և այլ երկրներում: Ըստ էության, դա ցույց կտա, որ երկար ժամանակ կոմբինատորիկայի տարրերին հատկացվել է գիտելիքների օժանդակ բաժնի դեր, սակայն այն բացարձակ անհրաժեշտ է հավանականությունների տեսության հիմունքները յուրացնելու համար: Ուստի, կոմբինատորիկայի հիմունքները մաթեմատիկայի դպրոցական ծրագիր մտցնելու պատմությունն անխզելիորեն կապված է պատահույթների հավանականություն հասկացության ուսուցման բազմակի փորձերի հետ:

1947 թվականին հավանականությունների տեսության տարրերը դպրոցական ծրագիր մտցնելու ձգտում է նկատվում: Սակայն այդ նախագիծը ևս չընդունվեց: Եվ միայն 1965 թվականին կոմբինատորիկայի տարրերը և հավանականությունների տեսության տարրական հասկացությունները ընդգրկվեցին մաթեմատիկայի դպրոցական ծրագրերի նախագծերի մեջ: Նշված թեմաների ընդգրկման արդիականությունը հիմնավորվել է խորհրդային տեսական-հավանական դպրոցի հիմնադիրներ Ա.Ն. Կոլմոգորովի, Ա.Յա. Խինչինի, Բ.Վ. Գնեդենկոյի և այլոց աշխատություններում:

Հավանականությունների տեսության և կոմբինատորիկայի ուսուցման նպատակը Բ.Վ. Գնեդենկոյի կողմից բնորոշվել է որպես «...աշակերտների մոտ ավելի լայն բնույթի, քան խիստ դասական դետերմինիզը, բնության օրինաչափությունների (հատկապես վիճակագրական օրինաչափությունների) գաղափարի համակարգված զարգացման անհրաժեշտություն [48, էջ 14]: Ա.Ն. Կոլմոգորովն ընդգծում է. «Ողջամիտ կլինի սկսել անմիջապես դեպքերի կոմբինատորային հաշվարկից, որոնք բարենպաստ են այս կամ այն պատահույթին: Նմանօրինակ խնդիրները, ինչպես կտեսնենք, կարող են հետաքրքրել իրենց բովանդակությամբ: Դրանք հավանականություն հասկացության ներմուծման հոգեբանական լավագույն նախապատրաստումներ են» [63, էջ 48]:

Սակայն, բարձր դասարաններում կոմբինատորիկայի և հավանականությունների տեսության հիմունքների դասավանդման իրական փորձը վերացական-ձևական մակարդակում և դասի ավանդական շրջանակներում հիմնականում բացասական արդյունքներ է տվել, և, որպես հետևանք, դպրոցական ծրագրերից այդ նյութը հանվեց: Իր առանձնացված և օտարածին լինելու պատճառով նյութը դարձավ բարդ, ձևական, վատ յուրացվող: Որպես «զուտ» տեսական մաթեմատիկայի առանձնացված բաժին՝ նշված թեմաների ուսուցումն ամբողջությամբ որակազրկվեց մանկավարժների մոտ, և շատերն ընդհանրապես սկսեցին երկբայել այդ բաժինը միջնակարգ դպրոցում ուսուցանել:

Այսպիսով, ինչպես վկայում է պատմությունը, 19-20-րդ դարերի ընթացքում բազմիցս փորձեր են արվել դպրոց մտցնել կոմբինատորիկայի և հավանականությունների տեսության տարրերը, բայց ամեն անգամ այդ փորձերն ավարտվել են անհաջողությամբ: Մանկավարժական տեսանկյունից, կոմբինատորիկայի և հավանականությունների տեսության տարրերը մաթեմատիկայի ծրագիր մտցնելու դժվարությունները կապված են ոչ միայն նյութի յուրացման առանձնահատկությունների, այլև զգալի չափով մաթեմատիկայի ծրագիրը նոր բովանդակությամբ լցնելու անհնարինության հետ:

Որպես մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի առանձին թեմա՝ հավանականությունների տեսության ուսուցման գիտամեթոդական խնդիրներին են նվիրված անցյալ դարի 60-ականների ավարտի և 70-ականների սկզբի շատ հետազոտություններ (Սամիգուլինա (Самигулина З.П.), Կաբեխովա (Кабехов Л.М.), Դոգրաշվիլի (Дограшвили А.Я.), Ֆիրսով (Фирсов В.В.) և ուրիշներ): Դրանցում կոմբինատորիկայի տարրերին օժանդակ դեր է հատկացվել (որպես հավանական խնդիրների լուծման ապարատ), ինչի պատճառով կոմբինատորիկայի ուսուցման հետ կապված շատ մեթոդական խնդիրներ լուծում չեն ստացել: Բացի այդ, ինչպես նշում է Ա.Պ. Շիխովան (Шихова А.П.), «կոմբինատորային մեթոդների բազմազանությունն ու յուրահատկությունը, կոմբինատորային խնդիրների գեղեցկությունն ու բարդությունը զգալիորեն վրիպում էին աշակերտներից» (այստեղից հասկանալի է կոմբինատորային խնդիրների նկատմամբ հետաքրքրության պակասը՝ համեմատած հավանականականների հետ [95, էջ 4]: Այսպիսով, կոմբինատորիկայի և հավանականությունների տեսության տարրերի համատեղ ուսուցումը, որում կոմբինատորիկայի ուսուցման նպատակը օժանդակ է, ունի էական թերություն. տվյալ թեմայի ուսուցմանը նվազագույն ժամանակ է հատկացվում, որովհետև հակառակ դեպքում առաջանում է ժամանակային մեծ բաց դրա և հավանականությունների տեսության տարրերի ուսուցման մեջ:

Հետազոտողներից շատերն անհրաժեշտ են համարում կոմբինատորիկայի և հավանականությունների տեսության տարրերը ներմուծել դեռևս տարրական դպրոցում՝ նշելով, որ իր ներքին հատկանիշներով կոմբինատորային-հավանական նյութը առանձնապես հարմար է ցածր դասարաններում ուսուցանելու համար: Այդ ուղղությամբ զգալի աշխատանք են կատարել Մ. Գլեմանն (Глема М.) ու Տ. Վարգան [47]: Սակայն այդպիսի հարցադրման դեպքում կոմբինատորային-հավանական գծի ներմուծումը կտրականապես պահանջում էր ծրագրերի վերակառուցում և, որ ավելի կարևոր է, բավականաչափ շատ ժամանակի հատկացում կոմբինատորային և հավանական նյութի ուսուցմանը: Բայց միջնակարգ դպրոցի պրակտիկայում այդ հետազոտությունների արդյունքներն այդպես էլ ներդրում չունեցան:

Դպրոցում կոմբինատորիկայի՝ որպես մաթեմատիկայի ինքնուրույն բաժնի ուսուցման խնդիրը շարունակվում էր ակտիվորեն հետազոտվել 70-80-ական թվականների ընթացքում: Ուսումնասիրվել են այդ հիմնախնդրի տարբեր ասպեկտները. կոմբինատորիկայի տարրերի ուսուցանում գրաֆների օգնությամբ (Բերեզինա (Березина Л.Ю.)՝ 1975, Վոլգինա (Волгина В.Ф.)՝ 1977), կոմբինատորիկայի և դրա կիրառությունների ուսուցման մեթոդիկայի և փուլերի բովանդակության որոշում (Շիխովա (Шихова А.П.)՝ 1978), կոմբինատորիկայի գաղափարների մասսայականացում (Վիլենկին (Виленкин Н.Я.)՝ 1975, Խալամայզեր (Халамайзер А.Я.)՝ 1981):

Վ.Ֆ. Վոլգինայի «Գրաֆիկական մոդելները մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկայում» [39] հետազոտության մեջ կոմբինատորիկայի համակարգված շարադրման փորձ է արվել գրաֆների հիմքի վրա: Հիմնավորելով կոմբինատորային խնդիրների գրաֆներով լուծելու առավելություններն ավանդականների նկատմամբ՝ Վ.Ֆ. Վոլգինան նշում է, որ գրաֆիկական մոդելների կիրառման դեպքում ցույց է տրվում կոմբինատորային խնդրի լուծման դինամիկան, ակնառու ներկայացվում է ընտրանքների փնտրումը. յուրաքանչյուր խնդրում հնարավոր է հաշվարկել ընտրանքների քանակը ոչ թե բանաձևերով, այլ անմիջապես գրաֆով: Արդյունքում, կարելի է ավելի խորը բացահայտել խնդրի լուծման գործընթացը՝ դրանով իսկ նպաստելով աշակերտների գիտելիքների ձևայնության հաղթահարմանը:

Բովանդակության առանձնացման, դպրոցում կոմբինատորիկայի ուսուցման ռացիոնալ ուղիների ի հայտ բերելու հիմնախնդիրը և դրա հիման վրա 9-րդ դասարանցիներին կոմբինատորիկայի տարրերի ուսուցման մեթոդիկայի մշակումը ուսումնասիրվել է Ա.Պ. Շիխովայի «Կոմբինատորիկայի և դրա կիրառությունների ուսուցումը միջնակարգ դպրոցում» (95) ատենախոսական հետազոտության մեջ: Հեղինակի կարծիքով կոմբինատորային վերլուծության մեջ կան զանազան մեթոդներ, մինչդեռ կոմբինատորիկայի ավանդական ուսուցումը նախատեսում է միայն բանաձևային ուսուցում և դրանց կիրառություն միայն հաշվողական խնդիրներում: Ոչ բանաձևային կոմբինատորիկայի մեթոդները, այն է՝ համակարգված փնտրուքը, գրաֆները, գումարման և բազմապատկման սկզբունքները, դուրս են մնում աշակերտների տեսադաշտից: Այնինչ, հարցի էությունը հասկանալու, կոմբինատորային օբյեկտների քանակը հաշվելու դինամիկայի բացահայտման, ինչպես նաև տրամաբանական մտածողության զարգացման համար այդ մեթոդներն ունեն առաջնակարգ նշանակություն:

Աշակերտների մոտ կոմբինատորային գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների ձևավորման գործընթացում Ա.Պ. Շիխովան առանձնացնում է մի քանի փուլ. 1. փնտրտուքի մեթոդ, գրաֆներ, 2. կոմբինատորային սկզբունքներ, 3. բանաձևային կոմբինատորիկա, 4. կոմբինատորիկայի կիրառություններ: Դրանցից յուրաքանչյուրը պետք է հող նախապատրաստի հետագա փուլերի հմտությունների ձևավորման համար: Տարրական դպրոցին վերաբերող առաջին փուլը ոչ բանաձևային կոմբինատորիկան է, որի ուսուցման հիմնական նպատակներից են աշակերտների մտավոր գործունեության զարգացումը, կոմբինատորային մտածողության ձևավորումը, կոմբինատորային և տեսական-հավանական հասկացությունների և օրինաչափությունների նախապատրաստումը: Աղյուսակների, գրաֆների և գծապատկերների կազմումն առաջին փուլում, ըստ Ա.Պ. Շիխովայի, կօգնի բարձրացնել աշակերտների վերլուծական աշխատանքի մակարդակը:

Երկրորդ փուլը (5-6 դասարաններ) կապված է կոմբինատորային խնդիրների լուծման գործընթացում գումարման և բազմապատկման սկզբունքների ձևավորման հետ: Հետագա փուլերում (բանաձևային կոմբինատորիկան և դրա կիրառությունները) Ա.Պ. Շիխովան առաջարկում է ներմուծել հիմնական կոմբինատորային հասկացությունները, ընդ որում բավական է համարում դրանցից միայն երկուսի («զուգորդություններ» և «տեղափոխություններ») ընտրությունը՝ առաջնորդվելով դրանք միաժամանակ ներմուծելու սկզբունքով: Ներմուծված հիմնական կոմբինատորային հասկացությունները, Ա.Պ. Շիխովայի կարծիքով, անհրաժեշտ է համակարգել աղյուսակում, որը թույլ կտա ոչ միայն համադրել այդ հասկացությունները, այլև հիմնական տեղեկություններ տալ դրանց մասին, ինչպես նաև հստակ սահմանազատել կոմբինատորային հավաքածուների տեսակները: Այդպիսի աղյուսակի կառուցմամբ «հասկացությունների համակարգի ներսում հաստատվում են աստիճանակարգային հարաբերություններ, ինչը կարևոր ընդհանուր-տրամաբանական գործողություն է, և որը նպաստում է ներմուծվող հասկացությունների ձևավորմանը» [95, էջ 10]:

Նշված հեղինակները կողմնորոշվում էին դեպի հիմնական դպրոցի աշակերտները, բայց գրեթե բոլոր աշխատանքները տարրական դպրոցում բնական փնտրտուքի մեթոդով կոմբինատորային խնդիրների լուծման անհրաժեշտության ցուցումներ են պարունակում: Այդպիսի լուծումը դիտարկվում է որպես հետագայում կոմբինատորային սկզբունքների և բանաձևերի ներմուծման հիմք: Սակայն նշված հետազոտություններում կոմբինատորային մտածողության զարգացման հարցերը կոմբինատորիկայի ուսուցման գործընթացում դիտարկվում էին առանց հոգեբանական գիտելիքների ներգրավման, առանց մտածողության զարգացման մակարդակների հայտորոշման (դիագնոստիկայի): Եվ միայն 90-ական թվականներին հայտնվեցին առանձին աշխատանքներ, որոնցում հետազոտվում էր կոմբինատորային խնդիրների դերը աշակերտների մտածողության զարգացման գործում (Մեդվեդևա (Медведева О.О.) [69], Բելոկուրովա՝ [26]):

Մտածողության կոմբինատորային ոճը Օ.Ս. Մեդվեդևան [69] դիտում է որպես տեսական մտածողության հիմնական բաղադրիչների զարգացմանը նպաստող և էմպիրիկ մտածողությունից դեպի տեսական մտածողության անցումային հնարավոր վիճակներից մեկը: Ափսոսելով, որ «Կոմբինատորիկա» թեման, որում «մտածողության կոմբինատորային ոճի առանձնահատկությունները դրսևորվում են առավելագույն չափով, այնուամենայնիվ ուսուցման տեղն ու ավանդական մեթոդիկան բնավ էլ օպտիմալ չեն» [69, էջ 8), Օ.Ս. Մեդվեդևան ընդգծում է, որ մաթեմատիկայի ծրագրում տվյալ թեմայի ընդգրկումը և անգամ դրա ուսումնասիրության մեթոդիկայի արդյունավետ մշակումը բավարար չեն մտածողության կոմբինատորային ոճի զարգացման համար:

«Կոմբինատորիկա» թեմայի ուսուցման ցածր արդյունավետությունը դպրոցի ավագ աստիճանում, Օ.Ս. Մեդվեդևայի կարծիքով, առաջացել է օբյեկտիվ հակասությամբ. մի կողմից՝ կոմբինատորիկայի ուսումնասիրությունը պահանջում է ստեղծագործական ակտիվություն և տրամաբանական մտածողության բարձր մակարդակ դպրոցականների մոտ (այսինքն՝ մտածողության կոմբինատորային ոճի բաղադրիչներ, ինչն էլ կոչված է զարգացնելու մաթեմատիկայի այդ բաժինը), մյուս կողմից՝ դրանց ձևական-բանաձևային ուսուցման միջև: Միևնույն ժամանակ այդ թեման հիմնական դպրոց տեղափոխելը չի կարող լինել արդյունավետ, քանի որ դրա օբյեկտիվ բարդությունը չի համապատասխանում այդ տարիքի դպրոցականների հնարավորություններին: Ստեղծված իրավիճակից Օ.Ս. Մեդվեդևան ելքը տեսնում է ուսուցման գործընթացի և նախառաջ խնդիրների լուծման ժամանակ մտածողության կոմբինատորային ոճի տարրերի աստիճանական և համակարգված ներմուծման մեջ՝ ուսուցման ողջ ընթացքում՝ սկսած տարրական դպրոցից:

Ե.Ե. Բելոկուրովայի հետազոտության մեջ [26]ուսումնասիրվում են խնդիրների լուծման ժամանակ կրտսեր դպրոցականին կոմբինատորային դատողություններ անելու ուսուցանելու մեթոդիկայի հարցեր: Քանի որ կոմբինատորային խնդիրներն ունեն դպրոցականի մտածողության զարգացման մեծ հնարավորություններ, ապա աշակերտներին կոմբինատորիկայի հիմունքներին ծանոթացնելը ցանկալի է դեռևս տարրական դպրոցում: Այդ պատճառով Ե. Ե. Բելոկուրովան առաջարկում է կրտսեր դպրոցականի համար հատուկ մշակված կոմբինատորային խնդիրների համակարգ և այդ խնդիրները լուծելու ուսուցման մեթոդիկա, որում գործողությունների եղանակները «պատրաստի տեսքով» չեն տրվում, այլ երեխաները, կուտակելով փորձ, իրենք են հանգում դրանց «բացահայտմանը»: Աշխատանքի հիմնական ուղղությունն աշակերտների անցումն է տարբերակների պատահական փնտրտուքից համակարգվածի իրականացմանը` սկզբում առանց կազմակերպման միջոցների, իսկ հետագայում դրանց օգնությամբ:

Նկատենք, որ նշված մեթոդիկաները (Մեդվեդևա [69], Բելոկուրովա [26]) կողմնորոշված են ոչ թե դեպի յուրաքանչյուր աշակերտը, այլ միայն մաթեմատիկական խմբակ հաճախող երեխաները, այսինքն` այն երեխաներին, որոնք, որպես կանոն, ունեն որոշակի մաթեմատիկական ունակություններ և ուսումնական կամ ճանաչողական մոտիվացիայի բավականին բարձր մակարդակ:

Կոմբինատորիկայի և հավանականությունների տեսության տարրերի ուսուցման որոշակի փորձ է կուտակվել մաթեմատիկայի խորացված ուսուցմամբ դպրոցներում: Սակայն դա ենթադրում էր հետևյալ պայմանները` աշխատանք հիմնականում բարձր դասարանցիների հետ, աշակերտների պատրաստվածության բարձր մակարդակ կամ բարձր մոտիվացիայի առկայություն, դրա հետ մեկտեղ մանկավարժական կադրերի տեսական-հավանական պատրաստվածության բավականին բարձր մակարդակ, այսինքն` ենթադրվում էր հանրակրթական դպրոցում պարտադիր պարապմունքներին տեղ գտած իրավիճակից սկզբունքորեն տարբերվող իրավիճակ:

Մյուս կողմից, միայն մաթեմատիկական թեքումով առանձին դպրոցներում, տեսական-հավանական ընդլայնված պատրաստվածության վրա հենվելով, չի լուծում խնդիրը և, ըստ էության, կյանքում և արդի գիտության մեջ ակնհայտորեն չի պատասխանում հավանականության պատկերացումների կարևորագույն դերին: Առաջին հերթին, հավանական մտածողությունն անհրաժեշտ է հասարակության բոլոր անդամներին, և ոչ միայն այն երիտասարդներին, որոնք հետագայում կշարունակեն իրենց կրթությունը բուհում: Երկրորդ` հավանականության տեսության ուսուցումը բուհում և հատուկ դպրոցների բարձր դասարաններում նույնպես հանդիպում է լուրջ դժվարությունների, որոնք կապված են ավելի վաղ փուլերում երեխաների մոտ ձևավորված դետերմինացված մտածողությանը հակվելու հետ. իսկ մտածողության նոր եղանակ ձևավորելը շատ բարդ է: Բացի այդ, կոմբինատորիկայի դասավանդման գործում բավականին սուր է դրսևորվել վաղուց հայտնի և դժվարությամբ սպառվող կրթական արատը, այն է՝ խնդիրների լուծման «բանաձևային» եղանակների վրա հիմնված գիտելիքների ձևայնությունը, երբ բանաձևերի բովանդակության իրական ըմբռնման համար երեխաների մոտ բացակայում են անհրաժեշտ պատկերացումներ համապատասխան առարկայական բնագավառից: Ընդհանուր առմամբ, նշվածը ևս մեկ անգամ հաստատում է այն փաստը, որ մաթեմատիկայի ավանդական ծրագրում նոր առանձին բաժին մտցնելու ճանապարհով կոմբինատորային-հավանական պատկերացումների ձևավորման խնդիրը լուծելու փորձերը դատապարտված են ձախողման:

Շուկայական տնտեսությամբ և զանգվածային արտադրությամբ զարգացած ժողովրդավարական երկրներում աճող սերնդի վիճակագրական մշակույթի դաստիարակությանը հատուկ ուշադրություն է հատկացվում: IV Միջազգային Մաթեմատիկական համաժողովում (1908 թ.) դպրոցական մաթեմատիկական կրթության նորացման հարցի քննարկումից հետո հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության տարրերը Եվրոպայի, ԱՄՆ-ի և Ճապոնիայի զանգվածային դպրոց մտցնելու որոշում է կայացվել [114, էջ 13]:

Անգլիայի և Ուելսի ազգային ուսումնական ծրագրում հավանական-վիճակագրական նյութի ուսուցմանը հատկացվում է զգալի ժամանակ: Կրտսեր դպրոցականները պետք է սովորեն խմբավորել օբյեկտները, հավաքել տվյալներ և դրանք գրանցել աղյուսակում, կազմել և կարդալ պարզ դիագրամներ, ճիշտ կիրառել հավանական տերմինաբանությունը: Հիմնական դպրոցի գիտելիքներին վերաբերող ամփոփիչ պահանջները վկայում են, որ նրանք յուրացնում են վիճակագրական տվյալների մշակման և ներկայացման տարբեր միջոցներ, կարողանում են աշխատել համակարգչային տվյալների բազայի հետ, գնահատում և հաշվարկում են ոչ բարդ հավանականություններ: Ավագ դպրոցում աշակերտներից պահանջվում է տարբեր ձևերով ներկայացված տվյալները վերլուծելու և մեկնաբանելու, տարրական վիճակագրական վարկածներ ստուգելու կարողություն [114]:

Անգլիայի դպրոցականների հավանական պատրաստվածությանը առաջադրվող պահանջների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ հանրակրթության ընդհանուր մակարդակի վկայական ստանալու համար աշակերտները պետք է տիրապետեն հետևյալ նյութին. պատահույթի հավանականություն, հավանականությունների գումարում և բազմապատկում, պատահույթների տարբեր համադրումներ, պատահական մեծություն, բինոմական բաշխում, մաթեմատիկական սպասում: Այն աշակերտների համար, որոնք քննություն են հանձնում SMP (School Mathematics Project) ծրագրով բարձր մակարդակի հանրակրթության վկայական ստանալու համար, պահանջները փոքր-ինչ բարձր են (ծրագրի մեջ ներառված են նաև հավանականությունների տեսության հետևյալ հասկացությունները. Պուասոնի բանաձևը, σ^2 հայտանիշը, մեծ թվերի օրենքը, մարկովյան գործընթացներ) [114]:

Համաձայն ԱՄՆ մաթեմատիկայի ուսուցիչների Ազգային խորհրդի մշակած նյութերի՝ պարզ հավանականություններ կարող են գտնել անգամ տարրական դպրոցի աշակերտները: V-VIII դասարաններում հիմնական ուշադրությունը դարձվում է իրական վիճակների հավանական մոդելների հետ ծանոթությանը, սպասվող արդյունքների համեմատությանը՝ փորձարկման ընթացքում ստացված արդյունքների հետ: Ամերիկացի մանկավարժներն ընդգծում են, որ «տվյալները, որոնք աշակերտները համակարգում և վերլուծում են դասերի ժամանակ, պետք է հետաքրքրեն նրանց, խնդիրների հարցադրումը պետք է նպաստի աշակերտների մաթեմատիկական մշակույթի մակարդակի բարձրացմանը, կիրառելու կարողությունների և հմտությունների զարգացմանը» [114, էջ 43]:

Ինչպես ցույց են տալիս հետազոտությունները, դպրոցականների մաթեմատիկական պատրաստվածությունը ԱՄՆ-ում նույնակերպ չէ և կապված է ԱՄՆ կրթական համակարգի առանձնահատկության հետ, մի բան, որը դրսևորվում է սկսած դպրոցում ուսումնառության առաջին տարիներից՝ աշակերտներին ըստ ունակությունների բաժանման մեջ. «բոլոր աշակերտների երկու երրորդը մաթեմատիկան ուսուցանում է ամենատարրական մակարդակի վրա: Տեսական-հավանական գիտելիքները դասավանդվում են հիմնականում ավագ դպրոցում, սակայն, հիմնական դպրոցի որոշ ծրագրերում հանդիպում են հավանականային հասկացություններ և վիճակագրության տարրական փաստեր: Տեսական-հավանական հարցերի խորացված ուսուցումն ավագ դպրոցում իրականացնում է մաթեմատիկական ընդունակություններ ունեցող շատ քիչ աշակերտների համար: Այդպիսի աշակերտներ պատրաստելը բավականաչափ լուրջ գործ է, և ուսուցանողներն էլ հասնում են էական հաջողությունների» [114]: Նշենք, որ ԱՄՆ-ի դպրոցներում ***հատուկ տեղ է հատկացվում հավանական օրինաչափությունների ըմբռնման կարևորությանը ժամանակակից քաղաքացու համար, որին վիճակված է կողմնորոշվել հսկայական տեղեկատվական հոսանքում:***

Ճապոնիայի դպրոցներում վիճակագրության նախապատրաստական դասընթացն իրականացվում է II դասարանից, այսինքն՝ 7 տարեկանից (6-12 տարեկան հասակը տարրական դպրոցն է): 5 տարիների ընթացքում նրանց մոտ ձևավորվում են էմպիրիկ տվյալների, աղյուսակների և դիագրամների հետ աշխատելու հմտություններ: Կրտսեր միջնակարգ դպրոցում (13-15 տարեկան, I-III դասարաններ) հավանական-վիճակագրական նյութն ուսուցանվում է մաթեմատիկայի ծրագրի առանձին թեմաների տեսքով [114]: Այսպես, «Հավանականություն և վիճակագրություն» բաժինը ուսուցանվում է II և III դասարաններում: II դասարանում նախատեսվում է դպրոցականներին սովորեցնել նպատակաուղղված կերպով հավաքել տվյալներ, տեղադրել դրանք աղյուսակների, դիագրամների տեսքով՝ դրանցում օրինաչափություններ տեսնելու նպատակով: Հիմնական ուսումնասիրվող հարցերը՝ հիստոգրամով տրված բաշխման հաճախականություն, հարաբերական հաճախականություն և բաշխման ընտրանքային ֆունկցիա, պատահական մեծության միջին արժեքի և ցրույթի իմաստը: III դասարանում մտցվում է հավանականության՝ որպես մեծ թվով դիտումների (կամ փորձերի) արդյունքում ստացված հարաբերական հաճախականության հասկացությունը:

Ավագ միջնակարգ դպրոցում (16-18 տարեկան) աշակերտները բաժանվում են տարբեր դասարանների (հոսքերի)՝ ըստ մասնագիտական ուղղվածության՝ ակադեմիական, առևտրային, տեխնիկական և այլն: Ընդսմին, ակադեմիական հոսքը բաժանվում է երկու ուղղությունների՝ բնագիտական և հումանիտար: Հավանական-վիճակագրական նյութը զետեղված է «Մաթեմատիկա II» և «Հավանականություն և վիճակագրություն» դասընթացների ծրագրերում: «Մաթեմատիկա II» (II դասարան) դասընթացը պարունակում է «Հավանականություն և վիճակագրություն» բաժինը, որը ներառում է հետևյալ թեմաները. կոմբինատորիկա (տեղափոխություններ, կարգավորություններ և զուգորդություններ), պատահույթի հավանականություն, հակադիր պատահույթ, վիճակագրական ցրույթ (դիսպերսիա), հարաբերական հաճախականություն, մաթեմատիկական սպասում): «Հավանականություն և վիճակագրություն» (II դասարան) դասընթացը ներառում է թվային տվյալների կարգավորում (բաշխման շարք, մոդ (կերպ՝ mode, мода), ցրույթ (դիսպերսիա), միջին քառակուսի շեղում), վերջավոր ելքերով փորձեր, տեղափոխություններ, կարգավորություններ և զուգորդություններ, Նյուտոնի երկանդամ, հավանականություն (անկախ և կախյալ պատահույթներ, պայմանական հավանականություն), բաշխման բինոմական և նորմալ օրենքներ, վիճակագրական վարկածներ:

Ծնորհիվ այդ մեծ հավանական-վիճակագրական բլոկի՝ Ճապոնիայի պարտադիր միջնակարգ դպրոցի ծրագրում հավանական հասկացություններն ամուր մտնում են աշակերտների առօրյա պատկերացումների շրջանակի մեջ [114]:

Ինչպես հայտնի է, ֆրանսիական դպրոցական կրթական համակարգը, ինչպես և հայկականը, կենտրոնացված է, այսինքն՝ ենթարկվում է միասնական ծրագրին: Միջնակարգ դպրոցը բաղկացած է երեք աստիճաններից [114, 178]՝ տարրական ցիկլ (տարրական դպրոց) – ուսուցման 5 տարի, առաջին ցիկլ (թերի միջնակարգ դպրոց)՝ ուսուցման 4 տարի (VI-III դասարաններ), երկրորդ ցիկլ (միջնակարգ դպրոց)՝ ուսուցման 3 տարի (II, I և ավարտական դասարաններ):

Հատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում երկրորդ ցիկլը, քանի որ II դասարանում աշակերտներն ընտրում են այն ուղղությունը, որով պիտի սովորեն վերջին երկու տարում (I և ավարտական դասարաններ): Ֆրանսիական դպրոցում կան տասնյակից ավելի ուղղություններ, դրանց շարքում են փիլիսոփայական, հումանիտար, տնտեսագիտական, բնագիտական, ֆիզիկա-մաթեմատիկական ուղղությունները: Յուրաքանչյուր մասնագիտությանը համապատասխանում է մաթեմատիկայի իր ծրագիրը: Ֆրանսիական դպրոցի մաթեմատիկայի ծրագրի նախաբանում հեղինակներն ընդգծում են, որ «հավանականությունների տեսության ուսուցումը կարևոր տեղ է զբաղեցնում եվրոպական կրթության մեջ, քանի որ հավանական օրենքները կիրառվում են ժամանակակից գիտության գրեթե բոլոր բնագավառներում» [114]: Տվյալ դեպքում խոսքը կիրառական վիճակագրության ծրագրի մասին է, որը թույլ է տալիս դպրոցականներին ծանոթացնել ու մաթեմատիկական վիճակագրության տարրերին՝ իրական կյանքում հանդիպող հասարակ վիճակագրական խնդիրների լուծման ընթացքում: Բացի այդ, վիճակագրության ուսուցումը հնարավորություն է տալիս հավանականությունների տեսությունը բնական եղանակով մտցնել դպրոցական ծրագրի մեջ:

II դասարանի ծրագրում «Վիճակագրություն»-ը առանձնացված է առանձին գլխում: Հեղինակների խոսքով այդ գլուխը մեծ հետաքրքրություն է ներկայացնում, քանի որ 1. վիճակագրական աղյուսակներին վերաբերող գրառումներն անհրաժեշտ են տնտեսական և սոցիալական կյանքում տեղի ունեցող գործընթացները հասկանալու համար, 2. դա բարեբեր հող է միջառարկայական կապեր հաստատելու համար. այդպիսի նյութի վրա աշակերտները կարող են զարգացնել «հում» վիճակում գտնվող տվյալների համակարգման, ներկայացման և մշակման իրենց հմտությունները: ***Աշակերտներին ներկայացվող նյութերը համաձայնեցված են կենսաբանության, տնտեսագիտության, հումանիտար գիտությունների դասավանդման հետ: Ուսուցման ժամանակ կիրառվող վիճակագրական տվյալների մեծ մասն իրական է, դրանց նշած երևույթները հասկանալի են աշակերտներին***:

Ուսուցանվող նյութը ներառում է [114, 178]. բնակչության վիճակագրական նկարագիրը, բնակչության դասակարգային բաշխումը, արտադրանքի նմուշի վիճակագրական նկարագիրը, հաճախականության և հաճախության հաշվարկում մեկ փոփոխականի վիճակագրական շարքի (սերիայի) համար (համատեղ հաճախականություն, համատեղ հաճախություն, միջին և միջին քառակուսային շեղում):

1.2. ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ՄՏԱԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ՀՈԳԵԲԱՆԱՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

Գրականության վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ կոմբինատորիկայի ուսուցմանը վերաբերող ուսումնասիրությունները կենտրոնացվել են հետևյալ բնագավառներում.

- Երեխաների կոմբինատորային դատողություններ (E.E. Белокурова [26], Н.Г. Каменков [61], English [104, 105, 106], Piaget & Inheldor [73], Shin & Steffe [117]:

- Կոմբինատորային մոդելների դասակարգումներ (П.Я. Виленкин [38], В.Л. Гутенмахер, Ж.М. Рабба [50], А. Поддьяков [77], Batanero et al.[98]:

- Տարբեր տարիքներում կոմբինատորիկայի ուսուցման և ուսումնառության հարցեր (И.О. Беляева [27], В.В. Волгина [39], Л.М. Кабехова [60], Abramovich & Pieper [97], Einzenberg & Zaslavsky [103], Fischbein & Grazit [107]:

Կոմբինատորային ուսուցմանը և ուսումնառությանը վերաբերող ուսումնասիրությունները սկսվել են Պիաժեի և Ինհելդերի փորձերից [73], որոնք կենտրոնացած էին երեխաների՝ կոմբինատորային դատողություններ անելու կարողությունների զարգացման վրա: Նրանք առանձնացրեցին կոմբինատորային զարգացման երեք փուլ:

Առաջին փուլ՝ երեխաները օգտագործում են փորձերի և սխալների մեթոդը: Օրինակ՝ երեք խաղաթղթերից երկուական ընտրելիս նրանք պատահականորեն կարող են վերցնել որևէ խաղաթուղթ, դա դնել մի ուրիշի հետ և ստուգել՝ արդյոք այդ զույգը նշել են:

Երկրորդ փուլ՝ երեխաները սկսում են փնտրել որևէ մոտեցում, բայց չեն սպառում բոլոր հնարավոր դեպքերը: Այդ երեխաներն ունեն օրինաչափությունների նկատմամբ զգացողություն, բայց այն փորձահեն (էմպիրիկ) է: Իհարկե, նրանք լուծում են առաջին փուլում նշված խնդիրը, բայց երբ խաղաթղթերի քանակը մեծացվում է, նրանք հայտնվում են անորոշության մեջ:

Երրորդ փուլ՝ երեխաները համակարգված ձևով թվարկում են բոլոր հնարավոր դեպքերը:

Իրենց ուսումնասիրություններում Պիաժեն և Ինհելդերը պարզել են, որ կոմբինատորային զարգացման երեք փուլերը մոտավորապես համապատասխանում են կոգնիտիվ զարգացման պիաժեյան չորս փուլերին՝ սենսոմոտոր, նախաօպերացիոնալ (նախագործառնական),կոնկրետ-գործառնական, ֆորմալ -գործառնական:

Կոմբինատորային զարգացման երեք փուլերից ոչ մեկին սենսոմոտոր փուլը չի համապատասխանում: Առաջին փուլը համապատասխանում է կոգնիտիվ զարգացման նախագործառնական փուլին (2-7 տարեկան), որը բնութագրվում է նրանով, որ այդ փուլում զարգանում է խոսքը, ձևավորվում են պատկերացումներ և պատկերավոր մտածողություն, գործողությունը առներսվում (ինտերիորիզացվում) է մտքի, կտրուկ լայնացվում են նախադպրոցական տարիքի երեխաների ինտելեկտուալ հնարավորությունները, բայց մնում են որոշակի սահմանափակումներ. երեխայի մտածողությունը սինկրետային է, նա չի կարողանում կենտրոնանալ օբյեկտի փոփոխությունների վրա, նրա մտածողությունը հակադարձելի չէ, նա «անզգա» է հակասությունների նկատմամբ, հակված է տրանսդուկցիայի (մասնավորից մասնավորի), մի խոսքով՝ մտային գործողությունները տրամաբանորեն անադեկվատեն:

Մոտավորապես 7 տարեկանից սկսած՝ երեխայի զարգացումը անցնում է կատարում կոնկրետ-գործառնական փուլ, որին համապատասխանում է կոմբինատորային զարգացման երկրորդ փուլը: Կոնկրետ-գործառնական փուլում երեխայի մտային գործողություններն արդեն առավել ընդհանրացված, առներսված, հակադարձելի և կոորդինացված են համակարգի մեջ: Կոգնիտիվ զարգացման այս փուլի բնորոշ առանձնահատկությունը այն է, որ երեխայի մոտ առաջանում-զարգանում են ***պահպանման մասին պատկերացումները,*** որոնք նպաստում են մտածողության հակադարձելիությանը (ներքին շարժունություն), և որը անհրաժեշտ պայման են դասակարգման համար: Տրամաբանական դասակարգումը, Պիաժեի կարծիքով, երեխայի զարգացման «ողնաշարն» է և, ըստ էության, ընկած է պարզագույն կոմբինատորային պատկերացումների հիմքում. Պիաժեն կոմբինատորիկան կոչում էր «դասակարգումների դասակարգում»: Կոգնիտիվ զարգացման չորրորդ՝ ֆորմալ գործողությունների փուլը (12-15 տարեկան) համապատասխանում է կոմբինատորային զարգացման երրորդ փուլին:

Կոգնիտիվ զարգացման ֆորմալ-գործառնական փուլը «հասուն մարդու տրամաբանության հիմքն է, դրա վրա է հենվում գիտական մտածողությունը» [72, էջ 22]: Ինչպես նշում է Wafsworth-ը, «ֆորմալ-գործառնական մտածողության ամենակարևոր ընդհանուր հատկությունը վերաբերում է ***իրականում գոյություն ունեցողին և պոտենցիալ հնարավորին...*** իրականում գոյություն ունեցողը և պոտենցիալ հնարավորը փոխում են իրենց տեղերը: Ըստ էության, դեռահասը չի բավարարում առտնին հնարավորություններով, այլ ունի կարողություն՝ երևակայելու այն բոլորը, ինչ կարող է պատահել» [123, էջ 22]:

Հետաքրքրական է Պիաժեի և Ինհելդերի՝ կոմբինատորային մտածողությանը վերաբերող փորձը: Երեխային տրվում է համարակալված (1.2.3.4) չորս շիշ, որոնց մեջ լցված է անգույն հեղուկ և մեկ շիշ (5)՝ լցված յոդի լուծույթով: Փորձարկողներին հայտնի է, որ եթե խառնվեն առաջին, երրորդ և հինգերորդ շշերում պարունակվող հեղուկները, ապա կստացվի դեղին գույնի խառնուրդ: Փորձարկվողներին, որոնք չգիտեն որ համարների շշերը պետք է խառնեն, առաջարկվում է խառնել երեք (միայն երեք) շշերի հեղուկները, որ ստացվի դեղին գույնի խառնուրդ: Տարբեր տարիքի երեխաներ (փորձարկվողներ) տարբեր կերպ են կատարում տրված հանձնարարությունը: Կոնկրետ օպերացիաների փուլում գտնվող երեխաները խնդիրը լուծում էին փորձերի և սխալների մեթոդով. նրանք հեղուկները խառնում էին պատահական կարգով՝ առանց համակարգելու իրենց գործողությունները, և շատ քչերն էին հասնում հաջողության: Ձևական օպերացիաների փուլում գտնվող դեռահասները խնդրի լուծմանը մոտենում էին «տրամաբանորեն». նրանք առանձնացնում էին բոլոր հնարավոր տարբերակները և հաջորդաբար իրագործում էին դրանք:

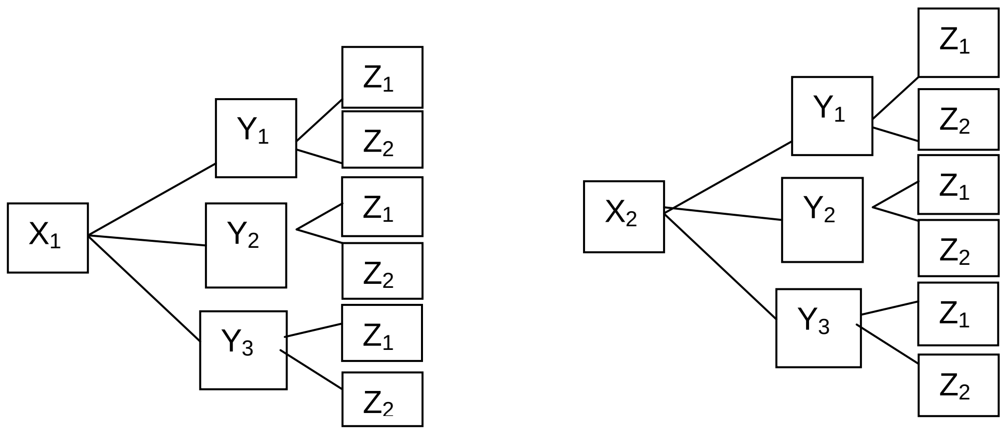
Այսպիսով, գործոնների համակցումը և դրանց փոխազդեցությունների վերլուծությունը, այսինքն՝ կոմբինատորային մտածողությունը, օնթոգենեզում ի հայտ են գալիս բավականաչափ ուշ՝ դեռահաս տարիքում (իհարկե, տարբեր դեռահասների մոտ՝ տարբեր հաջողությամբ):

Հարկ է խոստովանել, որ ժամանակակից մանկավարժահոգեբանական գրականության մեջ կոմբինատորային պատկերացումների և մտածողության գենեզիսին վերաբերվող այլ ուսումնասիրությունները առանձնապես շատ չեն: Կոմբինատորային մտածողության այս կամ ասպեկտներին վերաբերող ուսումնասիրություններ են կատարվել Ե.Ե. Բելոկուրովայի [22], Ի.Օ. Բելյանայի [27], Ն.Գ. Կամենկովի [61], Լ.Մ. Կաբեխովայի [60], Ա.Ն. Պոդյակովի [77], Վ.Վ. Վոլգինայի [39], Ինգլիշի [104, 105], (English` 1991, 1993), Շինի և Ստեֆի (Shin & Steffe` 2009), Մեհերի, Փաուելի և Ապտեգրոուվի (Maher, Powell and Uptegrove` 2010), Լոքվուդի (Lockwood` 2011), Դյուբուասի (Dubois`1984), Բատաներոյի (Batanero`1997) (և քիչ այլոց) կողմից:

Ա.Ն. Պոդյակովը ուսումնասիրել է նախադպրոցական տարիքի երեխաների կոմբինատորային գործողությունները, երբ նրանք փորձարկումներ են անում որոշակի առարկաների նկատմամբ: Ա.Ն. Պոդյակովի ուսումնասիրություններում փորձնական ճանապարհով ցույց է տրվել, որ նախադպրոցական տարիքի երեխաների մոտ կա վառ արտահայտված միտում՝ կատարելու ***կոմբինատորային մանիպուլյացիաներ*** տարբեր առարկաների նկատմամբ, ընդ որում դրանք հանդես են գալիս որպես խնդիրները լուծելու մեթոդներ: Բայց, պետք է նկատել, որ այդ ընդունակությունները (կարողությունները) տարերային են՝ ընդամենը կոմբինատորային պատկերացումների ***նախատիպ***

Ե.Ե. Բելոկուրովայի ուսումնասիրությունը վերաբերում է կրտսեր դպրոցականի կոմբինատորային կարողություններին: Այդ ուսումնասիրության մեջ կարևորվում է այն հարցը, թե ինչպես է կրտսեր դպրոցականն անցում կատարում տարրերային փնտրտունքից համակարգվածի՝ սկզբում առանց կազմակերպական միջոցների օգտագործման, ապա նաև դրանց օգտագործմամբ:

Ինգլիշը, [104, 105] որը գտնում է, որ Պիաժեի փորձերը «չափազանց գիտական» և վերացական էին, իր փորձերում օգտագործում էր խաղալիքներ, օրինակ՝ տիկնիկ արջուկին քանի եղանակով կարելի է հագցնել տարբեր գույնի բաճկոններ և տաբատներ: Փորձարկվողները 4-9 տարեկան երեխաներ էին: Հետագայում փորձերը շարունակեցին 7-12 տարեկան երեխաների հետ, բայց, այս անգամ հանձնարարությունները բարդացվեցին՝ բաճկոնին և տաբատին ավելացավ գլխարկը: Ինգլիշի փորձերը «տեսականորեն» կարելի է ներկայացնել այսպես. կա բաճկոն ընտրելու երկու եղանակ՝ X_1, X_2, տաբատ ընտրելու երեք եղանակ՝ Y_1, Y_2, Y_3, և գլխարկ ընտրելու երկու եղանակ Z_1, Z_2: Այդ դեպքում արջուկին հագցնելու բոլոր հնարավոր եղանակները կներկայացվեն հետևյալ ձևով՝ ծառակերպի տեսքով (նկ.1).



