ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Բարդախչյան Վարդան Գնորգի

ԱՐԺԵԹՂԹԵՐԻ ՇՈՒԿԱՆԵՐՈՒՄ ՖԻՆԱՆՍԱԿԱՆ ԳՈՐԾԻՔՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄԸ ՈՉ ՀՍՏԱԿ ՄԵԹՈԴՆԵՐՈՎ

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ը.00.08-«Մաթեմատիկական տնտեսագիտություն» մասնագիտությամբ

Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման

Գիտական ղեկավար՝

տնտեսագիտության դոկտոր, դոցենտ

ՌՈՒԲԵՆ ԱԼԲԵՐՏԻ ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԵՐԵՎԱՆ 2017

Բովանդակություն

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ ... 3

ԳԼՈՒԽ I. ԲԼԵՔ-ԼԻՏԵՐՄԱՆԻ ՄՈԴԵԼԸ ... 10

1.1. Մարկովիցի մոդելը և թերությունները ... 11

1.2. Բլեք-Լիտերմանի մոտեցումը ... 19

ԳԼՈՒԽ II. ՈՉ ՀՍՏԱԿ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ ԿԱՊՎԱԾ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ... 46

1.1. Ոչ հստակ բազմություններ և ոչ հստակ թվեր. ոչ հստակ թվերի տարածություն ... 46

2.2. Ֆունկցիաներ ոչ հստակ մեծությունների վրա ... 51

2.3. Ոչ հստակ պատահական մեծություններ ... 52

2.4. Ոչ հստակ Բայեսյան թեորեմ ... 58

2.5. Ոչ հստակ ռեգրեսիաներ ... 62

Տանակայի ռեգրեսիան ... 62

Կելմինսի ռեգրեսիան ... 64

Դայմոնդի ռեգրեսիան ... 65

ԳԼՈՒԽ III. ՈՉ ՀՍՏԱԿ ԲԱՅԵՍՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ ... 67

3.1. Ոչ հստակ դիտարկումներով բայեսյան թեորեմը ... 67

3.2. Ոչ հստակ պատահական մեծություններ ... 74

3.3. Ոչ հստակ պատահական մեծությունների մաթսպասումը և վարիացիան ... 81

ԳԼՈՒԽ IV. ՈՉ ՀՍՏԱԿ ՌԵԳՐԵՍԻԱՆԵՐԸ ԲԼԵՔ–ԼԻՏԵՐՄԱՆԻ ՄՈԴԵԼՈՒՄ ... 87

4.1. Փոքրագույն քառակուսիների գնահատականի կառուցումը և հատկությունները ... 89

4.2. Օրինակ ... 97

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ ... 102

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ... 104

ՆՇԱՆԱԿՈՒՄՆԵՐԻ ՑԱՆԿ ... 116

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ատենախոսության թեմայի արդիականությունը: Ոչ հստակ բազմությունների և լոգիկայի գաղափարը առաջին անգամ ներկայացրել է Զադեն 1965թ. ([111]) : Այդ ժամանակից մինչ այժմ ոչ հստակ բազմությունները գտել են կիրառություններ շատ ոլորտներում: Որպես մի քանի օրինակ կարելի է թվարկել` ոչ հստակ չափերի տեսությունը, ոչ հստակ պատահական մեծությունների տեսությունը, ոչ հստակ թվերի տեսությունը, ոչ հստակ ռեգրեսիաները, ոչ հստակ մեծություններով վիճակագրությունը, ոչ հստակ ֆունկցիաների տեսությունը, ոչ հստակ օպտիմալացման և մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրներ և այլն:

Շատ են նաև ոչ հստակ մեծություններով չափվող ֆինանսական գործիքներից կազմված պայուսակների մոդելները: Առանձին գրքեր կան նվիրված ոչ հստակ մեթոդների կիրառմանը պայուսակների տեսությունում (օրինակ` [38],[43]): Այստեղ առաջարկվող մոդելներում ավելի հաճախ ոչ հստակ մեծությունների կիրառումը պայմանավորված է որոշ մեծությունների ճշգրիտ չափելու, հաշվարկելու հետ կապված դժվարություններով: Սա ոչ հստակ բազմությունների հասկացության մի մեկնաբանություն է:

Ոչ հստակ բազմությունները, սակայն, ավելի հաճախ համապատասխանում են ինտուիտիվ հասկացություններին, որտեղ ոչ այդքան հաշվարկելու հետ կապված բարդություններ կան, ինչքան որևէ հասկացության մեկնաբանման, ամողջությամբ ընկալման խնդիրներ:

Այսպիսի մեկնաբանմամբ ոչ հստակ բազմությունները ավելի կիրառելի են ֆինանսական գործիքների պայուսակների այն մոդելներում, որոնք կիրառում են ներդրողների կողմից գնահատականներ, և ավելի շատ են կախված սուբյեկտիվ ընկալումներից: Այդպիսի պայուսակի տեսության օրինակ է Բլեք-Լիտերմանի մոդելը ([13],[14]):

Բլեք-Լիտերմանի մոդելը առաջ է քաշվել որպես ֆինանսական պայուսակների կառուցման մի մոդել, որը հաղթահարում է Մարկովիցի դասական մոդելի ([78]) կիրառման հետ կապված խնդիրները, հաշվի առնելով նաև ներդրողի կարծիքը: Այս մոդելը հիմնավորվում է նրանով, որ ապագա գները (կամ եկամտաբերությունները) կանխատեսելու համար պատմական տվյալներում ոչ լրիվ ինֆորմացիա է արտացոլված, և կա շուկայից դուրս ինֆորմացիա, որը հասանելի է փորձագետներին: Հաճախ այս ինֆորմացիան թվային տեսքի չի լինում: Այն արտացոլված է լինում տեքստային ինֆորմացիայում կամ փորձագիտական ինտուիտիվ ընկալման մեջ:

Բլեք-Լիտերմանի մոդելի հիմնական առարկա է հանդիսանում ֆինանսական գործիքների եկամտաբերությունները:

Այս մոդելը օգտագործելով երկու հիմնական մեթոդաբանություն (բայեսյան, և տնտեսաչափական), հնարավորություն է ընձեռում կոմբինացնել երկու աղբյուրների ինֆորմացիա՝ շուկայի և փորձագիտական հանրության: Երկու մեթոդներն էլ բերում են նույն արդյունքին՝ եկամտաբերությունների միջինների պատմական տվյալների հիման վրա կառուցված գնահատականներից ավելի կայուն գնահատականների:

Մասնավորապես, շատ շուկաներ թույլ արդյունավետ են, ինչը նշանակում է, որ ողջ հրապարակային հասանելի ինֆորմացիայի հիման վրա այդ շուկաները արդյունավետ չեն: Հետևաբար, ներդրողների կամ փորձագետների կարծիքները հաշվի առնելը կարող է բարելավել կառուցվող պայուսակների բնութագրիչները և էականորեն բարձրացնել ճիշտ որոշումներ կայացնելու հնարավորությունները, հատկապես այդ տիպի շուկաներում:

Սակայն Բլեք-Լիտերմանի մոդելը՝ փորձագիտական գնահատականները հաշվի առնելու համար պահանջում է, որ այդ գնահատականները լինեն կետային, այսինքն՝ որ յուրաքանչյուր փորձագետ տա որևէ արժեթղթի եկամտաբերության հստակ կանխատեսում: Հաճախ փորձագիտական գնահատականները այդպիսի՝ կետային, տեսք չեն կրում: Նրանք իրենցից ներկայացնում են միջակայքեր (կամ ունենում են ավելի բարդ տեսք): Եթե հաշվի առնվի նաև փորձագետների համոզվածության աստիճանը, ապա փորձագիտական կանխատեսումները կարելի է տալ ոչ հստակ թվերի միջոցով:
Սա հաշվի առնելով որոշ հեղինակներ ([34],[40],[62]) անդրադարձել են Բլեք-Լիտերմանի մոդելի ընդհանրացման այս ուղղությանը:

Սակայն նշված աշխատանքներում, հեղինակները միջին եկամտաբերությունների նոր գնահատականները համարել են հիմնական մոդելում ստացվող արդյունքի ոչ հստակ դարձված տարբերակները, առանց մաթեմատիկական խիստ հիմնավորման և ոչ հստակ դարձնելու ճիշտ ձևը նշելու:

Ատենախոսությունը նվիրված է նշված աշխատություններում առաջ քաշված մոդելի ընդհանրացմանը, և երկու եղանակներով (ոչ հստակ բայեսյան, և ոչ հստակ տնտեսաչափական) Բլեք-Լիտերմանի գնահատականի դուրս բերմանը և կառուցմանը:

Հետազոտության նպատակը և խնդիրները: Աշխատանքի հիմնական նպատակն է ընդհանրացնել Բլեք–Լիտերմանի մոդելը այնպես, որ փորձագիտական գնահատականները լինեն ավելի ընդհանուր, և արդյունքը արտացոլվի ինտուիտիվ կառույցների (ոչ հստակ թվերի) միջոցով:

Այս նպատակին հասնելու համար, աշխատանքում տրվում են փորձագետների կողմից տրված ինտուիտիվ գնահատականների և առկա գնահատականների կոմբինացիան կառուցելու մեթոդաբանություն, ինչպես նաև տեսական հիմքեր՝ նման գնահատականի վիճակագրական նշանակալիության համար: Նշված նպատակին հասնելու համար առանձնացվել են հետևյալ խնդիրները՝

- Տալ ոչ հստակ տեսության հիմնական գործիքների սպառիչ նկարագրություն:
- Ոչ հստակ պատահական մեծությունների տեսության շրջանակներում ներկայացնել անհրաժեշտ արդյունքներ, որոնք կօգնեն ուսումնասիրել ոչ հստակ գնահատականների հատկությունները
- Կառուցել բայեսյան գնահատականների ոչ հստակ տարբերակներ:
- Կառուցել փոքրագույն քառակուսիների և ընդհանրացված փոքրագույն քառակուսիների գնահատականների ոչ հստակ տարբերակները:
- Ուսումնասիրել բայեսյան թեորեմի ոչ հստակ տարբերակի և ոչ հստակ ընդհանրացված փոքրագույն քառակուսիների գնահատականի համարժեքության պայմանները, դրա համար նախօրոք ստանալով ոչ հստակ պատահական մեծությունների երկու հայտնի

սահմանումների համարժեքությունը ապահովող պայմաններ:

- Ներկայացնել Բլեք–Լիտերմանի գնահատականի ոչ հստակ տարբերակի կառուցման կամ մոտարկման մեթոդաբանություն:
- Օրինակով ներկայացնել այդ գնահատականի կիրառությունը:

Հետազոտության մեթոդաբանությունը: Ուսումնասիրության հիմնական մեթոդները հիմնված են ոչ հստակ բազմությունների տեսության և ոչ հստակ պատահական մեծությունների տեսության վրա:

Աշխատանքում կիրառվում են

1) բայեսյան հավանականությունների տեսությունը և բայեսյան տնտեսաչափության տարրեր
2) ուռուցիկ բազմությունների տեսության որոշ արդյունքներ և հասկացություններ
3) չափի տեսության հասկացություններ և մեթոդներ
4) պատահական դաշտերի տեսության որոշ հատկություններ

Գիտական նորույթը: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները նոր են: Դրանցից կարելի է առանձնացնել, ոչ հստակ դիտարկումներով բազմաչափ ռեգրեսիայում ռեգրեսիոն գործակիցների ունակ գնահատականի ստացումը, ոչ հստակ պատահական մեծությունների վարիացիայի և մաթեմատիկական սպասման դեֆազիֆիկացիայի (defuzzification) հետ կապված հատկությունների ստացումը, ոչ հստակ բայեսյան թեորեմի՝ դասական բայեսյան թեորեմի ընդհանրացում հանդիսացող տարբերակի առաջարկը, ոչ հստակ պատահական մեծությունների երկու տարբեր սահմանումների համարժեքության պայմանի ստացումը:

***Ատենախոսության արդյունքների տեսական և կիրառական նշանակությունը*:** Աշխատանքի արդյունքները կրում են թե տեսական, թե գործնական բնույթ, սակայն ավելի գերակշռող են տեսական կիրառությունները: Արդյունքները առաջին հերթին կարող են օգտագործվել ոչ հստակ ռեգրեսիաներում, թույլ տալով ընդհանրացնել ոչ հստակ փոքրագույն քառակուսիների գնահատականը:

Արդյունքների մի մասը վերաբերվում են ոչ հստակ պատահական մեծությունների տեսությանը, և կարող են օգտագործվել այս ուղղությամբ որոշ ընդհանրացումներ կատարելու և ոչ հստակ տվյալներով վիճակագրության մեջ:

Հիմնական արդյունքներն ունեն նաև պրակտիկ նշանակություն, հաշվի առնելով Բլեք–Լիտերմանի մոդելի կիրառական բնույթը և փորձագիտական գնահատականների ոչ կետային լինելը: Մոդելի առաջարկվող ընդհանրացումը և կառուցման ձևը կարող են կիրառվել ֆինանսական գործիքների պայուսակների կառավարիչների կողմից:

Հայտնի է, որ զարգացող և անցումային երկրների շուկաները նույնիսկ թույլ արդյունավետ չեն: Հետևաբար, աշխատանքում ստացված արդյունքները հատկապես կարևոր են անցումային և զարգացող երկներում ֆինանսական որոշումներ կայացնելու և պայուսակներ կառուցելու համար: Մասնավորապես, Հայաստանում կենսաթոշակային ռեֆորմի արդյունքում ստեղծվել են ֆոնդեր, որոնց միջոցները տեղաբաշխվում են ինչպես Հայաստանում, այնպես էլ օտարերկրյա շուկաներում: Այդ պորտֆելների կառուցման համար անհրաժեշտ է վերլուծել մեծածավալ ինֆորմացիա, որը վերաբերվում է ինչպես կիսաուժեղ արդյունավետ, այնպես էլ թույլ արդյունավետ և անարդյունավետ շուկաներին: Այս աշխատանքում առաջարկվող մեթոդները թույլ են տալիս օգտագործել այդպիսի տարաբնույթ ինֆորմացիան պրակտիկ աշխատանքում պորտֆելներ կառուցելիս:

***Ատենախոսության դրույթների փորձարկումը*:** Ատենախոսության հիմնական արդյունքները ներկայացվել են Երևանի պետական համալսարանում սեմինարների տեսքով, և զեկույցով՝ «Բազմաչափ վիճակագրական անալիզ և տնտեսաչափություն» միջազգային դպրոց-սեմինարի շրջանակներում:

***Հրատարակումները*:** Ատենախոսության հիմնական արդյունքները հրատարակված են հեղինակի չորս հոդվածներում, որոնց ցուցակը ներկայացված է ատենախոսության վերջում:

***Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը*:** Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, չորս գլուխներից, եզրակացությունից, գրականության ցանկից՝ ընդհանուր 117 աղբյուրով, նշանակումների ցանկից: Աշխատանքի ծավալը 105 էջ է:

Ատենախոսությունը շարադրված է հետևյալ հերթականությամբ: Առաջին գլուխը նվիրված է Բլեք–Լիտերմանի մոդելին: Երկրորդ գլխում ներկայացված են ոչ հստակ բազմությունների տեսության, ոչ հստակ թվերի, պատահական մեծությունների, բայեսյան թեորեմի, ոչ հստակ ռեգրեսիաների տեսակների հետ կապված հիմնական հասկացությունները և սահմանումները: Հիմնական արդյունքները զետեղված են երրորդ և չորրորդ գլուխներում: Երրորդ գլխում ներկայացված են ոչ հստակ բայեսյան թեորեմի առանձնահատկությունները և դրա միջոցով նոր գնահատականի ստացման համար անհրաժեշտ հատկությունները: Չորրորդ գլուխը նվիրված է ոչ հստակ դիտարկումներով ռեգրեսիաներում պարամետրի գնահատականի ստացմանը:

Եզրակացությունում ներկայացված են հիմնական արդյունքները: Գրականության ցանկում ներկայացված են բոլոր աղբյուրները, որոնք օգտագործվել են աշխատանքում: Վերջում տրված է նշանակումների ցանկը:

Բոլոր գլուխները բաժանված են ենթագլուխների: Բոլոր գլուխների սկզբում նախապես համառոտ կերպով ներկայացված է գլխի բովանդակությունը: Ենթագլուխներում նույնը կատարված է ըստ անհրաժեշտության:

Աշխատանքում կան երկու տիպի հղումներ՝ տեքստի ներսում և տողատակով: Առաջինը կիրառված է, երբ ուղղակի բերվում է օգտագործված աղբյուրը: Տողատակով հղումները կիրառված են, երբ տրվում է որոշակի լրացուցիչ պարզաբանում:

Աշխատանքում հեղինակների ազգանունները որոշ բացառություններով բերված են լատինատառ:

Բոլոր նշանակումները, անկախ նշանակումների ցանկում տեղ գտնելուց, առանձին սահմանված են բուն ատենախոսության մեջ, կամ օգտագործվելուց առաջ, կամ անմիջապես հաջորդող տեքստում:

ԳԼՈՒԽ I. ԲԼԵՔ-ԼԻՏԵՐՄԱՆԻ ՄՈԴԵԼԸ

Այս գլուխը նվիրված է Բլեք–Լիտերմանի մոդելին: Նախ ներկայացված է դասական Մարկովիցի մոդելը, այնուհետև նշված են այդ մոդելի թերությունները և դրանց հաղթահարման հիմնական ձևերը, որոնցից մեկն էլ հենց հանդիսանում է Բլեք–Լիտերմանի պայուսակի մոդելը: Հաջորդիվ ներկայացված է վերջինիս գաղափարական տարբերությունները Մարկովիցի մոդելից, բերված են առանցքային երկու վիճակներին (հավասարակշիռ և փորձագիտական գնահատականների հետ կապված) համապատասխանող հավասարումները և մոդելի հիմնական արդյունքները:

Ներկայացված են յուրաքանչյուր ներմուծվող փոփոխականի ընտրության դժվարություններն ու առանձնահատկությունները: Ներկայացված են Բլեք–Լիտերմանի կիրառման փորձերի արդյունքները: Եվ վերջապես ներկայացված են այս մոդելի թերությունները, և դրանց հաղթահարման համար առաջարկված ընդհանրացումները:

Գլխի վերջում անդրադարձ է կատարվում մոդելում ոչ հստակ մեծությունների կիրառման առաջարկներին և եղած արդյունքներին: Հիմնավորվում է աշխատանքի առանցքային նպատակների համար, ոչ հստակ պատահական մեծությունների կիրառումը:

1.1.Մարկովիցի մոդելը և թերությունները

Ֆինանսական գործիքներից պայուսակների կառուցումը և դրանց կառավարումը ֆինանսական ակտիվների շուկաներում ներդրողների գործունեության հիմնական բաղադրիչներից է:

Ակտիվների ապագա գների մասին հստակության պակասով պայմանավորված, ցանկացած ներդրում բացի ենթադրյալ «խոստացված» եկամտաբերությունից, իր հետ բերում է նաև ռիսկ:

Այս կոնտեքստում ներդրողը պետք պայուսակը կազմելիս առաջնորդվի ոչ միայն շահույթի մաքսիմալացման սկզբունքով, այլ նաև փորձի իրեն ապահովագրել հնարավոր կորուստներից: Եվ հետևաբար ցանկացած ներդրում կարող է գնահատվել որոշակի ռիսկի չափով, որը պետք է զսպվի, և եկամտաբերությամբ, որը պետք է մաքսիմալացվի:

Մարկովիցի կողմից առաջարկված պայուսակի տեսության մեջ որպես նման ռիսկի չափ վերցվում է ակտիվների ցուցաբերած տատանողականությունը: Հաճախ այդ տատանողականությունը վերցվում է պատմական տվյալների հիման վրա՝ որպես եկամտաբերության ստանդարտ շեղում, իսկ սպասվող եկամտաբերության համար վերցվում է մաթեմատիկական սպասումը[1]: Այսինքն՝ որպես հիմնական ցուցանիշներ վերցվում են դրսևորած եկամտաբերությունների միջինը և միջինից շեղումների միջին ցուցանիշը:

Շրջանառվող բոլոր գործիքների համար ունենալով այդ ցուցանիշները, և դրանց ավելացնելով այդ գործիքների միջև համուղղվածության կապը ցույց տվող կորելյացիայի (կովարիացիայի) գործակիցները, կարելի է հաշվել գործիքների ցանկացած գծային կոմբինացիայի համար եկամտաբերությունը և ստանդարտ շեղումը: Իսկ ցանկացած պայուսակ կամ գործիքների ուռուցիկ կոմբինացիա է (երբ չկա կարճ վաճառք) կամ կշիռների գումարը մեկին հավասար պահող, բայց կշիռների բացասական արժեք թույլատրող կոմբինացիա: Նշվածները գծային կոմբինացիաներ են, և հետևաբար կարելի է հաշվել բոլոր այդպիսի կոմբինացիաների համար իրենց սպասվող եկամտաբերությունը և ռիսկը:

Այսպիսով՝ ցանկացած ռիսկի մակարդակի համար, կարելի է մաքսիմալացնել պայուսակի եկամտաբերությունը (կազմել մաքսիմալ եկամտաբերությամբ պայուսակ), կամ ցանկացած

[1] Մարկովիցի մոդելում եկամտաբերությունները պատահական մեծություններ են:

ֆիքսված եկամտաբերության համար կառուցել մինիմալ ռիսկով պայուսակ, մինիմալացնելով ստանդարտ շեղումը:

Այս երկու տարբերակները նկարագրվում են օպտիմիզացիոն խնդիրներով (տվյալ դեպքում` քառակուսային մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրներով)`

$$\begin{cases} E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} w_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = w^T \mu \to max \\ Var(X) = w^T \Sigma w = \bar{\sigma} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Կամ

$$\begin{cases} Var(X) = w^T \Sigma w \to min \\ E(X) = w^T \mu = \bar{\mu} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

որտեղ $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ - կշիռների սյունն է, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ - պատմական տվյալների վրա հաշվարկված միջինների (մաթեմատիկական սպասումների) սյունն է, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$ - պատմական տվյալների վրա հաշվարկված կովարիացիոն մատրիցան է, n-ը դիտարկվող ակտիվների քանակն է (տես [77])[2]:

Երբ չկան սահմանափակումներ կշիռների վրա, վերը նշվածը համարժեք է հետևյալ խնդրի լուծմանը`

$$w^T \mu - \frac{\lambda}{2} w^T \Sigma w \to max \qquad (3)$$

2 Այս հոդվածը համարվում է ֆինանսական պայուսակի տեսության հիմնաքարը: Դենց նրանից դրդված են գրվել և առաջարկվել բազմաթիվ այլ ընտրանքային մոդելներ, որոնց մեջ կարելի է ներառել նաև Բլեք-Լիտերմանի մոդելը:

որտեղ λ-ն որևէ հաստատուն է, որին հաճախ անվանում են ռիսկից խուսափման գործակից: $\lambda/2$ վերցված է զուտ մաթեմատիկական նպատակներով. ածանցելուց հետո ավելի հեշտ տեսք ստանալու համար: Խնդրի նշված՝ (3), ձևակերպումը կարելի է ստանալ Լագրանժի բազմապատկիչների (կամ Լագրանժի անորոշ գործակիցների) մեթոդի կիրառմամբ:

Մաքսիմալացվող ֆունկցիան հաճախ անվանում են քառակուսային օգտակարության ֆունկցիա[3]: Եվ, վերջապես, դրան ավելացնելով նոր սահմանափակումներ կշիռների վրա, խնդիրը բերվում է քառակուսային ծրագրավորման խնդրի:

Սակայն, ինչպես պարզվում է, Մարկովիցի մոտեցումը ունի մի շարք թերություններ: Դրանցից հիմնականներն են՝

1. Մոդելը հիմնված է պատմական տվյալների վրա: Հետևաբար քիչ պատմություն ունեցող գործիքների համար օգտագործվող գնահատականները կարող են թերի լինել (ոչ բավարար ընտրանքի պատճառով): Ավելին՝ հաճախ կարող է դժվար լինել կովարիացիաների գնահատականների կառուցումը, հատկապես, երբ պատմության տարբեր երկարությունով արժեթղթեր են դիտարկվում:[4]
2. Մոդելը վիճակագրական գնահատականները ընկալում է որպես փաստացի արդյունքներ (հաստատուններ) միջին եկամտաբերության և կովարիացիոն մատրիցի համար: Մինչդեռ իրենք՝ գնահատականները, կարող են չլինել բավականաչափ լավը, ունենալ շեղումներ, կամ ավելին՝

---

[3] Իրականում եթե որպես ռիսկից խուսափման գործակից վերցվի Էռոու-Պրատտի գործակիցը, ապա օգտակարության ֆունկցիայի տվյալ տեսքը կարելի է մեկնաբանել, որպես որևէ օգտակարության ֆունկցիայի Թեյլորի շարքի առաջին երկու էլեմենտներ: (տես [8])

[4] Այս և այլ թերությունների մասին նշվում է շատ հոդվածներում: Մեր ուսումնասիրված հոդվածներից կնշենք բոլորը, որտեղ տվյալ կետերի մասին խոսվել է: Նշված թերության մասին մասնավորապես նշված է՝ [21, 62, 82, 93, 95]-ում:

լինել ի սկզբանե շեղված գնահատականներ: Հետևաբար մոդելը` հիմնված լինելով մաքսիմալացման խնդրի վրա, հակված է մաքսիմալացնել գնահատականների սխալները[5]: (Տես [26, 44, 50, 80]:)

3. Մարկովիցի մոդելը շատ զգայուն է, հատկապես միջինների գնահատականների նկատմամբ: Այսինքն` փոքր փոփոխությունները միջինների սյան մեջ կարող են բերել մեծ փոփոխությունների օպտիմալ կշիռներում: (Տես [7, 44, 45, 50, 75, 82, 84, 91, 93, 116]:)[6]

4. Մոդելը զգայուն է միջինից շատ շեղված արժեքների նկատմամբ: Նրանք կարող են էականորեն վատացնել արդյունքները դարձնելով դրանք ոչ հուսալի: Իրոք, եթե մի թուղթ ունի հսկայական եկամտաբերություն, բայց նոր լինելու պատճառով դժվար է գնահատել նրա տատանողականությունը կամ այն փոքր թիվ է, ապա ներդրողի ողջ գումարը կարող է ուղղվել այդ գործիքին (դա նույնն է ինչ այդ գործիքին տրվի մեկ կշիռ, իսկ մնացածների կշիռը լինի 0): (Տես [44]:)

---

[5] Երբ մի գործիքի եկամտաբերություն ավելի բարձր է գնահատված քան սպասվող միջինը, այսինքն` երբ վիճակագրական գնահատականը շեղված է, տվյալ գործիքին կտրվի մեծ կշիռ: Օրինակ` եթե եկամտաբերության պատմական գնահատականը 5% է կանխատեսում, իսկ հաջորդ օրվա եկամտաբերությունը լինի 3%, ամեն 100 միավոր ներդրման գծով ներդրողը կստանա սպասվածից 2-ով ավելի քիչ գումար: Իսկ քանզի այդ գործիքին տրվել է մեծ կշիռ, կամ որ նույնն է ինչ ուղղվել է շատ գումար, ընդհանուր գումարային շեղումը սպասվածից շատ ավելի մեծ կլինի քան այն մոդելներում, որոնք հակված չէին լինի այդ գործիքին տալ մեծ կշիռ:

[6] Սակայն թե՛ մաթեմատիկական թե՛ էմպիրիկ տեսանկյունից ամենալավ մոտեցումը ցուցբերված է Best-ի և Grauer-ի մոտ [10, 11]-ում: Նրանք` օգտագործելով մատրիցի սեփական արժեքներով զգայունության ստուգման մեթոդը (ոչ Լյապունովի էքսպոնենտով) դուրս են բերել այդ զգայունության առավելագույն հնարավոր չափի բանաձև, և էմպիրիկորեն ստացել, որ միջինի թեկուզ 1% փոփոխությունների դեպքում տվյալ գործիքի կշիռը պայուսակում կարող է կրճատվել մոտ կեսով: Խոսքը 1% հարաբերական փոփոխության մասին է, ոչ թե ակտիվի միջին եկամտաբերության 1% փոփոխության:

5.Մոդելը հաճախ բերում է կոնցենտրացված արդյունքների: Այսինքն՝ ստացվող պայուսակները հաճախ կազմված են լինում մի քանի գործիքներից, և շատ գործիքների կշիռներ լինում են 0: Այս դեպքը հատկապես հատուկ է այն տարբերակին, երբ կա միայն երկար դիրքեր զբաղեցնելու սահմանափակում (այսինքն՝ պահանջվում է կշիռների ոչ բացասական լինելը): (Տես [4, 5, 7, 45, 75, 95, 113]:)