Նկ. 1

Ինգլիշը հիմնավորում է, որ 7 տարեկան երեխաները օգտագործում են բոլոր հնարավոր եղանակները՝ (X_1, Y_1, Z_1), (X_1, Y_1, Z_2), (X_1, Y_2, Z_1), (X_1, Y_2, Z_2), (X_1, Y_3, Z_1), (X_1, Y_3, Z_2), (X_2, Y_1, Z_1), (X_2, Y_1, Z_2), (X_2, Y_2, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_2, Y_3, Z_1), (X_2, Y_3, Z_2) գտնելու համակարգված մոտեցում: Ինգլիշը պնդում էր, որ Պիաժեի և Ինհելդերի արդյունքները հիմնավորված չեն:

Մեր կարծիքով Ինգլիշի արդյունքները համահունչ են Պիաժեի և Ինհելդերի արդյունքներին: Պիաժեն և Ինհելդերը պնդում էին, որ սովորողը կոմբինատորային մտածողության երրորդ փուլ չի կարող հասնել, մինչև նա չհասնի կոգնիտիվ զարգացման ֆորմալ-գործառնական փուլ, քանի որ նախքան երրորդ փուլ հասնելը նա պետք է տիրապետի հիպոթետիկ (ենթադրական) մտածողության: Մեր փորձարարական հետազոտության մեջ մենք հիմնավորում ենք, որ այդ տարիքի (նույնիսկ բարձր տարիքի) երեխան չի կարող թվարկել բոլոր հնարավոր տարբերակները, եթե չպատկերվի ծառակերպը. Ըստ էության, երեխան կիրառում է խնդիրը լուծելու ստրատեգիա՝ գործողությունները կատարելու միջոցով և ոչ թե որոշակի մտածողական գործընթացում: Կոմբինատորային մտածողության երրորդ փուլի հիմնական առանձնահատկությունն այն է, որ այն հենվում է մտածողական գործընթացի վրա, այն է՝ ենթադրական (հիպոթետիկ) մտածողության:

Ծինը և Ստեֆին [117] դիտարկել են երեխաների՝ կոմբինատորային գործողություններ կառուցելու հիմնահարցը՝ ներմուծելով ***բառարանակարգային միավորները կոորդինացնել ու գործողություններ*** (lexicographic units-coordinating - &icons) հասկացությունը: ***Միավորների կոորդինացումը*** «ինչ-որ համախմբություն-միավորը այլ համախմբություն-միավորի վրա բաշխելն է» [117, էջ 71): Օրինակ՝ եթե սովորողին հարցնում են թե քանի՞ եղանակով է հնարավոր արջուկին հագցնել 2 բաճկոնը և 3 գլխարկը, ապա նա պետք է կառուցի մեկ բաճկոն և երեք տաբատ համակցելու տարբերակը, որը ընդունվում է որպես մի համախումբ-միավոր, ապա դա լեքսոգրաֆիկ եղանակով բաշխի երկու բաճկոն համախումբ-միավորների վրա: Նրանց ուսումնասիրություններն ի հայտ են բերել, որ սովորողները կատարում են երեք տիպի հաշվումներ՝ ադիտիվ (գումարային), մուլտիպլիկատիվ (բազմապատկային) և ռեկուրսիվ մուլտիպլիկատիվ (հետագնա բազմապատկային): Եթե թվարկվում են բոլոր հնարավորությունները, ապա դա ադիտիվ հաշվում է: Եթե թվարկվում են որոշ հնարավորություններ և, ապա, դրանք բազմապատկվում են այլ հնարավորությունների քանակով, ապա դա մուլտիպլիկատիվ հաշվում է: Օրինակ՝ երբ հարց է դրվում գտնել 30-ից փոքր երկնիշ թվերի քանակը, ապա դրանց ուղղակի թվարկումը՝ 1,2,3,…29 և ստացվածի քանակի հաշվումը ադիտիվ հաշվում է, իսկ երբ գրվում է՝

10, 11, 12, …, 19,

20, 21, 22, …, 29,

և ապա հաշվվում յուրաքանչյուր տողում գրված թվերի քանակը, և դաբազմապատկվում է 2-ով, ապա ունենք մուլտիպլիկատիվ հաշվում:

Որպեսզի բացատրվի ռեկուրսիվ-մուլտիպլիկատիվ հաշվումը, նկատենք, որ Շինը և Ստեֆին իրենց ուսումնասիրություններում շեշտը դնում էին ոչ միայն այն բանի վրա, թե ինչ է անում սովորողը, այլև այն բանի վրա, թե ինչպես է նա հիմնավորում արվածը: Եթե սովորողը փաստարկում է, թե ինչպես է նա անում (օրինակ՝ ինչո՞ւ է բազմապատկում 2-ով), ապա դա ռեկուրսիվ-մուլտիպլիկատիվ հաշվում է:

Մեհերը և այլք [111] ուսումնասիրել են կոմբինատորային հանձնարարություններ կատարելուց սովորողների դատողությունների բնույթը՝ տարրական դպրոց – հիմնական դպրոց – ավագ դպրոց և բակալավրական կրթություն շարանում, ընդ որում՝ թե ինչպես են փոխվում այդ դատողությունները կրթության այդ աստիճաններով անցնելու ընթացքում:

Լոքվուդը [110] կոմբինատորային մտածողության մեջ առանձնացնում է երկու մոտեցում՝ գործիական – կողմնորոշված և բազմություն – կողմնորոշված: Առաջին մոտեցման դեպքում հաշվվում են բոլոր հնարավոր համախմբությունները: Օրինակ՝ սովորողը երկու քարտի վրա երեք տարբեր տառեր գրելու հնարավոր եղանակների թիվը կարող է հաշվել 2-ը և բազմապատկելով 3-ով. այդ դեպքում ունենք գործիական – կողմնորոշված կոմբինատորային մտածողություն: Իսկ եթե ուսանողը կազմում է բոլոր հնարավոր ելքերի բազմությունը և (ասենք 1, 2 քարտերի և ա, բ, գ տառերի համար՝ (1, ա), (1, բ), (1, գ), (2, ա), (2, բ), (2, գ)), ապա ուսանողի մոտ առկա է (կամ գերակայում է) բազմություն – կողմնորոշված կոմբինատորային մտածողությունը:

Լոքվուդը հիմնավորում է, որ բազմություն կողմնորոշվածմ տածողությունը չափազանց կարևոր է, որովհետև առանց դրա խնդրի լուծման էությունը չի ըմբռնվում, մնում է միայն լուծման արտաքին՝ ոչ էական կողմը:

Դյուբուասը [101] զբաղվել է կոմբինատորային դատողությունների ձևավորման և զարգացման հիմնահարցերով՝

պարզ կոմբինատորային համախմբություններ կազմել կարողանալու համատեքստում: Նրանք այդ համախմբությունները դասակարգել են երեք հիմնական կատեգորիաների (մոդելների).

ա) n հատ օբյեկտներից կազմված բազմությունից m հատ օբյեկտների ***ընտրություն.*** ընդսմին, n հատ օբյեկտները (կամ դրանց մի մասը) անպայման չէ, որ իրարից տարբեր լինեն և m հատ օբյեկտներում հնարավոր է նաև կրկնություն:

բ) n օբյեկտներից կազմված բազմության տարրերի ***բաշխում*** m հատ անոթների մեջ՝ նորից տարբեր վարիացիաներով. n հատ օբյեկտներն անպայման չէ, որ իրարից տարբեր լինեն. դատարկ անոթներ թույլատրվում են:

գ) n հատ օբյեկտներից կազմված բազմության ***տրոհում*** m հատ ենթաբազմությունների:

Դյուբուասը և Բատաներոն ուսումնասիրել են այն հարցը, թե արդյոք դրանք նույն բանն են թվում սովորողներին: Ուսանողներին տրվող հանձնարարությունների մեջ նրանք մտցնում էին հուշում, որից երևում էր, թե որ մոդելն է բացահայտ երևում: Օրինակի համար՝ նրանք օգտագործում էին «ընտրի՛ր», «հավաքի՛ր», «վերցրու՛» և այլ դարձվածքներ՝ ***ընտրություն*** մոդելը հուշելու համար, իսկ ***բաշխում*** մոդելի համար՝ «ներմուծի՛ր», «նշանակի՛ր» և, վերջապես, տրոհում մոդելի համար՝ «բաժանի՛ր», «անջատի՛ր», «կտրի՛ր» բառերը:

Հետազոտությունների արդյունքում պարզվեց, որ ուսուցման արդյունքում սովորողներն ավելի լավ էին կատարում ընտրությանը վերաբերող հանձնարարությունները, բաշխմանը վերաբերող հանձնարարություններում՝ որոշակիորեն դժվարանում էին, իսկ տրոհումն ամենադժվարն էր:

Կոմբինատորային մտածողության զարգացման հիմնախնդիրը թերի կմնա, եթե այն չդիտարկվի կոգնիտիվ զարգացման ընդհանուր համատեքստում: Հոգեբանական և մանկավարժական հետազոտությունների մեծ մասում կոգնիտիվ զարգացումը դիտարկվում է ***հասկացությունների*** ձևավորման համատեքստում: Իսկ այդ ուղղությամբ գերակշռող դիրք ունեն երկու հարացույցեր. Պիաժեի գենետիկ տեսությունը և Լ.Ս. Վիգոտսկու մշակութային – պատմական տեսությունը:

Պիաժեն իր սկզբունքային թեզիսն արտահայտել է այսպես. «Մեծ սխալ կլինի մտածել, որ երեխան թվի գաղափարը կամ այլ մաթեմատիկական հասկացություններ ձեռք է բերում անմիջապես ուսուցման արդյունքում: Ընդհակառակը, նշանակալի չափով նա դրանք զարգացնում է ինքնուրույն, անկախ և սպոնտան կերպով: Երբ մեծերը փորձ են անում երեխային պարտադրել մաթեմատիկական հասկացություններ ժամանակից շուտ, ապա նա դրանք պարզապես սերտում է, իսկ իրապես հասկանում և ընկալում է միայն մտային զարգացման զուգընթաց» [72, էջ 121]:

Ըստ Պիաժեի՝ անհատը կառուցում է և զարգացնում գիտելիքը ասիմիլիացիայի և ակոմոդացիայի միջով: Նա ենթադրում էր, որ կան մտային հատուկ կառույցներ՝ մենտալ կառույցներ, որոնց միջոցով իրագործվում են ասիմիլիացիայի և ակոմոդացիայի գործընթացները: Օրինակ՝ ***սխեման*** կոգնիտիվ (մենտալ) կառույց է, որի միջոցով անհատը՝ ինտելեկտուալ կերպով, հարմարվում է շրջակա միջավայրին և կազմակերպում է այն: Ասիմիլացիա է տեղի ունենում, եթե անհատը իր փորձը հարմարեցնում է արդեն իր փորձով ձեռք բերված կոնցեպտուալ կառույցներին կամ սխեմաներին, այլ կերպ ասած՝ անհատը նոր փորձին վերաբերվում է արդեն իրեն հայտնի փորձի շրջանակներում:

Ակոմոդացիան գոյություն ունեցող սխեմաների մոդիֆիկացիան է (առաջին հերթին) և նոր սխեմաների ստեղծումը (երկրորդ հերթին):

Հենց անհատի մոտ տեղի է ունենում ակոմոդացիայի գործընթաց, նա անմիջապես անցնում է նոր փորձ ձեռք բերելուն՝ ասիմիլացիայի միջոցով:

Վիգոտսկու տեսությունը պակաս կշիռ չունի. դրա էությունը արտահայտված է «ուսուցումն իր հետևից տանում է զարգացումը, և ոչ թե հակառակը» փոխաբերության մեջ:

Լ.Ս. Վիգոտսկին համարում է, որ «ուսուցումը ... զարգացումը չէ, բայց երեխայի՝ ճիշտ կազմակերպված ուսուցումը իր հետևից տանում է երեխայի մտային զարգացումը, կյանքի է կոչում զարգացման մի շարք գործընթացներ, որոնք ուսուցումից դուրս լինեն: Այսպիսով, ուսուցումը երեխայի զարգացման ոչ գենետիկ բնույթով և մարդու գոյության պատմական առանձնահատկություններով պայմանավորված համընդհանուր և անհրաժեշտ պայման է» [41, էջ 450]:

Վիգոտսկին գտնում էր, որ հասկացությունների ընդհանրացման մակարդակից ելնելով՝ կարելի է որոշել մտածողության զարգացման աստիճանը, ընդ որում նա տարբերակում էր որակապես իրարից տարբեր, բայց գենետիկորեն կապված ընդհանրացման երեք աստիճան՝ ***սինկրետներ, կոմպլեքսներ, հասկացություններ:***

Սինկրետների փուլում երեխաները խմբավորում են առարկաները պատահականորեն՝ տպավորության տակ, որը հաճախ թույլ չի տալիս առարկաների միջև օբյեկտիվ կապեր տեսնել: Ընդհանրացման հաջորդ աստիճանը կոմպլեքսներն են. այս դեպքում առարկաները մի խմբի մեջ են միավորում երեխայի անմիջական տպավորությունների հիման վրա՝ բայց այս անգամ փաստական կապերը հաշվի առնելով: Այդ կապերը՝ որպես առարկաների խմբավորման հիմք, կարող են փոխվել, բայց համարյա միշտ հայտնի գալիս որոշակի առտնին իրադրություններում:

Ընդհանրացման բարձր աստիճանը հասկացությունն է. մտածողության զարգացման այս աստիճանում տեղի է ունենում վերացական հատկանիշների միավորում հասկացության մեջ: Եթե կոմպլեքսներով մտածողության դեպքում խոսքը տեսանելի հատկանիշի անվանում է, ապա հասկացության դեպքում այն վերացարկման միջոց է:

Ավելի բարձր ընդհանրացման աստիճան է գիտական հասկացությունը, որն առաջ է գալիս ոչ թե առարկաների հայեցումից, այլ հասկացությունների նկատմամբ աշխատանքից՝ բառային սահմանման միջոցով որոշակի վերացարկում անելով: Իրապես գիտական հասկացությունների ձևավորման համար, ըստ Վիգոտսկու, անհրաժեշտ է երեք պայման.

ա) հասկացությունների միջև առնչությունների հաստատում,

բ) հասկացությունների միավորում համակարգի մեջ, գ) ռեֆլեքսիա. «Մտքում վերացարկումը և ընդհանրացումը սկզբունքորեն տարբերվում են առարկաների վերացարկումից և ընդհանրացումից» [51, էջ 304]:

Կոմբինատորային մտածողության զարգացման համատեքստում կոգնիտիվ զարգացման և՛ պիաժեյան, և՛ վիգոտսկյան տեսությունները հավասարապես կարևոր են. դրանք միմյանց չեն հակասում, այլ փոխլրացնում են:

Կոմբինատորային մտածողության զարգացման մեթոդական համակարգի կառուցման տեսակետից նպատակահարմար է քննարկել նաև կոգնիտիվ զարգացման (և ուսուցման) մի քանի նորագույն տեսություններ: Տարբերակվում են կոգնիտիվ զարգացման ***լոկալ տեսություններ*** և կոգնիտիվ զարգացման ***գլոբալ տեսություններ***: Լոկալ տեսությունը կենտրոնանում է կոգնիտիվ զարգացման որևէ մի գործընթացի կամ կոնցեպտի վրա, իսկ գլոբալ տեսությունը՝ մաթեմատիկական գիտելիքի երկարաժամկետ զարգացման վրա: Օրինակ՝ Պիաժեի «կոնկրետ օպերացիաների» փուլի ուսումնասիրությունը լոկալ է, իսկ Պիաժեի փուլային զարգացման տեսությունը՝ գլոբալ:

Գլոբալ են Վան Հեյլի (VanHiele P. M.) [120] երկրաչափական զարգացման տեսությունը կամ Ջ. Բրուների (Bruner J.) [29] էնակտիկ – իկոնային – սիմվոլիկ տեսությունը: Գլոբալ – լոկալ են Դուբինսկու (Dubinsky E.) [101] գործողություն – գործընթաց – օբյեկտ – սխեմա (action-process-objekt-schema՝ APOS) տեսությունը և Բիգսի և Քոլինսի (Bigs J., Collins K.) [99] ***դիտարկվող ուսումնական արդյունքների կառուցվածքը*** (Structure of the Observed Learning Outcome՝ SOLO) տեսությունները: Մեր հետազոտությունների համատեքստում նպատակահարմար ենք գտնում քննարկել SOLO և APOS մոդելները:

Աղյուսակ 1-ում պատկերված է վերը նշված տեսությունների փուլային զարգացումների համեմատումը, իսկ աղյուսակ 2-ում՝ SOLO մոդելի նկարագիրը:

Աղյուսակ 1

Կոգնիտիվ զարգացման փուլեր

Պիաժեի փուլերը	**Վան-Հելլի փուլերը**	**SOLO-ի կերպերը**	**Բրուների կերպերը**
Սենսոմոտոր	I - ճանաչում	Սենսոմոտոր	Էնակտիվ
Նախաօպերացիոնալ	II - վերլուծություն	Իկոնային	Իկոնային
Կոնկրետ օպերացիոնալ	III - կարգավորում	Կոնկրետ սիմվոլիկ	Սիմվոլիկ
Ֆորմալ օպերացիոնալ	IV - դեդուկցիա	Ֆորմալ	
	V - խստություն	Հետֆորմալ	

Աղյուսակ 2

SOLO –ի կերպերի նկարագրությունը

SOLO –ի կերպը	**Զարգացման աստիճանը**
Սենսոմոտոր (անմիջապես ծննդից հետո)	Անձնավորությունը արձագանքում է ֆիզիկական շրջապատին: Փոքրիկը շարժողական հմտությունների ձեռքբերման կերպում է:
Իկոնային (2 տարեկանից սկսած)	Անձնավորությունը առներսում է գործողությունները՝ որպես պատկերներ: Այս կերպում է, որ կրտսերները զարգացնում են լեզուն և պատկերները՝ որպես առարկաների և գործողությունների արտացոլումներ: Դեռահասների համար այս կերպի գործառնումը վերաբերում է այն գիտելիքին, որը կոչում են ինտուիտիվ:
Կոնկրետսիմվոլիկ (6 կամ 7 տարեկանից սկսած)	Անձնավորությունը մտածում է՝ օգտագործելով խոսքը և թվերի համակարգը: Սատարրական դպրոցում կամ հիմնական դպրոցում

	ուսումնառելու ձևն է:
Ֆորմալ (15 կամ 16 տարեկանից սկսած)	Անձնավորությունը դիտարկում է ավելի վերացական կոնցեպտներ, որը կարելի է դիտարկել որպես մտածողություն «տեսությունների» կամ «սկզբունքների» ձևով:
Հետֆորմալ (հնարավոր է մոտավորապես 22 տարեկանից կամ երբեք)	Անձնավորությունը կարող է դատողություններ անել տեսությունների վերաբերյալ:

Նկատենք, որ SOLO-ի կերպերում նշվում է միայն տարիքի սկիզբը: Զարգացման ցանկացած աստիճանում SOLO-ն թույլատրում է ցանկացած կերպ: Օրինակ, եթե զարգացման որևէ աստիճանում ձեռք է բերվել կոնկրետսիմվոլիկ կերպ, ապա հնարավոր է, որ ձեռք բերվեն սենսոմոտոր կամ իկոնային կերպեր: Ըստ այդմ, ներմուծվում է լոկալ շրջափուլերի (ցիկլերի) գաղափարը: Լոկալ շրջափուլը վերաբերում է առանձին կոնցեպտուալ ոլորտի, որում ուսումնառողը նպատակ է դրել իմաստ վերագրել ընկալելի ինֆորմացիային և կապեր հաստատել այլ ինֆորմացիաների հետ՝ օգտագործելով իր առկա կոգնիտիվ կառույցները:

Հենվելով Պիաժեի «էմպիրիկ վերացարկմանը» (ընկալվող առարկաների հատկություններ) և «փսևդոէմպիրիկ վերացարկմանը»՝ (ընկալվող առարկաների նկատմամբ կատարվող գործողությունների հատկություններ հասկացությունների վրա) կարելի է ենթադրել, որ գոյություն ունի մաթեմատիկական կոնցեպտներ կառուցելու՝ ամենաքիչը երեք եղանակ.

1) օբյեկտների և դրանց հատկությունների ***ընկալման*** հիման վրա (ինչպես արվում է երկրաչափության մեջ),

2) սիմվոլիկ ձևով ներկայացված օբյեկտների և այդ սիմվոլների նկատմամբ գործողություններ կատարելու հիման վրա (ինչպես արվում է թվաբանության և հանրահաշվի մեջ),

3) զուտ հատկությունների հիման վրա (ինչպես արվում է աքսիոմային տեսություններում):

Ըստ այդմ, զարգացման գաղափարը բերում է գիտելիքի կառուցման հիմքում ընկած շրջափուլ (ցիկլ) հասկացությանը: SOLO մոդելում շրջափուլը տրված կոնտեքստում տրված խնդիրներին առնչվող՝ անձավորության կողմից տրված այն հարցերի պատասխանների բազմությունն է, որոնք վերաբերում են ուսուցման արդյունքներին:

Այսպիսով, եթե պիաժեյան հարացուցյցում ստուգվում էր տարբեր աստիճաններում հանձնարարությունների կատարման արդյունքները, ապա SOLO-ում՝ նույն աստիճանում՝ տարբեր հարցերին տրված պատասխանները: Նկատենք, որ պիաժեյան տեսության քննադատներն իրավացիորեն նշում էին, որ Պիաժեի կողմից տրված հարցերը «խիստ գիտական» էին ձևակերպվում: Այսպիսով, SOLO մոդելի և Պիաժեի (կամ այլոց) տեսությունների տարբերությունն այն է, որ SOLO-ն կենտրոնանում է հարցերի պատասխանների կառուցվածքի վրա և ոչ թե կոգնիտիվ զարգացման փուլերի կոնստրուկտների վրա:

SOLO մոդելում առանձնացվում են ցիկլերի երեք մակարդակ.

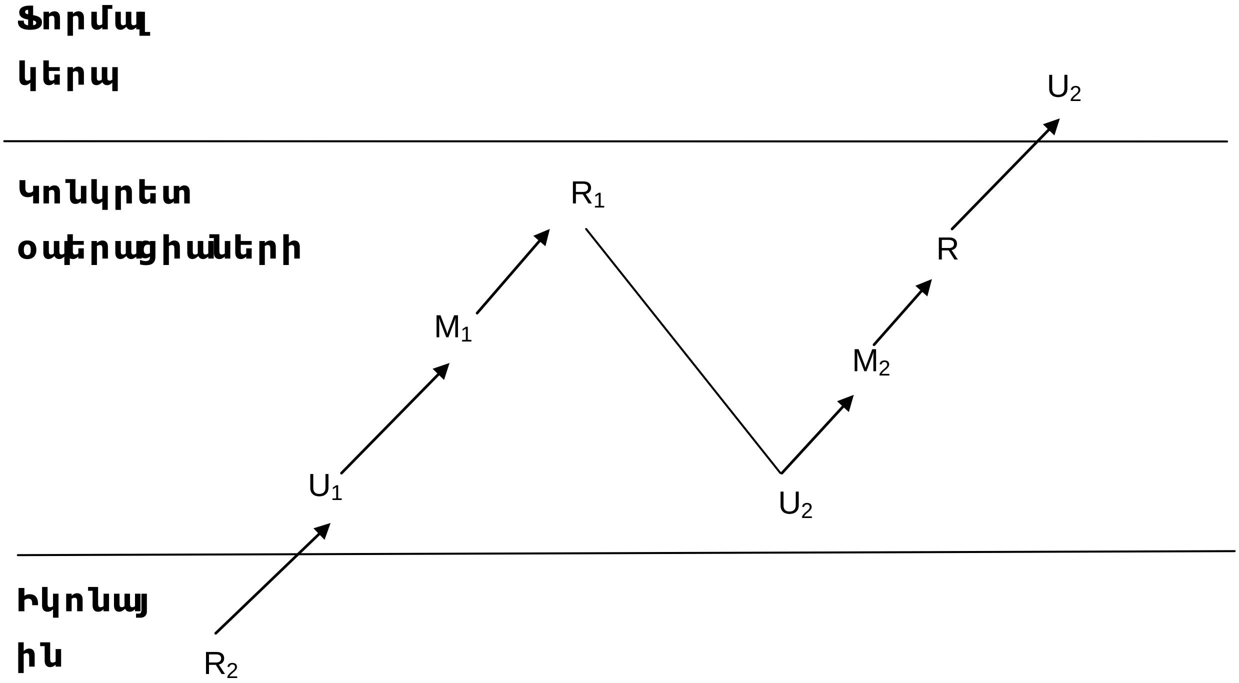
I. ***միակառույց (U),*** երբ պատասխանները վերաբերում են որևէ խնդրին առնչվող ինչ-որ տվյալի:

II. ***բազմակառույց (M)***, երբ պատասխանները վերաբերում են որևէ խնդրին առնչվող մի քանի տվյալներին, բայց ոչ դրանց միջև առնչություններին (չկան կապեր այդ տվյալների միջև):

III. ***էական (R)***, երբ պատասխանները վերաբերում են որևէ խնդրի (կամ խնդիրների համակարգի) տվյալներին և դրանց միջև հնարավոր առնչություններին:

Այս երեք մակարդակի պատասխանները՝ մեկտեղ վերցրած, կկոչենք ուսումնառության UMR ցիկլ: UMR ցիկլին երբեմն ավելացնում են նաև նախակառույց (prestructual) և բարձր-վերացական (extended abstract) մակարդակները:

UMR ցիկլի առանձնահատկությունն այն է, որ այն գործառնում է գլոբալ ցիկլի (սենսոմոտոր, իկոնային, կոնկրետ սիմվոլիկ, ֆորմալ, հետֆորմալ) կերպերից յուրաքանչյուրում: Օրինակ՝ իկոնային կերպում երեխան կարող է ունենալ էական մակարդակ (այդ կերպի շրջանակներում), որը կարող է զարգանալ և հասնել միակառույց մակարդակի՝ արդեն կոնկրետօպերացիաների կերպում, այնուհետև, այդ միակառույց մակարդակը կարող է զարգանալ բազմակառույցի և, ապա, էական (կոնկրետ օպերացիաների կերպում): Այս էական մակարդակն արդեն հիմք է ֆորմալ կերպում այն դառնալու միակառույց կերպի, և այսպես շարունակ (նկար 1):



Նկ. 1

Օրինակ՝ քննարկենք թիվ հասկացության զարգացումը նկ. 1-ի շրջանակներում. մեր հետազոտության երկրորդ գլխում այն կքննարկվի կոմբինատորային հասկացությունների զարգացման համատեքստում: Իկոնային կերպում (5-6 տարեկան) զարգանում է երեխայի խոսքը, և նա անվանումներ է տալիս այն առարկաներին, ինչը տեսնում է: Այս կերպում թիվ հասկացությունը զարգանում է և, անկախ հաշիվը ինչպես է կատարվում, մոտեցումը դառնում է *թվական*. ասենք, տեսնելով *երեք* արջուկ և ապա դրանց միավորելով *երկու* արջուկ՝ ասում է *հինգ* արջուկ (R_2):

Կոնկրետ օպերացիաների փուլում, թիվ հասկացությունն իր կարգավիճակը փոխում է և դառնում *գոյական,* այսինքն՝ սիմվոլները չեն կապվում առարկայախմբի հետ. դառնում են ինքնուրույն: Եվ այդ ինքնուրույնությունը կոնկրետ օպերացիաների կերպի առաջին մակարդակն է (U_1). երեխան այս դեպքում պարզապես գրում է 2+3՝ առանց կոնկրետ առարկաներ հղելու: Այս կերպում բազմակառույց մակարդակը (M_1) նշանակում է, որ երեխան կարող է կատարել իրար հաջորդող մի քանի թվաբանական գործողություններ: Այս կերպի ամենաբարձր մակարդակը (R_1) այն է, որ երեխան ընդունակ է 5-ը պատկերացնել ոչ միայն 2+3, այլև 1+4, 4+1, 3+2:

Կոնկրետ օպերացիաների երկրորդ ցիկլը (U_2) սկսվում է այն բանից, որ երեխան կարող է մի գործողություն կատարել արդեն մեծ թվերի հետ (U_2): Սա արդեն զարգանում և դառնում է M_2, R_2 և ավարտվում է այն բանով, որ արդյունքում դառնում է ֆորմալ կերպի U_1 հիմքը, այն է՝ երեխան արդեն ընդհանրական պատկերացում ունի բնական թվեր համակարգի մասին:

SOLO-ի արժեքն այն է, որ ի տարբերություն պիաժեյան փուլերի, որոնցից յուրաքանչյուրում ենթադրվում է զարգացման մի մակարդակ, յուրաքանչյուր կերպում հնարավոր է «գնահատել» սովորողին բազմամակարդակ ձևով՝ նայած նրա պատասխանների որակի: Օրինակ, դիտարկենք հետևյալ հավասարումը՝

$$(72 : 36) \cdot 9 = (72 \cdot 9) : (x \cdot 9):$$

Այս խնդրի լուծման (կամ չլուծման) ընթացքի պատասխաններից կարելի է որոշել սովորողի թվաբանական զարգացման մակարդակը:

U_1՝ պատասխան հետևյալ հարցադրմամբ. «Ինչ-որ բան պետք է անե՞լ այդ 9-ի նկատմամբ»:

U_2՝ այսպիսի պատասխան. «Երկու կողմերում էլ կան և՛ 9-ը, և՛ 72-ը»:

R_3՝ այսպիսի պատասխան. «36 է, որովհետև երկու մասերում էլ պետք է լինի 36»:

M_2՝ կատարվում են մի քանի գործողություններ (հնարավոր է սխալներով):

R_2՝ տեսնելով որոշ նմանություններ՝ սովորողը հավասարման երկու մասերը կրճատում է 9-ով:

Հետագա պատասխանները (U_2), արդեն վերաբերում են ֆորմալ կերպին, երբ սովորողը հստակ պատկերացում ունի խնդրի մասին, կատարում է պարզեցումներ (և լուծմանը բերող թվաբանական գործողություններ):

Ցիկլային մոտեցումը լավ համապատասխանում է նյարդոֆիզիոլոգիական ժամանակակից փաստերին. կենսաբանական ուղեղը նեյրոնների միջև կառուցում է կապեր, այդպիսի կապերը գործում են խմբերով՝ կազմելով մտային կառույցների բարդ համալիր, որն արդեն գործում է որպես մի մենտալ կառույց և միավորվելով գործում է ավելի բարձր մակարդակում:

Հատուկ շեշտենք, որ մենք SOLO մոդելը օգտագործելու ենք մեր հետազոտության մեջ (Գլուխ 2) տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողությունը զարգացնելու առումով:

Քանի որ կոմբինատորային մտածողության սահմանումը հնարավոր չէ կիրառել այդ մտածողության մակարդակը որոշելու համար, ապա մենք SOLO-ի միջոցով, ելնելով ուսանողի պատասխանների SOLO-յան ցիկլերից, կորոշենք ուսանողի կոմբինատորային մտածողության ձևավորվածության աստիճանը: Ընդսմին, հասկացությունները կառուցելու գործընթացում մենք ***«անել կարողանալու»*** սիմվոլիկ գործողություններից անցում ենք կատարում ***«հասկանալ կարողանալու»*** մտային գործողություններին: Սա նշանակում է, որ անցում ենք կատարում հայտնի օբյեկտների նկատմամբ ***գործողություններ*** կատարելուց դեպի դրանց համապատասխան ***մտային օբյեկտների*** նկատմամբ գործողություններ կատարելուն:

Այս տեսակ մոտեցումը հանգեցնում է նրան, որ պետք է նկարագրությունը տալ տարբեր ձևերով՝ ա) ***գործողություն***, ***գործընթացի օբյեկտ բ) առներսում***, ***խտացում***, ***ռեֆլեքսիա*** գ) ***պրոցեդուրաներ***, ***գործընթաց***, ***ընդհանրացում***:

Մեր հետազոտության նպատակների տեսակետից մենք ընտրել ենք ա)-ն: Այդ մոտեցումը մշակվել է Դուբինսկու կողմից (Dubinsky՝ 1991, Sri) և հայտնի է որպես APOS (Action-Process-Object-Schema) տեսություն:

Աղյուսակ 3-ում պատկերված է APOS-ի և SOLO-ի համեմատությունը՝ լոկալ ցիկլերի լեզվով:

Աղյուսակ 3

SOLO մոդել	APOS մոդել
Միակառույց, Բազմակառույց	Գործողություն
Էական	Գործընթաց
Միակառույց (նոր ցիկլում)	Օբյեկտ
	Սխեմա

Մեր կողմից երկու (և ոչ թե մեկ) մոդել ընտրելը կապված է այն բանի հետ, որ կոմբինատորային որոշ խնդիրներ լուծելու կարողության գնահատումը հարմար է SOLO-ում, իսկ այլ խնդիրներինը՝ APOS-ում:

Ինչպես երևում է աղյուսակ 3-ից, SOLO մոդելի միակառույց և բազմակառույց մակարդակները APOS մոդելում արտահայտված են գործողության մակարդակում: Կոմբինատորային որոշ հասկացությունների ուսուցման համար միակառույց-բազմակառույց տարբերակումը կարող է լինել անարդյունավետ: SOLO-ի էական մակարդակը APOS-ում արտահայտվում է գործընթացով. սա նույնպես արդյունավետ կարող է լինել:

Ընդհանրապես, SOLO և APOS մոդելների համեմատումն արժե կատարել «անել կարողանալ» - «հասկանալ-կարողանալ» միասնության մեջ: Դա երևում է հետևյալ աղյուսակից.

Աղյուսակ 4

ԱԿ-ից ՀԿ հասկացությունների կառուցման ֆունդամենտալ ցիկլերը

Հասկացությունների կառուցումը գործողությունների նկատմամբ ռեֆլեքսիվ վերացարկման միջոցով		
SOLO	APOS	Հասկացությունների կառուցման ֆունդամենտալ ցիկլերը

Միակառույց Բազմակառույց	Գործողություն	Հայտնի օբյեկտներ Գործողություններ հայտնի օբյեկտների նկատմամբ
Էական	Գործընթաց	Գործընթացը որպես գործողությունների արդյունք
Միակառույց (նոր ցիկլ)	Օբյեկտ Սխեմա	Ռեֆլեքսիա արդյունքի նկատմամբ

Այս երկու, ինչպես նաև կոգնիտիվ զարգացման այլ մոդելներ ինչ-որ իմաստով միավորելու (կամ գոնե՝ համագործակցելու) փորձ է արված Դահլի (Dahl) [100] կողմից, այսպես կոչված, CULTIS (Consciousness, Unconscious, Language, Tacit, Individual, Social) մոդելում: Այդ մոդելը համեմատում է կոգնիտիվ զարգացման տարբեր մոդելների վեց մոտեցումներ՝ գիտակցում (Consciousness), չգիտակցվածություն (Unconscious), խոսք (Language), չարտահայտված (Tacit), անհատական (Individual), սոցիալական (Social):

Աղյուսակ 5

Մոտեցում 1՝ Գիտակցում	*Մոտեցում 2*
Պոլիա [78], 4 փուլ՝ հասկացի՛ր խնդիրը և ձգտի՛ր լուծել. մշակի՛ր պլան. իրագործի՛ր պլանը. հետ վերադարձի՛ր և քննարկի՛ր: **Մեյսոն [112]**, 3 փուլ՝ մուտք, հարձակում. ընդդիմախոսում: **Սֆառդ [116],** 3 փուլ՝ առներսում, խտացում (օպերացիոնալ ըմբռնում) կոնկրետացում (կառուցվածքային ըմբռնում):	**Հադամար [21],** 4 փուլ՝ նախապատրաստում, հասունացում, լուսավորում, հաստատագրում: **Կրուտեցկի [64]՝** հանկարծակի ոգևորություն, որը նախապես ձեռք բերված փորձի, հմտությունների և գիտելիքի արդյունք է: **Պոլիա՝** գիտական ջանք և լարում, որն անհրաժեշտ է

Դուբինսկի`** APOS: **Սքեմպ [118]` կատարի՛ր ավտոմատ գործողություններ` դրանց վրա քիչ ուշադրություն դարձնելով:	ենթագիտակցական աշխատանքը սկսելու համար: **Մեյսոն [112]`** ժամանակ է պետք:
Մոտեցում 3` խումբ	***Մոտեցում 4` չարտահայտված***
Պոլիա`** օգտակար գաղափարները հաճախ գալիս են լավ ձևակերպված մտքից կամ հարցից: **Վիգոտսկի` Լեզուն տրամաբանական և վերլուծական մտածողության գործիք է: Մտքերը ստեղծվում են բառերի միջոցով: **Սքեմպ** 2 սկզբունք` բարձր կարգի հասկացությունները չեն կարող գործառնել սահմանման միջոցով, այլ միայն օրինակների միջոցով: Բոլոր հասկացությունները` բացի նախնականներից, ստացվում են այլ հասկացություններից: **Պիաժե`** ասիմիլացիան գալիս է նոր տվյալներից, ակոմոդացիան` նորացնում է կոգնիտիվ կառույցները: Օբյեկտը ճանաչելու համար պետք չէ այն պատճենել, այլ պետք է գործողություն կատարել դրա նկատմամբ: Իրականությունը ճանաչելու համար պետք է կառուցել	**Պոլիա`** սովորողը, ով ճիշտ ձևով է վարվում, հաճախ հոգ չէ տանում արտահայտելու այդ վարմունքը` խոսքերով, և հնարավոր է, որ չի կարող դա անել: **Հադամար`** մտքերը մահանում են հենց այն պահին, երբ դրանք բառերի կերպեն ստանում, բայց հատկանիշները մտքերը անհրաժեշտ ուսատար են: **Պիաժե`** տրամաբանված խոսքի արմատները լեզվի մեջ չէ, բայց այն պետք է գտնել գործողությունների կոորդինացման մեջ, գործողություններ, որոնք վերացական ռեֆլեքսիայի հիմք են: Վերացարկումը չի գալիս օբյեկտից, որի նկատմամբ կատարվում է գործողություն, այլ հենց գործողությունից: **Սքեմպ`** նախնական հասկացությունները կարող են ձևավորվել և օգտագործվել առանց օգտագործելու խոսքը:

ձևափոխություններ, որոնք համապատասխանում են այդ իրականությանը:	
Մոտեցում 5՝ անհատական	***Մոտեցում 6՝ սոցիալական***
Գլասերսֆելդ [1229՝ գիտելիքը անձնավորության գլխում է, և մտածող սուբյեկտը ուրիշ այլընտրանք չունի, բացի այն բանից, որ գիտելիքը կառուցի իր փորձի հիման վրա: **Պիաժե՝** ռեֆլեքսիվ վերացարկումը մաթեմատիկական վերացարկման հիմքն է: Դրանք երկուսը հենվում են կոորդինացված գործողությունների (համատեղ գործողություններ, իրար հաջորդող գործողություններ և այլն) վրա: Հետևաբար, անձնավորությունն ակտիվ է և սովորող, երբ նա գործողություններ է անում օբյեկտների հետ և ռեֆլեքսում է այդ գործողությունների վրա: **Սքեմպ՝** որոշ մարդիկ ունեն վառ ակնառու երևակայություններ: Դրանցով գործառնելու համար անձը կարիք ունի դրանք պատկերելու:	**Վիգոտսկի՝** առներսման 2 մակարդակ՝ հենտերհոգեբանական, ինտրահոգեբանական: Սկզբում ուսուցիչը ուղղորդում է, ապա նրանք խնդիրը միասին են լուծում և, վերջապես, ուսումնառողը ուսուցչի հսկողության և հսկողության տակ է: Ուսումնառության ներուժը մերձակա զարգացման տիրույթն է: **Էռնստ՝** վերակառուցի՛ր օբյեկտիվ գիտությունը որպես ուսուցիչների, գրքերի և այլ սովորողների հետ բանակցված սուբյեկտիվ գիտելիք: **Սքեմպ՝** բարձրաձայն խոսելը գիտակցության մեջ ավելի շատ գաղափարներ է բերում, քան մտքում խոսելը: Խնդիրը կարելի է լուծել բարձրաձայն խոսելուց հետո, եթե նույնիսկ լսողը չի խառնվում: Քննարկման ժամանակ դա ունի երկկողմանի էֆեկտ:

CULTIS «ընդհանրական» մոդելի դիտարկումը հարցադրումներ է առաջացնում: Դրանցից մեկը հետևյալն է. ինչպես վարվել (օգտագործել) այս տեսությունները: Դրանցից մի քանիսը իրարից չափազանց տարբեր են, նույնիսկ իրար հակասող, մյուսները՝ բավականաչափ նման: Վիգոտսկին այս առումով ասել է. «Քանի դեռ չկա հնարավոր հոգեբանական գիտելիքը կառուցելու՝ բոլորի կողմից ընդունված համակարգ, յուրաքանչյուր կարևոր հայտնագործություն անխուսափելիորեն բերում է դիտարկվող փաստերը բացատրող նոր տեսության» (1962, էջ 10, Sri): Ըստ էության, Վիգոտսկին պնդում է, որ հոգեբանությունը չպետք է բաժանվի տարբեր դպրոցների:

Իհարկե, առայժմ այդպիսի ընդհանրական տեսություն չկա: Բայց արդյո՞ք դա անհրաժեշտ է:

1.3. ՄՄ(ՏԿ) ԿՐԹԱԿԱՆ ԾՐԱԳԻՐՆ ՈՒ ՍՈՒ ՄՆԱՍԻՐՈՂ ՈՒ ՍԱՆՈՂԻ ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ՄՏԱԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

Մանկավարժական պայմանների շրջանակումը մենք իրագործում ենք որոշակի դիդակտիկական սկզբունքների (***զարգացնող ուսուցման, գիտականության (և մատչելիության), համակարգվածության և հաջորդականության, գործնականության***) հենքի վրա և «գիտելիք», «գործունեություն», «մտածողության ձևեր», «իմանալ -հասկանալ » կատեգորիաների համատեքստում: Նշենք, որ եթե մաթեմատիկան կրթության ընդհանուր ասպեկտում վերը նշվածները որոշակի մշակումներ են ունեցել, ապա զուտ կոմբինատորիկայի (որպես մաթեմատիկայի բաժնի) և կոմբինատորիկական մտածողության զարգացման առումով դրանք կոնկրետացումներ չեն ունեցել:

Կոնկրետացումների իրագործման համար մենք հենվում ենք 1.2 ենթագլխի հիմնական տեսական դրույթների վրա, այն է` կոգնիտիվ զարգացման SOLO, APOS տեսությունների (հատկապես լոկալ ցիկլերի առումով) վրա, ինչպես նաև CULTIS «միավորող» տեսության վրա:

Զարգացնող ուսուցման սկզբունքը:

Տարրական դպրոցի ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման առումով, անկախ վերը նշված տեսությունների` այս կամ այն չափով տարբերություններից, զարգացնող ուսուցումը հենվում է ***մտային կառույցների տարբերակման*** օրենքի և ***մտային կառույցների ինտեգրման*** օրենքի վրա: Տարբերակումը` որպես ընդհանուրից մասնավորի անցում և ինտեգրումը` որպես մասնավորից (պարզից) ընդհանուրի (բարդի) անցում:

Իհարկե, բուհական ուսուցման դեպքում գերակշռողը տարբերակումն է: Բայց, հաշվի առնելով ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի առաքելությունը (տարրական դպրոցի ուսուցչի պատրաստում), մենք ոչ պակաս ուշադրություն կդարձնենք նաև ինտեգրմանը: Այսօրինակ մոտեցման դեպքում իրագործվում են կոմբինատորային մտածողության զարգացման և, ընդհանրապես, կոմբինատորիկայի ուսուցման նպատակները. մի կողմից տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացում, մյուս կողմից՝ այդ ուսուցչի նախապատրաստում՝ կրտսեր դպրոցականի կոմբինատորային կարողությունների ձևավորման - զարգացման համար:

Այս համատեքստում, զարգացնող ուսուցման սկզբունքը հենվում է SOLO մոդելի միակառույց-բազմակառույց ցիկլերի, APOS մոդելի գործողության ցիկլի վրա և CULTIS մոդելի որոշ դրույթների վրա:

Առաջին փուլում սովորողը տիրապետում է մի ինչ-որ պրակտիկ գործողության և, ըստ էության, գործնական խնդիրը դառնում է ***ուսումնագործնական***: Երկրորդ փուլում ուսումնագործնական խնդրի մեջ ներառվում է հասկացությունը, որի ուսումնասիրման արդյունքում սովորողի ուսումնական գործունեությունը ստանում է ***ուսումնաճանաչողական*** բնույթ. ինտերիոգեբանական մակարդակը վերածվում է ինտրահոգեբանականի: Երրորդ փուլում անցում է կատարվում էական (SOLO), օբյեկտ-սխեմա (APOS), ռեֆլեքսիա (CULTIS) ցիկլի:

Բուհում կոմբինատորիկայի ուսուցումը սովորաբար կատարվում է՝ հենվելով առարկայի «տրամաբանական» շարադրման վրա. սահմանումներ, թեորեմներ, թեորեմների ապացույցներ: ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի դեպքում դա լավ հարմարեցված է ուսուցման հաջորդայնության սկզբունքին, որովհետև նախքան «կոմբինատորիկա» մոդուլի ուսումնասիրությունն, ուսանողը ուսումնասիրում է «Մաթեմատիկական տրամաբանության տարրեր» մոդուլը:

Բայց, նորից հաշվի առնելով ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի առաքելությունը, մենք առաջարկում ենք ուսուցման եռադիրության (տրինարության) սկզբունքը:

Ուսուցման եռադիրության սկզբունքը: Այս սկզբունքը զուգահեռվում է Ա.Գ. Մորդկովիչի դոկտորական ատենախոսության [70] մեջ առաջադրված երկդիրության (бинарность) սկզբունքի հետ: Երկդիրության սկզբունքի էությունն այն է, որ մաթեմատիկայի ուսուցչի (հիմնական և ավագ դպրոցներ) մաթեմատիկական կրթությունը լիարժեք կլինի, եթե այն իրագործվի մեթոդական կրթության համատեքստում:

Եռադիրության սկզբունքի էությունն այն է, որ տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի մաթեմատիկական կրթության կոմբինատորային բաղադրիչը պետք է իրագործվի ոչ միայն մեթոդական կրթության համատեքստում (երկդիրություն), այլև կրտսեր դպրոցականի կոմբինատորային կրթության շրջանակներում (եռադիրություն):

Ինչպես ցույց են տալիս հետազոտությունները [73, 110], և՛ կրտսեր դպրոցականի, և՛ դեռահասի (ու երիտասարդի) կոմբինատորային մտածողության աստիճանները իրարից շատ չեն տարբերվում. դրանք տատանվում են նախագործառնական և կոնկրետ-գործառնական փուլերի միջև: Այլ կերպ ասած, եթե կրտսեր դպրոցականի և ուսանողի մաթեմատիկական մտածողության այլ բաղադրիչներ իրարից տարբերվում են որակապես, ապա կոմբինատորային մտածողության առումով այդպիսի որակական տարբերություն չկա (իհարկե, կա քանակական տարբերերություն՝ փորձառնության առումով):

Ուսուցման եռադիրության սկզբունքը հակազուգահեռվում է Ֆ. Կլայնի [62] կողմից առաջադրված դպրոցական և բուհական մաթեմատիկաների միջև «կրկնակի խզման», ըստ որի դպրոցական («տարրական») մաթեմատիկան անհրաժեշտ է դասավանդել բուհական («բարձրագույն») մաթեմատիկայի համատեքստում: ՄՄ(ՏԿ) մասնագիտության «Մաթեմատիկա» դասընթացի (մասնավորապես դրա «կոմբինատորիկա» մոդուլի) ուսուցման տեսակետից, մենք առաջարկում ենք հակառակը. մնալով գիտական սկզբունքների շրջանակում՝ «կոմբինատորիկա» բուհական մոդուլի ուսուցումն իրագործել տարրական դպրոցի «մաթեմատիկա» դասընթացի բովանդակության համատեքստում:

Այսպիսով՝ «կոմբինատորիկա» մոդուլի բովանդակության կառուցումը ենթադրում է հետևյալ եռադիր սկզբունքը.

ա) այդ մոդուլի բուհական ուսուցման գիտականության պահպանում, բ) այդ մոդուլի բուհական ուսուցման իրագործում ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի «Տարրական դպրոցում մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդիկա» դասընթացի զուգահեռությամբ,

գ) այդ մոդուլի բուհական ուսուցման իրագործում՝ տարրական դպրոցի «Մաթեմատիկա» դասընթացի համատեքստում:

Մեր ատենախոսության երկրորդ գլխում եռադիրության սկզբունքը կբացատրվի կոմբինատորիկայի ուսուցման շրջանակներում:

Գիտականության սկզբունքը: Ինչպես հետևում է 1.2 ենթագլխի շարադրանքից, «Կոմբինատորիկա» մոդուլի հիմնական հասկացություններն անհրաժեշտ են այդ մոդուլի ուսումնասիրության նպատակների իրականացման համար: Ուստի, գիտականության սկզբունքի պահպանման տեսակետից, «Կոմբինատորիկա» մոդուլի բովանդակությունը պետք է կառուցել հիմնական հասկացությունների շրջանակում: Այդ հետազոտության նպատակների տեսակետից, իհարկե, այն անհրաժեշտ է, բայց ոչ բավարար. չի կարելի ուսուցանել մաթեմատիկայի կիրառությունները, առանց բուն մաթեմատիկան ուսուցանելու: Այս համատեքստում, «Կոմբինատորիկա» մոդուլի ուսուցումը, որով ավարտվում է «Մաթեմատիկա-ՏԴՄԲՈՒՏՅ» դասընթացը, պետք է հենվի այդ քառամյա դասընթացի հիմնական հասկացությունների վրա՝ պահպանելով եռադիրության սզբունքը:

Բերենք մի օրինակ (ատենախոսության երկրորդ գլխում կբերվեն շատ այլ օրինակներ):

«Մաթեմատիկա-ՏԴՄԲՈՒՏՅ» դասընթացում, «Բազմություններ և առնչություններ մոդուլում» (առաջին կուրս, երկրորդ կիսամյակ) ներմուծվում է «Համարժեքության առնչություն» հասկացությունը և դրա հետ սերտորեն կապված «Բազմության տրոհում» հասկացությունը:

Մաթեմատիկայի տեսակետից, R-ը համարժեքության առնչություն է որևէ S բազմության վրա, եթե այն $S\times S$-ի այնպիսի ենթաբազմություն է, որ՝

ա) $\forall x\in S, (x, x)\in R$ (անդրադարձելիության հատկություն),

բ) $\forall x, y\in S, \ [(x, y)\in R\Rightarrow (y, x)\in R]$ (համաչափելիության հատկություն), գ) $\forall x, y, z \in S, \ [(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R]$ (փոխանցելիության հատկություն):

Որևէ x տարի ($x \in S$) համարժեքության դաս կոչում են $[x]_R = \{y \in S | (x, y) \in R\}$ բազմությունը:

Համապատասխան թեորեմը պնդում է, որ որևէ S բազմության վրա տրված ցանկացած R համարժեքության առնչություն «ծնում» է S բազմության տրոհում, այսինքն՝ S բազմությունը՝ ոչ դատարկ, զուգաբար իրար հետ չհատվող ենթաբազմությունների միավորման տեսքով ներկայացում: Սա մաթեմատիկական ֆորմալ դժվարությունն է:

Կոմբինատորային խնդիրների լուծման դեպքում, անպայման չէ, որ սովորողը դիտարկի մի R առնչություն և ստուգի, որ այն համարժեքություն է, անպայման չէ, որ նա կառուցի (ֆորմալ) համարժեքության դասեր, բայց նա անպայմանորեն պետք է որոշի բազմության՝ դասերի տրոհման կերպը:

Օրինակ՝ հաշվենք, թե քանի՞ հնարավոր բառեր (նաև անիմաստ) կարելի է կազմել ***կամակատար*** բառի տառերի հնարավոր բոլոր տեղափոխումներով:

Պատկերացնենք, որ կրկնվող կ և ա տառերն իրարից տարբեր են և կամակատար բառը գրառենք այսպես.

կ$_1$ ա$_1$ մ ա$_2$ կ$_2$ ա$_3$ տ ա$_4$ ր (1. 3. 1)

R առնչությունը (1. 3. 1)-ից ստացվող բոլոր հնարավոր բառերի S բազմության վրա սահմանենք այսպես. երկու բառ կկոչենք համարժեք, եթե դրանցում կա գոնե երկու նույն տառ: Այդ դեպքում S բազմությունը կտրոհվի համարժեքության դասերի, որի տարրերի քանակը հենց խնդրի պատասխանն է:

Հիմնարարության սկզբունքը: Այս սկզբունքը ներմուծվել է Ա.Գ. Մորդկովիչի կողմից և վերաբերում էր մաթեմատիկայի առարկայական ուսուցչի (հիմնական դպրոց, ավագ դպրոց) մասնագիտական-մանկավարժական (մաթեմատիկամեթոդական) պատրաստմանը: Բնական է, որ հիմնարարության սկզբունքը՝ այն տեսքով, որ Մորդկովիչն առաջարկում է մաթեմատիկայի առարկայական ուսուցման դեպքում, բնավ կիրառելի չէ (կամ չափազանց մասամբ է կիրառելի) տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի մաթեմատիկական պատրաստման դեպքում: Բանն այն է, որ տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի մասնագիտական-մաթեմատիկական պատրաստումը բնավ էլ մաթեմատիկական պատրաստում չէ: Մեր հետազոտության նպատակների տեսակետից, մենք միայն կխոսենք հիմնարարության սկզբունքի մասին՝ կոմբինատորիկայի ուսումնասիրության համատեքստում:

Այդ համատեքստում մենք հիմնարարության սկզբունքը կհասկանանք այսպես. «կոմբինատորիկա» մոդուլի կառուցումը պետք է սկսել դրա հիմքերից՝ առանձնացնելով այդ մոդուլի հիմնական կառույցները, հասկացություններն ու նյութի կառուցումը կազմակերպել այդ կառույցների և հասկացությունների տրամաբանական բացազատմամբ՝ մաթեմատիկական գիտելիքների համակարգի մեջ դրանց կոնկրետացմանը զուգընթաց: Այսպես կոմբինատորիկայի հիմնական հասկացությունների (միացություններ, կարգավորություններ, զուգորդություններ) ներմուծումից առաջ ներմուծվում է բազմությունների դեկարտյան արտադրյալ կառույցը, և ըստ դրա ձևակերպվում են բազմապատկման և գումարման օրենքները:

Այս տեսակ մոտեցման դեպքում հիմնարարության սկզբունքը չի պարզունականացնում բուն (միայն) մաթեմատիկական պատրաստման դեպքում Մորդկովիչի առաջարկած սկզբունքը, այլ էապես լրացնում է այն՝ տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի մաթեմատիկական պատրաստման համատեքստում:

Պարուրաձևության սկզբունքը: Այս սկզբունքն առաջարկվել է Ջ. Բրուների [26] կողմից և, ըստ էության, ուսուցման շարունակականության, հաջորդականության և բազմաստիճանության միավորումն է մի ամբողջական սկզբունքի մեջ: Ըստ այդ սկզբունքի՝ հասկացությունների ուսուցումը պետք է սկսել ամենապարզ մոտեցումով և ապա անդրադառնալ դրան՝ կոգնիտիվ զարգացման յուրաքանչյուր մակարդակում (պարույրի հաջորդ նույն տեղը): Սա լավ համաձայնեցվում է SOLO մոդելի լոկալ ցիկլերի հետ:

Տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչին կոմբինատորիկայի տարրեր ուսուցանելու դեպքում մենք պարուրաձևության սկզբունքը լրացնում ենք ***հակադարձ պարույրի սկզբունքով***, ըստ որի՝ որևէ հասկացության ուսուցման պարույրի վերջին կետից պետք է վայրընթաց պրոյեկտում կատարել մինչև սկիզբ:

Այլ կերպ ասած, եթե ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրի «Կոմբինատորիկա» մոդուլի ուսուցման արդյունքում ուսանողը հասել է էական (SOLO) օբյեկտ-սխեմա (APOS), ռեֆլեքսիվ վերացարկում (Պիաժե) մակարդակին, ապա նա չպետք է մոռանա, որ ինքը տարրական դպրոցի ապագա ուսուցիչ է և պետք է այդ մակարդակից համայնապատկերային ռեֆլեքսիա կատարի և պարուրաձև իջնի կրտսեր դպրոցականի «մակարդակի»:

Ենթադրենք՝ նա հասել է «միացություն» հասկացության ընկալման (ըմբռնման) ամենաընդհանուր մակարդակի՝ «Կան k տիպի օբյեկտներ՝ $i_1, i_2, \cdots, i_k$ և կան e խմբերը՝ $j_1, j_2, \cdots, j_e$ մաքսիմալ թվերով: Այդ դեպքում այդ օբյեկտները նշված խմբերի բաժանելու որևէ ձևը կոչում են միացություն»:

Ըստ հակադարձ պարույրի սկզբունքի տարրական դպրոցի ապագա ուսուցիչը պետք է կարողանա այդ հասկացությունը պրոյեկտել տարրական դպրոցի «Մաթեմատիկա» դասընթաց՝ կոնկրետ առարկայական օբյեկտների նկատմամբ գործողությունների ձևով, օրինակ՝ «Կա երեք վարդ (i_1) և երկու մեխակ (i_2), և կան երեք ծաղկամաններ (j_1, j_2, j_3) Կրտսեր դպրոցականին առաջարկվում է դասավորել այդ վարդերը և մեխակները ծաղկամանների մեջ տարբեր ձևերով»:

Շարունակականության սկզբունքը: Դիդակտիկայում շարունակականությունը մեկնաբանվում է որպես սկզբունք, ըստ որի գիտելիքների, կարողությունների և հմտությունների ձևավորումը պետք է իրագործվի այնպիսի հաջորդայնությամբ, որպեսզի ուսումնական նյութի յուրաքանչյուր տարր (միավոր, բաժնեմաս) ***տրամաբանորեն*** կապվի մյուս տարրի հետ, այն է՝ ուսումնասիրվող հաջորդ տարրը հենվի նախորդի վրա, և, միաժամանակ, նոր (ապագա) ուսումնասիրվողի հիմք դառնա:

SOLO մոդելի և վիգոտսկյան պատմական-մշակութային տեսության շրջանակներում «Շարունակականություն» կատեգորիան ավելի լայն իմաստ է ձեռք բերում՝ որպես զարգացման (և ուսուցման) տարբեր փուլերի միջև անհրաժեշտ կապ: Ըստ այդմ, ***շարունակականությունը զարգացման օրինաչափություն է, իսկ շարունակականության սկզբունքը՝ այդ օրինաչափության վրա հենված մանկավարժական պահանջ:***

Այս լայն մեկնաբանմամբ դիդակտիկայի այլ սկզբունքերը (համակարգվածություն, հաջորդայնություն, մատչելիություն, գիտականություն) դառնում են «Շարունակականություն» կատեգորիայի մանկավարժական պահանջներ՝ ձևակերպված որպես սկզբունքներ:

Այսպիսով, ուսուցման մեթոդական համակարգի տարբեր բաղադրիչների (Նպատակներ, բովանդակություն, մեթոդներ-ձևեր, միջոցներ) միջև կապերը տարբերվում են իրենց դինամիկ փոփոխությունների համատեքստում:

Այդ համատեքստում և «Կոմբինատորիկա» մոդուլի ուսուցման շրջանակներում շարունակականության սկզբունքը մեկնաբանվում է որպես մասնագիտական երկկողմ շարունակականություն՝ SOLO-ի ցիկլերի իմաստով, ավելի կոնկրետ՝ ՄՄ(ՏԿ) կրթական ծրագրում «Կոմբինատորիկա» մոդուլի հասկացություններն (ու փաստերը) ուսումնասիրվում են «Մաթեմատիկա-ՏԴՄԲՈՒՏՅ» դասընթացի համապատասխան հասկացությունների համայնապատկերում (բազմություններ, երկտեղ առնչություններ, ֆունկցիաներ, թվերի տեսության տարրեր), որի արդյունքում ուսանողը հասնում է կոգնիտիվ զարգացման էական աստիճանի. այնուհետև այդ էական աստիճանը տարրական դպրոցի «Մաթեմատիկա» դասընթացի կոմբինատորային մտածողության նախագործառնական փուլի հիմք է դառնում, այնուհետև այդ փուլը դառնում է հիմնական դպրոցի գործառնական փուլի հիմք և, ապա վերջինս դառնում է ավագ դպրոցի էական փուլի հիմք. վերջապես այս էական փուլը դառնում է բուհական ուսուցման նախագործառնական փուլի հիմք:

Այժմ դիտարկենք կոմբինատորային մտածողության զարգացման մանկավարժական պայմանները «Գիտելիք», «Գործունեություն», «Մտածողության ձևեր», «Իմանալ-հասկանալ» կատեգորիաների շրջանակներում:

Հատկապես կոմբինատորային մտածողության զարգացման տեսակետից «Գիտելիք» կատեգորիան մենք դիտարկում ենք կոնստրուկտիվիստական հարացույցում, ըստ որի «գիտելիքը պասիվ կերպով չի ստացվում զգացողությունների կամ հաղորդակցման միջոցով, ընդհակառակը՝ այն ակտիվ կառուցվում է բանական սուբյեկտի կողմից » [von Glasersfeld, 1995, էջ 51, Hal]: Կոնստրուկտիվիզմի կիրառումը կոմբինատորիկայի ուսուցման գործընթացում որոշակի առավելություններ ունի՝ ուսուցման արդյունքների ավելի իմաստավորվածություն, խնդիր լուծելու կարողությունների անկախություն:

Այնուամենայնիվ, ինստրուկտիվիզմի պրոյեկտումը գործնական-մեթոդական հարթություն առաջացնում է որոշակի խնդիրներ, և շատ մեթոդիստներ այն չեն ընդունում որպես նոր գիտելիքաբանություն (էպիստեմաբանություն՝ epistemdogy):

Մենք կհենվենք ավելի «պրագմատիկ» կոնստրուկտիվիզմի վրա: Բայց նախքան այդ համառոտ ներկայացնենք կոնստրուկտիվիզմի (արմատական կոնստրուկտիվիզմի) հիմնական դրույթները [von Glasersfeld):

- Առանցքայինը ինստրուկտիվիզմում այն է, որ անհատն ապրում է իր անձնային և սուբյեկտիվ փորձի (փորձառնությունների) աշխարհում:
- Անհատն է, որ իմաստ է վերագրում աշխարհին, և ոչ թե «արտաքին» աշխարհն է արտացոլվում (իմաստներ է առաջացնում) անհատի մեջ:
- Եթե նույնիսկ գոյություն ունի բացարձակ իրականություն, ապա բանական (իմացական) էակը երբեք էլ չի կարող իմանալ, թե ըստ էության ինչ է իրենից ներկայացնում այդ արտաքին աշխարհը:
- «Ճշմարտություն», «իսկություն» հասկացությունները կոնստրուկտիվիզմի մեջ փոխարինվում են «կենսունակություն», «կենսունակ է» հասկացությամբ:
- Անհատի կողմից կառուցվող գիտելիքը տեղին է միայն այդ անհատի համար, այն էլ որոշակի պայմաններում:

- Այն, ինչը հասկացվում է անհատի կողմից, ֆունկցիա է (կախված է) կոնկրետ իմաստից, կոնտեքստից և սովորողի ակտիվությունից:
- Սովորողը պարզապես չի պաշարում ինֆորմացիան, բայց նա կառուցում է դրա նախնական մեկնաբանություն՝ մինչև որոշակի մտային կառույցների կազմավորվելը:
- Անհատը կառուցում է «իրականության» նկատմամբ սեփական հայացք՝ փորձելով կառուցել որոշակի կարգ իր զգացողություններում ծագող ազդանշանների քաոսից:

Այս թվարկված դրույթները վերաբերում են արմատական (ռադիկալ) կոնստրուկտիվիզմին, բայց կան նաև կոնստրուկտիվիզմի այլ տարատեսակներ՝ սոցիալական, ֆիզիկական, էվոլյուցիոն, հետմոդեռն, ինֆորմացիա-մշակութային և այլն:

Մեր հետազոտության նպատակների տեսակետից, մենք դրանք կմիավորենք և կտարբերակենք երկու մեծ խումբ՝ ***ռադիկալ կոնստրուկտիվիզմ և սոցիալական կոնստրուկտիվիզմ:***

Ինչպես արդեն ասվեց, ռադիկալ կոնստրուկտիվիզմը պնդում է, որ յուրաքանչյուր իրականություն (գիտելիք) եզակի է անձնավորության տեսակետից:

Սոցիալական (կամ չափավոր) կոնստրուկտիվիզմը պնդում է, որ գիտելիքն իմաստունի ոչ միայն (ոչ այնքան) անձնային տեսակետից, այլև (և հատկապես) սոցիալական կոնտեքստում: Սոցիալական կոնստրուկտիվիզմի տեսակետից իրականությունը դիտարկվում է որպես սոցիոմշակութային գործունեության արդյունք: Մշակույթն առաջարկում է տարբեր տեսակի միջոցներ (գործիքներ), որոնց միջոցով կառուցվում են իմաստներ: Օրինակ՝ լեզուն (խոսքը), որն ապահովում է այնպիսի հաղորդակցություն, որի ընթացքում իմաստներ են ընտրվում:

Հզոր գործիք է նաև Վիգոտսկու զարգացման մերձակա գոտիները, որը սովորողի կողմից խնդիրն ինքնուրույն լուծելու դժվարության մակարդակի (զարգացման աքրդի մակարդակ) և ուսուցչի ղեկավարությամբ լուծել կարողանալու մակարդակի (զարգացման մերձակա մակարդակ) «տարբերությունն է»:

Հենվելով զարգացման մերձակա գոտիների տեսության վրա հատկապես կոմբինատորային մտածողության առումով), մենք առաջարկում ենք ուսուցման պրագմատիկ (չափավոր) կոնստրուկտիվիստական մոդել: Այդ մոդելում ընդունվում է, որ յուրաքանչյուր սովորող կառուցում է գիտելքիը իր անձնային փորձի հիման վրա, որ տարբեր սովորողների կառուցած գիտելիքները տարբեր են, բայց, որ ամենակարևորն է, չափավոր կոնստրուկտիվիզմի տեսակետից, այդ տարբեր գիտելիքներն ունեն միևնույն կառուցվածքը: Այդ միևնույն կառուցվածքը ապահովում է զարգացման մերձակա գոտիներով:

Մաթեմատիկական գիտելիքի յուրացման առումով, ուսուցանողի դերը սովորողի կոգնիտիվ գործընթացներին ուղղորդելու, դյուրինացնելու մեջ է: ԵՎ որպեսզի ուսուցանվողը ուղղորդվի դեպի որոշակի հասկացության կառուցելը, ուսուցանողը, հենվելով զարգացման մերձակա գոտիների վրա, ներխուժում է սովորողի մտածողության ձևի վրա: Այս դեպքում սովորողը դիտարկվում է որպես գիտելիքակիր սուբյեկտ:

Հասկացությունների կառուցումը հենվում է սուբյեկտի ***գործունեության*** վրա [44]: Գործունեությունը, ըստ Պ.Յա Գալպերինի, կազմված է երկու բաղադրիչներից՝ ***կողմնորոշող և կատարող***, ընդ որում, տարբերակվում են կողմնորոշողի երեք տեսակ:

Առաջին տեսակում սովորողի ուշադրությունն ուղղորդվում է դեպի «նմուշօրինակի արտաքին կողմը, դեպի գործողությունը և դրա արդյունքը»[71, էջ 22]: Այս տեսակում սովորողն ինքնուրույն՝ փորձերի և սխալմունքների միջոցով, գտնում է գործողության կատարման ճիշտ հիմքերը, ընդսմին՝ վերջնական մտային կառույցը ձևավորվում է դանդաղորեն և միշտ չէ , որ գիտակցվում է, իսկ ուսուցման արդյունքը կախված է սովորողի ինտելեկտուալ զարգացման մակարդակից: Կողմնորոշող այս տեսակը ընկած է ուսուցման ավանդական մեթոդիկաների հիմքում: Ըստ այդմ՝ առկա են ավանդական ուսուցման դժվարություններն և թերությունները:

Կողմնորոշման երկրորդ տեսակի դեպքում ուսուցանողն ինքն է առաջարկում ճիշտ գործողություններ կատարելու բոլոր անհրաժեշտ ձևերը, այսինքն՝ սովորողին առաջարկում է անսխալ գործողություններ կատարելու կողմնորոշիչների լրիվ համակարգը: Արդյունքում՝ ապահովում է գործողությունների անսխալ կատարում, ընդհանրության լայնույթ՝ քննադատորեն հասկանալու բարձր մակարդակով: Սակայն, այս տիպի ուսուցման դեպքում առաջանում են որոշակի դժվարություններ՝ սովորողի ինտելեկտուալ կարողությունների օբյեկտիվ հայտորոշում (դիագնոստիկա), հասկացությունների լիարժեք ձևավորմանն ուղղված անհրաժեշտ գործողություններ կատարելու մոտիվացիաների ի հայտ բերում և այլն:

Կողմնորոշման երրորդ տեսակն ուղղորդված է ոչ թե կոնկրետ գործողություն կատարելու պայմաններին, այլ ուսուցանվող նյութի կառուցման սկզբունքներին, այդ նյութի առանձին միավորներին, այդ միավորների միջև եղած առնչություններին: Երրորդ տեսակն ամենաարդյունավետն է զարգացնող ուսուցման առումով, բայց և ամենակարևորը իրականացնելին է:

Այսպիսով՝ ըստ Պ.Յա Գալպերինի՝ «նախկին հայտնի ուսուցման ձևերը, չնայած դրանց բազմազանությանը, նույն մեթոդի տարբերակներ են, նույն, որովհետև նոր գիտելիքներ ձեռք բերելու գործընթացում սովորողի մտային գործունեությունը անհրաժեշտ ուղղորդում չի ստանում» [43, էջ 467]: Ընդսմին, սովորողների ձեռք բերված արդյունքների իրարից տարբեր լինելը բացատրվում է սովորողների ընդունակությունների տարբերությամբ:

Այսպիսով, սովորողի՝ հասկացություններ յուրացնելու գործընթացը պետք է ***ուղղորդել-կազմակերպել***: Պ.Յա. Գալպերինը առանձնացրել է այդօրինակ կազմակերպման փուլեր, որոնց իրագործման արդյունքում առարկայական գործողությունը ձևափոխվում է, առներսվում և դառնում գործողության մասին միտք:

Առաջին փուլում ստեղծվում է ձևավորվող գործողության մոտիվային (դրդապատճառային) հիմք. «Իմացական հետաքրքրության խթանումը հնարավոր է այնպիսի փաստերի անսովոր համադրության միջոցով, որոնք սովորողին հայտնի էին այլ կողմերով և այլ զուգորդություններում: Պետք է սկսել ինչ-որ անսովոր, անհայտ բանից, որը կդառնա իմացական հետաքրքրության սկզբնակետ: Բայց հայտնին էլ պետք է ցույց տալ այլ տեսանկյունից, զարմանք առաջացնելու համար, իսկ զարմանքը ցանկացած ուսումնասիրության սկիզբն է» [43, էջ 383]:

Երկրորդ փուլում տեղի է ունենում նոր գործողություն կատարելու համար անհրաժեշտ ***պայմանների լրիվ համույթի*** ստեղծում: Դրանում առանձնացվում են գործողության նպատակը, ուսումնական արդյունքի մի նմուշ օրինակ, գործողության ձևը և այն անհրաժեշտ պայմանները, որոնց վրա պետք է ուղղորդվել՝ նպատակին հասնելու համար:

Երրորդ փուլը գործողությունների ձևավորումն է նյութական (կամ նյութականացված) հենքի վրա, ընդսմին՝ գործողությունը կտրվում է առարկայից և տեղափոխվում է բարձրաձայն խոսքի պլան: Գործողության ընդհանրացված բովանդակությունը, կտրվելով առարկաների կոնկրետ բովանդակությունից, վերածվում է վերացարկումի (աբստրակցիայի):

Չորրորդ (վերջին) փուլում բարձրաձայն խոսքը վերածվում է «թաքնված (ոչ բարձրաձայն)» խոսքի և արդյունքում ձևավորվում է համապատասխան իմացական (մենտալ) կառույց:

Հարելը (Harel) [109] տարբերակում է մաթեմատիկական գիտելիքի երկու տեսակ՝ «Հասկանալու ձևեր» և «Մտածելու ձևեր»: «Մարդու դատողությունները, օրինակ՝ մեկնաբանում, ենթադրությունների կատարում, հետևությունների կատարում, ապացուցում, բացատրում, կառուցազատում, ընդհանրացում, կիրառում, դասակարգում, խնդիրների լուծում» [108, էջ 3]:

Հասկանալու ձևերը վերաբերում են դատողությունների այն տեսակին, որը կիրառվում է կոնկրետ խնդրի մաթեմատիկական լուծման համար, լուծում, որը անձնավորության (սովորողի) կողմից կատարված իմացական գործողության կոգնիտիվ արդյունք է: Օրինակ՝ դիտարկենք խնդիր լուծելու իմացական գործողությունը: Սովորողի կողմից իրագործված անմիջական լուծումը հասկանալու մի ձև է, քանի որ այն խնդիրը լուծելու գործունեության կոգնիտիվ արդյունք է:

Մտածելու ձևերը վերաբերում են հասկանալու ձևերը որոշող (ղեկավարող) կառույցներին, այսինքն՝ դրանք իմացական գործողությունների բնութագրիչներ են և բխում են հասկանալու ձևերից: Օրինակ՝ որևէ խնդրի լուծման մոտեցումները («մասնավոր դեպքերի դիտարկում», «հանգույն խնդրի դիտարկում», «հակառակ ենթադրություն» և այլն) մտածելու ձևեր են: Մտածելու ձևերի առանձնահատկությունն այն է, որ դրանք կարելի է կիրառել ամենաբազմազան խնդիրներ լուծելիս:

ԳԼՈՒԽ 2

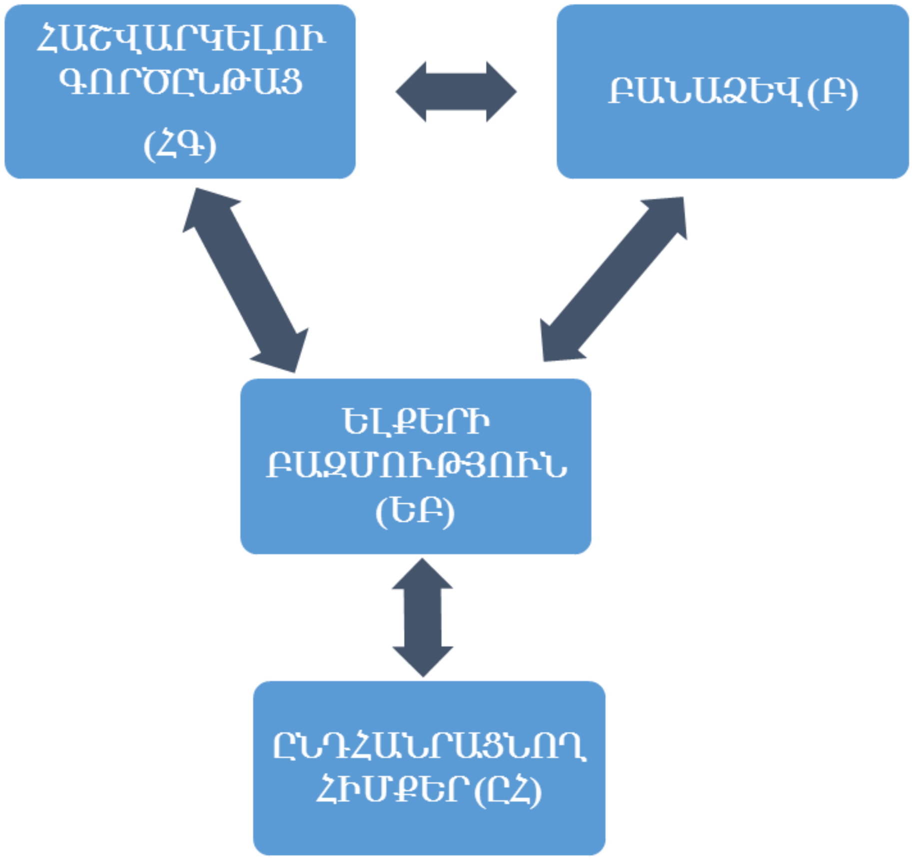
ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑԻ ԱՊԱԳԱ ՈՒՍՈՒՑՉԻ ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ՄՏԱԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԸ

2.1. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑԻ ԱՊԱԳԱ ՈՒՍՈՒՑՉԻ ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ՄՏԱԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ՄՈԴԵԼԸ

Ինչպես արդեն ասել ենք, կոմբինատորային ուսուցման հիմնախնդիրը լուրջ ուսումնասիրության կարիք ունի և՛ հանրակրթության մեջ, և՛ բուհում: Բանն այն է, որ կոմբինատորիկան հարուստ ներուժ ունի թե՛ խնդիրներ լուծելու համատեքստում, և թե՛ ստոխաստիկայում (հավանականություններ) և թե՛ համակարգչային գիտություններում` կիրառությունների առումով:

Ուսուցման տեսակետից, կոմբինատորային խնդիրները հավասարապես դժվար են թե՛ դպրոցականի (սկսած տարրական դպրոցից), և թե՛ ուսանողի համար. կոմբինատորային խնդիրը հեշտությամբ է ձևակերպվում (և հասկանալի է համարյա բոլորին, անպայման չէ` մաթեմատիկոսին), բայց դրա լուծումը, կարող է դժվար լինել` և՛ տարրական դպրոցի աշակերտի համար, և՛ ուսանողի (նույնիսկ մաթեմատիկա մասնագիտությունը ընտրած): Քննարկելով կոմբինատորային խնդիրներ լուծել ուսուցանելու հիմնահարցը, բոլոր հետազոտողները ([69], [26], [98], [103], [111]) նշում են ուսուցանելու տեխնոլոգիական կողմերը, բայց չեն ուսումնասիրում այն հարցը, թե ինչպես են սովորողները մտածում կոմբինատորային խնդիրներ լուծելիս և հետևաբար չեն քննարկում կոմբինատորային մտածողության զարգացման հիմնահարցը: Իսկ կոմբինատորային մտածողությունը (ձևավորում-զարգացումը) շատ ավելի կարևոր է, քան խնդիր (կամ խնդիրների դասեր) լուծել ուսուցանելը:

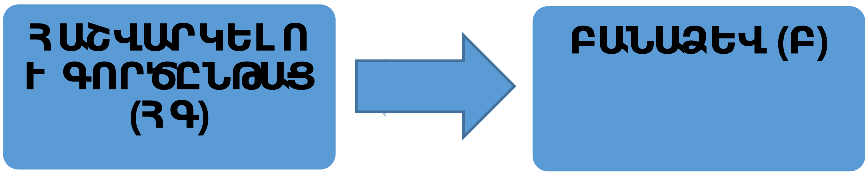
Այս ենթագլխում մենք կկատարենք կոմբինատորային մտածողության կոնցեպտուալ վերլուծություն և կառաջարկենք այդ մտածողության զարգացման մի մոդել՝ հենվելով միայն մեր փորձարարական աշխատանքների վրա: Մոդելը սովորողի մտածողության կոնցեպտուալ վերլուծություն է, մտածողություն, որը նա ցուցադրում է կոմբինատորային խնդիրներ լուծելիս: Այդ մոդելը արտաքինից պարզ տեսք ունի և կարելի է ներկայացնել այսպես.