6.Մոդելը բերում է նաև անոմալ մեծ կարճ և երկար դիրքերի, պայուսակում, որտեղ միայն պահանջվում է, որ կշիռների գումարը լինի 1: Այսինքն՝ հաճախ ստացվում են պայուսակներ, որոնցում ինչ-որ գործիքի կշիռ ավելին է քան նախատեսված գումարը (կշիռը մեծ է 1-ից), իսկ մեկ այլ գործիքի նկատմամբ պետք է զբաղեցվի կարճ դիրք ավելին քան ներդրողը կարող է նախապես իրեն թույլ տալ (կշիռը փոքր է -1-ից): (Տես [7, 44, 45, 50, 82, 84, 89, 93]:)

7.Մարկովիցի մոտեցումը հաշվի չի առնում տնտեսական բաղադրիչը՝ ասենք կազմակերպության գործունեության ոլորտը[7], կամ կազմակերպության մասին առկա այլ ինֆորմացիան, դրական թե բացասական: (Տես [21]:)

8.Մոդելը՝ հիմնված լինելով պատմական տվյալների վրա, չի հաշվի առնում այլ առկա ինֆորմացիան: Միայն պատմական տվյալների վրա հիմնված մոդելները արդյունավետ են, երբ շուկան ինֆորմացիոն էֆեկտիվ է[8]: Հակառակ դեպքում գործիքի գնի վրա կլինեն այլ ազդող գործոններ, որոնք չեն արտացոլվում պատմական տվյալներում:

9.Մոդելը հաշվի չի առնում ներդրողի հակումը, կամ տեսակետը արժեթղթերի վերաբերյալ:

---

[7] Իրականում նշվածը մասամբ արտացոլվում է կորելացիաներում:

[8] [56]-ում մասնավորապես բերվում է այն պնդումը, որ շուկաները կիսաուժեղ էֆեկտիվ են ոչ թե ուժեղ: Այլ կերպ ասած ոչ լրիվ ինֆորմացիան է արտահայտված նախկին գներում:

10. Մարկովիցի մոդելը դասականորեն ստատիկ մոդել է:[9] Այստեղ կա նաև երկրորդ իմաստը. իրականում Մարկովիցի մոտեցումը չի մոդելավորում ապագա դեպքերը, այլ միայն նայում է հաջորդ պահի հնարավոր արժեքներին, հիմնվելով նախկին ինֆորմացիայի վիճակագրության վրա: (տես [44]:)

11. Ավելին՝ լինելով ստատիկ և տատանողական, Մարկովիցի մոդելը ունի դինամիկացման հետ կապված խնդիրներ: Պայուսակի ակտիվ կառավարման ժամանակ, շատ տատանումների դեպքում, նոր կշիռներ ապահովելու խնդիր է առաջանում, ինչը մեծ տրանզակցիոն ծախսերի հետ է կապված: Այսինքն՝ զգայունության պատճառով միջինի թեկուզ մի քիչ փոփոխության հետևանքով, կապված նոր տվյալի ի հայտ գալու հետ, կարող են էականորեն փոխվել կշիռները: Չենց այստեղից էլ կառաջանան նոր պայուսակ կազմելու, կամ առկա պայուսակում էական փոփոխություններ կատարելու հետ կապված ծախսերը: (Տես [84]:)

12. Մարկովիցի մոդելը հաշվի չի առնում այլ կարգի մոմենտները: Դրանք հատկապես էական են, երբ մեր պատահական եկամտաբերությունների բաշխումները այդքան էլ մոտ չեն նորմալ բաշխմանը: Չաճախ նշվում է եկամտաբերություններում ծանր պոչերի և ասիմետրիայի առկայության մասին: (տես [44]:)

13. Որոշ հեղինակներ քննադատում են ստանդարտ շեղման ընտրությունը որպես ռիսկի չափ, պնդելով, որ այն երկկողմանի սահմանափակում է:

---

[9] Այս հարցին մենք չենք անդրադառնա: Սակայն կան առաջարկված մի քանի դինամիկ ընդհանրացումներ, ինչպես դիսկրետ այնպես էլ անընդհատ դեպքերի համար:

14. Մոդելը հաշվի չի առնում գործիքների շուկայական կապիտալիզացիան: Այն կարող է տալ մեծ կշիռ փոքր կապիտալիզացիա ունեցող գործիքներին: Այս դեպքում կարող է խնդիր առաջանալ նաև տվյալ գործիքներում ներդրման անհնարինության հետ կապված, երբ ներդրողի գումարի նշված մասնաբաժինը (մոդելով ստացված կշիռով նախատեսված գումարը) ավելի մեծ է քան շուկայում շրջանառվող գործիքի ծավալը: (Տես [75, 87]:)[10]

15. Ընդհանրապես քառակուսային օգտակարության ֆունկցիայի տվյալ տեսքը համարվում է հակասական: Նշվում է, որ ըստ այդ տեսքի, ինչքան հարուստ է սուբյեկտը, այնքան նա ավելի ռիսկից խուսափող է, ինչը այդքան էլ հիմնավոր չէ, և կարող է հակասել տրամաբանությանը: (Տես [18]:)

16. Երբեմն մոդելը տալիս է բավականաչափ թույլ արդյունքներ: Օրինակ Jobson-ը և Korkie-ն իրենց աշխատանքում ([52,53]) էմպիրիկորեն ցույց են տվել, որ երբեմն նույնիսկ հավասարաչափ կշիռներով (երբ բոլոր դիտարկվող գործիքներին նույն գումարն է ուղղվում) պայուսակները ունենում են ավելի բարձր կատարողական:

Կան նշված թերությունները հաղթահարելու մի քանի մոտեցումներ: (Տես [46]:)

1. Լրացուցիչ սահմանափակումներ ներմուծելով: (Տես՝ օրինակ [51]:)
2. Օգտագործելով սեղմող (shrinkage) օպերատոր (այսինքն՝ ավելի կայուն (robust) գնահատականների անցնելով):

[10] Այս կետ հաղթահարելու համար, հաճախ օգտագործում են լրացուցիչ սահմանափակումներ:

3. Օգտագործելով տնտեսաչափական մոդելավորումը հասարակ պատմական միջին և վարիացիա վերցնելու փոխարեն:

4. Անցնելով դինամիկ մոդելի: (Օրինակ՝ [65],[114]-ում:)

5. Ավելացնելով այլ մոմենտներ, ասենք՝ դրանք ներառելով օգտակարության ֆունկցիայի մեջ (այսինքն՝ վերցնելով ոչ քառակուսային օգտակարության ֆունկցիա):[11]

6. Բլեք–Լիտերմանի մոտեցմամբ:[12]

Աշխատանքը հիմնականում նվիրված է վերջինին:

1.2. Բլեք-Լիտերմանի մոտեցումը

Բլեք-Լիտերմանի մոտեցումը կառուցում է ակտիվների եկամտաբերությունների նոր գնահատականներ՝ կոմբինացնելով որոշակի նախնական վիճակ փորձագիտական գնահատականների հետ: Եկամտաբերությունների այդ նոր գնահատականները, այսպիսով հաշվի են առնում այն մասը, ինչը չի կարող տալ վիճակագրությունը[13] (արտացոլված նախնական վիճակում, կամ պատմական տվյալներում): Դա կարող է մասնավորապես ներառել ներքին ինֆորմացիա, որը հայտնի է միայն գնահատականը հնչեցնող փորձագետին, կամ որոշակի տեքստային ինֆորմացիայից հետևություններ, որոնք չեն արտացոլված արժեթղթերի մինչ այդ ցուցաբերած եկամտաբերությունների մեջ:

---

[11] Հարկ է նշել, որ որոշ հեղինակներ արել են սա միայն ավելացնելով օգտակարության ֆունկցիայի Թեյլորի շարքի ավելի բարձր կարգի անդամները:

[12] Հիմնական հոդվածներն են [13], [14] –ը:

[13] Ճիշտ է ընդհանրապես նախնական վիճակը Բլեք-Լիտերմանի մոդելում այդքան էլ վիճակագրական կամ պատմական տվյալների վրա չի կառուցվում, բայց ամեն դեպքում նախնական վիճակի մեջ մտնող պարամետրերից գոնե կովարիացիոն մատրիցը հենց պատմական է, Բլեք-Լիտերմանի օրիգինալ դրվածքում:

Բլեքը և Լիտերմանը, իրականում, որպես նախնական վիճակ վերցրել են այսպես կոչված հակադարձ օպտիմիզացիայից ստացվող հավասարակշիռ վիճակը (սակայն իրենց հիմնական աշխատանքում նրանք փորձել են նաև այլ նախնական վիճակներ):

Բլեք–Լիտերմանի միջինների գնահատականի կառուցումը նույն կանխադրույթներով կարող է իրականացվել երկու տարբեր եղանակներով՝ ռեգրեսիոն մոտեցումով, և բայեսյան թեորեմի օգտագործմամբ[14]:

Մոդելի նկարագրությունը հաճախ տրվում է (պահպանելով նաև նշանակումները), ինչպես շարադրված է հաջորդիվ:[15]

1. Հավասարակշիռ վիճակը

Բլեք–Լիտերմանի մոդելը որպես հենքային, սկզբնական, հավասարակշիռ վիճակ վերցնում է CAPM-ի մոդելում ակտիվների եկամտաբերությունները:

CAPM մոդելի շրջանակներում, ակտիվների եկամտաբերությունները վեկտորական տեսքով տրվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$\Pi = \delta \Sigma w_M \tag{4}$$

որտեղ $\Pi \sim (n \times 1)$-ն եկամտաբերությունների գնահատականների սյունն է, $\Sigma \sim (n \times n)$-ն շուկայական պայուսակի կովարիացիոն մատրիցը, $w_M \sim (n \times 1)$-ն շուկայական պայուսակում յուրաքանչյուր գործիքի կշիռը (կամ մասնաբաժինը):

[14] Այս պայմանը պետք է ընկալել որոշ վերապահումով, քանի որ կան ընդունված մի շարք այլ մոտեցումներ: Կա տարբերակ, երբ նույն գնահատականը ստանում են սեղման օպերատորի միջոցով (այսինքն՝ որպես կշռված միջին), Կալմանի ֆիլտրի օգտագործմամբ (սա շատ նման է ռեգրեսիոն եղանակին, բայց նույնը չէ), և այլ մոտեցումներով:

[15] Գրեթե նույն նշանակումները օգտագործված են ամեն տեղ, բայց մենք հիմնականում համապատասխանեցրել ենք մեր նշանակումները [108]-ի նշանակումների հետ:

Վերջինս հաշվարկվում է կապիտալ հզացիաներին համապատասխան: n-ը գործիքների քանակն է, իսկ $\delta = \frac{E(R_M)-R_f}{\sigma_M^2}$ –ն ռիսկի պրեմիան բնութագրող սկալյար մեծություն է: R_f-ը ռիսկից զուրկ տոկոսադրույքն է:

Յավասարակշիռ վիճակի և ներմուծվող մեծությունների հետ կապված հարցերը

Մեկ խնդիր այստեղ այն է, որ իրականում խոսքը պետք է գնա ոչ թե եկամտաբերությունների մասին, այլ՝ ավելցուկային եկամտաբերությունների (այսինքն՝ յուրաքանչյուր գործիքի եկամտաբերության և ռիսկից զուրկ եկամտաբերության տարբերության) մասին (տես [44, 50, 108]): Որոշ գրականություններում դրա պարտադիր լինելը չի նշվում:[16]

Ենթադրվում է, որ այս վիճակը՝ CAPM մոդելից ստացված գնահատականը, նախապես հայտնի է (այսինքն՝ բոլոր ներմուծվող մեծությունները հայտնի են), այն իմաստով, որ Π-ն իրական եկամտաբերությունների (μ-ի) նախնական գնահատականն է: Մասնավորապես այստեղ $E(R_M)$-ը որոշվում է պատմական տվյալների և շուկայական կշիռների հիման վրա: σ_M^2-ը լիովին որոշվում է Σ-ի միջոցով՝ $\sigma_M^2 = w_M^T \Sigma w_M$ (պայուսակի վարիացիայի հաշվարկ) (տես օրինակ՝ [50],[94]), իսկ Σ-ն ենթադրվում է տրված, կամ հաշվարկվում է պատմական տվյալների հիման վրա:

R_f-ը ևս համարվում է տրված (հաճախ վերցվում է պետական կարճաժամկետ պարտատոմսերի տոկոսադրույքը):

Չնայած Բլեք–Լիտերմանի մոդելի հիմնական նպատակը Մարկովիցի մոտեցման թերությունների հաղթահարումն է,

[16] Օրինակ՝ [96]-ում: Ավելին՝ օրինակ [65]-ում օգտագործված են լոգարիթմական եկամտաբերությունները:

մասնավորապես, պատմական գնահատականների մեջ եղած սխալների մաքսիմալացման պրոբլեմի հաղթահարումը, սակայն նախնական վիճակում օգտագործվող մեծությունները, մասնավորապես՝ $E(R_M)$-ն և Σ-ը, հաշվարկվում են պատմական տվյալների հիման վրա: Իրենց հոդվածում ([14]) Բլեքը և Լիտերմանը հիմնավորում են Σ-ի համար հենց պատմական տվյալների վրա հիմնված գնահատականի օգտագործումը նրանով, որ օպտիմալ պայուսակի կշիռները Մարկովիցի մոդելում շատ ավելի զգայուն են հենց եկամտաբերությունների միջինների գնահատականների փոփոխությունների (կամ սխալների) նկատմամբ:

Նախնական գնահատականը՝ (4)-ը, հաշվվում է (3) խնդիրը լուծելով λ-ի փոխարեն վերցնելով δ-ն:

Որոշ հեղինակներ որպես δ-ի արժեք վերցրել են տարբեր թվեր առանց հղում անելու որևէ պատմական վիճակագրական տվյալների[17]: Չնայած նրան, որ նրանք նշում են, որ այս ձևով կազմվող վիճակը և δ-ն տարբերվում են CAPM-ի դասական ռեգրեսիոն դրվածքից, այնուհանդերձ δ-ն կարելի է հաշվարկել CAPM-ի ռեգրեսիոն եղանակում գնահատելով β[18]-ները, և որոշելով $E(R_M) - R_f$-ը: Ամեն դեպքում ստացվում է, որ δ-ն գնահատվելու է պատմական տվյալների հիման վրա, թեկուզ և միայն շուկայական պայուսակի համար: Սրանից խուսափելու համար, որոշ հեղինակներ δ-ի համար ուղղակի ընտրել են տարբեր արժեքներ: Դրանցից մի քանիսն են՝