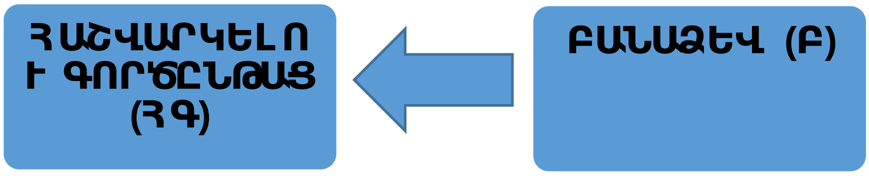
Նկ. 1

Այս մոդելում չորս հիմնական բլոկներ՝ (ՀԳ), (Բ), (ԵԲ) և (ԸՀ), փոխկապակցված են: Քննարկենք այդ փոխկապակցվածությունները:

1. ա)



բ)



1.բ) Այս միակողմանի կապը չափազանց կարևոր է կոմբինատորային խնդիրներ լուծելու կարողության զարգացման մեջ:

Հաշվարկելու գործընթացում ուսանողը ունենում է տարբեր արտահայտությունների թվային արժեքը հաշվելու անհրաժեշտություն: Այդ արտահայտությունը կարող է լինել ինչ-որ բանաձև, օրինակ՝ C_{10}^2, կամ, ասենք, թվաբանական գործողությունների ինչ-որ շարան, ասենք՝ 61-51: Խնդիրն այն է, որ այդօրինակ արտահայտությունները կապվեն որևէ կոնտեքստի հետ: Օրինակ՝ $C_7^2 \cdot C_9^2$ արտահայտությունը տարբեր իմաստ կարող է ունենալ՝

ա) հաշվել այդ արտահայտության արժեքը

$$C_7^2 \cdot C_9^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 756:$$

բ) Այն կարող է լինել բազմապատկման սկզբունքի արդյունք. սկզբում տրված յոթը տարբեր օբյեկտներից ընտրվում է երկուսը, ապա, անկախ ձևով, տրված ինը օբյեկտներից ընտրվում են երկուսը: Այդ դեպքում $C_7^2 \cdot C_9^2$ ցույց է տալիս, թե քանի հնարավոր ձևերով կարելի է ընտրել այդ երկու տեսակի օբյեկտներից կազմված զույգերը:

գ) Այն կարող է լինել հետևյալ խնդրի պատասխանը.

Ընկերներից մեկն ունի մաթեմատիկայի յոթ գիրք, իսկ մյուսը՝ 9 գիրք: Քանի՞ եղանակով նրանք կարող են իրար փոխանակել երկու գիրք:

Կոմբինատորային մտածողության զարգացման տեսակետից կարևոր է, որ, անկախ կոնտեքստից, սովորողը կարողանա $C_7^2 \cdot C_9^2$ արտահայտությանը տալ կոմբինատորային իմաստ, այլ ոչ թե պարզապես հաշվի դրա արժեքը:

1.ա) Այս ուղղությամբ պետք է հաշվարկելու գործընթացին վերագրել որևէ բանաձև: Օրինակ՝

Մաթեմատիկական խմբակի հինգ աշակերտներից երկուսը պետք է մասնակցեն՝ ենթադրենք մաթեմատիկայի օլիմպիադային: Քանի՞ եղանակով կարելի է ընտրել այդ երկուսին:

Լուծելու համար կարելի է պարզապես հաշվել այդ թիվը.դիցուք այդ աշակերտներն են՝ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5: Այդ դեպքում ընտրվող զույգերը կարելի է դասավորել այսպես.

$\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, P\{_1, P_4\}, \{P_1, P_5\}, \{P_2, P_3\}, \{P_2, P_4\}, \{P_2, P_5\}, \{P_3, P_4\}, \{P_3, P_4\}, \{P_4, P_5\}$:

Հաշվելով կարելի է համոզվել, որ որոնելի քանակը 10 է: Բայց ավելի կարևոր է, որ սովորողը այս հաշվելու գործընթացին կարողանա առնչել բանաձև, այն C_5^2-ն է: Կարող է նաև առնչել $\frac{5\cdot 4}{2}$ արտահայտությունը:

Ըստ էության՝ հաշվելու գործընթացին բանաձև առնչելը կոմբինատորային խնդրի լուծման բանալին է: Այստեղ հնարավոր է, որ հաշվելու տարբեր գործընթացներ բերեն միևնույն բանաձևին կամ հակառակը՝ տարբեր կոմբինատորային մոտեցումներ բերեն տարբեր (բայց արժեքով իրար հավասար) բանաձևերի: Օրինակ՝ եթե ցանկանում ենք գտնել, թե 5 տարբեր օբյեկտներ քանի՞ եղանակով է հնարավոր տեղավորել 10 անոթների մեջ, ապա խնդրի լուծման համար կարող են լինել տարբեր մոտեցումներ.

Ըստ բազմապատկման սկզբունքի այդ թիվը $10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=10^5$-ն է:

Բերենք ևս մի օրինակ, որը ավելի է ընդգծում բանաձև - հաշվելու գործընթաց առնչությունը:

Խնդիր 1 – Քննության հարցաշարը բաղկացած է 10 հարցից, քննական տոմսը պարունակում է 5 հարց, ընդ որում ուսանողը դրական ստանալու համար պետք է պատասխանի առնվազն 2 հարցի: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր դա անել:

Ճիշտ պատասխանը տրվում է հետևյալ բանաձևով.

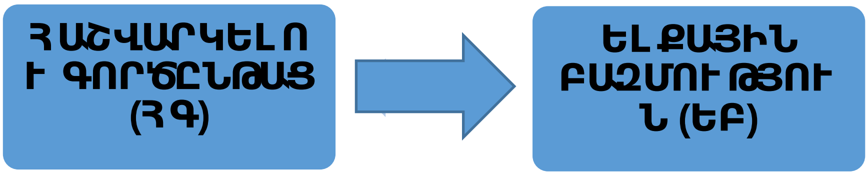
$$C_5^2\cdot C_5^3 + C_5^3\cdot C_5^2 + C_5^4\cdot C_5^1 + C_5^5\cdot C_5^0 :$$

Սովորաբար, նաև տրվում է սխալ պատասխանը՝

$$C_5^2\cdot C_5^3 :$$

Մեր աշխատանքի փորձարարական մասում մենք կվերլուծենք սխալ պատասխանի հիմքերը:

Այժմ քննարկենք ՀԳ և ԵԲ կապերը.



Այս կապերը նույնպես երկկողմանի են: Այստեղ կարևոր է, որ ուսանողը հասկանա հետևյալը. որևէ խնդրի լուծման համար կարելի է կիրառել հաշվարկելու գործընթաց, բայց կարելի է կառուցել նաև ելքերի բազմություն: Օրինակ՝ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. «Քանի՞ եռանիշ թիվ կարելի է կազմել 1, 2, 3 թվանշանների միջոցով»:

Այս խնդրի լուծման համար կարելի է կիրառել մի քանի հաշվելու գործընթացներ.

1. Բազմապատկման սկզունքը: Այս դեպքում ստանում ենք, որ այդ եռանիշ թվերի քանակը $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ է:

2. Նախ կազմենք այն եռանիշ թվերը, որոնք գրառվում են միայն մի թվանշանի (կամ 1-ի, կամ 2-ի, կամ 3-ի) միջոցով. դրանց քանակը 3 է: Ապա կազմենք եռանիշ թվեր, որոնք գրառվում են միայն երկու (1 և 2, 1 և 3, 2 և 3) թվանշանների միջոցով, դրանց քանակը 18 է: Վերջապես կազմենք եռանիշ թվեր, որոնք գրառվում են 1, 2, 3 թվանշանների միջոցով (առանց կրկնության), դրանց քանակը 6 է: Վերջնական պատասխանը կլինի՝ 3 + 6 + 18 = 27:

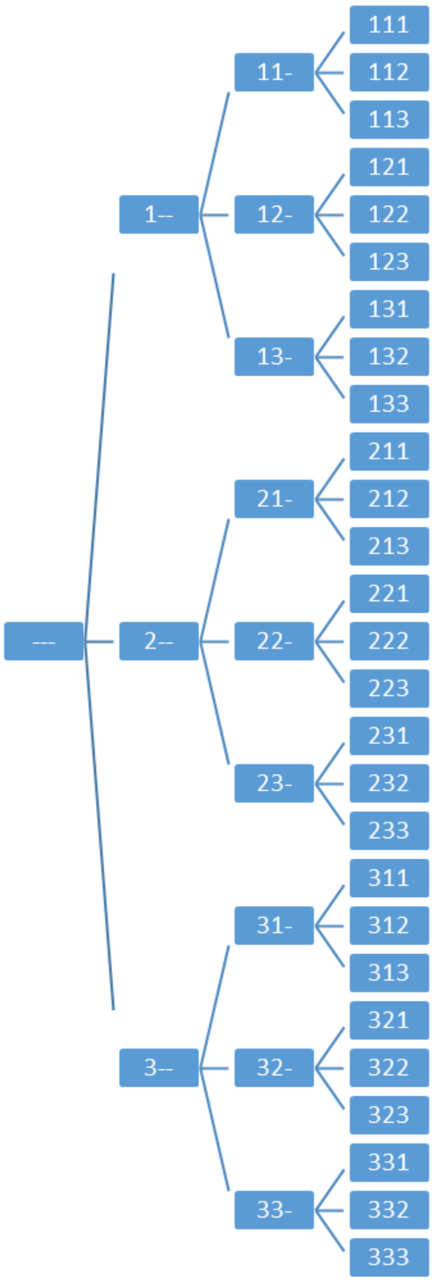
Ըստ այս երկու հաշվարկելու գործընթացների՝ կարելի է կազմել երկու տեսակի ելքերի բազմություն:

1) 1 թվանշանը կարելի է ընտրել երեք եղանակով, երբ ընտրվել է 1 թվանշանը, 2 թվանշանը նույնպես (և անկախ կերպով) կարելի է ընտրել երեք եղանակով, երբ ընտրվել են 1 և 2 թվանշանները, ապա 3 թվանշանը (անկախ կերպով) կարելի է ընտրել երեք եղանակով.

111	121	131	211	221	231	311	321	331
112	122	132	212	222	232	312	322	332
113	123	133	213	223	233	313	323	333:

Ընդամենը 27 եղանակ:

2) Այս ձևը նախներկայացնենք ծառակերպի տեսքով.



Հետևաբար, ելքերի բազմությունը կարելի է գրառել այսպես

111	222	333	3 ելք
112	121	211	18 ելք
221	212	122	
113	131	311	
311	311	133	
223	232	322	
332	323	233	
123		132	6 ելք

213	231	
312	321	

Ընդամենը` 27 ելք:

Այսպիսով, երկու տարբեր հաշվելու գործընթացներ բերում են նույն բազմությունը կազմող (բայց տարբեր ձևերով գրառված) ելքերի երկու բազմությունների:

Մյուս ուղղությունը` ելքերի բազմությունից ելնելով, ուսանողը հանգում է հաշվարկելու գործընթացի: Ասենք, ուսանողը կարող է կազմել ելքերի բազմություն ըստ 1. մոտեցման: Այդ դեպքում նա կարող է հանգել $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ հաշվելու գործընթացին: Եթե ուսանողը ընտրել է 2. ելքերի բազմությունը, ապա նա կարող է հանգել $3+6+18=27$ հաշվելու գործընթացին:

Ելքերի բազմություն կազմելու կարևորագույն կողմը հետևյալն է.

Չնայած այն բանին, որ ելքերի բազմության տարրերի քանակը ցույց է տալիս խնդրի լուծումը, ուսանողը չկարողանա (կամ չցանկանա) կազմել այդ բազմությունը, հատկապես, երբ այդ բազմության տարրերի քանակը «չափազանց մեծ է»: Այստեղ էականն այն է, որ կատարվի վերացարկում. ոչ թե կազմվի այդ բազմությունը, այլ այն մտովի պատկերացվի:

Ելքերի բազմությունների կազմումը, դրանց տարրերի քանակների հաշվումը հատկապես կարևոր է ***եռադիրության*** սկզբունքի տեսանկյունից: Բանն այն է, որ տարրական դպրոցում կոմբինատորային խնդիրներ լուծելու միակ եղանակը ելքերի բազմության կազմումն է:

Ելքերի բազմություն - բանաձև կապը մենք քննարկել ենք նախորդ ենթագլխում:

Ընդհանրացող հիմքեր - (ՅԳ, Բ, ԵԲ) կապերը նպատակահարմար է քննարկել կոմբինատորային մտածողության ձևերից մեկի համատեքստում:

Կոմբինատորային մտածողության կարևոր բաղադրիչ է ***բազմությունահեն*** մտածողությունը. դա այնպիսի մտածողությունն է, երբ կոմբինատորային խնդիրներ լուծելիս հենվում են ելքերի բազմության վրա: Բանն այն է, որ «կոմբինատորային մտածողություն» հասկացությունը, որքան էլ այն ընկալելի լինի, սկզբունքորեն հնարավոր չէ սահմանել կամ տարանջատել այլ տեսակի (վերացական, ալգորիթմական, տարածական և այլն) մտածողության ձևերից: Բայց դրա բաղադրիչները կարելի է առանձնացնել ուսանողի մաթեմատիկական-կոմբինատորային գործունեության արդյունքները դիտարկելիս: Այսպիսով, երբ խոսք է գնում ուսանողի բազմությունահեն կոմբինատորային մտածողության մասին, ապա այն վերաբերում է կոմբինատորային խնդիրներ լուծելու գործընթացում ուսանողի՝ գրավոր կամ բանավոր ձևով արտահայտած այն ակտիվությանը, որն արտահայտվում է ելքերի բազմության ձևով:

Որոշի՛ր ելքային բազմության տարրերի

↓

Որոշի՛ր՝ ինչ հավաքածուներ (ենթաբազմություններ) պետք է կազմել.

↓

Էակա՞ն է արդյոք տարրերի

Այո՛, էական		**Ո՛չ, էական չէ**
Ինչպե՞ս են առնչվում		**Ինչպե՞ս են առնչվում n-Á¨**
Եթե $k<n$, ապա ունենք առանց կրկնության կարգավորություն n տարրից k-ական	**Եթե $k=n$, ապա ունենք առանց կրկնության տեղափոխություն n տարրից k-ական**	**Եթե $k<n$ կամ $k=n$, ապա երկու դեպքում էլ ունենք առանց կրկնության զուգորդություն n տարրից k-ական**
$A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$P_n=n!$	$C_n^k=\dfrac{A_n^k}{k!}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Ստուգի՛ր ստացված հավաքածուներն ըստ

Հավաքածուներն իրարից տարբերվում են տարրերի կազմով և տարրերի կարգով: Յուրաքանչյուր տարր հավաքածուում հանդիպում է միայն մեկ անգամ	**Հավաքածուի տարրերի քանակը համընկնում է ելքային բազմության տարրերի քանակի հետ: Հավաքածուները կազմությամբ նույնն են, բայց տարբերվում են կարգով: Յուրաքանչյուր**	**Հավաքածուներն իրարից տարբերվում են միայն կազմով. կարգը էական չէ: Յուրաքանչյուր տարր հավաքածուում հանդիպում է միայն մեկ անգամ**

Ընդհանրացնող հիմքերի դեպքում դա սկսվում է ելքերի բազմության տարրերի քանակի որոշումից (ասենք այդ քանակը հավասար է n-ի): Այնուհետև որոշվում է, թե՞ այդ ելքային բազմությունից ինչ օբյեկտներ (հավաքածու՝ կարգավորյալ կամ ոչ կարգավորյալ՝ ենթաբազմություն) է ընտրվում և ինչի է հավասար այդ օբյեկտների քանակը: Երրորդ քայլում որոշվում է՝ արդյոք այդ հավաքածուում տարրերի հաջորդականությունն էակա՞ն է, թե՞ ոչ: Չորրորդ քայլում որոշվում է, արդյոք այդ հավաքածուում տարրերը կրկնվո՞ւմ են, թե՞ ոչ: Եվ վերջապես որոշվում է, թե ինչպես են առնչվում n-ը և k-ն $(n=k, n>k)$:

Ներկայացնենք ասվածը տրամագրի տեսքով.

Կարելի է ասել, որ կոմբինատորիկայի խնդիրներին վերաբերող հիմնական և տիպական գործողությունները (օպերացիաները) հետևյալներն են.

1. ***տեղափոխությունների կազմում***, այն է՝ տրված բազմության տարրերը որոշակի կարգով (հերթականությամբ) դասավորում,
2. ***կարգավորությունների կազմում***, այն է՝ տրված բազմության կարգավորյալ հավաքածուների անջատում,
3. ***զուգորդությունների կազմում***, այն է՝ տրված բազմության որոշակի ենթաբազմությունների անջատում:

Կոմբինատորային խնդիրների լուծման համար օգտագործում են բանաձևեր, որոնք հենվում են երկու ***կանոնի*** վրա. ***«գումարման(գումարի) կանոն», «բազմապատկման (արտադրյալի) կանոն»:***

1. Գումարման կանոնը. Եթե x ***տարրը կարելի է ընտրել*** k ***եղանակով, իսկ*** y ***տարրը՝*** m ***եղանակով, ապա «կամ*** x ***-ը, կամ*** y ***-ը» ընտրությունը կարելի է իրագործել*** $k+m$ ***եղանակով:***

Ընդհանուր դեպքում՝ եթե x_1 տարրը կարելի է ընտրել k_1 եղանակով, x_2-ը՝ k_2 եղանակով և այլն, x_p-ն՝ k_p եղանակով, ապա «կամ x_1, կամ x_2, ..., կամ x_p» ընտրությունը կարելի է իրագործել $k_1+k_2+k_3+\ldots+k_p$ եղանակով:

Գումարի կանոնը բխում է հետևյալից.

Եթե ունենք $E_1, E_2, \cdots, E_p$ վերջավոր բազմություններ, որոնք զույգ առ զույգ չեն հատվում, ապա $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots E_p$ բազմության տարրերի քանակը հավասար է այդ բազմություններից յուրաքանչյուրի տարրերի քանակի գումարին՝

$$n(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots E_p) = n(E_1) + n(E_2) + n(E_3) + \cdots + n(E_p):$$

(2. 1. 1)

2. ***Արտադրյալի կանոնը. Եթե*** x ***տարրը կարելի է ընտրել*** k ***եղանակով, և եթե յուրաքանչյուր այդպիսի ընտրության դեպքում*** y ***տարրը կարելի է ընտրել*** m ***եղանակով, ապա*** (x, y) ***զույգը կարելի է ընտրել*** $k \cdot m$ ***եղանակով:***

Ընդհանուր դեպքում՝ եթե x_1 տարրը կարելի է ընտրել k_1 եղանակով, իսկ յուրաքանչյուր այդպիսի ընտրության դեպքում x_2 տարրը կարելի է ընտրել k_2 եղանակով, և ապա յուրաքանչյուր այդպիսի x_1, x_2 ընտրությունների դեպքում x_3 տարրը կարելի է ընտրել k_3 եղանակով և այլն, վերջապես՝ բոլոր $x_1, x_2, \cdots, x_{p-1}$ ընտրություններից հետո x_p տարրը կարելի է ընտրել k_p եղանակով, ապա $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ հավաքածուն կարելի է ընտրել $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_p$ եղանակով:

Ընդհանուր դեպքում, արտադրյալի կանոնն ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի միջոցով:

3. Օրինակներ.

3.1. *Քանի՞ վեցանիշ թիվ կարելի է կազմել 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 թվանշանների միջոցով, ընդ որում՝ այդ թվերից յուրաքանչյուրում ցանկացած երկու հարևան թվանշաններ պետք է լինեն իրարից տարբեր:*

Լուծում. Ցանկացած վեցանիշ թիվ ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6} = 10^5 \cdot x_1 + 10^4 \cdot x_2 + 10^3 \cdot x_3 + 10^2 \cdot x_2 + 10^1 \cdot x_1 + x_6 : \quad (2.\ 1.\ 2)$$

(2. 1. 2) տեսքի յուրաքանչյուր թվի համապատասխանեցնենք $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6)$ հավաքածուն՝ վեցյակը:

Այդ վեցյակում x_1-ը կարելի է ընտրել 7 ձևով. այն 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 թվանշաններից մեկն է: Եթե ընտրված է x_1-ը, ապա կարելի է ընտրել x_2-

ը 7 ձևով՝ այն 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 թվանշաններից այն է, որը տարբեր է ընտրված x_1 թվանշանից: Եթե ընտրվել են x_1-ը և x_2-ը, x_3-ը նույնպես կարելի է ընտրել 7 ձևով՝ այն 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 թվանշաններից մեկն է, ընդ որում՝ այն տարբեր է արդեն ընտրված x_2 թվանշանից: Շարունակելով այս դատողությունները՝ ստանում ենք, որ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6))$ հավաքածուում և՛ x_1-ը, և՛ x_2-ը, և՛ x_3-ը և՛ x_4-ը, և՛ x_5-ը, և՛ x_6-ը կարելի է ընտրել 7 եղանակով (ձևով), ուստի, ըստ արտադրյալի կանոնի՝ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$վեցյակը կարելի է ընտրել 7 · 7 · 7 · 7 · 7 · 7 = 7^6 եղանակով:

3.2. Բազմության ենթաբազմությունների քանակը. Քանի՞ ենթաբազմություն ունի n (հատ) տարր պարունակող բազմությունը (դատարկ բազմությունը նույնպես ենթաբազմություն է): Այս հարցին պատասխանելու համար, նախնկատենք, որ՝

- եթե A բազմությունն ունի մեկ տարր՝ $A=\{a_1\}$, ապա դրա ենթաբազմություններն երկուսն են՝ Ø-ը և հենց $\{a_1\}$-ը,
- եթե բազմությունն ունի երկու տարր՝ $A=\{a_1, a_2\}$, ապա դրա ենթաբազմությունները չորսն են՝ Ø-ը, $\{a_1\}$-ը, $\{a_2\}$-ը և $\{a_1, a_2\}$-ը,
- եթե բազմությունն ունի երեք տարր՝ $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, ապա դրա ենթաբազմություններն ութն են՝ Ø-ը, $\{a_1\}$-ը, $\{a_2\}$-ը և $\{a_3\}$-ը $\{a_1, a_2\}$-ը, $\{a_1, a_3\}$-ը, $\{a_2, a_3\}$-ը և $\{a_1, a_2, a_3\}$-ը:

Այսպիսով՝

եթե $n=1$, ապա ենթաբազմությունների քանակը 2 = 2^1 է,
եթե $n=2$, ապա ենթաբազմությունների քանակը 4 = 2^2 է,
եթե $n=3$, ապա ենթաբազմությունների քանակը 8 = 2^3 է:

Ընդհանուր դեպքում, եթե A բազմությունն ունի n (հատ) տարր՝ $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, ապա վարվենք այսպես.

A-ի յուրաքանչյուր ենթաբազմության համապատասխանեցնենք մի $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ n-յակ, որում $x_i=0$, եթե $a_i \notin A$ և $x_i=1$, եթե $a_i \in A$ $i=1, 2, \cdots, n$: Օրինակ՝ $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}\,(n=5)$ բազմության դեպքում

$(1, 0, 0, 1, 1)$ հնգյակը նշանակում է, որ A-ի ենթաբազմությունն այնպիսին է, որ $a_1 \in A, a_2 \in A, a_3 \in A, a_4 \in A, a_5 \in A,$ այսինքն՝ այն $\{a_1, a_4, a_5\}$-ն է:

Վերը նշված համապատասխանության դեպքում A-ի յուրաքանչյուր ենթաբազմության կհամապատասխանեցվի $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ տեսքի միակ n-յակ՝ կազմված 0-ներից և 1-երից:

Հակառակը՝ 0-ներից և 1-երից կազմված յուրաքանչյուր $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ n-յակի կհամապատասխանեցվի մի ենթաբազմություն: Օրինակ՝ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ բազմության դեպքում $(0, 0, 0, 1, 1)$ հնգյակին կհամապատասխանեցվի A-ի $\{a_4, a_5\}$ ենթաբազմությունը, իսկ $(0, 0, 0, 0, 0)$ հնգյակին՝ ∅-ը:

Այսպիսով՝ առկա է փոխմիարժեք համապատասխանություն A-ի ենթաբազմությունների և $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ տեսքի (0-ներից և 1-երից կազմված) n-յակների միջև, այսինքն կա A-ի այնքան ենթաբազմություն, որքան կա $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ տեսքի n-յակ: Բայց, $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ տեսքի n-յակում $x_1, x_2, \cdots, x_n$-երից յուրաքանչյուրը կարելի է ընտրել երկու եղանակով՝ կամ 1, կամ՝ 0: Ուստի, ըստ բազմապատկման կանոնի, $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ n-յակների քանակը (կամ որ նույնն է A բազմության ենթաբազմությունների քանակը) կլինի՝

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ հատ արտադրիչ}} = 2^n:$$

3.3. Նետում են երկու զառ: Քանի՞ ձևով կարող են դրանք «բացվել» այնպես, որ բացվածների վրա միավորների գումարը լինի զույգ թիվ:

Լուծում. Զառերը նետելու արդյունքը գրառենք (x_1, x_2) զույգի տեսքով, որում x_1-ը առաջին զառի, իսկ x_2-ը՝ երկրորդ զառի վրա բացված միավորն է: $x_1 + x_2$ գումարը կլինի զույգ երկու դեպքում՝

ա) x_1-ը զույգ է և x_2-ը զույգ է:

x_1-ը զույգ լինելու երեք տարբերակ (երեք ընտրություն) կա՝ $x_1=2$, $x_1=4$, $x_1=6$: Դրանցից յուրաքանչյուրի համար x_2-ը կարելի է ընտրել երեք եղանակով՝ $x_2=2$, $x_2=4$, $x_2=6$: Ուստի, ըստ արտադրյալի կանոնի, կա $3\times3=9$ եղանակ (x_1, x_2) հավաքածուի ընտրության:

բ) x_1-ը կենտ է և x_2-ը կենտ է:

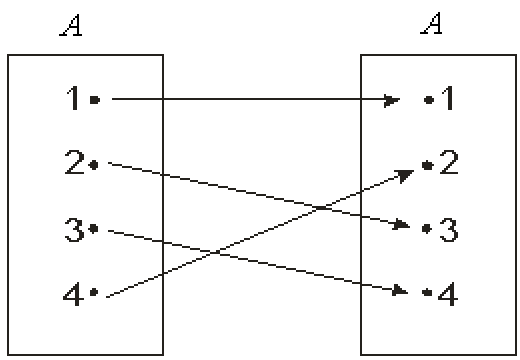
x_1-ը կենտ ընտրելու երեք եղանակ կա՝ $x_1=1, x_1=3, x_1=5$ և, ապա x_2-ը կենտ ընտրելու երեք եղանակ կա՝ $x_2=1, x_2=3, x_2=5$: Ուստի ըստ արտադրյալի կանոնի (x_1, x_2) զույգի ընտրության $3\times3=9$ եղանակ կա: Քանի որ $x=(x_1, x_2)$ տարրը (x_1-ը զույգ, x_2-ը զույգ) ընտրվում է 9 եղանակով, իսկ $y=(x_1, x_2)$ տարրը (x_1-ը կենտ, x_2-ը կենտ) ընտրվում է 9 եղանակով, ապա, ըստ գումարի կանոնի՝ «կամ x, կամ y» ընտրությունը կիրագործվի 9 + 9 = 18 եղանակով:

ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐԻԿԱՅԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

1. Սահմանում. ***Որևէ վերջավոր բազմության տեղադրություն կոչում են այդ բազմության՝ ինքն իր վրա՝ յուրաքանչյուր փոխմիարժեք արտապատկերումը:***

Սովորաբար տեղադրությունը տրվում է այսպես. մի տողում փակագծերի մեջ գրառվում է (թվարկվում է) տրված բազմության տարրերը, ապա այդ տողի տակ գրառվում են թվարկված տարրերից յուրաքանչյուրին այդ տեղադրությամբ համապատասխանեցված տարրերը:

Օրինակ՝ $A=\{1, 2, 3, 4\}$ բազմության հետևյալ տեղափոխությունը՝



կգրառվի այսպես.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}:$$

$E=\{a, b, c\}$ բազմության բոլոր տեղափոխությունները կլինեն`

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}:$$

Այս օրինակ գրառման դեպքում, երբ վերևի տողն անփոփոխ է, տեղադրությունը կարելի է տալ` նշելով միայն ներքևի տողը:

Օրինակ` $A=\{1, 2, 3\}$ բազմության բոլոր տեղադրությունները կտրվեն հետևյալ գրառմամբ`

$$(123), \quad (132), \quad (213), \quad (231), \quad (312), \quad (321):$$

Հաշվենք n տարր ունեցող բազմության բոլոր տեղադրությունների թիվը. կնշանակենք P_n-ով: Մենք արդեն ստացել ենք, որ $P_3=6$:

5. Թեորեմ. ***n տարր ունեցող բազմության բոլոր տեղադրությունների թիվը (քանակը) հավասար է 1-ից մինչև n-ը ներառյալ բոլոր բնական թվերի արտադրյալին`***

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n: \qquad (2.\ 1.\ 3)$$

Օրինակ` $P_2=1\cdot 2=2,\ P_3=1\cdot 2\cdot 3=6,\ P_4=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$:

$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ արտադրյալը նշանակում են $n!$ (կարդացվում է էն ֆակտորիալ): Օրինակ` $4!=1\cdot 3\cdot 3\cdot 4=24, \quad 5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120, \quad 2!=1\cdot 2=2, \quad 1!=1$:

Հարմարության տեսակետից ընդունում են նաև $0!=1$:

Կոմբինատորիկայից խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է հստակորեն տարբերակել երկու դեպք, որոնց կկոչենք սխեմաներ:

Ենթադրենք պարկի մեջ դրված է n (հատ) քարտ, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա գրված է n տարր պարունակող որևէ E վերջավոր բազմության տարրի անվանումը, ընդ որում` բոլոր քարտերի վրա գրված են անվանումներ և տարբեր քարտերի վրա գրված են տարբեր անվանումներ: Քարտերը մեկ առ մեկ դուրս են հանվում պարկից, և քարտի վրա գրանցվում (գրվում) է նշված տարրի անվանումը:

• Եթե քարտը չի վերադարձվում պարկ, ապա այդպիսի (դուրս հանելու) գործողությունը կկոչենք ***առանց վերադարձնելու սխեմա***

• Եթե յուրաքանչյուր դուրս հանելուց և գրանցելուց հետո քարտը վերադարձվում է պարկ, ապա այդ գործառույթը կկոչենք ***վերադարձումով սխեմա***

Օրինակ՝ եթե $E=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, ապա հետևյալ գրառումները $(a,\ a,\ b)$, $(a,\ b,\ b,\ b,\ c)$, $(a,\ b,\ a,\ b,\ c,\ c,\ c)$ նշանակում են, որ իրագործվել է վերադարձումով սխեման:

Սույն հատվածում դիտարկվում է միայն առանց վերադարձնելու սխեման, ընդ որում մենք կօգտագործենք «հավաքածու» տերմինը ըստ ՀՀ-ի հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկա դասընթացներում ընդունված սահմանման (տես, օրինակ, [2]-ը, էջ 130, 131) *

ԿԱՐԳԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

6. Սահմանում. ***Առանց կրկնության կարգավորություն n տարրից k-ական կկոչենք n տարր ունեցող բազմության տարրերից կազմված յուրաքանչյուր k երկարության հավաքածու:***

Օրինակ՝ եթե $E=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, ապա $(2,\ 4,\ 8)$, $(4,\ 8,\ 2)$, $(2,\ 6,\ 4)$, $(2,\ 4,\ 6)$ հավաքածուներից յուրաքաչյուրը առանց կրկնության կարգավորություն է 4 տարրից 3-ական $(2,\ 4)$, $(2,\ 6)$, $(2,\ 8)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 6)$, $(4,\ 8)$, $(6,\ 2)$, $(6,\ 4)$, $(6,\ 8)$, $(8,\ 2)$, $(8,\ 4)$, $(8,\ 6)$ հավաքածուները առանց կրկնության բոլոր կարգավորություններն են 4 տարրից 2-ական, (2), (4), (6), (8) հավաքածուները բոլոր՝ առանց կրկնության կարգավորություններն են 4 տարրից 1-ական, իսկ $(2,\ 4,\ 6,\ 8)$, $(8,\ 6,\ 4,\ 2)$, $(4,\ 6,\ 2,\ 8)$ հավաքածուները առանց կրկնության կարգավորություններ են 4 տարրից 4-ական:

---

* Հաճախ, հավաքածու եզրույթի փոխարեն օգտագործում են «կարգավորյալ բազմություն» եզրույթը:

Բոլոր n տարրից k-ական կրկնության կարգավորությունների քանակը (թիվը) նշանակում են A_n^k-ով (A-ն լատիներենի Arrangemet – կարգավորություն բառի առաջին տառն է):

Օրինակ՝ արդեն ստացել ենք, որ $A_4^2 = 12$, $A_4^1 = 4$:

7. Թեորեմ. ***Առանց կրկնության n տարրից k-ական կարգավորությունների քանակը՝ A_n^k-ն, որոշվում (տրվում) է հետևյալ բանաձևով.***

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}: \qquad (2.\ 1.\ 4)$$

8. Օրինակներ.

8.1. 30 ուսանող ունեցող կուրսում պետք է ընտրել ավագ, նրա տեղակալ և ուսանողական խորհրդի անդամ: Քանի՞ եղանակով դա կարելի է անել:

Լուծում. Ելքային E բազմությունն ունի 30 տարր (դրանք այդ կուրսի ուսանողների անվանումներն են): Այդ 30 տարրից պետք է կազմել $(a,\ b,\ c)$ տեսքի հավաքածուներ, որում a-ն, b-ն, c-ն կարող են լինել և՛ որպես ավագ, և՛ որպես տեղակալ, և՛ որպես ուսխորհրդի անդամ՝ 30 տարրից յուրաքանչյուրը: Այսինքն՝ պետք է կազմել կարգավորություններ՝ առանց կրկնության 30 տարրից 3-ական: Ուստի որոնելի եղանակների քանակը կլինի՝

$$A_{30}^3 = 30\cdot 29\cdot 28 = 24360:$$

8.2. Քանի՞ եղանակով չորս պատանիներ կարող են պարի հրավիրել յոթ աղջիկների (յուրաքանչյուր պատանի կարող է հրավիրել միայն մի աղջկա):

Լուծում. Ընտրությունը կատարվում է աղջիկներից, ուստի ելքային E բազմությունն ունի 7 տարր (դրանք աղջիկների անվանումներ են): Այդ 7 տարրից պետք է կազմել (հրավիրել պարի) $(a,\ b,\ c,\ d)$ տեսքի հավաքածուներ, որում a-ն, b-ն, c-ն և d-ն կարող են լինել 7 տարրից (աղջիկներից) յուրաքանչյուրը: Այսինքն՝ կազմվում են կարգավորություններ՝ առանց կրկնության 7 տարրից 4-ական: Ուստի որոնելի եղանակների քանակը կլինի՝

$$A_7^4 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$$

ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

9. Սահմանում. ***Առանց կրկնության*** n ***տարրից*** n ***-ական տեղափոխություն կոչում են*** n ***տարր ունեցող բազմության տարրերից կազմված յուրաքանչյուր*** n ***երկարության հավաքածու, այլ կերպ ասած՝ առանց կրկնության*** n ***տարրից*** n ***-ական տեղափոխությունը պարզապես առանց կրկնության կարգավորությունն է՝*** n ***տարրից*** n ***-ական։***

Օրինակ՝ եթե $E=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, ապա $(a,\ b,\ c,\ d)$, $(b,\ c,\ d,\ a)$, $(c,\ d,\ a,\ b)$, $(d,\ a,\ b,\ c)$, $(b,\ c,\ a,\ d)$ հավաքածուներից յուրաքանչյուրն առանց կրկնության կարգավորություն է 4 տարրից 4-ական, իսկ $E=\{a,\ b,\ c\}$ եռքային բազմության համար $(a,\ b,\ c)$, $(a,\ c,\ b)$, $(b,\ a,\ c)$, $(b,\ c,\ a)$, $(c,\ a,\ b)$, $(c,\ b,\ a)$ հավաքածուները կլինեն առանց կրկնության բոլոր տեղափոխությունները 3 տարրից 3-ական։

Առանց կրկնության n տարրից n-ական տեղափոխությունների քանակը նշանակում են P_n -ով (լատիներեն Permutatione – տեղափոխություն բառի առաջին տառից)։

Քանի որ $P_n=A_n^n$, ապա, ըստ (7) բանաձևի

$$P_n=n(n-1)\cdot\ldots\cdot1=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n=n!\ : \qquad (2.\ 1.\ 5)$$

10. Օրինակ.

Քանի՞ հնգանիշ թիվ կարելի է կազմել 1, 2, 3, 4, 5 թվանշանների միջոցով, որոնցից յուրաքանչյուրը չի բաժանվում 5-ի, և որոնցից յուրաքանչյուրի թվանշաններն իրարից տարբեր են։

Լուծում. 1, 2, 3, 4, 5 թվանշաններից կազմված յուրաքանչյուր թիվ ունի $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ տեսքը, ընդ որում, ըստ խնդրի պայմանի՝ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 թվանշաններն իրարից տարբեր են։ $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ տեսքի թվին համապատասխանեցնենք $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5)$ տեսքի հավաքածու, որում a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 թվանշանները $E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ բազմությունից են և տարբեր են իրարից, ուստի այդ հավաքածուներից յուրաքանչյուրը տեղափոխություն է։ Այդպիսի տեղափոխությունների թիվը կլինի՝

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120:$$

Բայց, ըստ խնդրի պայմանի $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ թիվը չպետք է բաժանվի 5-ի, ուստի այն չպետք է լինի $\overline{a_1a_2a_3a_45}$ տեսքի: Բայց $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ տեսքի թվերից (որոնցում a_1, a_2, a_3, a_4 թվանշանները $E' = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ բազմությունից են և իրարից տարբեր են) կարելի է կազմել

$$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

եղանակով: Ուստի, խնդրի պայմանին բավարարող հնգանիշ թվերի քանակը կլինի`

$$P_5 - P_4 = 120 - 24 = 96:$$

Այնուհետև, կշարունակենք շարադրանքը առանց վերադարձնելու սխեմայում, բայց հետևյալ կերպ. պարկից հանվում է քարտը, գրանցվում է դրա անվանումը, և հանված քարտը դրվում է մեկ այլ պարկի մեջ:

11. Սահմանում. ***Առանց կրկնության n տարրից k-ական զուգորդություն կոչում են առանց վերադարձնելու սխեմայում երկրորդ պարկում k քայլ հետո առաջացած բազմությունը. այլ կերպ ասած` առանց կրկնության n տարրից k-ական զուգորդությունը n տարր ունեցող բազմության յուրաքանչյուր այն ենթաբազմությունն է, որը պարունակում է k տարր:***

Օրինակ` $E = \{a,\ b,\ c\}$ բազմության հենքի վրա կազմված *առանց կրկնության 3 տարրից 2-ական զուգորդությունները* կլինեն հետևյալ բազմությունները`

$$\{a,\ b\},\quad \{a,\ c\},\quad \{b,\ c\}:$$

n տարրից k -ական առանց կրկնության բոլոր զուգորդությունների թիվը նշանակում են C_n^k -ով (Լատիներեն Combination – զուգորդություն բառի առաջին տառով):

12. Դիտողություն. Կարգավորությունը տարբերվում է զուգորդությունից նրանով, որ կարգավորության մեջ էական է տարրերի ընտրության (գրառման) հերթականությունը` կարգը, իսկ զուգորդության մեջ էական չէ: Խիստ ասած` կարգավորությունը և զուգորդությունը տարբեր մաթեմատիկական օբյեկտներ են. կարգավորությունը բազմություն չէ, իսկ զուգորդությունը բազմություն է: Օրինակ` $E=\{a,\ b,\ c\}$ բազմության հենքի վրա կազմված $(a,\ b,\ c)$, $(a,\ c,\ b)$, $(b,\ a,\ c)$, $(b,\ c,\ a)$, $(c,\ a,\ b)$, $(c,\ b,\ a)$ օբյեկտներն իրարից տարբեր են. դրանք կարգավորություններն են, իսկ $\{a,\ b,\ c\}$, $\{a,\ c,\ b\}$, $\{b,\ a,\ c\}$, $\{b,\ c,\ a\}$, $\{c,\ a,\ b\}$, $\{c,\ b,\ a\}$ օբյեկտները նույնն են. դրանք a, b, c տարրերից կազմված բազմությունն է:

13. Թեորեմ. ***Առանց կրկնության n տարրից k -ական զուգորդությունների թիվը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.***

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}:$$

14. Օրինակներ.