1) $\delta = 3$ (տես [95]:)

[17] Սա հիմնավորված է պատմական տվյալների օգտագործումից հրաժարվելով:

[18] Իրականում β_i- երը տարբեր են տարբեր գործիքների համար, և որոշվում են՝ $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ բանաձևով: Իսկ ռեգրեսսիոն գործակիցը որոշվում է հետևյալ գծային մոդելից $E(r_i) = R_f + \beta_i\left(E(R_M) - R_f\right)$:

2)$\delta \approx 2{,}5$ (տես [47, 64]:)

3)$\delta = 3{,}07$ (տես [50]:)

4)$\delta = 1$ (տես [54]:)

5)$\delta \approx 1{,}67$ (տես [102]:)

6)$2\delta \in [2,6]$ (տես [89]:)

7)$\delta \approx 1{,}6118$ (տես [18]:)

8)$\delta = 3{,}8$ (տես [112]:)

Մեկ այլ խնդիր այստեղ կապված է շուկայում շրջանառվող ողջ գործիքների համախմբի համար տվյալների հավաքագրման հետ: Ոչ միշտ է, որ շուկայում շրջանառվող գործիքների մասին ողջ ինֆորմացիան հասանելի է և ինֆորմացիայի հավաքագրումը կարող է շատ աշխատատար լինել: Այս պրոբլեմը հաղթահարվում է շուկայական պայուսակի փոխարեն որևէ ուղենշային պայուսակի օգտագործումով: (Տես օրինակ [95]:)

(4) բանաձևով որոշվող նախնական գնատականի ընտրությունը նշանակում է, որ ներդրողը ինչ-որ տեղ վստահում է ուղենշային կամ շուկայական պայուսակի խելամիտ կառուցված լինելուն, կամ էֆֆեկտիվությանը:

Որպես նախնական վիճակի այլընտրանքային տարբերակներ դիտարկվել են (1) պատմական տվյալների վրա միջինները, (2) հավասար եկամտաբերությունները, (3) հավասար եկամտաբերությունները ռիսկի հավելումով: (տես [7, 14, 46, 50]:)

<u>Յավասարակշիռ վիճակի հավասարումը և մեծությունների ընտրության հետ կապված հարցերը</u>

Առաջին քայլում (կամ առաջին հավասարման համար) ենթադրվում է`

$$\Pi = \mu_{BL} + \varepsilon \tag{5}$$

Որտեղ ենթադրվում է, որ $\varepsilon \sim N(0, \tau\Sigma)$, $\varepsilon \sim (n \times 1)$, և հետևաբար $\mu_{BL} \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$: τ-ն ճշգրտող թիվ է:

Կարևոր մի դիտողություն սրահետկապված տրվում է [107]-ում: Պետք է նկատել որ Π-ն ավելցուկային եկամտաբերությունների միջինների գնահատականի սյունն է, և ոչ թե ավելցուկային եկամտաբերությունների: Այլ կերպ ասած այն որևէ պարամետրի գնահատական է:

Այսինքն՝ եթե եկամտաբերությունները բաշխված են նորմալ՝ $r \sim N(E(r), \Sigma_r)$ ապա նախնական գնահատականը միջինի նկատմամբ վերցվում է, $E(r) \sim N(\Pi, \tau\Sigma_r)$: Π - ն $E(r)$- ի գնահատական է:

Կարորշակի անորոշություն τ-ի ընտրության հետկապված: Ըստ որոշ հեղինակների τ-ն ցույց է տալիս պատմական կամ հավասակշիռ վիճակով պայմանավորված ավելցուկային եկամտաբերությունների միջինների գնահատականների նկատմամբ անվստահությունը (տես [113]): Այսինքն՝ ինչքան τ-ն փոքր է, այնքան մենք ավելի վստահ ենք, որ հավասակշիռ վիճակը՝ Π-ն, ավելցուկային եկամտաբերությունների միջինների համար լավ գնահատական է:

Որոշ հեղինակներ, և մասնավորապես իրենք՝ Բլեքը և Լիտերմանը, կողմ են τ-ն վերցնել 0-ին մոտ (տես [14, 108]): Կան այլ ներկայացված թվեր τ-ի համար տարբեր հեղինակների կողմից:

1)$\tau \in [0{,}5\,; 0{,}7]$ (տես [12]:)

2)$\tau \approx 0{,}025$

3)$\tau = 0{,}3$ (տես [31]:)

4)$\tau \in [0{,}01\,; 0{,}05]$ (տես [50]:)[19]

---

[19] Չնայած ինքը Idzorek-ը դիտարկել է $\tau \in [0{,}025\,; 15]$, միջակայքից բոլոր տարբերակները:

5)$\tau = 0{,}05$ (տես [47]:)

6)$\tau = \frac{1}{n}$ (տես [108]:)

7)$\tau = \frac{1}{T}$ (տես [18]:)[20]

8)$\tau \in [0{,}005\ ;0{,}01]$ (տես [6]:)

9)$\tau = 1$ (տես [96]:)

10)$\tau = \frac{m}{n}$, (տես [75]:) [21]

11)τ - վերցված է որպես պատահական մեծություն:[22]

Իրականում τ-ի թիվ լինելը նշանակում է, որ մենք նմանապես ենք գնահատում միջինի գնահատականի շեղումը(իրական արժեքից, կամ փաստացի միջինից), բոլոր գործիքների համար: Այսինքն՝ բոլոր գործիքների միջինների գնահատականի շեղումը մենք ընկալում ենք որպես τ անգամ հիմնական կովարիացիոն մատրից: Սակայն դա այդքան էլ ճիշտ մոտեցում չէ: Կարելի է մի գնահատականում ավելի համոզված լինել, քան մյուսում, այն իմաստով, որ եթե երկու տարբեր գործիքների համար մենք ունենք նույն տատանողականությունը, ապա իրենց միջինի CAPM-ով գնահատականի վարիացիան կարող է նույնը չլինել:

[20] Այս մոտեցումը (6-7) ունի մաթեմատիկական հիմնավորում: Եվ վերջինս գալիս է բայեսյան պայուսակի տեսությունից: Կարճ կարելի է այդ հիմնավորումը ներկայացնել հետևյալ կերպ: Բայեսյան թեորեմը կիրառելիս հետահայաց (posterior) բաշխումը ստանալու համար, նախապես պետք է ունենալ, իսկ ավելի հաճախ ենթադրել նախնական (prior) բաշխումը: Հաճախ, երբ ոչինչ նախապես հայտնի չէ, որպես նախնական բաշխում վերցնում են հենց այսպես կոչված ոչ ինֆորմատիվ նախնականը, ինչը բերում է միայն ընդհանուր եկամտաբերության միջինի գնահատականի (մեր դեպքում) վարիացիայի փոփոխության ճիշտ $\tau\Sigma = \frac{1}{T}\Sigma$ չափով: Այսինքն՝ $r \sim N(\mu_r, \Sigma_r + \frac{1}{T}\Sigma_r)$:

[21] Այստեղ n-ը ռիսկային գործիքների քանակն է, իսկ m-ը փորձագետների կողմից հնչեցված գնահատականների քանակը:

[22] Ավելի ճիշտ կլինի ասել որ $\frac{1}{\tau}$-ն է վերցվել որպես դիտարկվող պատահական մեծություն $\sim\Gamma$ բաշխմամբ (տես [96]): Սա ինչ-որ առումով կարելի է դիտարկել որպես հիմնական մոդելի ընդհանրացում:

Երբեմն τ-ի կարիքը չի լինում, երբ փորձագիտական գնահատականներում մենք կատարում ենք որոշակի ենթադրություններ (սա կարելի է ընկալել որպես մասնավոր դեպք):

<u>Փորձագիտական գնահատականների հավասարումը և առաջացող հարցերը</u>

Մյուս գնահատականը, որը օգտագործվում է մոդելում փորձագիտականն է: Մասնավորապես փորձագետների կողմից տրված գնահատականները կարելի է համարել պայմանական բաշխումով նկարագրվող գնահատականներ, հաշվի առնելով, որ փորձագետները իրենց գնահատականները տալիս են արդեն իսկ ծանոթ լինելով պատմական տվյալների միջոցով ստացված գնահատականներին: Փորձագիտական գնահատականների վեկտորը նշանակում են Q-ով: Ենթադրվում է`

$$Q = P\mu_{BL} + \eta \qquad (6)$$

Ընդ որում` $\sim N(0,\Omega)$, ε-ը և η-ն անկախ են: Այստեղ $P\sim(m\times n);\ \Omega\sim(m\times m);\ Q\sim(m\times 1);\ \eta\sim(m\times 1)$: m-ը փորձագետների կողմից հնչեցված գնահատականների քանակն է:
P-ն փոխարկող մատրիցն է:

Մասնավորապես, մոդելի շրջանակներում թույլատրվում է երկու տիպի գնահատականներ` բացարձակ, կամ համեմատական: Սակայն ամեն դեպքում համեմատումը ևս պետք է հստակ գնահատի ակտիվների եկամտաբերությունների տարբերությունները (այսինքն` պետք տա եկամտաբերությունների տարբերության չափ):

Օրինակ, եթե P մատրիցի որևէ տող (1,0,-1) է, իսկ Q սյան համապատասխան տողում գրված է 5, նշանակում է, որ փորձագիտական գնահատականը պնդել է, որ առաջին ակտիվի եկամտաբերությունը 5-ով ավելի կլինի քան երրորդինը:

Բացարձակ գնահատականի դեպքում համապատասխան սյունում գրվում է 1:

Իրականում, այս երկու տիպի գնահատականներից բացի կարելի է հնչեցնել կետային գնահատական նաև որևէ պայուսակի մասին, ինչը սակայն կրկին պահանջում է հստակ թվային գնահատական (տես [95]):

Կարելի է նկատել, որ՝ խնդրի դրվածքից ելնելով P-ն կարող է պարունակել նաև իրարամերժ գնահատականներ, չնայած որոշ հեղինակներ դա բացառում են (տես [84]):

Մի էական հանգամանք կապված է գործիքների շուկայական կապիտալիզացիայի հետ: Երբ հնչեցվում է կարծիք որևէ գործիքի մասին նրա շուկայական կապիտալիզացիան հաշվի չի առնվում (տես [95]): Սակայն որոշ հեղինակներ, սա համարել են թերություն և փորձել ներառել դա P-ի մեջ, այսպիսով տալով կշիռներ գործիքներին և գնահատելով նրանց կարևորությունը (տես [50]):

Նշենք ևս մի հանգամանք, որը վերաբերվում է փորձագիտական գնահատականներին: Հաճախ ներդրողները ունենում են իրենց սեփական կարծիքը միայն սահմանափակ քանակով ֆինանսական գործիքների մասին (ասենք՝ մի ոլորտի պատկանող կազմակերպությունների բաժնետոմսերի), իսկ մնացած արժեթղթերի մասին կարծիք կազմելու համար պետք է հետևեն փորձագիտական գնահատականներին: Սակայն վերջիններս հենց այդպես չեն հնչեցվում: Այսինքն՝ ոչ միշտ է հնարավոր փորձագիտական գնահատականները հեշտորեն դարձնել կետային գնահատականներ, կամ բերել Բլեք–Լիտերմանի մոդելում պահանջվող տեսքի: Որոշակի մոդել սա հաղթահարելու առաջարկված է [7]-ում:

Բացի դրանից շատ ավելի հաճախ որպես Ω օգտագործում են հենց այնկյունագծային մատրից, ենթադրելով, որ փորձագիտական գնահատականները միմյանց հետ կորելացված չեն: Սակայն գնահատականը կառուցելիս դա չի օգտագործվում: Միայն պրակտիկ կիրառման ընթացքում հարցեր են առաջանում մնացած ոչ անկյունագծային էլեմենտների որոշման հետ կապված:

Մյուս ցուցանիշը, որի շուրջ էական տարակարծություններ կան տարբեր հեղինակների մոտ հենց Ω-ն է: Այն մեկնաբանվում է որպես անվստահության ցուցանիշ փորձագիտական գնահատականներում: Ինչքան մեծ են Ω-ի անկյունագծի էլեմենտները այնքան փորձագետները քիչ են վստահ իրենց հնչեցրած գնահտականում[23] [24]:

Մասնավորապես, որպեսզի Բլեք–Լիտերմանի մոտեցումը լինի պրակտիկ կիրառելի, անհարժեշտ է հստակ ունենալ Ω-ն: Սակայն քանզի սա փորձագիտական գնահատականների կովարիացիոն մատրիցն է, որևէ պատմական տվյալ սրա մասին չկա: Դրա համար այս մատրիցը հաճախ հաշվվում է տարբեր մոտեցումներով:

Որոշ հեղինակներ պնդում են, որ սրա անկյունագծի վրայի էլեմենտները պետք է ուղիղ համեմատական լինել հենց գնահատականի պատմական կովարիացիոն մատրիցին: Դրանից ելնելով նրանք հաճախ վերցնում են հետևյալ տեսքը՝ $diag(P^T\tau\Sigma P)$ կամ $\frac{1}{c}diag(P^T\Sigma P)$, որտեղ c-ն ինչ-որ դրական թիվ է, որն արտահայտում է վստահություն փորձագետների գնահատականների նկատմամբ (տես [64, 95]): Նրանք դա հիմնավորում են նրանով, որ ինչքան տատանողական է գործիքը,

---

[23] Այստեղ վստահության աստիճանը գնահատելը կարող է և թողվել փորձագետներին (իրենք իրենց գնահատականի մեջ վստահությունը որոշեն), կարող է որոշվել այլ եղանակով: Մասնավորապես Idzorek-ը իր աշխատանքի մի մասը նվիրել է հենց սրան (տես [50]):

[24] Այս վստահության չափը դրդապատճառներից մեկն է որ ցանկություն կա անցնելու հենց ոչ հստակ թվերի:

այնքան փորձագետները ավելի քիչ վստահությամբ կարող են կարծիք տալ այդ գործիքների եկամտաբերությունների վերաբերյալ: Այս դեպքում ընդհանուր բանաձևը ընդունում է այլ տեսք:

Որոշները կառուցում են այս մատրիցը ելնելով փորձագետների վստահության մակարդակից: Սրա հետ կապված կա մի քանի մոտեցում: Դրա համար կարող են օգտագործվել նորմալ բաշխման վստահության միջակայքերը: Այսինքն՝ երբ խոսվում է 99% վստահության մասին, վերցվում է տրված միջինի շուրջ նորմալ բաշխման 99%-անոց վստահության միջակայքը: (տես [22, 108])

Կա մոտեցում երբ սա կառուցելու համար օգտագործվում է օրինակ ֆակտոր-մոդելավորում: (տես [22], [108])

Որոշ հեղինակներ սա մոդելավորում են տնտեսաչափական մոդելների հիման վրա (երբեմն որպես Բլեք–Լիտերմանի մոդելի ընդհանրացում):

Մասնավորապես՝ Idzorek-ը ([50]) մանրամասն ներկայացրել է սրա կառուցումը, ինչպես նաև առաջարկել իր մոտեցումը փորձագետների՝ իրենց հնչեցված գնահատականների նկատմամբ վստահության մակարդակի օգտագործման համար: Այստեղից դրդված է, որ առաջարկվել է կառուցել փորձագիտական գնահատականները ոչ թե որպես պատահական մեծություններ, այլ որպես ոչ հստակ (կամ ինտուիտիվ ոչ հստակ) թվեր (տես [34, 40, 62]):

Մենք ավելի ընդհանուր մոտեցում դրսևորելով առաջարկում ենք վերցնել ոչ հստակ պատահական մեծություններ, հաշվի առնելով, որ հնչեցված գնահատականները ևս պարունակում են սխալներ: Բացի այդ, եթե մենք չներառենք սխալները (6)-ում, ապա կունենանք ոչ հստակ գծային սահմանափակում, և խնդիրը կվերածվի ոչ հստակ մեծություններով օպտիմիզացիայի խնդրի: Ինչը ընհանրապես ասած Բլեք–Լիտերմանի մոդելի մասնավոր դեպք է:

μ_{BL}-ն գնահատելու համար կարելի է կոմբինացնել այս երկու գծային ռեգրեսիոն հավասարումները մեկում:

$$\begin{bmatrix}\Pi\\ Q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I\\ P\end{bmatrix}\mu_{BL} + \begin{bmatrix}\varepsilon\\ \eta\end{bmatrix} \qquad (7)$$

Այստեղ կարելի է ստանալ ընդհանրացված փոքրագույն քառակուսիների գնահատականը, որը կունենա հետևյալ տեսքը`

$$\mu_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P^T(\Omega + \tau P\Sigma P^T)^{-1}(Q - P\Pi) \qquad (8)$$

որոշակի ձևափոխություններից հետո կարելի է ստանալ հետևյալը[25]`

$$\mu_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q) \qquad (9)$$

Գրականությունում սա երբեմն նշվում է որպես Theil-ի խառը գնահատում (տես [96], [108]): Սա Բլեք–Լիտերմանի մոդելի հենց իրենց կողմից որդեգրած մոտեցումն է: Բայեսյան մոտեցումը առաջարկվել է ավելի ուշ:[26]

Գնահատվում է նաև սրավարիացիան:

Այստեղ պետք է հաշվի առնել, որ սա իրական միջին եկամտաբերությունների նոր գնահատական է: Այսինքն` միջին եկամտաբերությունները այստեղ ընկալվում են որպես պատահական մեծություններ[27]: Որպես դրանց դիսպերսիա ստացվում է

$$\Sigma_{\mu} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1} \qquad (10)$$

Սա ստանալու համար ավելի հարմար է օգտագործել մեկ այլ մոտեցում, բայեսյան գնահատականների հիման վրա:

---

[25] Բանաձևերի դուրս բերումները շատ տեղեր մանրամասնությամբ տրված են: Դրանցից կարելի է հատկապես առանձնացնել Walters-ի հոդվածը` [108], և իր նախաձեռնությամբ ստեղծված կայքը` www.blacklitterman.org:

[26] Պնդում են որ առաջին անգամ Բլեք-Լիտերմանի մոդելում բանաձևերը բայեսյան եղանակով դուրս են բերել հենց Qian-ն ու Gornman-ը, ([91]):

[27] Խոսք իհարկե փոքրագույն քառակուսիների գնահատականի վարիացիայի մասին է:

Ի նկատի ունենալով որ մեր նախնական բաշխումը ունի հետևյալ տեսքը $\mu = E(r)\sim N(\Pi,\tau\Sigma)$, իսկ պայմանականը հետևյալը $\mu = E(r)\sim N(P^{-1}Q,(P^T\Omega^{-1}P)^{-1})$, կարելի է ստանալ posterior բաշխումը:

Այս մոտեցումը սակայն որոշ առումով անընդունելի է: Նախ փաստ է որ P-ն շրջելի է, կամ գոնե, որ այն քառակուսի մատրից է: Երկրորդ՝ փաստ է, որ $P^T\Omega^{-1}P$ -ն շրջելի է: Սակայն P-ի մաքսիմալ ռանգ ունենալու դեպքում վերջինս այդպիսին կդառնա: Ավելին փաստ է որ Ω-ն շրջելի է[28]:

Ստացվում է

$$\mu\sim N(((\tau\Sigma)^{-1}+P^T\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi+P^T\Omega^{-1}Q);((\tau\Sigma)^{-1}+P^T\Omega^{-1}P)^{-1}) \qquad (11)$$

Պետք է հիշել որ այս դեպքում r-ի բաշումը կլինի՝

$$r\sim N(((\tau\Sigma)^{-1}+P^T\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi+P^T\Omega^{-1}Q)\,;\,\Sigma+((\tau\Sigma)^{-1}+P^T\Omega^{-1}P)^{-1}) \qquad (12)$$

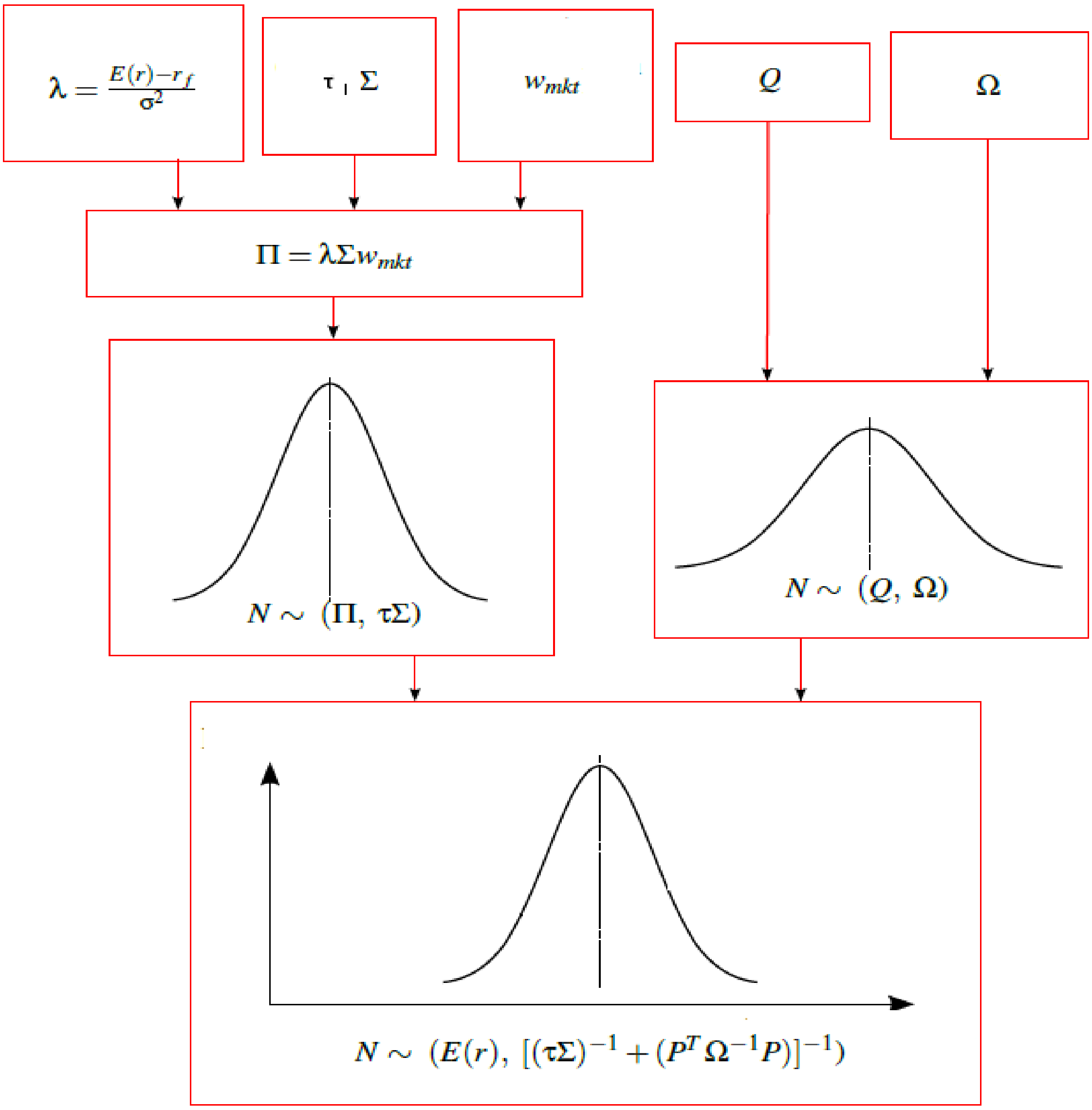
Այսինքն՝ եթե $r\sim N(E(r),\Sigma_r)$ և $E(r)\sim N(\Pi,\tau\Sigma_r)$, ապա $r\sim N(\Pi,\Sigma_r+\tau\Sigma_r)$:

Բանաձևերի դուրս բերումը մանրամասն ներկայացված է տարբեր հոդվածներում (տես հատկապես [39, 48, 58, 76, 108]):

Ընդհանրացնելով կարելի է ասել որ ունենք հետևյալ ներմուծվող տվյալները՝ δ (λ), w_m , Σ, Ω, τ, P, Q : Եվ սրանցով ստացվում է միջինի նոր բաշխումը:

Սխեմատիկորեն սա կունենա հետևյալ տեսքը:

[28] Սա կարող է լինել այն դեպքում երբ անկյունագծի որոշ էլեմենտներ 0 լինեն, և միայն այդ դեպքում, քանզի Ω-ն ենթադրվում է անկյունագծային:



Գծապատկեր 1. Բլեք-Լիտերմանի մոդելում բայեսյան մոտեցման սխեմատիկ ներկայացումը: (փոխառված է Satchell-ի գրքից [98])

Բլեք–Լիտերմանի միջինների հիմնական բանաձևին հանգելու երկու մոտեցումները, ճիշտ է բերում են նույն արդյունքին, բայց ունեն թեթևակի սկզբունքային տարբերություններ: Մասնավորապես՝ ռեգրեսիոն մոտեցումը ստանում է միայն միջին գնահատական: Իսկ բայեսյան մոտեցումը ստանում է միջինի բաշխում, որի մաթսպասումն էլ հենց վերցվում է որպես գնահատական:

Պայուսակի կշիռները Բլեք–Լիտերմանի մոդելում ստացվում են տեղադրելով ստացված եկամտաբերության և կովարիացիոն մատրիցի գնահատականները (1)-ում[29] [30]: (Տես [95, 116]:)

Այս ձևով ստացվող կշիռների գումարը կարող է տարբերվել մեկից: Եվ եթե նույնիսկ որևէ գործիքի վերբերյալ բացակայի փորձագիտական գնահատականը, մեկ այդ գործիքի կշիռը ևս կփոխվի: Կշիռների գումարի մեկ լինելը կարելի է լուծել երկու ձևով՝ լրացուցիչ սահմանափակում դնելով խնդրի վրա, կամ ուղղակի յուրաքանչյուր կշիռը բաժանել կշիռների գումարի վրա: Նշվում է, որ այս դեպքում երբ որևէ գործիքի համար փորձագիտական գնահատականը բացակայում է, ճշգրտված կշիռները այդ գործիքի համար չեն փոխվում: (տես [7])

Բլեք–Լիտերմանի մոդելում ստացվող կշիռները որոշվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$w_{BL} = w_m + P^T\left(\frac{\Omega}{\tau} + P\Sigma^{-1}P^T\right)^{-1}\left(\frac{Q}{\delta} - P\Sigma w_m\right) \tag{13}$$

<u>Բլեք-Լիտերմանի սահմանային դեպքերը</u>

Բլեք–Լիտերմանի հիմնական բանաձևի սահմանային դեպքերը դիտարկված են մասնավորապես՝ ([7, 63, 95])[31]: Դրանք են

1) $\Omega \to 0$

Սա այն դեպքն է, երբ փորձագետները 100% վստահ են իրենց հնչեցրած գնահատականի վերաբերյալ:

[29] Սա հաճախ անվանում են հետադարձ օպտիմիզացիա (Reverse optimization) : Սա հարկ է չշփոթել հակադարձ օպտիմիզացիայի հետ(Inverse optimization):

[30] Այս պրոցեդուրան հաճախ նշում են որպես Բլեք-Լիտերմանի մոդելի թերություն: Եվ որոշ հեղինակներ սա չեն ընդունում, քանզի ստացվում է որ մենք վերադառնում ենք Մարկովիցի մոդելին, ուղղակի այլ միջինով: (տես օրինակ [24])

[31] Իրականում սահմանային դեպքերը շատ լավ ուսումնասիրել է Werner Koch-ը իր “Consistent Return Estimates in The Asset Allocation Process – The Black-Litterman approach (October 2004)” զեկույցում (որը սակայն որպես հոդված չի տպվել):

Այս դեպքում խնդիրը դառնում է ոչ թե ռեգրեսիոն խնդիր կոմբինացված Theil-ի իմաստով, այլ ուղղակի սահմանափակումով օպտիմիզացիայի խնդիր՝

$$\begin{cases}(\hat{\mu}-\Pi)^T(\tau\Sigma)^{-1}(\hat{\mu}-\Pi)\rightarrow min \\ P\hat{\mu}=Q\end{cases} \quad (14)$$