14.1. Գրադարակին դրված է 14 գիրք` Անգլերեն – Հայերեն բառարանը և 13 գեղարվեստական գիրք: Քանի՞ եղանակով գրադարակից կարելի է ընտրել 3 գիրք, եթե`

ա) դրանց մեջ (անպայմանորեն) պետք է լինի բառարանը,

բ) անպայման չէ, որ լինի բառարանը,

գ) բառարանը չպետք է լինի:

Լուծում. ա) և գ) դեպքերում բառարանը կարելի է դնել մի կողմ, և մնացած 13 գրքերից ընտրել 2-ը: Պարզ է, որ այդպիսի ընտրությունների քանակը կլինի`

$$C_{13}^2=\frac{13!}{2!\cdot(13-2)!}=78:$$

բ) դեպքում ընտրությունը կատարվում է 14 գրքից ($n=14$), որոնցից պետք է ընտրել 3-ը ($k=3$), ուստի որոնելի քանակը կլինի`

$$C_{14}^3=\frac{14!}{3!\cdot(14-3)!}=364:$$

14.2. Դասարանում կա 16 տղա և 12 աղջիկ: Դասարանը կարգի բերելու համար պետք է ընտրել չորս տղա և երեք աղջիկ: Քանի՞ եղանակով կարելի է անել այդ ընտրությունը:

Լուծում. 16 տղայից 4-ը կարելի է ընտրել C_{16}^4 եղանակով. յուրաքանչյուր այդպիսի եղանակի դեպքում, 12 աղջկանից 3-ը կարելի է ընտրել C_{12}^3 եղանակով: Ըստ բազմապատկման կանոնի` որոնելի ընտրությունը կարելի է կատարել

$$C_{16}^4 \cdot C_{12}^3 = \frac{16!}{4!\cdot 12!} \cdot \frac{12!}{3!\cdot 9!} = 400400$$

եղանակով:

14.3. Գրադարակում կա 10 գիրք: Դրանցից պետք է ընտրել 4 գիրք այնպես, որ դրանում չլինի ոչ մի երկու հարևան գիրք:

Լուծում. Համարակալենք տրված գրքերն, օրինակ, ձախից աջ հերթականությամբ՝

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}:$$

Դիցուք դրանցից ընտրվել են $\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}\}$ գրքերը ($1 \le i_1, i_2, i_3, i_4 \le 10$):

Յուրաքանչյուր այդպիսի ընտրության համապատասխանեցնենք 1-երից և 0-ներից կազմված 10 երկարության հավաքածու՝ կարգավորյալ տասնյակ հետևյալ կերպ. այդ հավաքածուում i_1, i_2, i_3, i_4 տեղերում գրենք 1 թիվը, իսկ մնացած տեղերում՝ 0-ն:

Օրինակ, եթե ընտրվել են a_1, a_2, a_7, a_9 գրքերը, ապա այդ ընտրությանը համապատասխանեցվի (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) հավաքածուն, իսկ եթե ընտրել ենք a_3, a_5, a_{10} գրքերը, ապա այդ ընտրությունը կհամապատասխանեցվի (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) տասնյակը:

Ըստ խնդրի պայմանի՝ մեզ «հետաքրքրում են» 0-ներից և 1-երից կազմված այն տասնյակները, որոնցից յուրաքանչյուրում ոչ մի՝ իրար կողքի գրված 1-եր չկան (մենք, իհարկե, պետք է գտնենք այդպիսի տասնյակների թիվը): Այս հատկությամբ օժտված տասնյակը ձևավորենք այսպես.

սկզբում այդ տասնյակում գրառենք 6 հատ 0: Այդ դեպքում 1-երը կարելի է գրառել 7 տեղում՝ 5-ը 0-ների միջև, իսկ 2-ը՝ ծայրերում: Այդ 7 տեղում գրառված 1-երից պետք է ընտրել 4 հատը. դա կարելի անել C_7^4 եղանակով, ուստի որոնելի եղանակների թիվը կլինի՝

$$C_7^4 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35:$$

2. 2. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑԻ ԱՊԱԳԱ ՈՒՍՈՒՑՉԻ ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ՄՏԱԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՆ

Վերլուծելով ՄՄ(ՏԿ) բակալավրի կրթական ծրագիրն ուսումնասիրող ուսանողի կոմբինատորային պատկերացումների ձևավորման գործընթացում առաջացած դժվարությունները՝ մենք եկել ենք այն եզրակացության, որ դրանց հիմքում ընկած են կոմբինատորային հիմնական հասկացությունների ձևավորման պայմանները: Այդ դժվարությունների մի ստվար մասն առնչվում է ուսանողի կողմից բազմությունների (և դրանց տարրերի) որոշակի հատկությունների ոչ լիովին հասկանալու հետ: Տրված բազմության հիման վրա տարբեր տեսակի միացությունների (հավաքածուների) կազմության սկզբունքները ուսանողի կողմից ըմբռնվում է ձևական մակարդակով:

Հենվելով մեր կողմից առաջադրված եռադիրության սկզբունքի՝ ավելի կոնկրետ՝ «բուհական ուսուցման իրագործում՝ տարրական դպրոցի «մաթեմատիկա» դասընթացի ուսուցման համատեքստում» ենթասկզբունքի վրա՝ մենք տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացման մեթոդիկան կառուցում ենք պրոպեդևտիկ հենքի վրա: Այդ պրոպեդևտիկայի իրականացման ընթացքում ուսանողը ձեռք է բերում բազմությունների հետ (նկատմամբ) գործառնելու հմտություններ, յուրացնում է «ելքային բազմություն», «հավաքածու» (ենթաբազմություն) հասկացությունները և դրանց միջև որոշակի առնչություններ: Այդ գործընթացի արդյունքում ուսանողը համոզվում է, որ հավաքածուները կարող են տարբերվել և՛ տարրերի քանակով, և՛ որակական կազմով՝ կրկնելիությամբ, կարգով (հաջորդայնությամբ):

Պրոպեդևտիկայի փուլը հնարավորություն է տալիս կողմնորոշվելու միացությունների տեսակների (կարգավորություններ, տեղափոխություններ, զուգորդություններ) ընտրության մեջ: Դրա շնորհիվ կոմբինատորիկայի հիմնական տեսակները հնարավոր է լինում դիտարկել մեկ ամբողջական համակարգում: Այդ համակարգի հիմքում դրվել են հետևյալ չորս պայմանները.

1. ելքային բազմության հատկությունները,
2. կազմվող հավաքածուների հատկությունները,
3. հավաքածուներ կազմելիս տարրերի կրկնության հնարավորությունները,
4. հավաքածուներում տարրերի կարգը (հաջորդայնությունը):

Ընդգծենք նաև, որ «կոմբինատորային մտածողություն» հասկացությունը հնարավոր չէ «հստակ» սահմանել, և մեր ատենախոսության մեջ ընտրել ենք այն ճանապարհը, որ առանձնացրել ենք դրա՝ վերը նշված բաղադրիչները:

Ըստ էության, այդ բաղադրիչներն ընկած են ուսումնառության մեթոդների (մեթոդիկաների) հիմքում: Իսկ ինչ վերաբերում է ուսուցման մեթոդիկաներին, ապա, ըստ այդ բաղադրիչների զատման, մենք առաջարկում ենք ուսուցման մեթոդիկաներ:

Հիմնական հարցը այդ մեթոդիկաների մշակման գործընթացում հետևյալներն էին. «ի՞նչ ձևերով, ի՞նչ սահմաններում կարելի է կազմակերպել ուսանողի կոմբինատորային մտածողության երեք հիմնական բաղադրիչների զարգացումը»:

Մեթոդիկան ամբողջական դարձնելու նպատակով դիտարկենք պայմաններից 3-րդի՝ «հավաքածուներ կազմելիս կրկնության հնարավորությունները» տեսական հիմքերը:

1. **Սահմանում:** n տարր ունեցող բազմության տարրերից կազմված յուրաքանչյուր k երկարության հավաքածու, որը կազմվում է վերադարձումով սխեմայով, կոչվում է ***կրկնությամբ կարգավորություն՝ n տարրից k-ական***:

Օրինակ՝ $E=\{a,b\}$ բազմության տարրերից կազմված ***2 տարրից 3-ական կրկնությամբ կարգավորությունները*** հետևյալներն են. (a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, b, a), (b, a, b), (b, a, a), (b, b, b):

Կրկնությամբ n տարրից k-ական բոլոր կարգավորությունների թիվը նշանակում են $\tilde{A}_n^k$-ով:

2. ***Թեորեմ***: *n տարրից k-ական` կրկնությամբ կարգավորությունների թիվը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.*

$$\tilde{A}_n^k = n^k : \qquad (2.\ 2.\ 1)$$

3. **Օրինակներ`**

3.1. Բնակարանն ունի չորս սենյակ` ննջասենյակ, խոհանոց, աշխատասենյակ, դահլիճ: Կան 6 տարբեր գույնի պաստառներ: Յուրաքանչյուր սենյակ պետք է պաստառապատել (ցանկացած գույնի) պաստառով: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր պաստառապատել բնակարանը:

Լուծում: Ելքային E բազմությունը, որից պետք է կատարել ընտրությունը, ունի 6 տարր (գույների անվանումները): E բազմությունից պետք է կազմել (a_1, a_2, a_3, a_4) տեսքի հավաքածուներ` $a_1$-ը ննջասենյակի գույնն է, $a_2$-ը` խոհանոցի, a_3-ը` աշխատասենյակի, $a_4$-ը` դահլիճի: Քանի որ գույները կարող են կրկնել (սենյակից-սենյակ), ապա (a_1, a_2, a_3, a_4)-ը կրկնությամբ ***կարգավորություն է 6 տարրից 4-ական***: Ուստի, ըստ (2. 2. 1) բանաձևի ($n=6, k=4$), որոնելի պաստառապատումների թիվը կլինի`

$$\tilde{A}_6^4 = 6^4 = 1296 :$$

3.2. Քանի՞ եռանիշ թիվ կարելի է կազմել 1, 5, 6, 7, 9 թվերով:

Լուծում: Յուրաքանչյուր եռանիշ թիվ ունի $\overline{a_1a_2a_3}$ տեսքը, որին կարելի է համապատասխանեցնել (a_1, a_2, a_3) հավաքածուն ($k=3$): Այդ հավաքածուում a_1, a_2, a_3 թվանշաններից յուրաքանչյուրը կարելի է ընտրել ելքային $E=\{1, 5, 6, 7, 9\}$ բազմությունից ($n=5$): Քանի որ a_1, a_2, a_3 թվանշանները կամայական են (կարող են նաև լինել նույնը), ապա (a_1, a_2, a_3) հավաքածուն կրկնությամբ կարգավորություն է 5 տարրից 3-ական: Ուստի որոնելի (եռանիշ թվերի) քանակը կլինի`

$$\tilde{A}_5^3 = 5^3 = 125 :$$

3.3. Դիցուք` $A=\{2, 4, 6, 8\}$ 4 տարր ունեցող բազմությունն է, $B=\{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ ` 6 տարր ունեցող բազմություն: Քանի՞ արտապատկերում կա A-ից B:

Լուծում: Դիցուք՝ f-ն արտապատկերում է A-ից B՝ $f: A \to B$: Նշանակենք 2-ին

$(2 \in A)$ համապատասխանեցված տարրը b_2-ով՝ $f(2) = b_2$, ինչպես նաև՝ $f(4) = b_4$ $f(6) = b_6$, $f(8) = b_8$, $(b_2 \in B, b_4 \in B, b_6 \in B, b_8 \in B)$: Այդ դեպքում f արտապատկերումը կտրվի (b_2, b_4, b_6, b_8) հավաքածուով, այսինքն՝ f արտապատկերմանը համապատասխանեցվում է $k = 4$ երկարության մի (b_2, b_4, b_6, b_8) հավաքածու: Հակառակը՝ ցանկացած (x_2, x_4, x_6, x_8) հավաքածու $(x_2 \in B, x_4 \in B, x_6 \in B, x_8 \in B)$ կհամապատասխանեցվի A-ից B մի f արտապատկերման հետևյալ կերպ՝

$$f: 2 \to x_2,\ f: 4 \to x_4,\ f: 6 \to x_6,\ f: 8 \to x_8:$$

Ուստի, A-ից B այնքան արտապատկերումներ կան, որքան (b_2, b_4, b_6, b_8) տեսքի հավաքածուներն են, որոնք կազմվում են ելքային $E = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ բազմության հենքի վրա $(n = 6)$:

Քանի որ (b_2, b_4, b_6, b_8) հավաքածուներում b_2, b_4, b_6, b_8 թվերը (կամ դրանցից մի քանիսը) կարող են լինել իրար հավասար (կրկնվել), ապա այդ տեսքի յուրաքանչյուր հավաքածու ***կրկնությամբ կարգավորություն է 6 տարրից 4-ական***: Ուստի այդպիսի հավաքածուների, կամ, որ նույնն է, A-ից B արտապատկերումների թիվը կլինի՝

$$\tilde{A}_6^4 = 6^4 = 1296:$$

ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՄԲ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Եթե ունենք ելքային $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ բազմությունը, ապա այդ բազմության **տեղափոխություն** (առանց կրկնության) կոչում ենք կամայական $(x_1, x_2, x_2, \cdots, x_n)$ տեսքի հավաքածուն, որում $x_1, x_2, \cdots, x_n$-երից յուրաքանչյուրը պատկանում է E բազմությանը, ընդ որում կամայական երկու՝ x_i և x_k $(i \neq k)$ տարրեր իրարից տարբեր են:

Օրինակ՝ $E = \{a, b, c\}$ բազմության համար (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a) հավաքածուներից յուրաքանչյուրը տեղափոխություն է: Նկատենք, որ այդ հավաքածուներից յուրաքանչյուրում a-ն (b-ն, c-ն) «հանդիպում է» մեկ անգամ՝ չի կրկնվում:

Սահմանենք **կրկնությամբ տեղափոխություն** հասկացությունը: Բնական է, որ դրանք պետք է լինեն հավաքածուներ, որոնցում ելքային բազմության տարրերը կրկնվում են: Որպեսզի կարողանանք ստանալ այդպիսի հավաքածուների թվի համար բանաձև, ներմուծենք հավաքածուի կազմ հասկացությունը: Նախ՝ մի օրինակ:

Եթե $E=\{a,\ b\}$, ապա (a, b, a, b, b), (a, a, b, b, b), (b, a, b, a, b) հավաքածուներն իրարից տարբեր են, բայց դրանցում կա մի ընդհանուր բան. a-ն կրկնվում է 2 անգամ, b-ն՝ երեք անգամ: Ասում են, որ այդ ***հավաքածուների կազմը*** նույնն է, նույնակազմ են: «Ճշգրտենք» այդ հասկացությունը:

Դիցուք՝ $E=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$-ը բազմություն է, իսկ $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_p)$-ն՝ այդ բազմության տարրերից կազմված հավաքածու $(b_1 \in E, b_2 \in E, \cdots, b_p \in E)$:

4. **Սահմանում:** Կասենք, որ $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ հավաքածուն ունի $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ կազմը, եթե դրանում a_1-ը «հանդիպում է» k_1 անգամ, a_2-ը՝ k_2 անգամ և այլն, a_n-ը՝ k_n անգամ:

Օրինակ՝ $E=\{a, b, c\}$ բազմության համար (a, b, a, a, b, c), (a, a, b, b, a, c), (b, c, a, a, b, a) հավաքածուներից յուրաքանչյուրն ունի $(3, 2, 1)$ կազմը, իսկ (a, b, b, b, b), (b, a, b, b, b), (b, b, a, b, b) հավաքածուներից յուրաքանչյուրը՝ $(1, 4, 0)$ կազմը:

5. **Սահմանում:** Տրված $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ կազմով յուրաքանչյուր հավաքածու կկոչենք $E=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ բազմության տարրերի՝*կրկնությամբ տեղափոխություն՝ a_1 տարրը k_1 անգամ, a_2 տարրը՝ k_2 անգամ և այլն, a_n տարրը՝ k_n անգամ:*

Օրինակ՝ $E=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ բազմության համար

$(a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4)$, $(a_1, a_1, a_2, a_2, a_1, a_2, a_1, a_3, a_3, a_4)$,

$(a_2, a_2, a_1, a_1, a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_1,\ a_4)$ հավաքածուներից յուրաքանչյուրը կրկնությամբ տեղափոխություն է՝ a_1-ը 4 անգամ, a_2-ը՝ 3 անգամ, a_3-ը՝ 2 անգամ, a_4-ը՝ 1 անգամ, a_5-ը՝ 0 անգամ:

Նկատենք, որ տրված կազմով որևէ կրկնությամբ տեղափոխությունից կարելի է ստանալ նույն կազմով այլ կրկնությամբ տեղափոխություններ:

Օրինակ՝ $E = \{a,\ b\}$ բազմության դեպքում (a, b, a, a, b), $(3, 2)$ կազմով կրկնությամբ տեղափոխությունից կառուցվում են նույն $(3, 2)$ կազմով այլ կրկնությամբ տեղափոխություններ՝ (b, a, b, a, a), (a, b, a, b, a), (b, b, a, a, a) և այլն:

a_1 տարրը k_1 անգամ, a_2 տարրը՝ k_2 անգամ և այլն, a_n տարրը՝ k_n անգամ բոլոր՝կրկնությամբ տեղափոխությունների քանակը նշանակում են այսպես.

$$P_m(k_1, k_2, \cdots, k_n)\ \ (m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n): \qquad (2.\ 2.\ 2)$$

7. **Թեորեմ**: ***Տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝***

$$P_m(k_1, k_2, \cdots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)}{k_1!k_2!\ldots k_n!}: \qquad (2.\ 2.\ 3)$$

Նախքան թեորեմն ապացուցելը դիտարկենք մի մասնավոր օրինակ՝ $E = \{a,\ b, c\}$ բազմության համար $(3,\ 2,\ 2)$ կազմի կարգավորությունները: Դիտարկենք այդպիսի մի կարգավորություն՝ (a, a, a, b, b, c, c): Այս հավաքածուի մեջ հանդիպող տառերը համարակալենք՝ $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2,\ c_1,\ c_2)$: Այս համարակալումով հավաքածուում բոլոր կոորդինատները պատկերացնենք իրարից տարբեր: Այդ՝ իրարից տարբեր $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ 7 (հատ) տարրերից կարելի է կազմել $P_7 = 7!$ առանց կրկնության կարգավորություն (տեղադրություն): Եթե ստացված 7! (հատ) կարգավորություններում ջնջենք տառերի ինդեքսները, կստանանք a, b, c տառերից կարգավորություններ՝ կրկնությամբ: Օրինակ՝ $(a_1, b_1, c_2, c_1, a_3,\ b_2,\ a_2)$ -ից կստացվի $(a, b, c, c, a,\ b,\ a)$ կրկնությամբ կարգավորությունը, իսկ $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3,\ c_1,\ c_2)$ -ից կստացվի $(a, b, a, b, a,\ c,\ c)$ կրկնությամբ կարգավորությունը: Ընդ որում՝ միևնույն կրկնությամբ կարգավորությունը կստացվի տարբեր (առանց կրկնության) կարգավորություններից՝ ինդեքսների ջնջումով: Օրինակ՝ (a, a, a, b, b, c, c) կրկնությամբ կարգավորությունը կստացվի $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ տառերից կազմված բոլոր այն (առանց կրկնության) կարգավորություններից, որոնցում առաջին երեք տեղերում a_1-ը, a_2-ը, a_3-ն են (գրված կամայական կարգով), չորրորդ, հինգերորդ տեղերում b_1-ը և b_2-ն են (գրված կամայական կարգով), իսկ վերցերորդ և յոթերորդ տեղերում c_1-ը և c_2-ն են (գրված կամայական կարգով): Բայց a_1, a_2, a_3 տառերից կարելի է կազմել 3! (հատ) կարգավորություն, b_1, b_2 տառերից՝ 2! (հատ) կարգավորություն և c_1, c_2 տարրերից՝ 2! (հատ) կարգավորություն: Ըստ բազմապատկման կանոնի՝ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ տառերից կարելի է կազմել կարգավորություն, որոնցից յուրաքանչյուրի առաջին երեք տեղերում a_1, a_2, a_3 տառերն են, չորրորդ և հինգերորդ տեղերում b_1, b_2 տարրերը, վեցերորդ և յոթերորդ տեղերում՝ c_1, c_2 տառերը: Այդ 24 (հատ) կարգավորություններից (առանց կրկնության) յուրաքանչյուրը տալիս է մեկ (հատ) (a, a, a, b, b, c, c) կրկնությամբ կարգավորություն: Ուստի 7! (հատ) առանց կրկնության կարգավորությունից կստացվի

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210$$

210 (հատ) կրկնությամբ կարգավորություն:

Թեորեմի ապացուցումը: Դիցուք՝ $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$-ը $m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ երկարությամբ հավաքածու է՝ կազմված $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ բազմության տարրերից: Պատկերացնենք $b_1, b_2, \cdots, b_n$ օբյեկտներն իրարից տարբեր: Այդ դեպքում դրանցից կարելի է կազմել $m!$ (հատ) տեղափոխություն (առանց կրկնության): Եթե այդ $m!$ (հատ) առանց կրկնության տեղափոխություններից յուրաքանչյուրում «վերադառնանք» $a_1, a_2, \cdots, a_n$ տարրերին, ապա կստանանք այդ տարրերից տեղափոխություններ՝ կրկնությամբ: Այդ կրկնությամբ տեղափոխություններում a_1-ը «հանդիպում է» k_1 տեղերում՝ որպես

$b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1k_1}$, a_2-ը «հանդիպում է» k_2 տեղերում՝ որպես $b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2k_2}$ և այլն, a_n-ը «հանդիպում է» k_n տեղերում՝ որպես $b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nk_n}$:

$b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1k_1}$ տարրերից կարելի է կազմել $k_1!$ (հատ) առանց կրկնության տեղափոխություն, $b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2k_2}$ տարրերից կարելի է կազմել $k_2!$ (հատ) առանց կրկնության կարգավորություն և այլն, $b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nk_n}$ տարրերից կարելի է կազմել $k_n!$(հատ)՝ առանց կրկնության կարգավորություն:

Ըստ բազմապատկման կանոնի՝ կարելի է կազմել $k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!$ առանց կրկնության կարգավորություն, որի առաջին k_1 տեղերում $b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1k_1}$ տառերն են, k_1+1-ից k_2 տեղերում՝ $b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2k_2}$ տառերն են և այլն, k_n+1-ից k_n տեղերում $b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nk_n}$ տառերն են: Այդ $k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!$ (հատ) առանց կրկնության տարրերից կարելի է ստանալ մեկ կրկնությամբ

$$(\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{k_1!\ \text{հատ}}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{k_2!\ \text{հատ}}, \ldots, \underbrace{a_n, a_n, \ldots, a_n}_{k_n!\ \text{հատ}})$$ կարգավորություն:

Հետևաբար՝ $(k_1+k_2+\cdots+k_n)!$ (հատ) առանց կրկնության կարգավորություններից կստացվի

$$\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$$

(հատ) կրկնությամբ կարգավորություն:

7. **Օրինակներ՝**

7.1. Քանի՞ տասանիշ թիվ կստացվի 7254725132 թվից՝ դրա կարգային միավորների հնարավոր բոլոր տեղափոխությունների արդյունքում:

Լուծում: 7254725132 թվին համապատասխանեցնենք $(7, 2, 5, 4, 7, 2, 5, 1, 3, 2)$ (հավաքածուն՝ $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ բազմության հենքի վրա: Այդ հավաքածուն $(1, 3, 1, 1, 2, 2)$ կազմի է: 7254725132 թվի կարգային միավորները ցանկացած տեղափոխության կհամապատասխանեցվի նույն $(1, 3, 1, 1, 2, 2)$ կազմի մի հավաքածու: Հետևաբար՝ որոնելի տասանիշ թվերի քանակը (ներառյալ նաև տրված թիվը) հավասար է $(1, 3, 1, 1, 2, 2)$ կազմով բոլոր՝ *1-ը՝ 1 անգամ, 2-ը՝ 3 անգամ, 3-ը՝ 1 անգամ, 4-ը՝ 1 անգամ, 5-ը՝ 2 անգամ, 7-ը՝ 2 անգամ* կրկնությամբ տեղափոխությունների քանակին, այսինքն՝

$$P_{10}^{(1,\,3,\,1,\,1,\,2,\,2)}=\frac{10!}{1!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!}=151200:$$

7.2. Քանի՞ եղանակով կարելի 6 թիվը ներկայացնել երեք գումարելիների գումարի տեսքով:

Լուծում: Դիցուք՝ 6 թիվը ներկայացված է երեք գումարելիների գումարի տեսքով՝

$$6=n_1+n_2+n_3: \qquad (2.\ 2.\ 4)$$

(2. 2. 4) տեսքի գրառմանը համապատասխանեցնենք 1-երից և 0-ներից կազմված մի հավաքածու կարճ ութնյակ, հետևյալ կերպ՝ n_1-ը փոխարինենք n_2 հատ 1-երով, + նշանը՝ 0-ով, n_2 -ը՝ n_2 հատ 1-երով , + նշանը՝ 0-ով, n_3-ը՝ n_3 հատ 1-ով:

Օրինակ՝ $6=3+1+2$ գրառմանը կհամապատասխանեցվի $(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1)$ ութնյակը, իսկ $6=2+0+4$ գրառմանը՝ $(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$ ութնյակը:

Հակառակը, օրինակ՝ $(1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$ ութնյակը «ծնում է» $6=1+2+3$ գրառումը, իսկ $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)$ ութնյակը «ծնում է» $6=5+0+1$ գրառումը:

Հետևաբար՝ 6 թիվը երեք գումարելիների գումարի տեսքով ներկայացումների թիվը հավասար է այն հավաքածու-ութնյակների թվին, որոնցից յուրաքանչյուրը կազմված է վեց հատ 1-ից և 2 հատ 0-ից: Բայց վերջինս հավասար է՝

$$P_8^{(6,\,2)}=\frac{8!}{6!\cdot 2!}=28:$$

ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՄԲ ԶՈՒԳՈՐԴՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Որևէ E վերջավոր բազմության տարրերի առանց կրկնության զուգորդություն (ավելի ճիշտ՝ *առանց կրկնության զուգորդություն* n *տարրից* k *-ական*) կոչվում է E -ի յուրաքանչյուր ենթաբազմություն, որը պարունակում է k (հատ) տարր:

Օրինակ՝ $E=\{a, b, c, d\}$ բազմության համար $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, c\}$ բազմություններից յուրաքանչյուրը առանց կրկնության զուգորդություն է 4 տարրից 3-ական, իսկ $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ բազմություններից յուրաքանչյուրը առանց կրկնության զուգորդություն է 4 տարրից 2-ական, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ բազմությունները *բոլոր առանց կրկնության զուգորդություններն են 4 տարրից 1-ական, $\varnothing$-ը՝ առանց կրկնության զուգորդություն է 4 տարրից 0-ական*:

Այժմ ***սահմանենք կրկնությամբ զուգորդություն*** n ***տարրից*** k***-ական*** հասկացությունը, որը հենվում է հետևյալ նկատառման վրա: Դիտարկենք, օրինակ՝ $E=\{a, b, c, d\}$ բազմությունը և դրա՝ առանց կրկնության 4 տարրից 3-ական $\{a, c, d\}$ զուգորդությունը, որը ծնում է $3!=6$ (հատ) տեղափոխություն՝ $(a,\ c,\ d)$, $(a,\ d,\ c)$, $(c,\ a,\ d)$, $(c,\ d,\ a)$, $(d,\ a,\ c)$, $(d,\ c,\ a)$:

Հակառակը, օրինակ՝ $(a,\ b,\ c)$, $(a,\ c,\ b)$, $(b,\ a,\ c)$, $(b,\ c,\ a)$, $(c,\ a,\ b)$, $(c,\ b,\ a)$ $3!=6$ (հատ) տեղափոխություններից կկազմվի մեկ (հատ) զուգորդություն՝ $\{a, b, c\}$:

Այս օրինակ հանգունությամբ՝ կրկնությամբ տեղափոխություններից կազմվում է կրկնությամբ զուգորդություն:

Դիտարկենք, օրինակ՝ $(2,\ 1)$ կազմի $(a,\ a,\ b)$, $(a,\ b,\ a)$, $(b,\ a,\ a)$ տեղափոխությունները: Դրանցից կարելի է կազմել մեկ (հատ) օբյեկտ. նշանակենք այն $[(a,\ a,\ b)]$-ով: $[(a,\ a,\ b)]$-ն կկոչենք համարժեքության դաս ըստ $(2,\ 1)$ կազմի: Նույն կերպ, օրինակ՝ $(a,\ b,\ b)$, $(b,\ a,\ b)$, $(b,\ b,\ a)$ տեղափոխություններից կարելի է կազմել $[(a,\ b,\ b)]$ օբյեկտը:

Ընդհանուր դեպքում՝ վարվում ենք հետևյալ կերպ:

Դիցուք՝ $E=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ -ը վերջավոր բազմություն է: Դիտարկենք այդ բազմության բոլոր՝ կրկնությամբ տեղափոխությունները, որոնք ունեն $(k_1, k_2, \cdots, k_m)$ կազմը:

8. **Սահմանում. Կրկնությամբ զուգորդություն** n տարրից $(n=k_1+k_2+\ldots+k_m)$ m-ական կոչվում է E բազմության նույն $(k_1, k_2, \cdots, k_m)$ կազմն ունեցող կրկնությամբ կարգավորությունների համարժեքության դասը:

Այսպիսով՝ n թիվը ոչ բացասական $k_1, k_2, \ldots, k_m$ թվերի գումարի տեսքով $n=k_1,+k_2+\ldots+k_m$ ներկայացումից ստացվում է մեկ (հատ) կրկնությամբ զուգորդություն n տարրից m-ական:

Օրինակ՝ $4=3+1$ ներկայացումից ստացվում է մեկ (հատ) $[(a, a, a, b)]$ կրկնությամբ զուգորդություն 2 տարրից 4-ական, իսկ $4=1+3$ ներկայացումից՝ $[(a, b, b, b)]$ կրկնությամբ զուգորդությունը 2 տարրից 4-ական:

Քանի որ 4 թիվը կարելի է ներկայացնել երկու ոչ բացասական թվերի գումարի տեսքով հինգ ձևով՝ $4=0+4$, $4=1+3$, $4=2+2$, $4=3+1$, $4=4+0$, ապա կա ընդամենը հինգ (հատ) կրկնությամբ զուգորդություն 2 տարրից 4-ական, դրանք են.

$[(b, b, b, b)]$, $[(a, b, b, b)]$, $[(a, a, b, b)]$, $[(a, a, a, b)]$, $[(a, a, a, a)]$:

Նկատենք, որ այս կրկնությամբ զուգորդությունները «ծնում են» կրկնությամբ տեղափոխություններ՝

$[(b, b, b, b)] \to (b, b, b, b)$,

$[(a, b, b, b)] \to (a, b, b, b)$, (b, a, b, b), (b, b, a, b), (b, b, b, a),

$[(a, a, b, b)] \to (a, a, b, b)$, (a, b, a, b), (a, b, b, a), (b, b, a, a), (b, a, a, b),

$[(a, a, a, b)] \to (a, a, a, b)$, (a, a, b, a), (a, b, a, a), (b, a, a, a),

$[(a, a, a, a)] \to (a, a, a, a)$:

n տարրից m-ական կրկնությամբ բոլոր զուգորդումների թիվը նշանակում են $\tilde{C}_n^m$-ով:

Օրինակ՝ ըստ վերը դիտարկման՝

$$\tilde{C}_2^4 = 5$$

9. **Թեորեմ:** Կրկնությամբ n տարրից m-ական բոլոր զուգորդումների թիվը՝ $\tilde{C}_n^m$-ը, որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!\cdot(n-1)!} = C_{n+m}^{n-1} :$$

(2. 2. 5)

Ապացուցում: $\tilde{C}_n^m$ -ը m թիվը n (հատ) ոչ բացասական գումարելիների գումարի տեսքով ներկայացումների թիվն է: Վերցնենք այդ տիպի մի ներկայացում`

$$m = k_1 + k_2 + \ldots + k_n \; : \qquad (2.\ 2.\ 6)$$

(2. 2. 6) հավասարության աջ մասում գրված $k_1, k_2, \ldots, k_n$ գումարելիներից մեկը կամ մի քանիսը կարող են լինել զրոներ: $k_1, k_2, \ldots, k_n$ գրառմանը (նկատենք, որ դրանում կա $(n-1)$ հատ «+» նշան) համապատասխանեցնենք 1-երից և 0-ներից կազմված $(m+n-1)$ երկարության մի հավաքածու հետևյալ կերպ:

Այդ հավաքածուում սկզբում գրում ենք k_1 (հատ) 1-եր (եթե $k_1 = 0$, ապա գրում ենք 0), ապա գրում ենք 0 (+ նշանի փոխարեն), այնուհետև գրում ենք k_2 (հատ) 1-եր (եթե $k_2 = 0$, ապա գրում ենք 0), հետո գրում ենք 0 (+ նշանի փոխարեն) և այլն, վերջապես գրում ենք k_n (հատ) 1-եր (եթե $k_n = 0$, գրում ենք 0):

Կազմված հավաքածուն կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{k_1},\ 0,\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{k_2},\ 0,\ \ldots,\ \underbrace{0, 1,\ \ldots,\ 1}_{k_n} :$$

Օրինակ` $(1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$ գրառումը նշանակում է, որ 6 թիվը ներկայացվել է երեք գումարելիների գումարի տեսքով, այսպես` $6 = 3 + 1 + 2$, իսկ $(1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ գրառումը` $6 = 2 + 0 + 4$:

$6 = 0 + 0 + 6$ ներկայացմանը կհամապատասխանի $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ հավաքածուն:

Այսպիսով` $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ տեսքի ներկայացումների քանակը հավասար է $(m+n-1)$ երկարությամբ և $(m-1, m)$ կազմը ($(n-1)$ հատ 0 և $m$ հատ 1) ունեցող` կրկնությամբ տեղափոխությունների քանակին, այսինքն` $P(m, n-1)$:

Ուստի, ըստ (2. 2. 3) բանաձևի`

$$\tilde{C}_n^m = P(m,\ n-1) = \frac{(m+n-1)!}{m!\cdot(n-1)!} :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

10. **Դիտողություն:** Կրկնությամբ կարգավորությունների և կրկնությամբ զուգորդությունների վերաբերյալ խնդիրներ լուծելու համար կարելի է վարվել այսպես.

1. պարզել՝ խնդրում խոսքը գնում է՝

ա) տրված կազմ ունեցող հավաքածուների մասին,

բ) տրված երկարության հավաքածուի բոլոր հնարավոր կազմերի մասին:

2. ա) դեպքում պետք է օգտվել $\tilde{P}_m(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \dfrac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ բանաձևից,

բ) դեպքում՝ $\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = \dfrac{(m+n-1)!}{m! \cdot (n-1)!}$ բանաձևից:

11. **Օրինակներ.**

11.1. Ծաղիկների խանութում վաճառվում է 8 տեսակի ծաղիկ: Այդ ծաղիկներից քանի՞ հնարավոր ձևով կարելի է կազմել 11 ծաղիկ պարունակող ծաղկեփունջ:

Լուծում: Յուրաքանչյուր ծաղկեփունջ կարելի է պատկերացնել որպես 11 երկարությամբ հավաքածու: Այդպիսի ծաղկեփնջում ծաղիկների հերթականությունն էական չէ, ուստի յուրաքանչյուր ծաղկեփունջ կարելի է պատկերացնել որպես կրկնությամբ զուգորդություն 8 տարրից (ծաղկի տեսակից) 11-ական: Հետևաբար՝ ծաղկեփնջերի որոնելի թիվը կլինի՝

$$\tilde{C}_8^{11} = \frac{(11+8-1)!}{11! \cdot (8-1)!} = \frac{18!}{11! \cdot 7!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 1768:$$

11.2. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 10 նույնատիպ առարկաները տեղավորել 5 արկղի մեջ (հաշվի է առնվում նաև չտեղավորվածը՝ արկղում գնդակ չդնելը):

Լուծում: Համարակալենք արկղերը՝ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5: Եթե a_1 արկղում դրվում է k_1 առարկա, a_2 ում՝ k_2, a_3-ում՝ k_3, a_4-ում՝ k_4, և a_5-ում՝ k_5, ապա $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 10$:

Խնդիրը հանգում է հետևյալին. քանի՞ եղանակով է կարելի 10 թիվը ներկայացնել հինգ ոչ բացասական գումարելիների տեսքով: Այդ եղանակների քանակը կլինի՝

$$\tilde{C}_5^{10}=\frac{(10+5-1)!}{10!\cdot(5-1)!}=\frac{14!}{10!\cdot 4!}=\frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=1001:$$

11.3. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր կառուցել եռանկյուններ, որոնցից յուրաքանչյուրի կողմերի երկարությունները կարող են լինել 4սմ, 5սմ, 6սմ, 7սմ (հաշվի են առնվում նաև հավասարասրուն և հավասարակողմ եռանկյունները):

Լուծում: Պետք է ընտրել 4 տարրից (4սմ, 5սմ, 6սմ, 7սմ) 3-ը, ընդ որում՝ կրկնությամբ (եռանկյան կողմերը կարող են լինել և՛ 4սմ, 4սմ, 4սմ և՛ 6սմ, 6սմ, 7սմ, և այլն), և կարգը կարևոր չէ (5սմ, 6սմ, 7սմ երկարությամբ կողմերով եռանկյունը նույնն է, ինչ 6սմ, 5սմ, 7սմ երկարությամբ կողմերով եռանկյունը): Ուստի որոնելի եղանակների թիվը կլինի

$$\tilde{C}_4^3=C_{4+3-1}^3=C_6^3=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=20:$$

1. *Ենթաբազմություններով մտածողության զարգացումը:*

Այս մեթոդիկայով կոմբինատորային մտածողության զարգացումը բերվում է հետևյալին. կոմբինատորային խնդրի լուծումներից բազմությունը տրոհվում է ենթաբազմությունների, որոնցից յուրաքանչյուրը օժտված է որոշակի (կոնկրետ) հատկություններով: Այդ բազմություններից մեկը (պայմանականորեն կոչենք ***գումարելիային***) կարելի է բնորոշել որպես խնդրի լուծման լոկալ մոտեցում, իսկ մյուսը (կոչենք այն ***միավորող***) կարելի է բնորոշել որպես գլոբալ մոտեցում:

Լոկալ մոտեցման դեպքում դիտարկվում է խնդրի լուծմանը բավարարող մի դեպք (չեն դիտարկվում այլ դեպքեր): Գլոբար մոտեցման դեպքում խնդրի լուծումը տրոհվում է լոկալ ենթադեպքերի և վերջնական լուծումը լինում է այդ ենթադեպքերի գումարը (այստեղից էլ ***միավորող*** անվանումը):

Օրինակների վրաքննարկենք լոկալ և գլոբար մոտեցումները:

Օրինակ: Դիցուք ունենք հանրահաշվի 5 իրարից տարբեր գրքեր, երկրաչափության՝ 6 իրարից տարբեր գրքեր և վիճակագրության՝ 8 իրարից տարբեր գրքեր: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր ընտրել (այդ

19 գրքերից) երկուսն այնպես, որ այդ ընտրված գրքերը լինեն տարբեր առարկաներից:

Նշանակենք հանրահաշվի, երկրաչափության և վիճակագրության գրքերը համապատասխանաբար A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8: Բոլոր լուծումների բազմությունը (x, y) տեսքի չկարգավորյալ զույգեր են, որոնցում x-ը A, G, S-երից որևէ մեկն է, իսկ y-ը՝ դրանցից այնպիսի մեկը, որ՝

եթե $x \in A$, ապա $y \notin A$, եթե $x \in G$, ապա $y \notin G$, եթե $x \in S$, ապա $y \notin S$:

Լոկալ մոտեցումը ենթադրում է հետևյալ մտածողական գործընթացը: Դիտարկվում է լուծումների բազմության մի ենթաբազմություն, որին պատկանող (x, y) զույգերից x-ը ամրակայված (ֆիքսված) է և պատկանում է A-ին: Այնուհետև դիտարկվում են բոլոր այն (x, y) զույգերը, որոնցում x-ը ամրակայվում է և պատկանում է G-ին և, վերջապես, դիտարկվում են բոլոր այն (x, y) զույգերը, որոնցում x-ը ամրակայված է և պատկանում է S-ին:

$(A_1, G_1), (A_1, G_2), \cdots, (A_1, G_6), (A_1, S_1), (A_1, S_2), \cdots, (A_1, G_8)$:

$(G_1, A_1), (G_1, A_2), \cdots, (G_1, A_5), (G_1, S_1), (G_1, S_2), \cdots, (G_1, S_8)$:

$(S_1, A_1), (S_1, A_2), \cdots, (S_1, A_5), (S_1, G_1), (S_1, G_2), \cdots, (S_1, G_6)$:

Այս երեք տողերից յուրաքանչյուրը լոկալ մոտեցման արդյունք է: Գլոբալ մոտեցման դեպքում, ինչպես արդեն նշել ենք, անպայման չէ, որ գրառվեն բոլոր ելքերը: Պարզապես պետք է վերացարկում կատարել և նկատել, որ՝

ա) առաջին տողում A_1-ից բացի (A_1-ի հետ մեկտեղ) կարող են գրվել A_2-ը, A_3-ը, A_4-ը, A_5-ը՝ ընդամենը 5 տող,

բ) երկրորդ տողում G_1-ից բացի (G_1-ի հետ մեկտեղ) կարող են գրվել G_2-ը, G_3-ը, G_4-ը, G_5-ը, G_6-ը՝ ընդամենը 6 տող,

գ) երրորդ տողում S_1-ից բացի (S_1-ի հետ մեկտեղ) կարող են գրվել S_2-ը, S_3-ը, S_4-ը, S_5-ը, S_6-ը, S_7-ը, S_8-ը,՝ ընդամենը 8 տող:

Բոլոր ելքերի քանակը կլինի՝

$$5\cdot 14+6\cdot 13+8\cdot 11=236:$$

Ապա հանդես է գալիս ընդհանրացնող հիմքով մտածելու գործընթացը. կոնկրետ դեպքում զույգերը կարգավորյա՞լ են, թե՞ ոչ: Մեր դեպքում զույգերը կարգավորյալ չեն, այսինքն, օրինակ՝ $(A_3,\ G_4)$ զույգը և $(G_4,\ A_3)$ զույգը նույնն են: Հետևաբար իրականում, ելքերի բազմության տարրերի քանակը $\frac{236}{2}=168$ է:

Մեր փորձարարական աշխատանքների ընթացքում ուսանողներն ավելի հաճախ ցուցադրում էին գումարելիային մտածողություն, հետևաբար կարելի է պնդել, որ այն բավարարում է մտածողության կոմբինատորային ձև կոչվելու պայմաններին: Զուտ հոգեբանության տեսակետից կարելի է պնդել, որ մտածողության այդ կոմբինատորային ձևն ունի կոգնիտիվ հիմքեր:

Ի հակադրություն լոկալ մտածողության ձևի՝ գլոբալը ենթադրում է, որ կոմբինատորային խնդիրներ լուծելու գործընթացում պետք է դիտարկել լրիվ ելքերի բազմությունը, դրանք պատկերացնել որպես որոշակի ենթաբազմությունների միավորում՝ նախքան լրիվ ելքերի բազմության տարրերի հաշվումը: Մեր օրինակում՝ ուսանողը պետք է դիտարկի $M=\{(A_i,\ G_k), (A_i,\ S_m), (G_k,\ A_i), (G_k,\ S_m), (S_m,\ A_i), (S_m,\ G_k)\}$ բազմությունը, ապա դա պատկերացնի որպես միավորում՝

$$M=\bigcup_{i=1}^{5}\bigcup_{k=1}^{6}\bigcup_{m=1}^{8}=\{(A_i,\ G_k), (A_i,\ S_m), (G_k,\ A_i), (G_k,\ S_m), (S_m,\ A_i), (S_m,\ G_k)\}:$$

Մեր փորձարարական աշխատանքների ընթացքում (հատկապես ուսանողի հետ զրուցելիս) մենք պարզել ենք, որ դժվար է պնդել՝ ուսանողը լոկա՞լ է մտածում, թե՞ գլոբալ: Բանն այն է, որ երբ ուսանողը սկզբում դիտարկում է միայն ենթաբազմություններ (գտնում է դրանցից յուրաքանչյուրի տարրերի քանակը), հետո դիտարկում է լրիվ ելքերի բազմությունը (և գտնում է դրա տարրերի քանակը՝ գումարելով ենթաբազմությունների տարրերի քանակները), ապա դժվար է պնդել, որ ուսանողը սկզբում մտածում է լոկալ և հետո՝ գլոբալ: Մի բան հաստատ է. ենթաբազմություններով մտածողության այս երկու ձևերը հանդես են գալիս դիալեկտիկական միասնության մեջ, և այդ միասնությունն է, որ զարգացնում է կոմբինատորային մտածողությունը:

Երբ ուսանողը կոմբինատորային խնդիրը լուծում է ենթաբազմություններով մտածողության հենքի վրա, ապա նա ենթադրում է, որ այդ ենթաբազմությունների ցանկացած հավաքածուի հատումը դատարկ է: Բայց հնարավոր է, որ դա այդպես չլինի: Մեր օրինակում, հենվելով ընդհանրացնող հիմքով մտածողության վրա, տրվեց խնդրի ճիշտ լուծում. ելքերի բազմության տարրերի քանակը բաժանվեց 2-ի:

Ընդհանուր դեպքում, ենթաբազմություններով մտածելու` մեր կողմից առաջարկվող մեթոդիկան լրացվում է Վենի գծապատկերներով մտածելու հնարով: Այն հենվում է հետևյալի վրա. եթե նշանակենք $n(A)$-ով որևէ վերջավոր բազմության տարրերի քանակը, ապա

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \qquad (2.\ 2.\ 7)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - \\ - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C): \qquad (2.\ 2.\ 8)$$

Դիտարկենք հետևյալ ***խնդիրը (խնդիր 2).***

ա, բ, գ, դ, ե, զ տառերից կազմվում է երեք տառանոց շարաններ` «բառեր» (օրինակ` աբգ, աբզ, աադ): Քանի՞ այդպիսի «բառեր» կարելի է կազմել, եթե թույլատրվում է տառերի կրկնություն (օրինակ` դդե), և յուրաքանչյուր «բառում» պետք է լինի դ տառը:

Փորձարարական աշխատանքի հաստատագրող փուլում բոլոր ուսանողները, որոնք «լուծել» էին այս խնդիրը, տվել էին հետևյալ սխալ լուծումը.

«դ» տառը կարող է լինել «բառի» սկզբում` դ - -, մեջտեղում` - դ - և վերջում` - - դ: Եթե սկզբում է (դ - -), ապա մյուս տեղերից և՛ առաջինում, և՛ երկրորդում կան տառեր լրացնելու 6 եղանակ:

Իհարկե, սխալ լուծողներից յուրաքանչյուրը ճիշտ է մտածել` ելքերի ամբողջ բազմությունը բաժանելով երեք ենթաբազմությունների ({դ - - }, {- դ -}, {- - դ}), բայց ճիշտ չէր, որ այդ ենթաբազմությունները չեն հատվում, օրինակ, {դ - - } բազմության դդե տարրը համընկնում է {- դ -} բազմության դդե տարրի հետ, կամ {դ - - } բազմության դդե տարրի հետ:

Այդ սխալն ուղղելու համար ենթաբազմություններով մտածելու մեթոդիկան լրացվում է Վենի գծապատկերների հնարով: Մենք դա արել ենք երկու եղանակով՝ ա) ելքերի բազմությունը երկու ենթաբազմությունների տրոհելու միջոցով, բ) ելքերի բազմությունը երեք ենթաբազմությունների տրոհելու միջոցով: ա) դեպքում ***խնդիրը*** բացատրվել է այսպես.

Դիցուք ա, բ, գ, դ, ե, զ տառերից կազմվում են երեք տառանոց «բառեր»: Քանի՞ այդպիսի «բառեր» կարելի է կազմել, եթե՝

1. տառերը չեն կրկնվում,
2. տառերը չեն կրկնվում, բայց դ տառը պետք է օգտագործվի,
3. տառերը չեն կրկնվում, բայց դ կամ ա տառերը պետք է օգտագործվեն (բայց ոչ երկուսը),
4. տառերը չեն կրկնվում, բայց դ կամ ա տառերը (կամ դրանցից երկուսը) պետք է օգտագործվեն,
5. տառերը կրկնվում են,
6. տառերը կրկնվում են, և դ տառը պետք է օգտագործվի:

1-ին տարբերակը բոլոր ուսանողները լուծել են՝ առանց կողմնակի օգնության:

2-րդ տարբերակը նույնպես, բոլոր ուսանողները լուծել են՝ առանց կողմնակի օգնության և ենթաբազմություններով մտածելու եղանակով՝

դ - -, - դ -, - - դ:

Արդյունքում ստացվել է՝

$3\cdot 5\cdot 4=60$ եղանակով:

3-րդ տարբերակը բերվում է 2-ին՝

դ - -, - դ -, - - դ $(4\cdot 3)\cdot 3$ եղանակ,

ա - -, - ա -, - - ա $(4\cdot 3)\cdot 3$ եղանակ,

ընդամենը $2\cdot 3\cdot 4\cdot 3=72$ եղանակ:

4-րդը՝ լուծվում է ուսուցանողի օգնությամբ՝ օգտագործելով $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ բանաձևը:

Դիցուք A-ն բոլոր այն «բառերի» բազմությունն է, որոնցից յուրաքանչյուրում կա դ տառ, իսկ B-ն՝ որոնցից յուրաքանչյուրում կամ ի ա տառ.

A = {դ - -, - դ -, - - դ}, B = {ա - -, - ա -, - - ա}:

Ունենք, որ $n(A) = 3\cdot 5\cdot 4$, $n(B) = 3\cdot 5\cdot 4$:

Մյուս կողմից, $(A\cap B)$-ն կլինի բոլոր այն «բառերի» բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրում կա և՛ ա տառ, և՛ բ տառ, իսկ $(A\cup B)$-ն՝ որոնելի բազմությունը:

$(A\cap B)$= {դա-, դ-ա, -դա, ադ-, ա-դ, -ադ}:

Ուստի $n(A\cap B) = 6\cdot 4 = 24$ և

$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B) = 60 + 60 - 24 = 96$:

Կոմբինատորային մտածողության երկրորդ բաղադրիչը ***ընդհանրացնող հիմքով*** մտածողությունն է: Այդպիսի մտածողության դեպքում կոմբինատորային խնդիրների լուծումը կատարվում է մտածողական գործողությունների հետևյալ հաջորդայնությամբ. սկզբում որոշվում է, թե քանի եղանակով է հնարավոր որևէ բազմությանը պատկանող տարրերը տեղավորել կոնկրետ տեղերում: Ապա յուրաքանչյուր տեղավորված տեղի համար փոփոխել այլ տեղերում տեղավորված տարրերը՝ նպատակ ունենալով որոշել խնդրի լուծումների բազմության բոլոր տարրերի բազմությունը: Այս տեսակ մտածողության զարգացումը ցուցադրենք օրինակի վրա:

Խնդիր 3. Գտնել 1, 2, 3, 4, 5 թվանշաններից կազմված բոլոր այն իննանիշ թվերի քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրում 1-ը, 4-ը և 5-ը հանդես են գալիս մեկ անգամ, 2-ը և 3-ը՝ երեք անգամ (օրինակ՝ այդպիսի թվերից մեկը 123324325-ն է):

Ընդհանրացնող հիմքով մտածողության դեպքում վարվում են այսպես.

Նախ կա ինը խցիկ՝ ⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔:

2 թվանշանը պետք է տեղադրել այդ խցիկներից ցանկացած երեքում: Ինը խցիկներից ցանկացած երեքը կարելի է ընտրել C_9^3 եղանակով: Եթե ընտրվել է երեք այդպիսի խցիկ, ապա «բաց» է մնում 6 խցիկ.

Օրինակ՝ 2 - 2 - - 2 - - - ընտրության դեպքում բաց են մնացել 2-րդ, 4-րդ, 5-րդ, 7-րդ, 8-րդ և 9-րդ խցիկները: C_9^3 եղանակով ընտրված խցիկներից յուրաքանչյուրի համար մնացած 6 խցիկներում 3 թվանշանը կարելի է տեղավորել C_6^3 եղանակով: Օրինակ՝ 2-ների նախորդ դասավորության դեպքում 3 թվանշանը կարելի է տեղավորել այսպես՝ 2323 - 2 - 3 -:

Այնուհետև, $C_9^3 \cdot C_6^3$ քանակությամբ տեղերում տեղավորված երեք հատ 2, երեք հատ 3 թվանշաններից բացի մնացած երեք տեղերում 1, 4, 5 թվանշանները կարելի է տեղավորել 3! եղանակով: Հետևաբար, խնդրի լուծումն է՝ $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot 3!$:

Ընդհանրացնող հիմքով դատողությունները այս խնդրի լուծման գործընթացում կատարվեց մտածողական գործողությունների հետևյալ հերթականությամբ. սկզբում որոշվեց, թե քանի եղանակով է $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ բազմությանը պատկանող 2 տարրը (թվանշանը) տեղավորվել երեք խցիկում: Ապա, յուրաքանչյուր այդպիսի (ամրակայված) տեղերից դուրս վեց տեղում տեղավորվեցին $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ բազմության մնացած տարրերը:

Եռադիրության սկզբունքի իրականացման տեսակետից նպատակահարմար է ընդհանրացնող հիմքով մոտեցումը պատկերել ծառակերպով (հիշենք, որ տարրական դպրոցում կոմբինատորային խնդիրների լուծման միակ ձևը ծառակերպի պատկերումն է):

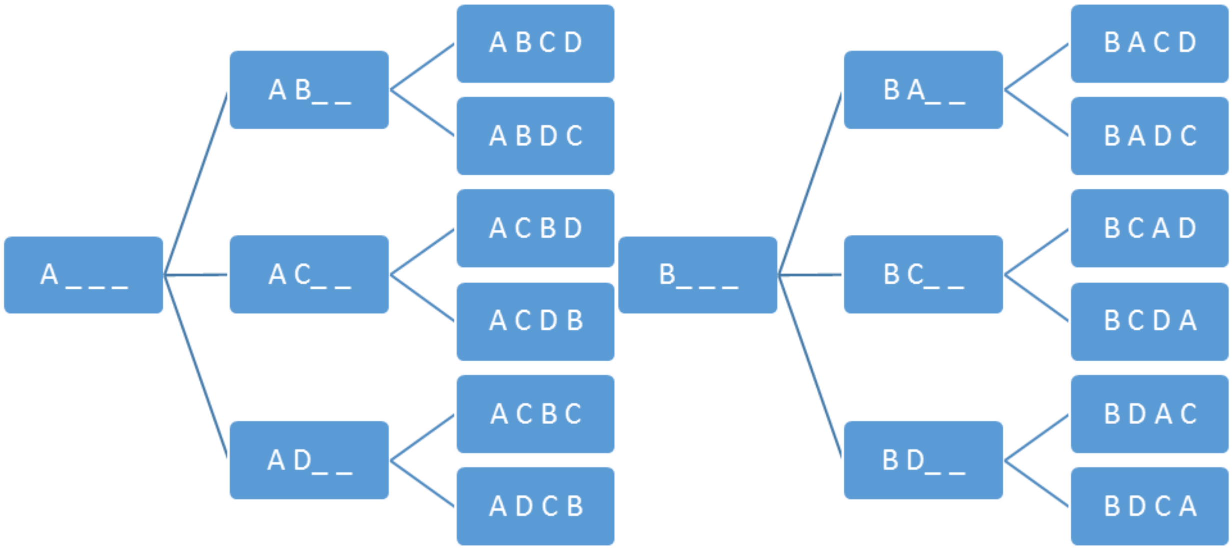
Խնդիր 4. Գտնել $M = \{A, B, C, D\}$ բազմության բոլոր տեղափոխությունների քանակը:

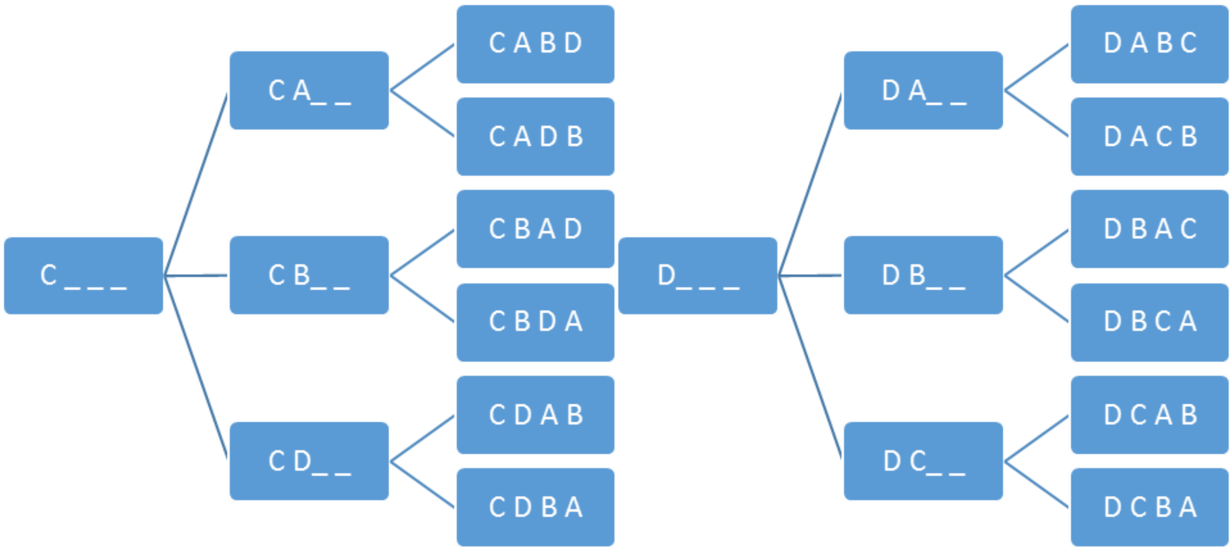
Առաջին լուծում: Վերցնենք չորս խցիկ՝ $\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$:

Նախ, առաջին խցիկում կարելի է տեղավորել M բազմության չորս տարրերից յուրաքանչյուրը: Ըստ ընդհանրացնող հիմքով մոտեցման, վերցնում ենք որևէ ամրակայված այդպիսի խցիկ և որոշում ենք՝ ինչպե՞ս տեղավորել (լցնել) մնացած երեք խցիկները: Յուրաքանչյուր այդպիսի խցիկում պետք է տեղավորել մնացած երեք տարրերը M բազմությունից: Որից հետո M բազմությունից մնում է երկու տարր, որը պետք է տեղավորեր երրորդ բաց մնացած խցիկում: Դա էլ ամրակայելուց հետո մնում է մեկ տարր՝

տեղավորել ու մնացած մեկ խցիկում: Հետևաբար, հնարավոր տեղափոխությունների թիվը կլինի՝ 4·3·2·1:

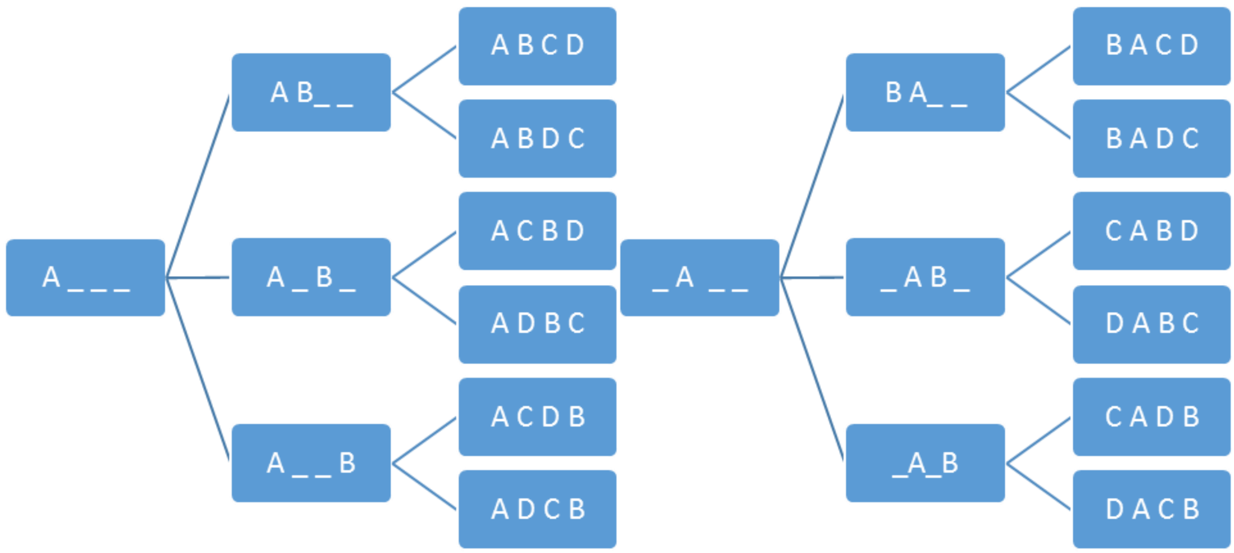
Ասվածը պատկերենք ծառակերպի տեսքով:

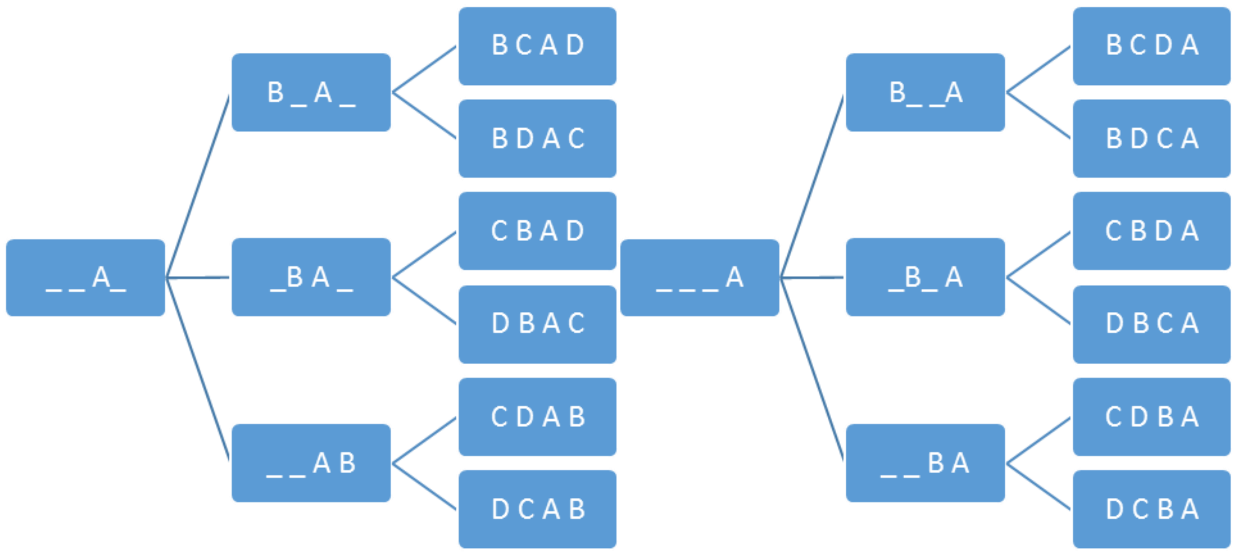




Կոմբինատորային մտածողության զարգացման տեսակետից ներկայացնենք նաև այս խնդրի՝ ընդհանրացնող հիմքով մոտեցմամբ լուծման մեկ այլ օրինակ (փորձարարական խմբի ուսանողների մոտ 20 տոկոսն այդպիսի մոտեցում էր ցուցաբերել):

Սկզբում *A* տառը կարելի է տեղավորել չորս խցիկներից յուրաքանչյուրում (և ոչ թե առաջին խցիկում, ինչպես դա արվեց նախորդ լուծման դեպքում)՝ A - - -, - A - -, - - A -, - - - A: Դրանցից յուրաքանչյուրը վերցնելով ամրակայված (ֆիքսված)՝ մնացած երեք խցերում տեղավորենք B-ն: Ապա ստացվածներից յուրաքանչյուրը վերցնելով ամրակայված՝ մնացած երկու խցերում տեղավորենք C-ն: Վերջապես այդ բոլորը վերցնելով ամրակայված՝ մնացած մեկ տեղում տեղավորենք D-ն: Ասվածը պատկերենք (այլ) ծառակերպով.

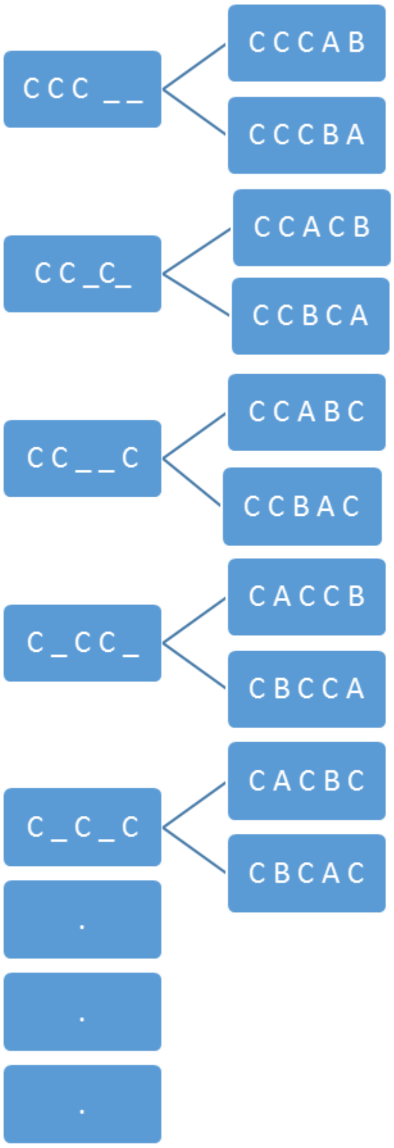




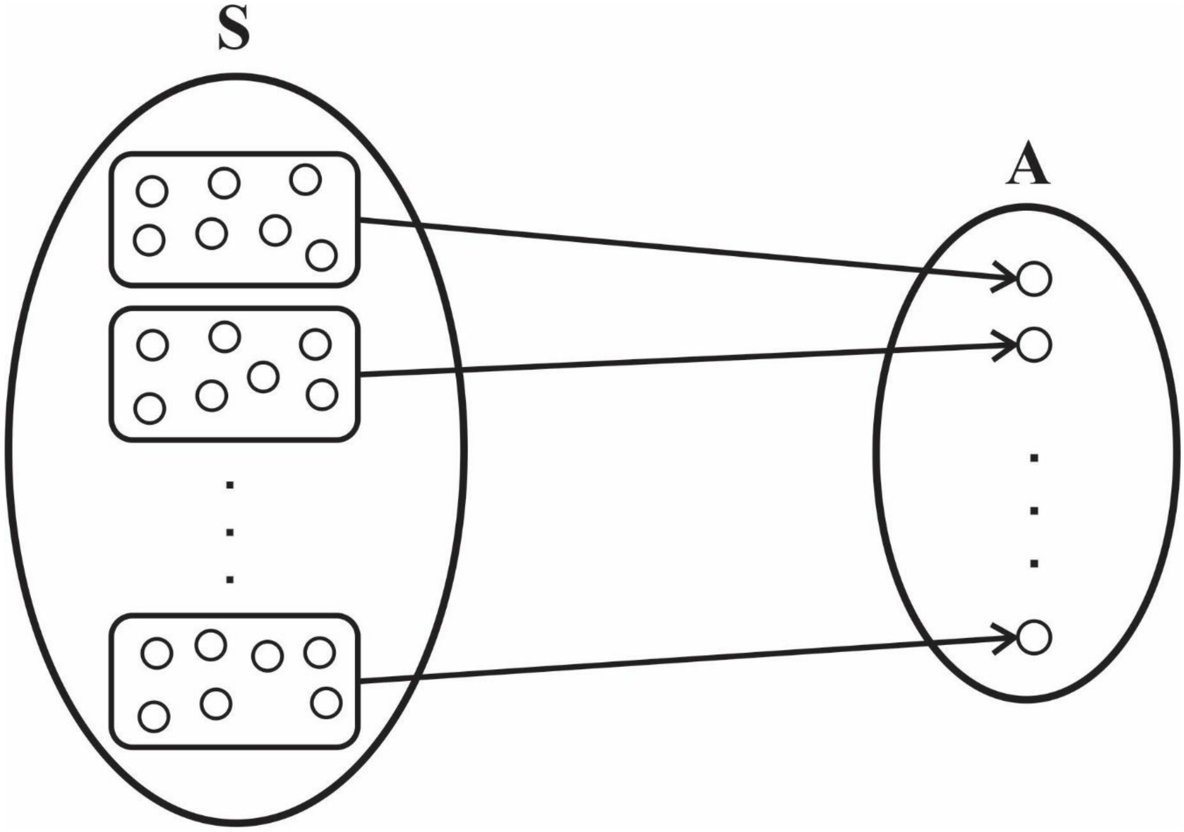
Փորձարարական խմբի ուսանողների մոտ 5 տոկոսը կարողանում էր միավորել (և մտքի մեջ պահել) այդ երկու ձևերը: Լուսաբանենք դաօրինակի վրա:

Խնդիր 5. Հինգ քարտերի վրա գրված են տառեր՝ A, B, C, C, C: Քանի՞ եղանակով կարելի է այդ քարտերից կազմել 5-ական շարաններ:

Չմանրամասնելով՝ լուծումը ներկայացնենք ծառակերպի մի հատվածով.



Կոմբինատորային մտածողության հաջորդ բաղադրիչը ***համարժեքության դասերով*** մտածողությունն է: Այն ենթադրում է մտածողական գործողությունների հետևյալ հաջորդականությունը. նախ դիտարկվում է տրված կոմբինատորային խնդիրը, որի լուծումների բազմությունը, ասենք, A-ն է: Ապա, դիտարկվում է տրված խնդրի հետ կապված մեկ այլ խնդիր՝ լուծումների S բազմություն, ընդսմին S-ը կարելի է տրոհել միևնույն հզորության ենթաբազմությունների, որոնցից յուրաքանչյուրը կարելի է փոխմիարժեք համապատասխանության մեջ դնել A բազմության տարրերի հետ: Վերջապես, հաշվվում է այդ ենթաբազմություններից մեկի տարրերի քանակը և ապա A-ի տարրերի քանակը.



Ըստ էության՝ բազմության տրոհումը ենթաբազմությունների (միավորման տեսքով) նշանակում է բազմության վրա տալ համարժեքության առնչություն. այստեղից էլ գալիս է «համարժեքության դասերով մտածողություն» դարձվածքը:

Դիտարկենք ասվածը լուսաբանող մի օրինակ:

Խնդիր 6. Քանի իննանիշ թիվ կարելի է կազմել 1, 2, 3, 4, 5 թվանշանների միջոցով, եթե յուրաքանչյուր այդպիսի թվում 1, 4 և 5 թվանշանները պետք է հանդես գան մեկ անգամ, իսկ 2 և 3 թվանշանները՝ երեք անգամ:

Այս խնդիրը մենք լուծել ենք ընդհանրացնող հիմքով մոտեցմամբ: Այժմ այն լուծենք համարժեքության դասերով մոտեցմամբ: Ըստ այդ մոտեցման՝ պետք է կառուցել տրված խնդրի լուծումների A բազմության հետ առնչվող մի S բազմություն:

Դիտարկենք ինդեքսավորված թվանշանների հետևյալ բազմությունը՝ $\{1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2, 3_3, 4, 5\}$ ։ Այս բազմության բոլոր տեղափոխությունների բազմությունը նշանակենք S-ով։ Պարզ է, որ S-ը պարունակում է 9! տարր։

S բազմության մեջ ներմուծվում է համարժեքության առնչություն հետևյալ կերպ. S՝ -ին պատկանող երկու՝ $x = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ և $y = b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \ b_7, b_8, b_9$ տարրեր կկոչենք համարժեք, եթե x-ի և y-ի մեջ հանդիպող ինդեքսավորված թվերի ինդեքսները ջնջելուց հետո ստացվում են միևնույն իննանիշ թվերը։ Օրինակ՝ $x = 2_1,\ 2_2,\ 1,\ 3_1,\ 3_2,\ 4,\ 5,\ 2_3,\ 3_3$ և $y = 2_3,\ 2_2,\ 1,\ 3_1,\ 3_3,\ 4,\ 5,\ 2_1,\ 3_2$ տարրերը համարժեք են, քանի որ դրանց ինդեքսները ջնջելուց հետո ստացվում են 221334523 և 221334523 միևնույն իննանիշ թվերը։ Այդ համարժեքության առնչությամբ S-ը տրոհվում է համարժեքության դասերից կազմված մի T բազմության։ T-ի և A բազմության միջև փոխմիարժեք համապատասխանությունը հաստատվում է ինդեքսները ջնջելու կանոնով։ Օրինակ՝ նախորդ երկու x և y, ինչպես նաև այլ տարրերի (ասենք $2_3,\ 2_1,\ 1,\ 3_2,\ 3_3,\ 4,\ 5,\ 2_2,\ 3_1$) պարունակող դասին համապատասխանեցվում է A-ին պատկանող 221334523 իննանիշ թիվը։ Քանի որ T-ի դասերի քանակը $\frac{9!}{3!\cdot 3!}$ է, ապա A-ի տարրերի քանակը, այսինքն խնդրի լուծումը, կլինի $\frac{9!}{3!\cdot 3!}$։

2.3. ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ՓՈՐՁԱՐԿՄԱՆ ԿԱԶՄԱԿԵՐՊՈՒՄՆ ՈՒ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Մանկավարժական փորձարկումն անցկացվել է երեք փուլով.

1. Հաստատագրող,

2. Որոնողական,

3. Ձևավորող:

Առաջին փուլում (2011-2012 թթ.) դրվել են հետևյալ նպատակները.

ա) Որոշել փորձարկվողների (II դասարանի սովորողներ, ՄՄ(ՏԿ) բակալավրի կրթական ծրագրի II կուրսի ուսանողներ) կոմբինատորային մտածողության մակարդակը:

բ) Ձևավորել ստուգողական և փորձարարական խմբերը:

գ) Վերլուծել ավանդական ուսուցման դեպքում սովորողների կողմից կոմբինատորային պատկերացումների յուրացման դժվարությունները:

Երկրորդ փուլը (2012-2013 թթ.) նվիրված էր մշակված մեթոդիկայի (ենթաբազմություններով, համարժեքության դասերով, ընդհանրացված հիմքով դատողությունների ուսուցման) փորձարկմանը: Այս փուլի հիմնական խնդիրներն էին.

ա) Տարբեր տեսակի կոմբինատորային միացությունների (տեղափոխություններ, կարգավորություններ, զուգորդություններ՝ առանց կրկնության, կրկնությամբ) հետ սովորողների կողմնորոշիչ գործունեության հայտնաբերումը:

բ) Կոմբինատորային մտածողության զարգացման պրոպեդևտիկ ծրագրի (և խնդրաշարի) կազմում:

գ) Պրոպեդևտիկ ծրագրի (և խնդրաշարի) փորձարկում և համուղղում:

դ) Կոմբինատորային խնդիրներ լուծելու կարողությունների ձևավորման գործընթացում տարիքային առանձնահատկությունների հայտնաբերումը:

Երրորդ փուլում (2013-2014 թթ.) գնահատվել է առաջարկված մեթոդիկայի արդյունավետությունը:

Ուսումնասիրությանը մասնակցել են Երևանի հմր. 57 դպրոցի 11-րդ դասարանի 44 աշակերտներ և ՀՊՄՀ-ի ՄՄ(ՏԿ) բակալավրի կրթական ծրագրի «Մաթեմատիկա-տարրական դպրոցի մաթեմատիկա բովանդակային ուղղության տեսական հիմունքները» դասընթացն ուսումնասիրող երկրորդ կուրսի 44 ուսանողներ: Ըստ այդմ ձևավորվել են ստուգողական և փորձարարական խմբերը.

Աղյուսակ 1

Ստուգողական և փորձարարական խմբերի համեմատական բնութագրերը

Խմբեր	Դասարաններ, ուսանողական խմբեր	Մասնակիցների քանակը	Առաջադիմությունը		
			Բավարար	Միջին	Բարձր
I փորձարարական	$11^{\text{ա}}$	23	36%	50%	14%
II փորձարարական	II ա, բ խմբեր	21	47%	41%	12%
I ստուգողական	$11^{\text{բ}}$	23	35%	53%	12%
II ստուգողական	II գ, դ խմբեր	21	41%	47%	12%

2.3.1. Հաստատագրող փորձարկման փուլ

Հաստատագրող փորձարկման փուլում ընտրվել են կոմբինատորային միացություններին վերաբերող խնդիրներ: Նպատակը՝ որոշել սովորողների կոմբինատորային պատկերացումներին (և մտածողությանը) տիրապետելու ելքային մակարդակը, ինչպես նաև՝ ի հայտ բերել կոմբինատորային խնդիրներ լուծելիս սովորողների թույլ տված տիպական սխալները: Ահա այդ խնդիրները.

1. Քանի՞ եռանիշ թիվ կարելի է կազմել 1, 2, 3 թվանշանների միջոցով, եթե այդ եռանիշ թվերից յուրաքանչյուրում 1, 2, 3 թվանշանները չպետք է կրկնվեն:

2. Քանի՞ եռանիշ թիվ կարելի է կազմել 1, 2, 3 թվանշանների միջոցով, (թվանշանները կարող են կրկնվել):

3. Քանի՞ եղանակով կարող են երկու պատանի հրավիրել պարելու չորս աղջկա (յուրաքանչյուր պատանի կարող է հրավիրել միայն մի աղջկա):

4. Խանութում կա չորս տեսակի շոկոլադե սալիկ: Արամը ցանկանում է գնել երկու շոկոլադե սալիկ (կարող է գնել նաև նույն տեսակի): Քանի՞ եղանակով է հնարավոր դա անել:

5. Գրադարանում կա չորս գիրք: Դրանցից պետք է ընտրել երկուսը: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր դա անել:

6. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր ա, բ, գ տառերից կազմել երկտառ «բառեր» (օրինակ՝ բա, գգ):

Քանի որ դպրոցում աշակերտների առաջադիմությունը գնահատվում է 10-միավորային համակարգով, իսկ ՄՄ(ՏԿ) բակալավրի կրթական ծրագրում՝ 100-միավորային, ապա ընդհանուր պատկեր ունենալու համար մենք որոշեցինք օգտագործել միասնական տարակարգող համակարգեր՝ չորս մակարդակներով.