Որի լուծումը ունի հետևյալ տեսքը (տես [62])՝

$$\mu_{BL}=\Pi+\Sigma P^T(P\Sigma P^T)^{-1}(Q-P\Pi) \quad (15)$$

P-ն քառակուսի և շրջելի լինելու դեպքում կունենանք

$$\mu_{BL}=P^{-1}Q \quad (16)$$

2) $\tau=0$

Սա այն դեպքն է երբ խիստ վստահում ենք հավասարակշիռ միջինին և ենթադրում ենք, որ այն շեղման հնարավորություն չունի ($\tau=0$-ից ստացվում է, որ գնահատականի վարիացիան 0 է, ինչը նշանակում է, որ այն թիվ է) (տես [7]):

$$\mu_{BL}=\Pi \quad (17)$$

3) $P=0$

Սա այն դեպքն է երբ փորձագիտական գնահատականներ չունենք: Կամ որ նույնն է ինչ ունենալ՝ 0% համոզվածություն իրենց հնչեցրած գնահատականների վերաբերյալ (տես [95]):

$$\mu_{BL}=\Pi \quad (18)$$

3.1) Իրականում այն դեպքում երբ փորձագիտական գնահատականներ չկան ընդունված է վերցնել հենց հավասարակշիռ վիճակի գնահատականները, այսինքն՝

$$Q=\Pi\ ;\ P=I \quad (19)$$

(երբ բոլոր գործիքների շուրջ բացակայում է փորձագիտական գնահատականները): Այս դեպքում ակնհայտորեն տեղի ունի՝

$$\mu_{BL}=\Pi \quad (20)$$

Բլեք-Լիտերմանի մոտեցմամբ ստացվող գնահատականը ճշգրիտ համընկնում է այսպես կողված Բայես-Շտեյնի գնահատականի հետ, որը օգտագործում է սեղման օպերատորը կամ սեղման գործողությունը: (տես՝ [56])

4) $\Omega = P^T\tau\Sigma P$

Սա այն դեպքն է երբ վերցնում են Ω-ն համեմատական հավասարակշիռ վիճակի տատանողականությանը՝ վարիացիային (ինչը համընկնում է պատմական վարիացիա յի հետ): Սա տարբերվում է նրանից երբ Ω-ն անկյունագծային է: Բայց ստացված արդյունքները շատ մոտ են $diag(P^T\tau\Sigma P)$ դեպքին: Այս դեպքում բանաձև պարզեցվում է ընդունելով հետևյալ տեսքը՝

$$\mu_{BL} = \Pi + \frac{1}{2}P^{-1}(Q - P\Pi) \tag{21}$$

4.1) Այս դեպքում իրականում τ-ի արժեքը դառնում է ոչ էական: Քանի որ մոդելի վերջնական տեսքում՝

$$\begin{aligned}\mu_{BL} &= ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q) \\ &= \left(\Sigma^{-1} + P^T\left(diag(P^T\Sigma P)\right)^{-1}P\right)^{-1}\left(\Sigma^{-1}\Pi + P^T\left(diag(P^T\Sigma P)\right)^{-1}Q\right)\end{aligned} \tag{22}$$

Վերջինում τ-ն այլևս չկա[32]:

Մասնավորապես՝ (9) , բանաձևի երկրորդ կոմպոնենտը կարելի է համարել երկու գնահատականների՝ Π-ի և $P^{-1}Q$-ի կշռված միջին: Ավելի շուտ դա, նրանց գծային կոմբինացիան է: Բայց եթե հաշվի առնենք սկզբում գրված հայտարարը ապա կստացվի որ կշիռների գումարը 1 (I) է, հերիք է գրել $\mu_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}PP^{-1}Q)$, և որպես կշիռներ վերցնել՝ $(\tau\Sigma)^{-1}$-ը և $P^T\Omega^{-1}P$-ն:

Հարկ է նշել, որ այս ամենը ընդունելի է միայն P-ի շրջելի և հետևաբար՝ նաև քառակուսի լինելու դեպքում: Եթե փորձագիտական գնահատականները քիչ գործիքների են

[32] Սա հենց այն մասնավոր դեպքն է որում τ-ի կարիքը կորում է: (տես [51])

վերաբերվում, ապա մնացածը կարելի է լրացնել անկյունագծորեն 1-երով, իսկ որպես եկամտաբերություններ վերցնել համասարակշիռ եկամտաբերությունները, իսկ հակառակ դեպքում ուղղակի կրճատել ավելորդ սահմանափակումները:

Սակայն նկատենք, որ P-ի չափողականության փոքր լինելու դեպքում տուժում է ռեգրեսսիոն մոտեցումը: Այն չի կորցնում իր ուժը քանզի, միացնելուց հետո այսպես թե այնպես ստացվում է դիտարկումների քանակը ավելի մեծ քան գործիքներինը, բայց հնարավոր է քիչ քանակով գերազանցող:

Շատ հեղինակներ պահանջել են, որ P-ի չափողականությունը լինի փոքր քան կամ հավասար գործիքների քանակին ($m \leq n$): Մյուսները նշել են, որ դա էական չէ, չնայած բայեսյան ռեգրեսիա իմաստը նրանում է, որ քիչ դիտարկումները լրացվեն լրացուցիչ ինֆորմացիայով (տես օրինակ՝ [23]):

Իրականում նրանք, ովքեր պահանջում են, որ կարծիքների քանակը ավել չլինի գործիքների քանակից, հասկանում են իրենց պնդումը որպես մի պայման, որը կապահովի P-ի մաքսիմալ ռանգ ունենալը: Այստեղ իհարկե դա ամենևին կապ չունի: Ընդհակառակը, մաքսիմալ ռանգի իմաստով կարծիքների քանակը պետք ճիշտ ավել լինի (կամ գոնե պակաս չլինի) գործիքների քանակից:

Դրա հետ մեկտեղ, այդ տեսակետի կողմնակիցները համեմատական և ուղիղ գնահատականները համադրում են, այսինքն՝ եթե մեկ տեղում գրված է, որ A գործիքը B-ից ավել եկամտաբեր կլինի 5%-ով, իսկ մյուս տողում գրված է, որ B գործիքի եկամտաբերությունը հավասար կլինի 3%-ի, ապա մենք պետք է բնականոն ձևով կարողանանք եզրակացնել որ A-ի եկամտաբերությունը կլինի 8%: Եվ դրա համար իրենք հանգում են այն մտքին, որ այս տարբերակով, անկախ տողրեը կարող են տալ լրիվ կարծիք:

Իրենց տեսակետը այսպիսով կարելի է մեկնաբանել որպես մեկ փորձագետի կարծիքի պահանջ, կամ ուղղակի որ այդ տեսակետները մեկը մյուսին չհակասեն[33] և լինեն համադրելի: Այս մոտեցումը հիմնականն է:

Մեր արդյունքներում, մենք մասամբ փորձել ենք հաղթահարել նաև այս պրոբլեմը, փորձագետների կարծիքները ներկայացնելով որպես մեկ ոչ հստակ թիվ:

Իրականում նշված մոտեցումից մենք համաձայն ենք միայն համադրելիության պահանջի հետ, իսկ ինքնահակասական չլինելը երկրորդական է, և պարզապես կարող է բացատրվել սխալներով:

Meucci-ին իր գրքում ([79]) տալիս է P-ն քառակուսացնելու ձև:

<u>Բլեք-Լիտերմանի էմպիրիկան</u>

Բլեք–Լիտերմանի մոդելը պրակտիկ կիրառված է և այդ կիրառությունների արդյունքները ներկայացված են շատ հեղինակների կողմից: Մասնավորապես [82]-ում ստացված արդյունքները ավելի է լավն են Շարպի գործակցի իմաստով, քան Մարկովիցինը[34]: Նույն հեղինակը նշել է, որ ուղենշային պայուսակից սակայն, Բլեք–Լիտերմանի եղանակով կառուցված պայուսակը շատ լավը չի, ընդամենը մի քանի տոկոսով է գերազանցում ուղենշային պայուսակի եկամտաբերությանը:

---

[33] Սա անպայմանորեն նաև հակասում է տեսակետների անկախ լինելու գաղափարին, գոնե այն կտրվածքով, որ անկախ նրանից թե քանի գործիքի մասին է կարծիք տալիս մի փորձագետը, գործիքների իրական եկամտաբերությունները իրար հետ կորելացված կարող են լինել, իսկ երբ դա հաշվի առնվի, ապա կորելացված կլինեն նաև կարծիքները: Կարծիքների կորելացված լինելու գլխավոր պատճառը նույն ինֆորմացիայի վրա փորձագետների գնահատականնների հիմնված լինելն է, և այդ ինֆորմացիայի նմանապես ընկալու ենթադրությունը:

[34] Գրեթե նույն արդյունքը ստացել են նաև [24]-ում:

[21]-ում ստացված արդյունքները ցույց են տալիս որ Մարկովիցի մոդելը հակված է ընդունել մեծ եկամուտ- մեծ ռիսկ տրամաբանությամբ պայուսակը, Բլեք–Լիտերմանի մոդելը հակված է ընդունել փոքր եկամուտ- փոքր ռիսկ տրամաբանությամբ պայուսակը, իսկ shrinkage-ի միջոցով ստացվող գնահատականի հիման վրա պայուսակը հակված է լինել միջին եկամուտ-միջին ռիսկ պայուսակից մի փոքր ավելի լավը:

[65]-ում Բլեք–Լիտերմանը համեմատած է հավասար կշիռներով (այսպես կոչված 1/n) պայուսակի հետ և ստացված արդյունքը գերազանցում է այդ պայուսակի եկամտաբերությունը մոտ 15%-ով, և ունի մոտ 16%-ով պակաս վոլատիլություն (տատանողականություն):

Օրինակ Koch-ը իր արդյունքերում ստանում Բլեք–Լիտերմանի համար ավելի քիչ ծայրահեղ պայուսակներ, բայց այնուամենայնիվ որոշ չափով ծայրահեղության պահպանում:

Երկարատև կիրառման օրինակ ներկայացված է [102]-ում, որի հեղինակները 7 տարվա կտրվածքով ստացել են 57% եկամտաբերություն, և պնդում են, որ դա շատ ավելի լավն է քան ուղենշային պայուսակի դեպքը և Մարկովիցի պայուսակի դեպքը:

[89]-ում էմպիրիկորեն ուսումնասիրված է Բլեք–Լիտերմանի պայուսակի զգայունությունը: Մասնավորապես, ցույց է տրված, որ ներմուծվող պարամետրերի որոշ արժեքների դեպքում պայուսակը կարող է շատ զգայուն լինել փորձագիտական գնահատականների նկատմամբ:

[47]-ում դիրտակված է 5 տարբեր օրինակներ, որոնցից 4-ում Բլեք–Լիտերմանի պայուսակը ունեցել է ավելի բարձր շարպի գործակից համեմատած ուղենշային և Մարկովիցի պայուսակների: Այստեղ նաև էմպիրիկորեն ցույց է տրվել, որ

Բլեք–Լիտերմանի մոդելը շատ ավելի քիչ զգայուն է միջինի և կովարիացիոն մատրիցի փոփոխությունների նկատմամբ:

[24]-ում նորից էմպիրիկ եղանակով գնահատել են Բլեք–Լիտերմանի զգայունությունը սխալ գնահատականի նկատմամբ ≈1%:

<u>Բլեք-Լիտերմանի առավելությունները և թերությունները</u>

Այսպիսով փաստվում է, որ Բլեք–Լիտերմանի մոդելը հաղթահարում է դասական մարկովիցյան մոտեցման թերությունների մի մասը`

1. Այս մոդելը այդքան էլ զգայուն չէ ներմուծվող պարամետրերի նկատմամբ[35]:
2. Չի տալիս կոնցենտրացված պայուսակներ (այսինքն` չի կազմվում ընդամենը մի քանի գործիքներով):
3. Չունի գնահատման սխալների մաքսիմալացման խնդիր:
4. Յաշվի է առնում լրացուցիչ ինֆորմացիան (չպայմանավորված պատմական տվյալներով):
5. Այս մոդելը այդքան էլ զգայուն չէ միջինից շատ շեղված արժեքների նկատմամբ[36]:

Սակայն կան մի քանի թերություններ, որոնք նշվում են Բլեք–Լիտերմանի մոդելի հետ կապված:

1. Որպես Բլեք–Լիտերմանի թերություն նշվում է Σ-ի պատմական վերցնելը: (տես [9],[89]):

[35] Յիմնական ուսումնասիրությունը կատարված է էմպիրիկորեն, ոչ խիստ մաթեմատիկայի հիման վրա: Բայց այս և հաջորդ կետը փաստվում է հատկապես Walter Koch-ի մոտ: Իսկ [74]-ում ուսումնասիրված է զգայունությունը τ-ի նկատմամբ և էմպիրիկորեն ցույց է տրված, որ τ-ի նկատմամբ կշիռները շատ զգայուն չեն, հատկապես երբ այն մոտ է 1-ին:

[36] Այս մասը հստակ պայմանավորված է հավասակշիռ վիճակի ընտրությունով:

2.Բլեք–Լիտերմանում պահանջվում են նորմալ բաշխումներ և դիտարկումների և հավասարակշիռ վիճակում եկամտաբերությունների համար: (տես հատկապես [9, 64, 95])

3.Պարամետրերի շուրջ կայունության դժվարություն: (տես [34, 64])

4.Էքսպերտային գնահատականները իրականում կարող են կորելացված լինել: (տես [89])

5.Առաջարկվող մոդելը ևս դինամիկ չէ:

6.Կա որոշ անհամաձայնություն հակադարձ օպտիմիզացիայի կիրառման շուրջ: (տես հատկապես [9])

Անդրադառնալով նորմալության պահանջի խիստ լինելուն կարող ենք բերել հետևյալ արգումենտը ի պաշտպանություն նորմալ բաշխման օգտագործմանը:

Երբ խոսքը գնում է միևնույն բաշխման վերագրմանը բոլոր $P\mu$-ի տողերին, դուրս գալով նրանից, որ հնչեցվում են երկու տիպի գնահատականներ՝ ուղիղ և համեմատական, կարելի է ասել որ $P\mu$ սյան բոլոր տարրերի բաշխման նույն դասից լինելը, կնշանակի որ μ–ի յուրաքանչյուր տարրի բաշխում այդ դասից է, և իրենց տարբերությունների բաշխումները ևս այդ դասից են: Այդ տեսանկյունից որպես μ–ի տարրերի բաշխում նորմալ բաշխումը վերցնելը շատ հիմնավոր է:

Դա հնարավոր է, երբ գործիքները ունեն կայուն բաշխում: Բայց կայունությունը միայն դրական գործակիցներով կոմբինացիաների համար է (այսպես կոչված կոնիկ կոմբինացիաների), իսկ համեմատական գնահատականներում ստանում ենք երկու գործիքների եկամտաբերությունների տարբերություն: Ավելին, կայուն բաշխում օգտագործելու համար պետք է ունենայինք նաև այդ գործիքների եկամտաբերությունների անկախությունը: Այնպես որ նույնիսկ կայուն բաշխումների ենթադրությունը քիչ է: Իսկ նորմալ բաշխումը այն քիչ հայտնի բաշխումներից է, որի ցանկացած գծային կոմբինացիա (նույնիսկ ոչ անկախների) ևս ունի նորմալ բաշխում:

Մեկ այլ արգումենտ, որը բերվում է մոդելի նորմալության ենթադրության օգտին, դա այն է, որ բայեսյան մոտեցումը միշտ պահանջում է բաշխման ենթադրություն: Եթե վերցվի ոչ ինֆորմատիվ նախնական բաշխում, ապա կկորի կապը շուկայի հետ:

Նորմալ բաշխում վերցնելու մեկ այլ հիմնավորում ընկած է այս մոդելում հիմնական ենթադրությունների հիմքում: Այս մոդելը առաջարկում է սկսել որևէ հավասարակշիռ վիճակից, քանի որ ենթադրվում է, որ դա այն կայուն վիճակն է, որին շուկան ձգտում է: Այլ կերպ ասած գործում է կենտրոնական սահմանային թեորեմը և բաշխումները պետք է լինեն նորմալ, գոնե հավասարակշիռ վիճակի համար: Մասնավորապես, այդ վիճակը այն վիճակն է, որ կհաստատվեր որոշ ազդեցությունների բացակայության դեպքում: Բայց ներդրողների սպեկուլյատիվ նպատակները, ախորժակի չափը, շուկայի ոչ փակ լինելը (նոր գործիքների, նոր ներդրողների ի հայտ գալը), ինչպես նաև մի շարք էկզոգեն գործոններ (քաղաքական բնույթի, գիտական նորամուծությունների և մոտեցումների, այլ ֆինանսական ծառայությունների առաջացման, ինչպես նաև որոշակի այլ իֆորմացիայի տեսքով) ամենօրյա կամ ամենժամյա կտրվածքով շուկան շեղում են հավասարակշիռ վիճակից: Դա կարող է լինել մի գործիքի կամ մի քանի գործիքի հավասրակշիռից շեղված գների տեսքով: Այդ շեղումները կարող են ինչ-որ ձևով գնահատվել անհատների կողմից (ասենք ինսայդերական ինֆորմացիայի, կամ ինտուիտիվ վերլուծության, կամ տեխնիկական վերլուծության շնորհիվ), բայց շատ դժվարությամբ մոդելավորվեն: Յենց այդ պատճառով առաջանում է փորձագիտական գնահատականների անհրաժեշտությունը:

<u>Բլեք-Լիտերմանի մոդելի ընդհանրացումները</u>

Բլեք–Լիտերմանի մոդելի որոշ ընդհանրացումներ են կատարվել տարբեր հեղինակների կողմից[37]:

- Դիտարկված է այն դեպքը, երբ փորձագիտական գնահատականների բաշխումները նորմալ չեն: Մասնավորապես դիտարկված են եկամտաբերությունների Սթյուդենտի, և կայուն բաշխումների դեպքերը: (տես [41])
- Դիտարկված է այն դեպքը երբ Σ-ն պատմական տվյալներով չի ստացվում, այլ տնտեսաչափական մոդելավորմամբ[38]: Մասնավորապես դիտարկված է այն դեպքը, երբ տատանողականությունը կառուցվում է GARCH, EGARCH մոդելներով: (տես [6, 47])
- Դիտարկված է տարբերակ երբ հավասարակշիռ վիճակում դիտարկվում է ոչ միայն CAPM մոդելի β-ով, այլ դրա ընդհանրացումներով, երբ հաշվի են առնվում ավելի բարձր կարգի մոմենտները: (տես [78])
- Դիտարկված է այն տարբերակը, երբ գնահատականները հնչեցվում են ոչ միայն միջինի վերբերյալ, այլ նաև կովարիացիոն մատրիցի՝ Σ-ի վերաբերյալ: (տես [50, 91, 113])
- Դիտարկված է այն տարբերակը, երբ բայեսյան մեթոդաբանությամբ մոդելում նաև ավելացվում է

[37] Սրանց մեծ մասը կապված չեն այս աշխատանքի բուն խնդրի հետ: Դրա համար դրանք ուղղակի կշարադրվեն:
[38] Դիտարկված է նաև դեպք, երբ ուղղակի Σ-ի համար բաշխում է ենթադրված՝ մասնվորապես հակադարձ-վիշարտյան բաշխում: (տես [93])

պատմական տվյալներով ճշգրտում: Պատմական տվյալները և համարվում են նորմալ բաշխված: (տես [113], [35].,[36])

- Դիտարկված է նաև դինամիկ տարբերակը: (տես [22, 44, 109][39])
- Փորձ է արված համակարգել պահվածքի (մարդկային գործոնի) հետ կապված հնարավոր օրինաչափությունները այս տարբերակի համար: (տես [75])
- Idzorek-ի կողմից փորձ է արված հաշվարկել (հաշվի առնել) վստահության մակարդակը նոր կառուցվող պայուսակում: (տես [50])

Հիմնավորված կերպով փորձ է կատարված անցնել փորձագիտական գնահատականների ոչ հստակ տարբերակներին: Որոշ հեղինակների կողմից դրանք վերցված են ոչ հստակ (կամ ինտուիտիվ ոչ հստակ) թվեր, և ոչ թե դասական պատահական մեծություններ: Սա պայմանավորված է նրանով, որ իրականում Ω-ի գոյությունը (ներմուծումը) մոդելում գալիս է միայն ոչ համոզվածությունից:

Չնայած նրան, որ ընդհանուր դեպքում այս մոտեցումները էականորեն հաջողության չեն հասնում խնդրի լուծման տեսանկյունից, նրանց առաջարկները որդեգրելով, մենք փորձում ենք կանոնակարգել ոչ հստակ բազմությունների տեսության այն գործիքակազմը, որը պետք է գալու արդյունքները ստանալու համար:

Այնուամենայնիվ մենք (հաշվի առնելով այն, որ $\tau\Sigma$-ն ևս վստահության մակարդակ է արտացոլում) առաջարկում ենք որպես փորձագիտական գնահատականներ վերցնել ոչ թէ ոչ հստակ թվեր, այլ ոչ հստակ պատահական մեծություններ:

[39] Վերջինում դիտարկված է ոչ թե այդ դինամիկ դարցնելու տեսանկյունը այլ ինֆլյացիան հաշվի առնելու հարցը:

Սա պայմանավորված է նրանով, որ անկախ վստահության մակարդակից, փորձագիտական գնահատականները կարող են պարունակել օբյեկտիվ սխալներ: Այսինքն՝ 100% վստահությամբ գնահատականը ինչքան էլ այն սուբյեկտիվ ինֆորմացիա արտահայտի, կարող է տարբերվել իրական գնահատականից և իրական սպասելի արդյունքից:

Դա, իհարկե, կարելի է մոդելավորել Dempster-Shafer-ի տեսության շրջանակներում, բայց մենք կփորձենք չշեղվել դասական ոչ հստակ մեթոդաբանությունից, հաշվի առնելով որ վերջիններիս միջև կա հստակ կապ (այն շատ լավ նկարագրված է հատկապես [28]-ում):

Իրենց աշխատանքում, որպես ոչ հստակ տարբերակ [62]-ում Lawrence-ը և Kleinman-ը օգտագործում են ուղղակի ոչ հստակ թվերով տարբերակը: Այսինքն՝

$$\tilde{\mu}_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P^T(\Omega + \tau P\Sigma P^T)^{-1}(\tilde{Q} - P\Pi) \quad (23)$$

Սա այդքան էլ ճիշտ մոտեցում չի: Քանի որ, ոչ հստակ թվերը ստացվում են հավասար դասական թվերին:

Նույնպիսի բացթողում ունեն նաև իրենց աշխատանքում ([34]) Echaust-ը և Piasecki-ն:

Մեկ այլ անհամապատասխանություն իրենց առաջարկներում [62]-ում, այն է, որ Ω-ն դեռևս մնում է $\tilde{\mu}_{BL}$-ի բանաձևում, ինչը չի համընկնում իրենց մոդելավորման հետ:

Բացի դրանից Lawrence-ը և Kleinman-ը, ընդունելով $\tilde{\mu}_{BL}$-ի այդ տեսքը նախապես ենթադրում են, որ հենց դա է ստացվող գնահատականը:

Սակայն առկա ոչ հստակ բայեսյան թեորեմի շրջանակներում այդ ենթադրությունը չի հիմանվորվում, քանզի այն կունենար նորմալ բաշխում, իսկ իրականում նորմալ բաշխումը նորմալ չի մնում բայեսյան թեորեմի Viertl-ի կողմից առաջարկված ոչ հստակ տարբերակի դեպքում:

Մյուս կողմից, նման մոտեցումը ենթադրում է հայտնի Zadeh-ի ընդհանրացման սկզբունքի օգտագործում: Սակայն նշված բայեսյան թեորեմը ինչպես ցույց է տվել Viertl-ը կորցնում է այդ դեպքում հաջորդաբար կիրառվելու իր հատկությունը:

Մյուս կողմից, նույն գնահատականը չի ստացվում նաև ռեգրեսիոն տարբերակով: Պատճառը կայանում է նրանում, որ դասական իմաստով ոչ հստակ թվերի տարածությունը վեկտորական տարածություն չէ: Այն չունի ընդհանուր 0-ական էլեմենտ: Գրեթե ոչ մի ոչ հստակ թվերի տարբերություն չի տալիս 0: Սրա հետևանքով տրված պայմաններում որևէ մետրիկայի մինիմազացիա կիրառելը կարող է բերել ոչ մեկնաբանելի արդյունքի:

Այլ կերպ ասած, փոքրագույն քառակուսիների գնահատականի տեսքը կարող է փոխվել: Ամեն դեպքում, նման գնահատականի գոյությունը ցույց է տվել Diamond-ը իր հոդվածում, բայց նույնիսկ ամենապարզ տեսքի (եռանկյուն ոչ հստակ թվերի) համար, ստացվում է գնահատականի այլ տեսք, նույնիսկ զույգային ռեգրեսիայի համար:

Այստեղից առաջանում է անհրաժեշտություն ավելի խիստ մաթեմատիկորեն ստանալ Բլեք–Լիտերմանի գնահատականը ոչ հստակ դիտարկումների համար: Բայց ինչպես նշեցինք, մենք կմնանք հավատարիմ այն կարծիքին, որ նույնիսկ փորձագիտական գնահատականները հանդիսանում են ոչ հստակ պատահական մեծություններ, և ոչ թե ուղղակի ոչ հստակ թվեր:

ԳԼՈՒԽ II. ՈՉ ՀՍՏԱԿ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ ԿԱՊՎԱԾ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ոչ հստակ բազմությունների տեսությունը (նախապես առաջարկված Zadeh-ի կողմից՝ [111]) հետագայում գտավ շատ կիրառություններ այն ոլորտներում, որտեղ էականորեն առկա են մարդկային, ինտուիտիվ ընկալումների գործոնները, ինչպես նաև այն ոլորտներում, որտեղ դրանք հանդիսանում են հիմնական ուսումնասիրության արդյունքներ:

Այս գլուխը նվիրված է հիմնական հասկացություններին և դրանց հետ կապված հիմնական արդյունքներին, որոնք ներկայացված են առանձին ենթագլուխներով:

Ներկայացված են ոչ հստակ թվերը, ոչ հստակ պատահական մեծությունների երկու սահմանումները, դրանց մաթեմատիկական սպասման և վարիացիայի մի քանի տարբերակների սահմանումները, ոչ հստակ բայեսյան թեորեմի հետ կապված հարցեր, ոչ հստակ ռեգրեսիաների հիմնական տեսակները:

2.1 Ոչ հստակ բազմություններ և ոչ հստակ թվեր. ոչ հստակ թվերի տարածություն

Ոչ հստակ բազմությունները դասական բազմություններ են, որոնց յուրաքանչյուր էլեմենտի համար սահմանված է պատկանելիության չափ կամ պատկանելիության ֆունկցիա: Իրականում ոչ հստակ բազմությունները կարելի է ներկայացնել որպես երկու բազմությունների դեկարտյան արտադրյալ դրանով մնալով դասական բազմությունների տեսության շրջանակներում:

Ոչ հստակ բազմությունների պատկանելիության չափը հաճախ ընկալվում է որպես խոսողի կամ ներկայացնողի ինտուիտիվ ընկալումը այս կամ այն երևույթի տվյալ հատկանիշը կրելուն (կամ տվյալ բազմությանը պատկանելուն):

Հաճախ ոչ հստակ բազմությունները օգտագործվում են ոչ միորոշ ձևով սահմանվող հասկացությունների հետ: Տիպիկ օրինակներ են լինգվիստիկ փոփոխականները, կամ ինչ-որ հասկացության շուրջ կոլեկտիվ կարծիքի ներկայացումը մի բազմությամբ: Օրինակ երբ խոսքը գնում է ցուրտ հասկացության մասին, տարբեր ջերմաստիճանային պայմաններ կարող են համարվել ցուրտ, բայց որոշները կարող են համարվել ցուրտ որոշ մարդկանց համար, իսկ մյուսների համար չհամարվել այդպիսին: Կամ կարող են ընկալվել մի մարդու կողմից որպես «հաստատ ցուրտ», «ցուրտ» կամ «կարելի է համարել ցուրտ»: Սրանք բոլորը կներկայցնեն տարբեր պատկանելության մակարդակներ:

Մաթեմատիկորեն՝ $\tilde{X} = \{X,\ \mu_X(x)\}$, որտեղ ալիքով գրված է ոչ հստակ բազմությունը (այս նշանակում պահպանված է ողջ աշխատանքում), X-ը որևէ դասական բազմություն է, իսկ μ_X-ը պատկանելության ֆունկցիան է:

Ընդհանրապես $\mu_X : X \to [0,1]$: Սա ընդունված մոտեցում է, և երբ պատկանելության ֆունկցիան ընդունում է 1 արժեքը, դա նշանակում է համոզված պատկնելություն, իսկ 0 համոզված ոչ պատկանելություն: Այն դեպքում, երբ գոնե մեկ կետում պատկանելության ֆունկցիան ընդունում է 1 արժեքը, ոչ հստակ բազմությունը անվանում են նորմավորված:

Ոչ հստակ բազմության կրիչը ներկայացվում է որպես այն ենթաբամզության փակում, որի վրա պատկանելության ֆունկցկիայի արժեքը 0-ից մեծ է: Այսինքն՝ $\overline{\{x\,,\mu_X(x) > 0\}}$:

Ընդհանրապես ասած մենք կօգտագործենք ոչ հստակ բազմություններ, որոնց հիմքում դասական բազմությունը հանդիսանում է իրենց կրիչը: Այսինքն՝

$$\tilde{X} = \{ \overline{\{x, \mu_X(x) > 0\}}, \mu_X(x) \} \tag{24}$$

Ոչ հստակ բազմությունները կարելի է դիտարկել իրենց α-կտրվածքներով: Դրանք սահմանվում են որպես՝

$$\tilde{X}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_X(x) \geq \alpha\}, \qquad \alpha \in [0,1] \tag{25}$$

Ավելին բոլոր α-կտրվածքները միասին միորոշ ձևով որոշում են ոչ հստակ բազմությունը:
α-մակարդակները կսահմանենք[40] որպես

$$C_\alpha(\tilde{X}) = \{x \in X \mid \mu_X(x) = \alpha\} \tag{26}$$

Դրանք փաստացիորեն շատ փոփոխականի ֆունկցիայի կոնտուրներ են:

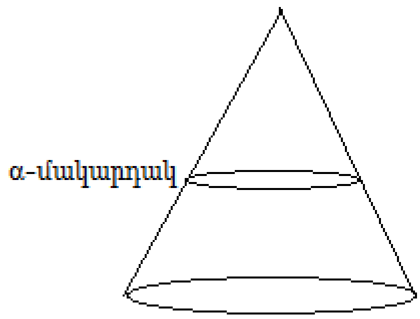
Ոչ հստակ բազմությունների հետ կարող են կատարվել ինչպես լինգվիստիկ (օրինակ «շատ» կամ «ավելի» բառերի հետ զուգորդմամբ) գործողություններ, այնպես էլ մաթեմատիկական: Դրանց մասնավորապես կարելի է ծանոթանալ [16]-ից:

Ոչ հստակ թվերը ոչ հստակ բազմություններ են, որոնք կրում են որոշ ցանկալի հատկություններ՝

1. նորմավորված
2. α-մակարդակները ուռուցիկ բազմություններ են:
3. պատկանելության ֆունկցիան կտոր առ կտոր անընդհատ է: (ըստ որոշ սահմանումների անընդհատ (տես [33])):
4. որոշման տիրույթը $\mathbb{R}^n$ է (որևէ n-ի համար):

[40] Այս նշանակումը օգտագործված է Viertl-ի կողմից իր գրքում՝ [107]:

2-րդ պայմանը համարժեք է $\mu_{\cdot}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\left(\mu_{\cdot}(x_1), \mu_{\cdot}(x_2)\right)$ բոլոր $\lambda \in [0,1]$-երի և x-երի համար: Երբեմն գրականությունում օգտագործվում է հենց այդ ձևակերպումը:



Գծապատկեր 2. α-մակարդակը բազմաչափ ոչ հստակ թվի դեպքում:

Ոչ հստակ թվերի ներմուծումը հնարավորություն է տալիս սահմանել լրացուցիչ գործողություններ ոչ հստակ թվերի համար, ինչպես նաև տալ առնվազն թույլ դասակարգում ոչ հստակ թվերի բազմությունների համար:

Ոչ հստակ թվերը, որոնց կրիչը $\mathbb{R}^1$-ում է, Viertl-ը անվանել է ոչ հստակ միջակայքեր:

Որպես ոչ հստակ թվերի գումարում ընդունվում է ոչ հստակ թվերի α-կտրվածքների Մինկովսկու գումարը: Թվով արտադրյալը սահմանվում է որպես α-կտրվածքների թվով արտադրյալ:

Տվյալ ձևով սահմանվող գործողությունների համար, կարելի էր ակնկալել, որ ոչ հստակ թվերի բազմությունը իրենից ներկայացնում է վեկտորական տարածություն: Սակայն իրականում տվյալ ձևով սահմանվող գործողությունները չեն տալիս հնարավորություն սահմանել միակ 0-ական էլեմենտ: Այսինքն՝ $\tilde{A} - \tilde{A} \neq 0$:

Սակայն Diamond-ը և Kloeden-ը ցույց են տվել, որ այս ձևով սահմանված ոչ հստակ թվերի բազմությունը իրենից ներկայացնում է բանախյան (նորմի իմաստով) ենթաբազմություն (բայց ոչ ենթատարածություն), էվկլիդյան կամ այն ցանկացած հիլբերտյան տարածությունում, որում նրանք սահմանված են (տես [33]):

Որպես տարբերության մեկ այլ տեսակ վերցվում է Յակուհարայի տարբերությունը, որը սահմանվում է՝ $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \{\tilde{C} \,|\, \tilde{C} + \tilde{B} = \tilde{A}\}$ (տես օրինակ՝ [19, 57]): Վերջինս կարող է լինել նաև դատարկ բազմություն:

Ակնհայտ է, որ սովորական իրական թվերը նույնպես կարող են ընկալվել որպես ոչ հստակ թվեր (մի կետ 1 պատկանելության չափով):

Երբ խոսքը գնում է $\mathbb{R}$ -ի վրա ոչ հստակ թվերի սահմանման մասին, սահմանվում է նաև ոչ հստակ թվերի արտադրյալ :

Հաճախ ոչ հստակ թվերը բաժանվում են դասերի կախված նրանց պատկանելության ֆունցկիա տեսքից: Ամենահաճախ դիտարկվողները ոչ հստակ եռանկյուն, ոչ հստակ սեղան, ոչ հստակ քառակուսային պատկանելիության ֆունկցիայով բազմություններ են: Տրված անվանումները կապված են պատկանելիության ֆունկցիայի կամ ոչ հստակ թվի տեսքի հետ: Նման ոչ հստակ թվերը կարելի է սպեցիֆիկացնել երկու, երեք կետերով, ինչը հեշտացնում է իրենց հետ գործողությունները:

Ոչ հստակ եռանկյուն թվերի հետ կապված ստացված են շատ արդյունքներ նաև ոչ հստակ ռեգրեսիաների համար: (տես օրինակ [32]-ը):

Ըստ ոչ հստակ թվերի սահմանման 2-րդ հատկության, իրենց α-կտրվածքները ոռուցիկ բազմություններ են: Իսկ ինչպես հայտնի է (տես օրինակ [93]-ը) ուռուցիկ բազմությունները՝ փակ լինելու դեպքում, միորոշ ձևով որոշվում են իրենց հենաֆունկցիաներով (կամ հենման ֆունցկիաներով)։ Փակությունը ապահոված է α-կտրվածքների սահմանումով։ Հենման ֆունկցիաների համար կօգտագործվի կամ $s_{\tilde{X}}(x,\alpha)$ կամ $\tilde{X}_{x,\alpha}$ նշանակումը։

Հենման ֆունկցիաների ներմուծումը այսպիսով թույլ է տալիս վարվել ոչ հստակ թվերի հետ, որպես բազմաչափ ֆունկցիաների։

2.2 Ֆունկցիաներ ոչ հստակ մեծությունների վրա

Ոչ հստակ մեծությունների վրա որոշված ֆունկցիաների արժեքները որոշելու համար Zadeh-ն առաջարկել է հետևյալ ընդլայնման սկզբունքը[41]՝

$$f(\tilde{x}) = \tilde{y} \tag{27}$$

որտեղ $\tilde{y}$-ի պատկանելության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\mu_{\tilde{y}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in M, f(x)=y} \mu_{\tilde{x}}(x)\,; & \text{եթե } \exists x \in M, \text{ այնպիսին որ } f(x) = y \\ 0 \quad ; & \text{եթե } \nexists x \in M, \text{ այնպիսին որ } f(x) = y \end{cases} \tag{28}$$

որտեղ M-ը $\mu_{\tilde{x}}(x)$-ի որոշման տիրույթն է, այսինքն՝ $\tilde{x}$-ի կրիչը լիովին պատկանում է M-ին։

Երբ f-ը անընդհատ ֆունկցիա է իր որոշման տիրույթում, ապա իրականում $\tilde{y}$-ի α-մակարդակները համընկնում են $\tilde{x}$-ի α-մակարդակներում f-ի ընդունած արժեքների բազմության հետ։ Այսինքն՝

$$C_\alpha(\tilde{y}) = \{f(x) |\ x \in C_\alpha(\tilde{x})\} \tag{29}$$

[41] Այս սկզբունքը կարելի է գտնել բազմաթիվ տեղեր, մասնավորապես նաև [107]-ում։

2.3 Ոչ հստակ պատահական մեծություններ

Ոչ հստակ պատահական տրվում է երկու տարբեր ոչ իրար համարժեք սահմանումներով (տես [60]):

Առաջին սահմանման համաձայն, որպես ոչ հստակ պատահական մեծություն ամենաընդհանուր ձևով ընկալվում է որևէ հավանականային տարածության վրա որոշված ֆունկցիա (համապատասխան չափելիության ապահովմամբ), որի արժեքների բազմությունը ոչ հստակ թվերի բազմությունն է: Նշելով ամենաընդհանուր մոտեցմամբ ի նկատի ունենք, որ չի սպեցիֆիկացվում այդ ոչ հստակ թվերի տեսքը կամ դրա հետ կապված այլ չափորոշիչներ:

Այս գաղափարը (կամ ոչ հստակ պատահական մեծության այս սահմանումը) առաջին անգամ ներկայացրել է Kwakernaak-ը ([61]), իսկ հետո ավելի հստակեցրել են Piru-ն և Ralescu-ն ([90]):

Ընդհանրապես ասած կարելի է դիտել որպես գնահատականների համախումբ, յուրաքանչյուր դիտարկման համար: Այսինքն՝ այս գաղափարը ի հայտ է գալիս, երբ ունենալով դիտարկում, մենք չենք կարողանում ճշգրիտ չափել այդ կոնկրետ դիտարկման համար մեր կողմից փնտրվող ցուցանիշը (օրինակ՝ երբ յուրաքանչյուր ելքի համար ուզում ենք չափել տվյալ ելքի «նշանակալիությունը» կամ ասենք «էականությունը» և այլն:)

Ավելի ֆորմալ վերը նշվածը գրվում է այսպես:

Տրված է հետևյալ հավանականային տարածությունը՝ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: Ոչ հստակ պատահական մեծությունը չափելի ֆունկցիա է՝ $\tilde{X}: \Omega \to \mathcal{T}$: (այստեղ՝ $\mathcal{T}$-ն ոչ հստակ թվերի բազմությունն է:)

Սակայն այստեղ ի հայտ են գալիս ինչպես և դասական պատահական մեծությունների դեպքում չափելիության հարցեր: Դրանք մասամբ դիտարկված են [72]-ում: Չափելի ֆունկցիայի գաղափարը այս դեպքում պետք է հասկանալ որպես յուրաքանչյուր α-կտրվածքի նախապատկերի չափելիություն:

Այսպես սահմանված ոչ հստակ պատահական մեծությունը դասական պատահական մեծության ընդհանրացում է: Յստակեցնելով վերը նշվածը՝ եթե տրված մեծության բոլոր արժեքները սովորական իրական թվեր են (այսինքն՝ յուրաքնաչյուր ω-ի համար), ապա սա իրենից կներկայացնի դասական պատահական մեծություն:

Ավելին՝ հաշվի առնելով որ իր ընդունած արժեքները ոչ հստակ թվեր են, որոնք ուռուցիկ բազմություններ են, ապա իրենց վրա սահմանելով հենման ֆունկցիա, վերջինս կարելի է ընկալել որպես անվերջ (կոնտինուում) չափանի բազմաչափ պատահական մեծություն, այսինքն՝ որպես պատահակն դաշտ:

Յստակեցնելով վերը նշվածը՝ եթե տրված մեծության բոլոր արժեքները սովորական իրական թվեր են (այսինքն՝ յուրաքնաչյուր $\omega \in \Omega$-ի համար), ապա սա իրենից կներկայացնի դասական պատահական մեծություն:

Ինչպես և ցանկացած պատահական մեծության դեպքում, այս դեպքում էլ հաճելի է ունենալ թվային բնութագրիչները:

Մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան (վարիացիան) սահամանելիս կան մի քանի մոտեցումներ: Կան մոտեցումներ, որոնք նշված երկուսը սահմանում են որպես թիվ, և կան, որոնք սահամանում են որպես ոչ հստակ թիվ:

Ամենաընդհանուր և սպասելի մոտեցումը այս ոչ հստակ թվերից կազմել բոլոր հնարավոր մաթսպասումները (տրված α-մակարդակների համար) և ստացված ոչ հստակ բազմություն կոմբինացիան վերցնել որպես մաթեմատիկական սպասում: Ֆորմալ այսպես՝

$$E_\alpha(\tilde{X}) = \{E(X)|X(\omega) \in \tilde{X}_\alpha(\omega)\} \quad (30)$$

Մեկ այլ մոտեցմամբ մաթեմատիկական սպասումը սահմանվում է ներմուծելով մեկ այլ գաղափար՝ մաթ.սպասման օպերատոր: Այն սահմանվում է այսպես՝

$$E[\tilde{X}] = \int_0^\infty Cr(\tilde{X} \geq x)dx - \int_{-\infty}^0 Cr(\tilde{X} \leq x)dx \quad (31)$$

Կարելի է նկատել, որ տվյալ օպերատորը պատահական մեծություն է սահմանում: Եվ որպես թիվ մաթեմատիկական սպասումը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$E(\tilde{X}) = \int_\Omega E[\tilde{X}]dP \quad (32)$$

Այստեղ՝

$$Cr(A) = \frac{1}{2}(Pos(A) + Nes(A))$$

$$Pos(A) = \sup_{x\in A} \mu_{\tilde{X}(\omega)}(x) \quad (33)$$

$$Nes(A) = 1 - Pos(\bar{A}) = 1 - \sup_{x\in \bar{A}} \mu_{\tilde{X}(\omega)}(x)$$

Սրա առանձնահատկությունների համար նայեք [68],[71]:

Տրված սահմանումով մաթեմատիկական սպասում է կիսում է գծայնության հատկությունը, բայց միայն երբ որպես դաշտ վերցնում ենք դասական թվերը՝$E(a\tilde{X} + b\tilde{Y}) = aE(\tilde{X}) + bE(\tilde{Y})$:

<u>Դիտողություն1</u> (32) և (33) բանաձևերով տրվող մաթեմատիկական սպասումները իրականում հանդիսանում է բազմությունների տիրույթից արգումենտ ընդունող ֆունկցիայի համապատասխանաբար Aumann