1-ին մակարդակ՝ գիտելիքների ցածր մակարդակ, սովորողը չի տիրապետում բոլոր հիմնական փաստերին, իսկ եթե տիրապետում է, չի կարողանում կիրառել գործնականում:

2-րդ մակարդակ՝ գիտելիքների մակարդակը միջինից ցածր է, սովորողը մասնակիորեն տիրապետում է հիմնական փաստերին և մասնակիորեն է այն կիրառում գործնակում:

3-րդ մակարդակ՝ գիտելիքների մակարդակը միջին է, սովորողը հիմնականում տիրապետում է փաստերին և հիմնականում դրանք կարողանում է կիրառել գործնականում:

4-րդ մակարդակ՝ գիտելիքների մակարդակը բարձր է, սովորողը հստակ տիրապետում է գործնական խնդիրներ լուծելու մեթոդներին, ազատօգտվում է համապատասխան ալգորիթմներից:

Եթե չափումները կատարվում են կարգային սանդղակով, ապա սանդղակը բաժանվում է 4 մասի՝ յուրաքանչյուրում տարակարգի 25%-ը:

Եթե չափումները կատարվում են միջակայքային սանդղակով (օրինակ՝ լուծված խնդիրների քանակը), ապա սանդղակը բաժանվում է չորս հավասար ենթամիջակայքերի: Այսպիսով, մենք առանձնացնում ենք (անկախ տարակարգային, թե միջակայքային սանդղակից) չորս մակարդակ: 2-րդ և 3-րդ մակարդակները միջին են:

Աղյուսակ 1

Փորձարարական խմբերում ստուգողական աշխատանքի արդյունքները

Սովորողի համարը	11-րդ դասարան						Յուրացման մակարդակը	II կուրս						Յուրացման մակարդակը
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6	
1.	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	2
2.	0,5	0	0	1	0	0	1	0,5	1	0	0	0	0	1
3.	0	0,5	0	0,5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
4.	1	0,5	0	0,5	0	0	1	0	1	0	1	0	0	2
5.	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
6.	1	0	0	0	0,5	0	1	1	0	0,5	0	0	0	1
7.	0	1	0	1	0	0	2	0,5	0,5	0	0	0	1	2
8.	1	1	0,5	0	0	0,5	2	1	0	0	0	0	1	2
9.	0	0	0,5	0	0	0	1	0	0	0	0,5	0,5	0	1
10.	1	1	0	0,5	0	0	1	1	0	0	1	1	0,5	2
11.	1	0	0,5	0	0	0	1	0	0	0	0	0,	0	1

												5		
12.	1	0,5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0,5	1
13.	0	0	0	0,5	0	0	1	0	0	0,5	0	0	0	1
14.	1	0	0	0,5	0,5	0	1	0,5	0	0	0	0	0	1
15.	0,5	1	0	0,5	0	0	2	1	1	0,5	0	0	0	2
16.	0,5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0,5	0,5	0	1
17.	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0,5	0	0,5	1
18.	1	0	0	0	1	0	1	0,5	0	0	0	0	0	1
19.	1	0	0,5	1	0,5	1	2	0	1	0,5	0	0	0,5	2
20.	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0,5	0,5	0	1
21.	0	0	0	0	0,5	0	1	0	0	0	0	0,5	0	1

Աղյուսակ 2

Ստուգողական խմբերում ստուգողական աշխատանքների արդյունքները

Սովորողի համարը	11-րդ դասարան						Ցուցանիշը միավորով	II կուրս						Ցուցանիշը միավորով
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1.	1	0	0	0,5	1	0	1	0,5	0	0	0	0	0	1
2.	1	0	0,5	0	0	0	1	1	0	0	0,5	0	0	1
3.	1	0,5	0	1	0	0	1	1	1	0,5	0	0	0	2
4.	0,5	0	0	0,	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1

				5										
5.	0	0,5	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0,5	1
6.	0	0	0	1	0	0	1	0	0,5	1	0	0	0	1
7.	1	0	0	1	1	0	2	1	0	0	0	1	0	2
8.	1	0,5	0	0	1	1	2	1	0	1	0	0,5	0	2
9.	0	1	0	0,5	0	0	1	0	0	0	0	0,5	0	1
10.	1	1	0	1	0	0,5	1	0	0	0	0	0	0	2
11.	1	0,5	0	1	0	0	1	0	0,5	0	0	0	0	1
12.	1	1	0,5	0	0	0	1	1	1	0,5	0	0	0	2
13.	0	1	0	0,5	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
14.	1	0	0	0	0	0	1	0	0,5	1	0	0,5	0	1
15.	0	0,5	0	0	0	0	2	0	1	0	0	1	0	1
16.	1	0	0	0	1	0,5	1	0,5	0	0	0	1	0	2
17.	1	0	0	0,5	1	0	1	0	0	0	0	0,5	0	1
18.	0,5	0,5	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0,5	1
19.	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
20.	1	0	0,5	0	1	0	2	0	0,5	0	0	0	1	2
21.	0	0	0	0,5	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
22.	0,5	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0,5	1	1	2
23.	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1

Եթե սովորողը խնդիրը լուծել է ճիշտ, ապա նա ստանում է 1 միավոր, եթե մասնակիորեն, ապա` 0,5 և եթե չի լուծում` 0 միավոր:

Կոմբինատորային գիտելիքների մակարդակի համեմատման համար, օգտվել ենք Ստյուդենտի հայտանիշից [52, Арм 4]:

0-ական վարկած ընտրվել է հետևյալը.

H_0` «Կոմբինատորային գիտելիքների մակարդակը փորձարարական և ստուգողական խմբերում նույնն է»:

Այլընտրանքային H_1 վարկածը կլինի.

H_1՝ «Կոմբինատորային գիտելիքների մակարդակը փորձարարական դասարանում բարձր է, քան ստուգողականում»:

Ընտրանքի ընդհանուր քանակի համար՝ $n_1 = 21,\ n_2 = 23$:

Միջին թվաբանականների համար կստանանք՝

$X_{\square\square\square\square} = 1{,}315,\ \ Y_{\square\square} = 1{,}342$:

Յետևաբար, ըստ

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - x_{\square\square\square})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i - y_{\square\square\square})^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

բանաձևի կարող ենք հաշվել միջին թվաբանականների ստանդարտ շեղումը.

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{(1-1{,}315)^2 \cdot 14 + (2-1{,}315)^2 \cdot 7 + (1-1{,}342)^2 \cdot 14 + (2-1{,}347)^2 \cdot 9}{21+23-2} \cdot \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{23}\right)} = 0{,}143:$$

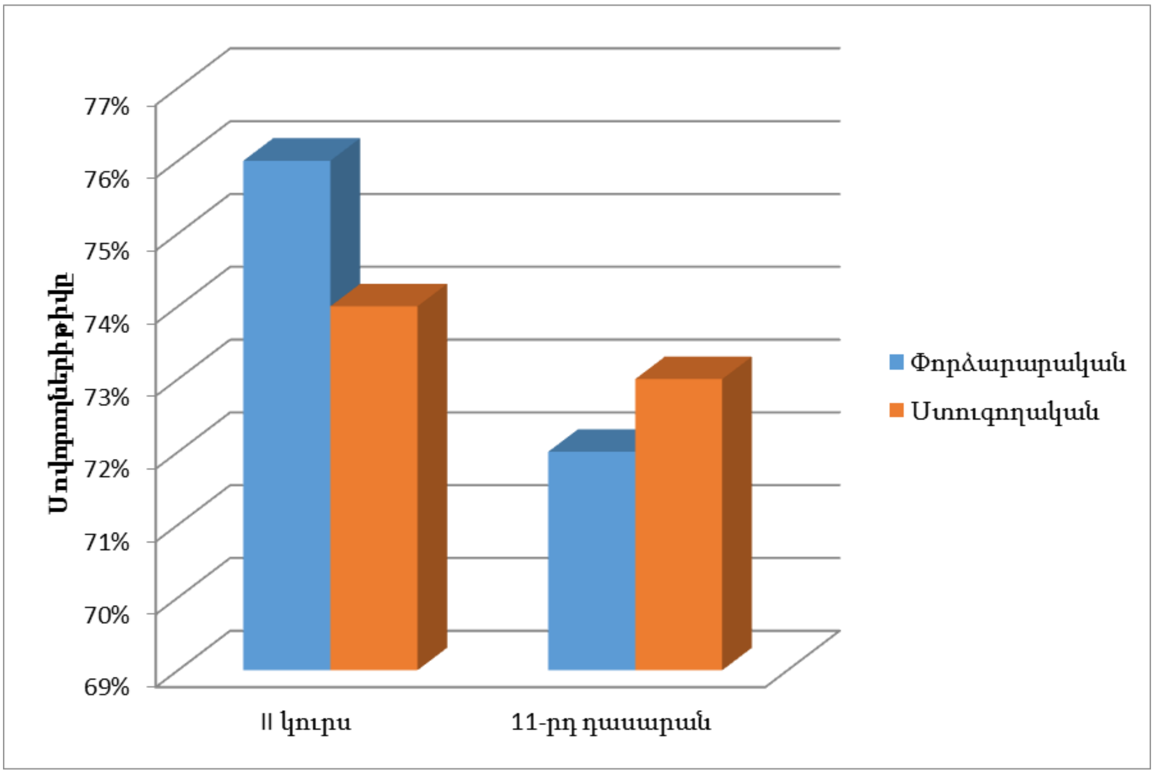
Ստյուդենտի հայտանիշի ստատիստիկի համար կունենանք՝

$$t_{\square\square\square} = \frac{X_{\square\square\square} - Y_{\square\square\square}}{\sigma_{x-y}} = \frac{1{,}315 - 1{,}342}{0{,}143} = -0{,}09593:$$

Այս $t_{\square\square\square}$ -ը համեմատելով վիճակագրության (աղյուսակային) $t_{\square\square\square\square} = 2{,}4$ հետ (նշանակալիության աստիճանը վերցված է՝ P≤0,01)՝

$$t_{\square\square\square} < t_{\square\square\square\square},$$

ունենում ենք, որ պետք է ընդունել 0-ական վարկածը, այն է՝ փորձարարական և ստուգողական դասարաններում սովորողների կոմբինատորային գիտելիքների մակարդակները նույնն են (տրամագիր 1):



Տրամագիր 1. Փորձարարական աշխատանքների առաջին փուլում սովորողների գիտելիքների մակարդակը

Այսպիսով, հաստատվեց, որ ոչ միայն ստուգողական և փորձարարական խմբերում սովորողների կոմբինատորային գիտելիքների մակարդակն է նույնը, այլ և այդ մակարդակը նույնն է և՛ ուսանողների, և՛ աշակերտների համար: Ուստի հաջորդ փուլերի աշխատանքներն իրագործվել են միայն II կուրսում:

2.3.2. Որոնողական փուլ (ուսուցանող փորձարարական մեթոդիկայի բովանդակությունը)

Ուսանողների կողմից կոմբինատորային դատողություններ անելու գործընթացում առաջացած դժվարությունների վերլուծությունը ցույց տվեց, որ դրանց հիմքում ընկած է կոմբինատորային հիմնական հասկացություններին (և բանաձևերին) տիրապետելու ձևական մակարդակը: Շատ դժվարություններ առաջանում էին այն բանից, որ սովորողները ձևական էին հասկանում ելքային բազմության (և դրա տարրերի) տարրական հատկությունները, որովհետև այդ բազմությունից տարբեր տեսակ միացություններ ստանալու գործընթացը կրում էր չհամակարգված բնույթ, արդյունքում ստացվում էին «ավելորդ» (կրկնվող) հավաքածուներ, կամ էլ բոլոր հավաքածուները հաշվի չէին առնվում:

Որպեսզի ուսանողները հասկանային հավաքածուներ կազմելու սկզբունքները, կազմակերպվեց նախնական պատրաստում՝ պրոպեդևտիկա:

Պրոպեդևտիկայի փուլը ցույց տվեց, որ հնարավոր է կազմել կոմբինատորային հիմնական հասկացությունների մեջ ուսանողների կողմնորոշվելու միասնական սխեմա, որի շնորհիվ այդ հասկացությունները ամբողջական համակարգ են կազմում:

Այնուհետև, սկսվեցին փորձարկվել գլուխ 2-ում մշակված մեթոդիկաները և, արդյունքում, կատարվեց դրանց համուղղում (կորեկցիա):

Ուսուցանող փորձարարությունը փորձարարական խմբերում կատարվեց այդ համուղղված մեթոդիկաների կիրառմամբ, իսկ ստուգողականներում՝ ավանդականով՝ ըստ առարկայական նկարագրի:

Միացությունների (կոմբինատորային) ուսուցման՝ մեր կողմից առաջարկված մեթոդիկան հենվում է հետևյալների վրա.

1. Նոր նյութի ուսուցումը բերվում է ընդհանրական սխեմային և հենվում է առանցքային ազդանշանների վրա:

2. Դասախոսը լուծում է տիպիկ խնդիր, բացատրում է լուծման ընթացքում առաջացած նրբությունները. ուսանողները հետևում են այդ ընթացքին և տեղի է ունենում ինտերակտիվ քննարկում, ապա

գրատախտակից ջնջվում է այդ լուծումը և ուսանողները բաժանվում են խմբերի:

3. Յուրաքանչյուր խումբ ստանում է առաջադրանք՝ դասախոսի կողմից լուծված խնդրի շրջանակներում՝ բարդության տարբեր աստիճաններով:

4. Խմբերը ինքնուրույն աշխատում են առաջադրանքների վրա՝ դիմելով նաև դասախոսին:

5. Խմբերի ավագները ներկայացնում են իրենց ստացած խնդրի լուծումները, որոնք ինտերակտիվ քննարկվում են մյուս խմբերի հետ:

Դիտարկենք դասի մի օրինակ.

Դասի (պարապմունքի թեման)՝ «Զուգորդություններ»:

<u>Նպատակը</u> . կրթական - զարգացնող.

- կոմբինատորային բանաձևերի կիրառություններ,
- կոմբինատորային մտածողության զարգացում,
- հիշողության և ընկալման զարգացում:

<u>Դասի (պարապմունքի) ընթացքը</u>.

1. Գիտելիքների արդիացում:
2. Դասախոսությունից ստացած տեսական գիտելիքների հիշեցում – ստուգում:
3. Դասախոսը լուծում է հետևյալ խնդիրը.

Համալսարանի շախմատային ակումբում պարապում են 15 տղա և 12 աղջիկ: Համալսարանի առաջնությանը պետք է մասնակցեն 8 տղա և 4 աղջիկ: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր ընտրել այդ մասնակիցներին:

ա) Դասախոսը ուսանողներին զգուշացնում է, որ հարկավոր է որոշել նաև ելքային բազմությունը (բազմությունները). քննարկման արդյունքում պարզվում է, որ կան երկու ելքային բազմություններ.

$A=$ { [illegible] }, $n(A) = 15,$

B [illegible] $=$ { [illegible] }, $n(B) = 12,$

բ) Ապա հարցերի և ինտերակտիվ քննարկումների միջոցով պարզվում է, թե այդ բազմություններից ի՞նչ տիպի օբյեկտներ պետք է ընտրել (հավաքածու՞, թե՞ ենթաբազմություն): Արդյունքում՝ պարզվում է, որ պետք է ընտրել ենթաբազմություն, այսինքն, օրինակ՝ 12 աղջիկներից 4 աղջիկ ընտրելը կախված չէ, թե ինչ հաջորդականությամբ պետք է ընտրել. օրինակ՝ {Անահիտ, Գոհար, Վարդ, Մարիամ} ընտրությունը նույնն է, ինչ օրինակ, {Գոհար, Վարդ, Մարիամ, Անահիտ} ընտրությունը:

գ) Օբյեկտները (մարդիկ) կրկնվո՞ւմ են այդ հավաքածուներում՝ օրինակ՝{Գոհար, Վարդ, (նույն) Գոհար, Մարիամ} հավաքածու կարո՞ղ է լինել: Պատասխանը ոչ է:

դ) Դասախոսը՝ ընդհանրական սխեմայի շրջանակներում, հիշեցնում է, որ այս դեպքում գործ ունենք զուգորդությունների հետ, և հիշեցնում է n տարրերից k-ական զուգորդությունների բանաձևը՝

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}:$$

ե) Ուրեմն 15 տղաներից 8 տղա կարելի է ընտրել $C_{15}^{8}=\frac{15!}{8!\cdot 7!}=6435$ եղանակով:

զ) Իսկ 12 աղջիկներից 4 աղջիկ կարելի է ընտրել $C_{12}^{4}=\frac{12!}{4!\cdot 8!}=495$ եղանակով:

է) Քանի որ աղջիկների ընտրությունը կախված չէ տղաների ընտրությունից, ապա խնդրի լուծումը կլինի

$$C_{15}^{8}\cdot C_{12}^{4}=6435\cdot 495=3185325\ :$$

1. Դասախոսը խմբերի բաժանված ուսանողներին բաժանում է քարտեր (յուրաքանչյուր խմբի համար մեկ քարտ՝ տարբեր խնդիրներով):

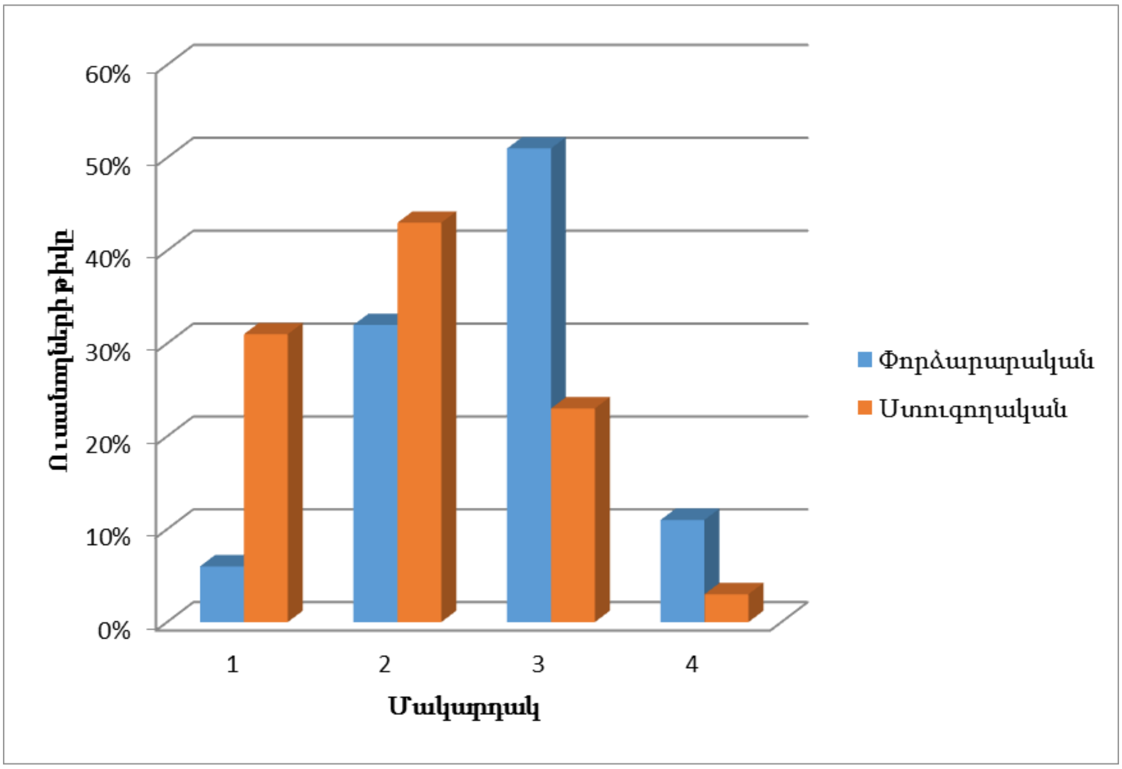
2. Յուրաքանչյուր խմբից մեկ ուսանող ներկայացնում է իր խմբի լուծումը:

Ուսուցանող փորձի արդյունքում տրվել է հանրագումարային ստուգողական աշխատանք (թեստ): Ահա դրա արդյունքները:

Աղյուսակ 3

Ուսուցանող փորձարարության արդյունքները

Խմբեր	**Ուսանողների քանակը**	**Գիտելիքների մակարդակը**			
		1	**2**	**3**	**4**
Փորձարարական խումբ	62	5	22	30	5
Ստուգողական խումբ	58	28	27	2	1



Տրամագիր 2. Փորձարարության երկրորդ փուլի աշխատանքների արդյունքների մակարդակը

Ավելի մանրամասն դիտարկենք այս արդյունքները:

Աղյուսակ 4

Փորձարարական խմբում հանրագումարային թեստի արդյունքները

Ուսանողի համարը	Հանրագումարային թեստի հանձնարարության համարը																				Գիտելիքի մակարդակը
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Փորձարարական խումբ																					
1.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	4
2.	+	+	+	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	2
3.	+	+	+	+	-	+	-	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	-	-	2
4.	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+	-	+	3
5.	-	+	+	-	+	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	1
6.	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	2
7.	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	-	3
8.	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-	2
9.	-	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-	+	3
10.	+	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	3
11.	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+	+	-	2
12.	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+	+	-	+	+	-	2
13.	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	-	+	3
14.	+	+	+	+	+	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	3
15.	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	3
16.	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+	-	+	+	-	+	+	+	-	+	-	2
17.	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	-	+	-	+	+	3

18.	+	+	+	-	+	-	+	+	+	-	+	+	+	-	+	-	+	+	-	+	2
19.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	4
20.	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	3
21.	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	+	+	-	2

Աղյուսակ 5

Ստուգողական խմբում հանրագումարային թեստի արդյունքները

Ուսանողի համարը	Հանրագումարային թեստի հանձնարարության համարը																				Գիտելիքի մակարդակը
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Ստուգողական խումբ																					
1.	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	+	-	2
2.	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-	+	+	-	+	-	+	+	-	-	2
3.	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	+	+	+	-	2
4.	+	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	+	-	2
5.	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	1
6.	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	+	-	-	-	+	-	+	-	-	-	1
7.	+	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	+	2
8.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-	3
9.	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	1
10.	+	-	+	-	+	+	-	+	-	+	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	2
11.	+	+	-	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	3
12.	+	-	+	-	+	+	+	+	+	-	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	2
13.	+	-	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
14.	+	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	+	-	+	-	+	+	+	-	2
15.	+	-	-	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	1
16.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	3
17.	-	+	+	-	+	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+	+	+	2

18.	-	-	+	-	+	+	-	+	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	-	1
19.	+	+	-	+	+	+	+	-	+	+	+	+	-	+	+	+	+	-	+	+	3
20.	+	+	+	-	+	+	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	+	+	-	+	2
21.	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-	-	1
22.	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	-	+	3
23.	+	+	-	+	+	-	-	+	-	+	+	+	-	+	-	+	+	-	+	-	2

Օգտվելով Ստյուդենտի հայտանիշից՝ կատարենք արդյունքների վիճակագրական վերլուծություն:

Վարկածներ՝

H_0՝ «Փորձարարական և ստուգողական դասարաններում ուսանողների կոմբինատորային մտածողության մակարդակը նույնն է»:

H_1՝ «Փորձարարական և ստուգողական դասարաններում ուսանողների կոմբինատորային մտածողության մակարդակը բարձր է, քան ստուգողական խմբում»:

Ընտրանքի ընդհանուր քանակը՝ $n_1 = 21,\ n_2 = 23$:

Միջինների համար ունենք, որ՝

$X_{\square\square\square\square} = 2{,}54,\quad Y_{\square\square} = 1{,}87$:

Ըստ այդմ՝

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - x_{\square\square\square})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i - y_{\square\square\square})^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1-2{,}54)^2 + (2-2{,}54)^2\cdot 9 + (3-2{,}54)^2\cdot 9 + (4-2{,}54)^2\cdot 2 + (1-1{,}87)^2\cdot 7 + (2-1{,}87)^2\cdot 11 + (3-1{,}87)^2\cdot 5}{21+23-2}\cdot\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{23}\right)} =$$

$= 0{,}039$:

Իսկ ստատիստիկը կլինի՝

$$t_{\square\square\square} = \frac{X - Y}{\sigma_{x-y}} = \frac{2{,}54 - 1{,}87}{0{,}039} = 18{,}76:$$

Համեմատելով $t_{\square\square\square}$ արժեքը աղյուսակային $t_{\square\square\square\square} = 2{,}4$ –ի հետ (նշանակելիության աստիճանը P≤0,01)՝ կունենանք $t_{\square\square\square} > t_{\square\square\square\square}$:

Այսինքն՝ 0-ական վարկածը մերժվում է և ընդունվում է H_1-ը, որն էլ նշանակում է, որ փորձարարական խմբերում ուսանողների կոմբինատորային մտածողության մակարդակը բարձր է, քան ստուգողականում:

2.3.3. Ձևավորող փուլ: Փորձարարական աշխատանքների արդյունքները

Բերենք փորձարարական աշխատանքներին մասնակցած բոլոր ուսանողների արդյունքների համեմատական գնահատականը: Կօգտվենք Խի քառակուսի (χ^2) հայտանիշից և Ստյուդենտի հայտանիշից:

Խի քառակուսի

Ունենք, որ

$$T_{\square\square\square} = \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \cdot \sum_i \frac{(n_1 \cdot Q_{1i} + n_2 \cdot Q_{2i})^2}{Q_{1i} + Q_{2i}}$$

$$= \frac{1}{62 \cdot 58}\left(\frac{(62 \cdot 6 + 58 \cdot 31)^2}{6 + 31} + \frac{(62 \cdot 31 + 58 \cdot 46)^2}{46 + 31} + \frac{(62 \cdot 51 + 58 \cdot 21)^2}{51 + 21} + \frac{(62 \cdot 8 + 58 \cdot 2)^2}{8 + 2}\right) = 154{,}28:$$

Եթե վերցնենք նշանակալիության աստիճանը P=0,01, ապա, քանի որ ազատության աստիճանը y=m-1=4-1=3 է, կունենանք՝

$T_{\square\square\square\square} = 12{,}44$:

Վարկածները հետևյալներն են՝

H_0՝ «Փորձարարական մեթոդիկայով ստացված արդյունքները նույնն են, ինչ ավանդական մեթոդիկայով ստացվածները»:

H_1՝ «Փորձարարական մեթոդիկան տալիս է ավելի բարձր արդյունքներ, քան ավանդականը»:

Քանի որ $T_{\square\square\square} > T_{\square\square\square\square} (154{,}28 > 12{,}44)$, ապա H_0 վարկածը մերժվում է և ընդունվում է H_1-ը:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Մեր հետազոտության նպատակը տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության զարգացումն ապահովող մեթոդական համակարգի մշակումն էր:

Այս հիմնախնդիրն ընտրելու հիմքում ընկած են մի շարք պատճառներ.

ա) Տարրական դպրոցի «Մաթեմատիկա» դասընթացի առարկայական ծրագրում որոշակի տեղ է հատկացված կոմբինատորիկայի հարցերին, բայց, ինչպես ցույց է տալիս TIMSS միջազգային գնահատման արդյունքների վերլուծությունը, ՀՀ-ի չորրորդ դասարանցիների ոչ բարձր արդյունքները որոշակիորեն պայմանավորված են դպրոցականների կոմբինատորային մտածողության ցածր մակարդակով: Իսկ դրա հիմնական պատճառը հենց տարրական դպրոցի ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության ոչ բարձր մակարդակն է:

բ) Կոմբինատորային հասկացություններն ունեն կրթական մեծ ներուժ, բայց գոյություն ունեցող ուսուցման մեթոդիկաները, ըստ էության, այդ ներուժը (պոտենցիալը) չեն վերածում իրական գիտելիքի: Ըստ այդմ, անհրաժեշտություն է առաջանում ավելի լայն և խորը ուսումնասիրել կոմբինատորային հասկացությունների ուսուցման հիմնահարցը: Այդօրինակ ուսումնասիրության հեռանկարը, մեր կարծիքով, պետք է իրագործվի մաթեմատիկայի, մանկավարժության և հոգեբանության խաչվածքում:

գ) Սակայն հիմնախնդիրը հետաքրքրություն է ներկայացնում ոչ միայն գործնական-կիրառական, այլև տեսական առումով, քանի որ կոմբինատորային հասկացությունների ձևավորման պայմանների ի հայտ բերումը կարող է խորացնել տարբեր տարիքի (կրտսեր դպրոցական, դեռահաս, երիտասարդ-ուսանող) անձանց իմացական-ինտելեկտուալ զարգացման մասին մեր պատկերացումները:

Հետազոտության մեջ հիմնավորվել և փորձարարական ճանապարհով հաստատվել է մեր այն (գիտական) վարկածը, որ եթե որոշվեն կոմբինատորային *մտածողության բաղադրիչները և այդ* *հասկացությունների ուսուցման հիմքում դրվի* բազմության (և դրա ենթաբազմությունների), բազմության տարրերի կարգը և կրկնելիության նկատմամբ ընդհանրական կողմնորոշումը, ապա էապես կարելի է բարձրացնել տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի կոմբինատորային մտածողության մակարդակը:

Ըստ այդմ, դրված (և ուսումնասիրված) խնդիրների լուծման արդյունքում արվել են հիմնական հետևություններ և ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

1. Ուսումնասիրելով ՌԴ-ում և այլ երկրներում կոմբինատորային մտածողության զարգացմանը վերաբերող տեսական մոտեցումները և գործնական փոխանցումները՝ մշակվել է տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի

1.1 կոմբինատորային մտածողության գործնական-կոմնորոշված և բազմություն-կողմնորոշված բաղադրիչները,

1.2 ուսումնական արդյունքների կառուցվածքի SOLO մոդելը,

1.3 գործողություն-գործընթաց-օբյեկտ-սխեմա՝ APOS մոդելը,

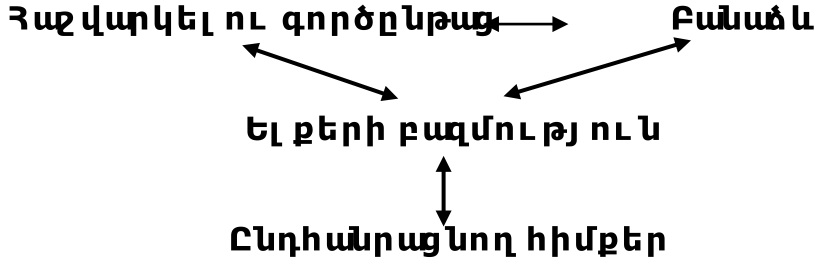
1.4 միակառույց-բազմակառույց-էական UMR ցիկլային մոդելը:

2. Ծրջանակվել են կոմբինատորային մտածողության զարգացման մանկավարժական պայմանները՝ հայտնի դիդակտիկական սկզբունքները ***(զարգացնող, գիտականություն, մատչելիություն, համակարգվածություն, հաջորդայնություն)*** կոմբինատորային հասկացությունների ուսուցման մեթոդական հարթություն փոխանցելու առումով և գիտելիք, գործունեություն, մտածողության ձևեր, իմանալ-հասկանալ կատեգորիաների համատեքստում:

3. Առաջարկվել է կոմբինատորային հասկացությունների ուսուցման ***եռադիրության սկզբունքը***, որը Ա.Մորդկովիչի ***երկդիրության սկզբունքի*** (մշակված միջին և ավագ դպրոցի համար) ընդլայնումն է: Այդ սկզբունքի էական մասն այն է, որ կոմբինատորիկայի բուհական ուսուցումը պետք է իրագործել ոչ

միայն բուհական «մաթեմատիկա» և «տարրական դպրոցում մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդիկա» դասընթացների, այլև տարրական դպրոցի «մաթեմատիկա» դասընթացների միասնության համատեքստում:

4. Մշակվել է կոմբինատորային հասկացությունների ուսուցման և կոմբինատորային մտածողության զարգացման մոդել` ընդհանրացնող հիմքի վրա.



5. Կոմբինատորային մտածողության զարգացման հոգեբանամանկավարժական անհրաժեշտ պայման է դեպի վերջավոր բազմության (և դրա ենթաբազմությունների) այնպիսի հատկությունների նկատմամբ ուղղորդումը, ինչպիսիք են կազմությունը, կարգավորությունը, տարրերի կրկնելիությունը: Այդօրինակ ուղղորդումը ձևավորվում է, հենվում է բազմությունների հավաքածուների նկատմամբ գործողություններ կատարելու միջոցով և, ըստ էության, բացահայտում է կոմբինատորային համակցությունների (տեղափոխություններ, կարգավորություններ, զուգորդություններ) միջև եղած առնչությունները:

6. Մշակվել է (նախորդ անհրաժեշտ պայմանը բավարար դարձնելու համար) կոմբինատորային հասկացությունների ուսուցման պրոպեդևտիկա, որի հիմքում դրված են`

ա) ելքային բազմության հատկությունները,

բ) կազմվող հավաքածուների հատկությունները, հավաքածուներում տարրերի հերթականությունը,

դ) հավաքածուներում տարրերի կրկնելիությունը, այս բոլորը պարզելու համար առարկայական-գործնական գործողություններ կատարելու պայմանները:

7. Մշակվել է կոմբինատորիկայի տարրերի ուսուցման և կոմբինատորային մտածողության զարգացման փուլային մեթոդիկա, որի հիմքում ընկած են՝
   ա) ընդհանրացնող հիմքով,
   բ) համարժեքության դասերով,
   գ) Վենի գծապատկերներով,
   դ) ծառակերպերով դատողությունները:

   Փորձարարական աշխատանքների արդյունքները հաստատեցին այդ մեթոդիկայի
արժեհավատությունը և կայունությունը:

8. Փորձարարական աշխատանքների արդյունավետության կարևոր պայմանն այն էր,

որ կոմբինատորային բոլոր համակցություններին ուղղորդված գործողությունները դիտարկվել են ամբողջական համակարգում և ընդհանրացնող հիմքի վրա՝ ի տարբերություն ընդունված մեթոդիկաների, որոնցում յուրաքանչյուր համակցություն ուսուցանվում է մյուսներից անկախ:

9. Առաջարկված մեթոդիկայի առավելություններից մեկն այն է, որ այն

կոմբինատորային հասկացությունների ուսուցման և կոմբինատորային մտածողության զարգացման հիմնահարցը լուծում է ոչ միայն տարրական դպրոցի ապագա ուսուցչի պարագայում, այլև միջին և ավագ դպրոցի, իսկ այդ մեթոդիկայի պրոպեդևտիկ մասը (ծառակերպային դատողությունների հետ մեկտեղ)՝ նաև տարրական դպրոցի աշակերտների դեպքում՝ դրանով իսկ իրագործվում է մեր կողմից առաջարկված՝ ուսուցման եռադիրության սկզբունքը:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Գ.Գ. Գևորգյան, Ա.Ա. Սահակյան, Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր.: Տիգրան Մեծ, (2009), 208 էջ:
2. Գ.Գ. Գևորգյան, Ա.Ա. Սահակյան, Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր.: Տիգրան Մեծ, (2010), 208 էջ:
3. Գ.Գ. Գևորգյան, Ա.Ա. Սահակյան, Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 12-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), Եր.: Տիգրան Մեծ, (2011), 208 էջ:
4. Ա. Կարապետյան, Վ. Վարդանյան, Կոմբինատորիկայի տարրերի ուսուցման մեթոդիկան հիմնական դպրոցի 5-6-րդ դասարաններում: Մաթեմատիկայի ուսուցման գիտամեթոդական հարցեր (ժողովածու, պրակ 5), Եր.: Յասոն, (2011):
5. Ա. Կարապետյան, Միացությունների տեսության տարրերը հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում: Բնագետ / Գիտահանրամատչելի և գիտամեթոդական բնագիտական հանդես/, 1, (2012):
6. Ա. Կարապետյան, Միացությունների տեսության տարրերը հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում: Բնագետ / Գիտահանրամատչելի և գիտամեթոդական բնագիտական հանդես/, 2, (2012):
7. Ա. Կարապետյան, Վ. Հակոբյան, Ավագ դպրոցի ֆիզիկամաթեմատիկական հոսքի կամ ընտրական դասընթացների բովանդակության ընտրության և մաթեմատիկայի կիրառական ուղղվածության մասին: Բնագետ / Գիտահանրամատչելի և գիտամեթոդական բնագիտական հանդես/, 2, (2012):
8. Ա. Կարապետյան, Վ. Հակոբյան, Երկանդամային գործակիցների, Պասկալի եռանկյան և դրանց հետ առնչվող կիրառական խնդիրների մասին: Բնագետ / Գիտահանրամատչելի և գիտամեթոդական բնագիտական հանդես/, 3, (2013):
9. Ս.Մ. Նիկոլսկի և ուրիշներ, Հանրահաշիվ: 9-րդ դասարանի դասագիրք, թարգմանիչ և խմբագիր՝ Ռ.Ավետիսյան.-Եր.: Անտարես, (2013), 256 էջ:
10. Հանրակրթական պետական կրթակարգ (միջնակարգ կրթության պետական չափորոշիչ), Ե.: Անտարես, (2004), 72 էջ:
11. Հանրակրթության պետական չափորոշիչ, Կառավ., 04.07.2012, N 858-Ն:
12. Հ.Ս. Միքայելյան, Հանրահաշիվ: Հանրակրթական դպրոցի 7-րդ դասարանի դասագիրք, Եր.: Էդիթ պրինտ, (2006), 304 էջ:

13. Հ.Ս. Միքայելյան, Հանրահաշիվ: Հանրակրթական դպրոցի 8-րդ դասարանի դասագիրք, Եր.: Էդիթ պրինտ, (2007), 304 էջ:
14. Հ.Ս. Միքայելյան, Հանրահաշիվ: Հանրակրթական դպրոցի 9-րդ դասարանի դասագիրք, Եր.: Էդիթ պրինտ, (2007), 304 էջ:
15. Ս. Մկրտչյան Ա. Աբրահամյան, Ս. Իսկանդարյան, Մաթեմատիկա, 1-ին դասարանի դասագիրք, մաս 2-րդ, Եր.: Զանգակ, (2012), 96 էջ:
16. Ս. Մկրտչյան, Ա. Աբրահամյան, Ս. Իսկանդարյան, Մաթեմատիկա, 2-րդ դասարանի դասագիրք, Եր.: Զանգակ, (2013), 176 էջ:
17. Ս. Մկրտչյան, Ա. Աբրահամյան, Ս. Իսկանդարյան, Մաթեմատիկա, 3-րդ դասարանի դասագիրք.-Եր.: Զանգակ, (2014), 192 էջ:
18. Ս. Մկրտչյան, Ա. Աբրահամյան, Ս. Իսկանդարյան, Ռ. Սարգսյան, Մաթեմատիկա: 4-րդ դասարանի դասագիրք, Եր.: Զանգակ, (2012), 176 էջ:
19. Բ. Նահապետյան, Ա. Աբրահամյան, Մաթեմատիկա 5: Հիմնական դպրոցի 5-րդ դասարանի դասագիրք, Եր.: ՄԱՆՄԱՐ, (2011), 224 էջ:
20. Բ. Նահապետյան, Ա. Աբրահամյան, Մաթեմատիկա 6: Հիմնական դպրոցի 6-րդ դասարանի դասագիրք, Եր.: ՄԱՆՄԱՐ, (2011), 224 էջ:
21. Ж. Адамар, Исследование психологии прогресса изобретения в области математики. М.: Сов. радио, (1975), 152 стр.
22. Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд, Алгебра и математический анализ. 11 класс: учеб. для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. Математики, М.: Мнемозина, (2005), 288 стр.
23. С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин, Алгебра и начала анализа. Учеб. для 10 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни, М.: Просвещение, (2008), 430 стр.
24. А.Г. Мордкович и др., под ред. А.Г. Мордковича, Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. 4.2: задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень), М.: Мнемозина, (2007), 336 стр.
25. В.И. Арнольд, Математика и математическое образование в современном мире. Математическое образование, № 2, (1997), стр. 22-23.
26. Е.Е. Белокурова, Методика обучения младших школьников проведению комбинаторных рассуждений при решении загдач. Автореф. дис. канд. пед наук. – Спб, (1993), 17 стр.
27. И.О. Беляева, Комбинаторный подход и его применение в преподавании математики в восьмилетной школе. Автореф. дис. канд. пед. наук., Орел, (1971), 18 стр.

28. Л.Ю. Березина, Использование графов в совершенствовании среднего математического образования. Автореф. дис. канд. пед. наук., М., (1975), 25 стр.
29. Дж. Брунер, Процесс обучения. М.: Изд-во Акад пед. наук РСФСР, (1962), 84 стр.
30. В.А. Болотюк, Формирование вероятностно-статистических представлений учащихся в курсе алгебры основной школы. Дис. канд. пед. наук: 13.00.02, Омск, (2002), 176 стр.
31. В.А. Булычев, Е.А. Бунимович, Изучение теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики. Программа для курсов повышения квалификации учителей, Математика в школе, №4, (2003), стр. 59-63.
32. Е.А. Бунимович, Вероятностно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики. Математика в школе, № 2, (2002), стр. 52-58.
33. Г.В. Бурменская, Л.В. Евдокимова, Формирование комбинаторного мышления у младших школьников и подростков. Вопросы психологии, № 2, (2007), стр. 30-43.
34. Л.О. Бычкова, Формирование вероятностно-статистических представлений учащихся при обучении математике в средней школе. Дис. канд. пед. наук., М., (1991), 135 стр.
35. А.В. Ванюрин, Методическая система стохастической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий текст. Дис. канд. пед. наук: 13.00.02, Красноярск, (2003), 152 стр.
36. Т. Варга, М. Глеман, Вероятность в играх и развлечениях текст. М.: Просвещение, (1979), 176 стр.
37. К.Р. Велскер, Рассмотрение элементов теории вероятностей и математической статистики в школе и развитие статистического образа мышления учащихся. Автореф. дис. канд. пед. наук. Тарту, (1973), 25 стр.
38. Н.Я. Виленкин, Комбинаторика, М.: Наука, (1969), 328 стр.
39. В.Ф. Волгина, Графовые модели в методике преподавания математики. Автореф. дис. канд. пед. наук., М., (1977), 23 стр.
40. С.И. Воробьева, Формирование элементов стохастической культуры младших школьников в процессе обучения математике. Дис. канд. пед. наук. Саранск, (1999), 215 стр.

41. Л.С. Выготский, Избранные психологические исследования. Мышление и речь, проблемы психол., развития ребенка, М.: Изд-во АПН РСФСР, (1956), 519 стр.
42. И.М. Гайсинская, Некоторые вопросы методики изучения элементов теории вероятностей в школьном курсе математики. Автореф. дис. канд. пед. наук. Ташкент, (1972), 27 стр.
43. П.Я. Гальперин, Развитие исследований по формированию умственных действий. Психологическая наука в СССР, т.1, М., (1959), стр. 441-469.
44. П.Я. Гальперин, Поэтапное формирование как метод психологического исследования / П.Я. Гальперин, А.В. Запорожец, А.Н. Карпова. Актуальные проблемы возрастной психологии. М., (1978), стр. 93-110.
45. М.А. Гарднер, Ну-ка догадайся! Текст.: [пер. с англ.], М.: Мир, (1984), 213 стр.
46. Б.С. Гершунский, Компьютеризация в сфере образования: проблемы и перспективы. М: Педагогика, (1987), 263 стр.
47. М. Глеман, Т. Варга, Вероятность в играх и развлечениях: Элементы теории вероятностей в курсе сред, школы. Пособие для учителя, пер. с фр. А. К. Звонкина, М.: Просвещение, (1979), 176 стр.
48. Б.В. Гнеденко, О методах комбинаторики в теории вероятностей и математической статистике. Текст, Математика в школе, №5, (1966), стр. 11-18.
49. Б.В. Гнеденко, Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. Текст, М.: Просвещение, (1982), 144 стр.
50. В.Л Гутенмахер, Ж. М. Раббот, Введение в комбинаторику. Решения задач: Метод, разработки для преподавателей ВЗМШ / АПН СССР, Всесоюз. заоч. мат. шк. при МГУ, М.: АПН СССР, (1989), 18 стр.
51. В.В. Давыдов, Виды обобщений в обучении (Логико-психол. проблемы построения учеб. предметов). М.: Педагогика, (1972), 423 стр.
52. В.В. Давыдов, Теория развивающего обучения. М.: Интор, (1996), 544 стр.
53. В.А. Далингер, Математика реализации внутрипредметных связей при обучении матетматике. М.: Просвещение, (1991), 80 стр.
54. С.Н. Дворяткина, К вопросу о вероятностно-статистическом образовании в школе. Текст. Вестник ЦМО МГУ, № 4, (2002), стр. 1-16.
55. А.Я. Дограшвили, Формирование у учащихся умений и навыков решения комбинаторных и вероятностных задач при обучении математике в восьмилетней школе. Автореф. дис.канд. пед. наук, Тбилиси, (1976), 30 стр.

56. Г.В. Дорофеев, О принципах отбора содержания школьного математического образования. Математика в школе, № 6, (1990), стр. 2-5.
57. Дж. Дьюи, Психология и педагогика мышления. М.: Лабиринт, (1922), 192 стр.
58. Г.С. Евдокимова, Теория и практика обучения стохастике при подготовке преподавателей математики в университете. Автореф. дис. докт. пед. наук., М., (2001), 34 стр.
59. Е.Н. Кабанова-Меллер, Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. М.: Просвещение, Гл. 3. Формирование приемов создания представлений, (1968), 80-118 стр.
60. Л.М. Кабехова, Методика построения единого курса "Начала теории вероятностей с элементами комбинаторики" для 9 класса средней школы. Автореф. дис. канд. пед. наук. Л., (1971), 21 стр.
61. Н.Г. Каменкова, Элементы теории вероятностей в начальной школе, Учеб. пособие / Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена. - СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, (1999), 44 стр.
62. Ф. Клейн, Лекции о развитии математики в XIX столетии. В двух томах, М.: Наука, (1989).
63. А.Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, (1974), 119 стр.
64. В.А. Крутецкий, Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, (1968), 431 стр.
65. А.Н. Леонтьев, Проблемы развития психики. 2-е изд., доп, М.: Мысль, (1965), 572 стр.
66. Г.Л. Луканкин, Научно-методические основы профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом институте. Дис. докт. пед. наук в форме науч. докл. Л., (1989), 59 стр.
67. Д.В. Маневич, Совершенствование содержания общего среднего образования на основе теории вероятностей и статистики. Текст автореф. дис. на соиск. уч. степ. докт. пед. наук: 13.00.01, 13.00.02, Ташкент, (1990), 36 стр.
68. М.И. Махмутов, А.О. Измайлов, Профессиональная направленность как педагогическое понятие и принцип. Вопросы взаимосвязи общеобразовательной и профессионально-технической подготовки молодых рабочих, Сб. науч. тр., М., (1982), стр. 4-31.

69. О.С. Медведева, Решение задач комбинаторного характера как средство развития мышления учащихся 5-6 классов. Автореф. дис. канд. пед. наук. М., (1990), 15 стр.
70. А.Г. Мордкович, Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте. Дис. докт. пед. наук. М., (1986), 355 стр.
71. Л.Ф. Обухова, Возрастная психология. Текст. Учебник, М.: Педагогическое общество России, (2001), 442 стр.
72. Ж. Пиаже, Избранные психологические труды. Психология интеллекта. Генезис числа у ребенка. Логика и психология. М.: Прсвещение, (1969), 659 стр.
73. Ж. Пиаже, Б. Инельдер, Генезис элементарных логических структур. Классификации и сериации, М.: Изд-во ин. лит., (1983), 448 стр.
74. А. Плоцки, Стохастика в школе как математика в стадии созидания и как новый элемент математики и общего образования. Автореф. дис. докт. пед. наук. СПб, (1992), 52 стр.
75. А. Плоцки, Вероятность события в стохастической линии школьного математического образования Текст. Математика в школе, 3, № 2, (1997), 24-28, 67-70 стр.
76. А. Плоцки, Стохастика в школе как математика в стадии созидания и как новый элемент математики и общего образования. Автореф. дис. докт. пед. наук. СПб, (1992), 52 стр.
77. А. Поддъяков, Развитие комбинаторных способностей. [Занятия в дет. саду] Дошкол. воспитание, № 10, (2001), стр. 90-96.
78. Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения Текст. Под ред. С.А. Яновской, М.: Наука, (1975), 464 стр.
79. Т.А. Полякова, Прикладные задачи стохастики как средство формирования и развития вероятностно-статистического мышления учащихся Текст. Омский научный вестник, (72), № 5, (2008), стр. 224-227.
80. А. Пуанкаре, О науке. М.: Наука, (1990), 735 стр.
81. Б.Н. Пятницын, Философские проблемы вероятностных и статистических методов. М.: Наука, (1976), 333 стр.
82. С.Л. Рубинштейн, Проблемы общей психологии. 2-е изд., М.: Педагогика, (1976), 416 стр.

83. Н.П. Рыжова, Взаимосвязь специальной и методической подготовки при изучении алгебры и теории чисел в педагогическом институте. Автореф. дис. канд. пед. наук., Самара, (1994), 16 стр.
84. З.П. Самигуллина, К методике решения простейших комбинаторных задач и задач на вычисление вероятности в средней школе. Авторoф. дис. канд. пед. наук., Челябинск, (1970), 21 стр.
85. С.А. Самсонова, Повышение эффективности профессиональной подготовки учителей математики в педвузе на основе использования стохастики. Автореф. дис. канд. пед. наук., М., (1997), 26 стр.
86. Г.И. Саранцев, Познавательная самостоятельность будущего учителя. Педагогика, № 4, (1995), стр. 63-66.
87. Г.И. Саранцев, Общая методика преподавания математики. Учебное пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов и университетов, Саранск: «Краен. Окт.», (1999), 208 стр.
88. В.Д. Селютин, Научные основы методической готовности учителя математики к обучению школьников стохастике Текст. Дис. докт. пед. наук: 13.00.02, Орел, (2002), 344 стр.
89. Н.Ф. Талызина, Управление процессом усвоения знаний (психологические основы). М.: Изд-во Моск. ун-та., (1984), 345 стр.
90. Н.А. Терешин, Прикладная направленность школьного курса математики Текст. Кн. для учителя, М.: Просвещение, (1990), 96 стр.
91. О.Н. Троицкая, Качественные задачи как средство обучения стохастике в средней школе на основе житейских знаний учащихся Текст. Автореф. дис. канд. пед. наук, 13.00.02, Орел, (2007), 19 стр.
92. В.В. Фирсов, Некоторые проблемы обучения теории вероятностей как прикладной дисциплине. Автореф. дис. канд. пед. наук., М., (1974), 27 стр.
93. А.Я. Халамайзер, Математика? -Забавно! М. 1989.
94. А.Я. Хинчин, Педагогические статьи. М.: АПН РСФСР, (1963), 204 стр.
95. А.П. Шихова Обучение комбинаторике и ее приложениям в средней школе. Автореф. дис. канд. под. наук, М., (1978), 20 стр.
96. А.В. Юркевич, Обучение студентов теории вероятностей на основе логико-методических моделей. Автореф. дис. канд. пед. наук. Минск, (1983), 20 стр.

97. S. Abromovich, A. Pieper, Fostering recursive thinking in combinatorics through the use of manipulatives and computing technology. The Mathematics Educator, 7(1), (1996), 4-12.
98. C. Batanero, J. D. Godino, V. Navarro-Pelayo, Effect of the implicitcombinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. Educational Studies in Mathematics, 32(2), (1997), 181-199.
99. J. Biggs, K. Collins, Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour. In H. Rowr (Ed.), Inteligence, reconceptualization and Measurment, New Jersy: Laurence Erlbaum Assoc, (1991), 57-67.
100. B. Dahl, Various thearetical frameworks in concept construction and how to move forward as a field: A commentary to Pegg an Tall, ZDM, 38(1), (2006), 63-69.
101. E. Dubinsky, Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), Advanced Mathematical thinking, Dordrecht: Kluwer, (1991), 95-123.
102. J.G. Dubois, Une systematique des configurations combinatoires simples. Educational Studies in Mathematics, 15(1), (1984), 37-57.
103. M. M. Eizenberg, O. Zaslavsky, Cooperative problem solving in combinatorics: The inter-relations between control processes and successful solutions. Journal of Mathematical Behavior, 22, (2003), 389-403.
104. L. English, Young children’s combinatorics strategies. Educational Studies in Mathematics, 22(5), (1991), 451-474.
105. L. English, Childrens' strategies for solving two- and three- dimensionalcombinatorial problems. Journal for Research in Mathematics Education 24(3), (1993), 255-273.
106. L. English, Assesing for structural understanding in childrens' combinatorial problem solving. Focus on Learning Problems in Mathematics, 21(4), (1999), 63-83.
107. E. Fischbein, A. Gazit, The Combinatorial Solving Capacity in Children and Adolescents. Zentralblattfur Didaktitk der Mathematik 5, (1988), 193-198.
108. H. Freudenthal, The aims of teaching probability, Proceeding of the I CSMP Conference. - cp 105.
109. G. Harel, What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In R. B. Gold, R. Simons (Eds.), Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy: Mathematical American Association, (2008).
110. E. Lockwood, Student approaches to combinatorial enumeration: The role of set-oriented thinking. (Unpublished Doctoral Dissertation), Portland State University, Portland, OR, (2011).

111. C.A. Maher, A.B. Powell, E.B. Uptegrove, Combinatorics and reasoning: Representing, justifying and building isomorphisms Vol. 47, (2010).
112. J. Mason, Thinking Mathematically. Amsterdam: Adison-Wesly, (1985).
113. Reasoning. In G. A. Jones (Ed.), Exploring Probability in school: Challenges for teaching and learning, 121-141.
114. G. Schubring, History of mathematics for trainee teachers. In I. Fauvel & Van Maanen (Eds.), History in mathematics education. the ICMI Study (New ICMI Study Servies, Dordrecht, The Netherlands: kluwer Academic Publishers, Vol. 6, (2000), 91-142.
115. A. Sfard, On two metaphors for learning and Danger of choosing just one. Educational Researcher, 27(2), (1998), 4-13.
116. A. Sfard, On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, (1991), 1-36.
117. J. Shin, L.P. Steffe, Seventh-graders' use of additive and multiplicativereasoning for enumerative combinatorics problems. Paper presented at the 31st Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Atlanta, GA: Georgia State University, (2009).
118. R.R. Skemp, the Psychology of Learning Mathematics. London: Penguin, (1993).
119. B. Sriraman, L.D. English, Combinatorial mathematics: Research into practice. Mathematics Teacher, 98(3), (2004), 182-191.
120. P.M. Van Hiele, Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. New York: Academic Press, (1986).
121. T. Varga, Combinatorial and probability for Yong children Sherbrooke Mathematics Project. - Sherbrooke, Canada, (1967).
122. E. Von Glasersfeld, Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning. Washington, D.C.: Falmer Press, (1995).
123. B. J. Wadsworth, Piaget's Theory of Cognitive and Affective Development: Foundations of Constructivism (5th ed.). New York City: Longman, (1996).

ՀԱՎԵԼՎԱԾ

1. Հաշվել՝ 1. A_6^3; 2. A_7^4; 3. A_9^5;

   4. $\dfrac{A_6^3}{A_5^2}$; 5. $\dfrac{A_8^3+A_7^4}{A_6^3}$; 6. $\dfrac{A_{10}^6-A_{10}^5}{A_8^5-A_9^4}$:

2. Հաշվել՝ 1. P_4; 2. P_6; 3. P_9;

   4. $\dfrac{P_3}{P_6}$; 5. $\dfrac{P_5+P_4}{P_3}$; 6. $\dfrac{P_6-P_4}{P_3}$:

3. Հաշվել՝ 1. $\dfrac{P_8-P_7}{7P_7}$; 2. $\dfrac{P_8}{A_8^7}$; 3. $\dfrac{A_8^7-P_5}{A_5^2}$; 4. $\dfrac{2P_3+3A_4^2}{5P_5-P_3}$;

   5. $6!$; 6. $(n+1)!$; 7. P_{2n}; 8. P_{2n+1}:

4. Հաշվել՝

   1. C_6^2; 2. C_8^3; 3. C_{11}^4; 4. C_{12}^7;

   5. C_{100}^{98}; 6. C_{40}^{38}; 7. C_{20}^{17}; 8. C_{54}^{52}:

5. Ստուգել հետևյալ հավասարությունները.

   1. $C_{15}^{10}=\dfrac{A_{15}^5}{P_5}$; 2. $C_m^8=\dfrac{A_m^{m-8}}{P_{m-8}}$:

6. Գտնել.

1) տեղափոխությունների թիվը $k+1$ էլեմենտից.

2) տեղափոխությունների թիվը $m+n$ էլեմենտից.

3) տեղափոխությունների թիվը $m+2$ էլեմենտից.

4) տեղափոխությունների թիվը $2n+2$ էլեմենտից:

7. Գտնել յուրաքանչյուր զուգորդությունում m էլեմենտներից՝ $n+1$-ական զուգորդությունների թիվը:

   1. C_{m+1}^{n-1}; 2. C_{m+1}^{n+1}; 3. C_{m-n}^{n+1}; 4. C_{m+2}^{n-2};

   5. C_{m+2}^{n}; 6. C_m^{n-1}; 7. C_{n+2}^{k-1}; 8. C_{n-1}^{k+2}:

8. Գտնել.

   1. $\dfrac{A_m^5+A_m^4}{A_m^3}$; 2. $\dfrac{A_m^{n+2}+A_m^{n+1}}{A_m^n}$; 3. $\dfrac{A_{m+n}^{n+2}+A_{m+n}^{n+1}}{A_{m+n}^n}$;

   4. $\dfrac{A_{m+n}^{n-n+2}+A_{m+n}^{m-n+1}}{A_{m+n}^{m-n}}$; 5. $\dfrac{A_{m-1}^{n-1}\cdot P_{m-n}}{P_{m-1}}$; 6. $\dfrac{A_m^n\cdot P_{m-n}}{P_{m-1}}$:

9. Ստուգել հետևյալ հավասարությունները.

   1. $C_{m+1}^7=C_{m+1}^{m-6}$; 2. $C_m^9+C_m^8=C_{m+1}^9$; 3. $C_m^n+C_m^{n-1}=C_{m+1}^n$:

10. Պարզեցնել՝

1. $\frac{(n+1)!}{n}$; 2. $\frac{n!}{n(n+1)}$; 3. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$;

4. $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$; 5. $\frac{(2n)!}{n!}$; 6. $\frac{n!}{(n-2)!}$:

11. Լուծել հետևյալ հավասարումները.

1. $A_x^2 = 42$; 2. $A_x^3 = 56x$;

3. $A_{x+1}^2 = 30$; 4. $5C_x^3 = C_{x+2}^4$:

12. 1. $C_{x-3}^2 = 21$; 2. $C_x^3 = \frac{5x(x-3)}{4}$;

3. $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$; 4. $C_x^4 = \frac{15xA_x^2}{4}$:

13. 1. $\frac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$; 2. $\frac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$;

3. $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$; 4. $C_{x+1}^5 = \frac{3A_x^3}{8}$:

14. 1. $\frac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$; 2. $\frac{A_{x+1}^{n+1} \cdot P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90$;

3. $\frac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}} = 132$; 4. $\frac{A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{x-n}}{P_x} = 110$:

15. 1) Որոշել C_n^{19}, եթե տրված է, որ $C_n^{12} = C_n^8$;

2) Գտնել C_8^x, եթե $C_{18}^x = C_{18}^{x+2}$:

16. Գտնել n էլեմենտների թիվը, եթե հայտնի է, որ $2n$ էլեմենտներից $n+1$-ական կազմված զուգորդությունների թիվը հարաբերում է $2n+1$ էլեմենտից կազմված $n-1$ -ական զուգորդությունների թվին այնպես, ինչպես 3 : 5:

17. Լուծել հավասարումների հետևյալ համակարգը.

1. $\begin{cases} A_x^2 : A_x^{y-1} = 10, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = -\frac{5}{3}; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x, \\ C_{x-1}^y = 10; \end{cases}$

3. $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 8, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = 1{,}6: \end{cases}$

18. $a_1, a_2, ..., a_{10}$ տառերից կազմված 4-ական զուգորդությունների մեջ քանի՞սը չեն պարունակում a տառը, քանի՞սը՝ a և b տառերը:

19. $a_1, a_2, ..., a_{12}$ տառերից կազմված 5-ական կարգավորությունների մեջ քանի՞սը չեն պարունակում a տառը, քանի՞սը՝ a և b տառերը:

20. 1) Պարզեցնել հետևյալ արտահայտությունը.

$$\frac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1}\cdot P_{2x-n}},$$

21. Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$30C_{x-3}^{x-9}=19A_{x-4}^{4}:$$

22. Լուծել հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} A_{2n}^{3x}:A_{2n}^{3x-1}=8, \\ C_{2n}^{3x}:C_{2n}^{3x-1}=\dfrac{8}{9}: \end{cases}$$

23. Քանի՞ զանազան տարբերություններ կարելի է կազմել 50, 17, 48, 32, 20, 11 թվերից, եթե տարբերությունը կազմելու համար վերցնենք երկուական թիվ:

24. Պարզեցնել հետևյալ արտահայտությունը.

$$\frac{P_{m-n}\cdot A_m^n}{P_{m+1}}:$$

25. 1) Ստուգել հետևյալ նույնությունը.

$$C_{m+1}^{4}-C_m^3=C_m^4:$$

1) Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$C_{2x+3}^{2(x-1)}=4A_{2(x+1)}^{3}:$$

2) Լուծել հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} A_{2x}^{n-2}:A_{2x}^{n-3}=8, \\ C_{2x}^{n-2}:C_{2x}^{n-3}=2\dfrac{2}{3}: \end{cases}$$

26. 1) Ստուգել հետևյալ նույնությունը.

$$C_m^8-C_{m+1}^3+C_m^1=0:$$

2) Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$C_{x+1}^{x-4}=\frac{7}{15}A_{x+1}^{3}:$$

3) Լուծել հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} A_m^n:A_m^{n-1}=9, \\ C_m^n:C_m^{n-1}=3:2: \end{cases}$$

27. 1) Պարզեցնել հետևյալ արտահայտությունը.

$$\frac{A_m^{n-1}\cdot P_{m-1}}{10P_{m-1}}:$$

2) Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$C_{4x+9}^{4(x+1)}=5A_{4x+1}^{2}:$$

3) Լուծել հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} A_{5x}^{n-3} : A_{5x}^{n-2} = 1:7, \\ C_{5x}^{n+2} : C_{5x}^{n-3} = 7:4: \end{cases}$$

28. Քանի՞ տարբեր զույգ բաժանարարներ ունի 3570 թիվը:

29. Մայրիկն ունի 2 խնձոր և 3 տանձ: 5 օրվա ընթացքում ամեն օր նահանում է մի միրգ: Քանի՞ եղանակով է դա հնարավոր անել:

30. Կազմակերպությունը մի մասնագիտության գծով աշխատանք կարող է տրամադրել 4 կանանց, իսկ մյուսով` 6 տղամարդկանց, երրորդով` 3 աշխատողի` անկախ սեռից: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր լրացնել ազատ տեղերը, եթե կա 14 թեկնածու` 6 կին և 8 տղամարդ:

31. Մարդատար գնացքն ունի 9 վագոն: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր գնացք նստեցնել 4 մարդու, այն պայմանով, որ նրանք բոլորը պետք է գնան տարբեր վագոններով:

32. Խմբում կա 9 մարդ: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր նրանից ենթախմբեր կազմել այն պայմանով, որ ենթախմբում չլինեն 2-ից ավել մարդ:

33. 20 ուսանողներից կազմված խումբը պետք է բաժանել 3 բրիգադների, ընդ որում առաջին բրիգադում պետք է լինի 3 մարդ, երկրորդում` 5, իսկ երրորդում` 12: Քանի՞ եղանակով է դա հնարավոր անել:

34. Մրցույթի համար մարզիչը թիմում 10 տղաներից ընտրում է 5-ին: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր ձևավորել թիմ, եթե կոնկրետ 2 տղաներ պետք է ընդգրկվեն թիմում:

35. Շախմատային մրցաշարին մասնակցում էին 15 շախմատիստներ, ընդ որում նրանցից յուրաքանչյուրը խաղացել է մյուսների հետ մեկ խաղ: Այդ մրցաշարում քանի՞ խաղ է խաղացվել:

36. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր կազմել կոտորակներ 3, 5, 7, 11, 13, 17 թվերից այնպես, որ յուրաքանչյուր կոտորակում ընդգրկվի 2 տարբեր թվեր: Նրանցից քանի՞սը կլինի կանոնավոր կոտորակ:

37. Քանի՞ բառ կարելի է ստանալ տեղափոխելով **սար** և **համալսարան** բառերի տառերը:

38. 1-ից 1000000 թվերի մեջ ո՞ր թվերն են ավելի շատ. նրանք, որոնց գրառման մեջ հանդիպում է միավորը, թե նրանք, որոնցում այն չկա:

39. Բաժանորդը մոռացել է հեռախոսահամարի վերջին թիվը և դրա համար հավաքում է այն գուշակելով: Որոշել հավանականությունն այն բանի, որ նա ստիպված կլինի հավաքել ու 3-ից ոչ ավելի հեռախոսահամար:

40. Բաժանորդը մոռացել է հեռախոսահամարի վերջին երկու թվերը, բայց հիշում է, որ դրանք տարբեր են և արտահայտվում են 30-ից փոքր երկնիշ

թվով: Դա հաշվի առնելով՝ նա հավաքում է պատահական 2 թվեր: Գտնել հավանականությունն այն բանի, որ դրանք կլինեն անհրաժեշտ թվերը:

41. 6 փուչիկներ պատահական ձևով դասավորում են 3 արկղերում: Գտնել հավանականությունն այն բանի, որ բոլոր արկղերում կլինեն տարբեր քանակությամբ փուչիկներ, այն պայմանով, որ բոլոր արկղերն էլ դատարկ չեն լինի:

42. 6 ձեռագրեր պատահական ձևով դասավորում են 5 թղթապանակներում: Որքա՞ն է հավանականությունն այն բանի, որ մի թղթապանակը կմնա դատարկ:

43. Քարտերը, որոնց վրա գրված են 1-9 թվերը, դնում են արկղում և խառնում: Հանում են մի քարտ: Գտնել հավանականությունը այն բանի, որ քարտի վրա գրված թիվը կլինի ա/ զույգ, բ/ երկնիշ:

44. Դարակում 40 գիրք դրված է պատահական հերթականությամբ, որոնցում կա Նարդոսի եռահատորյակը: Գտնել հավանականությունն այն բանի, որ այդ հատորները գտնվում են համարների՝ ձախից աջ աճող հերթականությամբ, բայց պարտադիր չէ, որ լինեն իրար կողքի:

45. 5 քարտերից յուրաքանչյուրի վրա գրված է հետևյալ տառերից որևէ մեկը՝ **ա, մ, ր, տ, ու:** Քարտերը խառն են դասավորված: Գտնել հավանականությունն այն բանի, որ 4 հանված քարտերով հնարավոր կլինի կարդալ **ամուր** բառը:

46. Երեխայի մոտ կա 5 խորանարդ, որոնց վրա գրված են **Ա, Կ, Ա, Տ, Ր** տառերը**:** Որքա՞ն է հավանականությունն այն բանի, որ երեխան խորանարդիկներով կկազմի **կատար** բառը:

47. Կապոցում կա 20 դակիչ քարտ, համարակալված 101, 102, ..., 120 թվերով: Դակողը պատահական բացում է 2 քարտ: Գտնել հավանականությունն այն բանի, որ հանվել են 101 և 120 քարտերը:

48. Շարադրությունների հավաքածուի 5 հատորները դասավորված են գրադարակում պատահական հերթականությամբ: Որքա՞ն է հավանականությունն այն բանի, որ գրքերը դրված են ձախից աջ 1-ից 5-ը թվերի հաջորդականությամբ:

49. Պատահական ընտրված դոմինոյի խաղաքարը կրկնվող թվերով չէ: Գտնել հավանականությունն այն բանի, որ պատահական ընտրված 2-րդ խաղաքարը կարելի է դնել առաջինի կողքին:

50. Նետվում են 2 խաղոսկր: Որոշել հավանականությունն այն բանի, որ ա/ թվերի գումարը չի գերազանցում N-ը, բ/ արտադրյալը չի գերազանցում N-ը, գ/ արտադրյալը բաժանվում է N-ի. N=8:

51. Տիեզերանավի անձնակազմի մեջ մտնում են օդաչուն և ինժեները: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր ընտրել անձնակազմ, եթե օդաչուի տեղի համար կա 3 թեկնածու, իսկ ինժեների տեղի համար՝ 5:
52. Եռագույն դրոշի յուրաքանչյուր շերտը կարելի է գունավորել կապույտ, կարմիր, սպիտակ գույներից որևէ մեկով: Իրարից տարբերվող քանի՞ եռագույն դրոշ կարելի է ստանալ:
53. Դպրոցական ճաշարանում նախաճաշի համար պատրաստել են ապուր, շիլա և բլիթներ, իսկ ըմպելիքներից՝ հյութ, թեյ և կաթ: Քանի՞ տարբեր եղանակով է հնարավոր կազմել նախաճաշ:
54. Քանի՞ իրարից տարբեր երկնիշ թիվ կարելի է գրել՝ օգտագործելով 3, 5, 8 թվանշանները, եթե ա/ թվի գրառման մեջ միևնույն թվանշանը կարող է կրկնվել, բ/ թվի գրառման մեջ միևնույն թվանշանը չի կարող կրկնվել:
55. Քանի՞ իրարից տարբեր երկնիշ թիվ կարելի է գրել՝ օգտագործելով 7, 2, 0, 5 թվանշանները, եթե ա/ թվի գրառման մեջ միևնույն թվանշանը կարող է կրկնվել, բ/ թվի գրառման մեջ միևնույն թվանշանը չի կարող կրկնվել:
56. Տիգրանն ունի տարբեր գույների 4 գրիչ և տարբեր չափերի 3 տետր: Տիգրանը քանի՞ տարբեր եղանակներով կարող է կազմել մի տետրից ու մի գրիչից բաղկացած հավաքածու:
57. Աննան ունի տարբեր գույների 2 վերնաշապիկ և 3 կիսաշրջազգեստ: Կարո՞ղ է նա շաբաթվա 7 օրերից յուրաքանչյուր օրը հագնել նախորդից տարբեր կոստյում:
58. Տիգրանն իր հետամառանոց է տարել 3 շապիկ՝ կապույտ, դեղին, կարմիր, և մի սև կիսատաբատ: Աննան վերցրել է 2 շապիկ՝ նարնջագույն, դեղին և 2 կիսաշրջազգեստ՝ կանաչ, կապույտ: Աննան պնդում է, որ նա կարող է իր իրերից կազմել ավելի շատ կոստյումներ, քան Տիգրանը: Տիգրանը պնդում է, որ իրենց մոտ կոստյումների քանակը կլինի հավասար, քանի որ իրենց վերցրած իրերի քանակը հավասար է: Ո՞վ է ճիշտ:
59. Գայանեն ունի 4 զգեստ և 2 օձիք, իսկ Անին ունի 3 զգեստ և 3 օձիք: Աղջիկներից յուրաքանչյուրը քանի՞ եղանակով կարող է օձիքով զգեստ ընտրել:
60. Դու ունես 3 գլխարկ՝ կարմիր, կապույտ, դեղին, և նույն գույներով 3 վզկապ: Տարբեր գույնի գլխարկի ու վզկապի քանի՞ զույգ կարելի է կազմել:
61. Դու ունես տարբեր գույների 4 բաժակ: Դու որոշել ես դրանցից երկուսը նվիրել ընկերոջդ: Քանի՞ եղանակով է դա հնարավոր անել: Իսկ եթե որոշես երեքը նվիրել, քանի՞ եղանակով կարող ես դա անել:
62. Դավիթն ունի 6 խնձոր՝ 4 կարմիր և 2 կանաչ:

ա/ Նա կերել է 2 խնձոր: Խնձորներն ի՞նչ գույնի կարող են լինել: Քանի՞ եղանակ է հնարավոր:

բ/ Նա կերել է 3 խնձոր: Խնձորներն ի՞նչ գույնի կարող են լինել: Քանի՞ եղանակ է հնարավոր:

գ/ Նա կերել է 4 խնձոր: Խնձորներն ի՞նչ գույնի կարող են լինել: Քանի՞ եղանակ է հնարավոր:

63. Ափսեում կա տարբեր գույների 3 խնձոր՝ կանաչ, դեղին, կարմիր: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր այդ խնձորները դասավորել իրար կողքի:

64. Պարկում կան կապույտ և կարմիր գույների շատ գնդակներ:

ա/ Դու հանում ես 2 գնդակ: Ի՞նչ գույնի կարող են դրանք լինել: Քանի՞ տարբերակ է հնարավոր:

բ/ Դու հանում ես 3 գնդակ: Ի՞նչ գույնի կարող են դրանք լինել: Քանի՞ տարբերակ է հնարավոր:

գ/ Դու հանում ես 4 գնդակ: Ի՞նչ գույնի կարող են դրանք լինել: Քանի՞ տարբերակ է հնարավոր:

65. Դու ունես տարբեր գույների 5 կավիճ: Նկարչության համար ընտրում ես 2 կավիճ: Ընտրության քանի՞ եղանակ է հնարավոր: Իսկ եթե ընտրես 3 կավիճ, ընտրության քանի՞ տարբերակ կունենաս:

66. Դու ունես 4 տարբեր գույների խորանարդներ: Քանի՞ տարբերակով է հնարավոր այդ խորանարդները դասավորել իրար կողք այնպես, որ բոլոր տարբերակներում էլ առաջին խորանարդները լինեն նույն գույնի:

67. 5 տարբեր գույների բաժակներից քանի՞ եղանակով է հնարավոր զույգեր կազմել:

68. Աննան ունի իրարից տարբեր 3 գլխարկներ: Քանի՞ եղանակով նա կարող է այդ գլխարկները դարակում դասավորել իրար կողքի:

69. Խանութում վաճառում են կարմիր, դեղին, կանաչ և կապույտ փուչիկներ: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր այդ փուչիկներից կազմել զույգեր:

70. Դու ունես 10 կակաչ՝ 3 դեղին, 5 կարմիր, 2 նարնջագույն: Քանի՞ եղանակով կարող ես նրանցից կազմել փնջեր այնպես, որ փնջում լինի 3 կակաչ:

71. Դու ունես 3 տարբեր չափերի վրձիններ: Նկարչության համար ընտրել ու ես երկուսը: Քանի՞ եղանակով կարող ես կատարել այդ ընտրությունը:

72. Սեղանի վրա իրար կողք դասավորի՛ր ափսեն, գդալը և պատառաքաղը: Քանի՞ եղանակով կարող ես դա անել:

73. Աննան ունի 4 կարմիր և 3 կանաչ շրջան: Նա պետք է դրանցից 5-ով կազմի հավաքածու: Քանի՞ եղանակով նա կարող է դա անել: Իսկ եթե կազմի 3 շրջանից հավաքածու, քանի՞ տարբերակով կարող է նա դա անել:

74. Տիգրանն ունի 5 բեռնատար և 4 մարդատար մեքենա: Նա պետք է ընտրի դրանցից մեկը: Քանի՞ եղանակով նա կարող է ընտրել ա/ բեռնատար մեքենա, բ/ մարդատար մեքենա, գ/ ցանկացած տեսակի մեքենա:

75. Դարակում դրված են 3 դեղին և 4 կապույտ բաժակներ: Կարինեն պետք է ընտրի մի բաժակ: Քանի՞ եղանակով նա կարող է ընտրել ա/ դեղին բաժակ, բ/ կապույտ բաժակ, գ/ ցանկացած գույնի բաժակ:

76. Կատուների մրցույթին մասնակցել են 10 սիամական և 8 պարսկական կատուներ: Հանձնաժողովը քանի՞ եղանակով կարող է ընտրել ա/ սիամական կատուներից ամենալավին, բ/ պարսկական կատուներից ամենալավին, գ/ սիամական և պարսկական կատուներից ամենալավին:

77. Ափսեում կա 6 խնձոր և 3 տանձ: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր վերցնել ա/1 տանձ, բ/ 1 խնձոր, գ/ որևէ միրգ:

78. Երկգույն գրիչ պատրաստելու համար գործարանում օգտագործել են կարմիր, դեղին, կանաչ և կապույտ միջուկներ: Քանի՞ տարբեր եղանակով է գործարանը պատրաստել երկգույն գրիչներ:

79. Դու պետք է նկար նկարես, բայց ունես 3 գույնի ներկ՝ դեղին, կարմիր, կապույտ: Քանի՞ նոր գույն կարող ես ստանալ՝ խառնելով տարբեր ներկերը:

80. Գոռն ունի 5 գույնի գրիչ՝ կարմիր, կապույտ, կանաչ, սև, դեղին: Քանի՞ եղանակով նա կարող է ընտրել դրանցից երկուսը:

81. Պարի խմբակ են հաճախում 5 աղջիկ՝ Լիլիթը, Աննան, Հեղինեն, Լիանան, Մարիամը և 5 տղա՝ Գառնիկը, Արամը, Սուրենը, Անդրանիկը, Նարեկը: Իրարից տարբեր քանի՞ պարազույգ կարելի է կազմել:

82. Կազմել բոլոր տեղափոխությունները՝

1) երեք տառերից՝ a, b, c

2) չորս թվանշաններից՝ 5, 4, 3, 2:

83. Կազմել բոլոր կարգավորությունները՝

1) հինգ տառերից՝ a, b, c, d, e, -3-ական տառ յուրաքանչյուրում (առանց կրկնության),

2) չորս թվանշաններից՝ 1, 3, 5, 7, - 3-ական թվանշան յուրաքանչյուրում:

84. Կազմել բոլոր տեսակի զուգորդությունները հինգ տառերից՝ a, b, c, d, e, 3-ական տառ յուրաքանչյուրում:

85. Կազմել բոլոր գրաշրջությունները <<**Հայկ**>> բառի մեջ մտնող տառերից:

86. Փանի՞ ձևով կարելի է չորս մարդ նստեցնել չորս աթոռի վրա:

87. Մարդատար գնացքը բաղկացած է 10 վագոնից: Բանի՞ ձևով կարելի է կազմել գնացքը, տեղափոխելով վագոնները:
88. Քանի՞ ձևով կարելի է 6 մարդ նստեցնել մի նստարանի վրա:
89. Յանդիպման ժամանակ 16 մարդ իրար ձեռք սեղմեցին: Ընդամենը քանի՞ ձեռքսեղմում տեղի ունեցավ:
90. 30 հոգուց բաղկացած մի խումբ աշակերտներ փոխանակեցին իրենց լուսանկարները: Քանի՞ լուսանկար պահանջվեց այդ փոխանակման համար:
91. Աշակերտները դպրոցում սովորում են 10 տարբեր առարկաներ: Բանի՞ ձևով կարելի է դասացուցակ կազմել մեկ օրվա համար, որպեսզի լինեն 5 տարբեր առարկաներ:
92. Բրիգադիրն աշխատանքի պետք է ուղարկի 5 մարդուց բաղկացած մի բրիգադ: Բրիգադիրը քանի՞ ձևով կարող է կազմել այդ բրիգադը, եթե նա ունի 12 մարդ:
93. 15 մարդուց քանի՞ տարբեր ձևով կարելի է ընտրել 3 մարդուց բաղկացած պատվիրակություն:
94. 40 մարդուց բաղկացած ժողովը քանի տարբեր ձևով կարող է իր միջից ընտրել ժողովի նախագահ, նրա տեղակալ և քարտուղար:
95. Քանի՞ ուղիղ գիծ կարելի է անցկացնել 8 կետերով, որոնք դասավորված են այնպես, որ ոչ մի երեք կետ չեն գտնվում մի ուղիղի վրա:
96. Քանի՞ տարբեր հնգանիշ թվեր կարելի է գրել 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 թվանշանների օգնությամբ (առանց կրկնության):
97. Որոշել բոլոր անկյունագծերի թիվը հետևյալ կանոնավոր բազմանկյունների համար՝ ա) հնգանկյան, բ) ութանկյան, գ) 12-անկյան, դ) 15-անկյան:
98. Քանի՞ տարբեր եռագույն դրոշներ կարելի է պատրաստել համակցելով կարմիր, կապույտ և սպիտակ գույները:
99. Արկղից, որի մեջ գտնվում է 1-ից մինչև 15-ը հաջորդաբար համարակալված 15 գունդ, պահանջվում է հանել 3 գունդ: Որոշել համարների բոլոր հնարավոր համակցությունների թիվը հանելու ժամանակ:
100. Քանի՞ տարբեր հարթություններ կարելի է անցկացնել 10 կետերի վրայով, եթե նրանցից ոչ մի երեքը չեն գտնվում մի ուղղի վրա և ոչ մի չորսը չեն գտնվում մի հարթության վրա:
101. Քանի՞ էլեմենտ կարելի է վերցնել, որպեսզի նրանցից կազմված 4-ական կարգավորությունների թիվը 12 անգամ մեծ լինի 2-ական կարգավորությունների թվից:

102. Քանի՞ էլեմենտից կարելի է կազմել 56 երկուական կարգավորություն:

103. Հայտնի է, որ $n+2$ էլեմենտներից 4-ական կազմված զուգորդությունների թիվը 11 անգամ մեծ է n էլեմենտներից 2-ական կազմված զուգորդությունների թվից: Գտնել էլեմենտների ո թիվը:

104. Քանի՞ տարբեր հնգանիշ թիվ կարելի է գրել 0, 1, 3, 5, 7 թվանշանների օգնությամբ:

105. Գտնել բոլոր հնգանիշ թվերի թվանշանների գումարը, որոնք գրված են 1, 4, 6, 7, 8 թվանշանների օգնությամբ:

106. 1, 2, 3, 4, 5 թվանշանների փոխադրություններից քանի՞սը չեն սկսվում 1 թվանշանով, քանի՞սը 12 թվով և քանի՞սը 123 թվով:

107. Քանի՞ ձևով երկու գրպանի մեջ կարելի է դնել տարբեր արժողության 7 դրամ:

108. Քանի՞ ձևով կարելի է երեք զինվորից և մեկ սպայից բաղկացած գիշերադետ կազմել, եթե զորամասում կան 80 զինվոր և 5 սպա:

109. Քանի՞ ձևով կարելի է 6 տարբեր առարկաներ բաշխել 3 անձանց միջև այնպես, որ յուրաքանչյուրը ստանա 2 առարկա:

110. Քանի՞ դեպք կարող է լինել, եթե 5 տարբեր մատիտներից և 5 տարբեր գրիչներից ընտրելու լինենք երկու մատիտ և երեք գրիչ:

111. Քանի՞ զանազան տարբերություններ կարելի է կազմել 50, 17, 48, 32, 20, 11 թվերից, եթե տարբերությունը կազմելու համար վերցնենք երկուական թիվ:

112. Քանի՞ տարբեր անկանոն կոտորակներ կարելի է կազմել 3, 5, 7, 11, 13, 17 թվերից այնպես, որ յուրաքանչյուր կոտորակի մեջ մտնի երկու թիվ:

113. Քանի՞ տարբեր կոտորակներ կարելի է կազմել 3, 5, 7, 11, 13, 16 թվերից այնպես, որ յուրաքանչյուր կոտորակի մեջ մտնի երկու թիվ:

114. Հարթության վրա դասավորված են 40 կետ այնպես, որ նրանցից երեքը գտնվում են մի ուղիղի վրա, իսկ մնացածից ոչ մի երեքը չեն գտնվում մի ուղիղի վրա: Քանի՞ տարբեր ուղիղներ կարելի է անցկացնել այդ կետերով:

115. 7, 2, 11, 9, 5, 3 թվերից քանի՞ տարբեր արտադրյալներ կարելի է կազմել, որոնք բազմապատիկ են 10-ին: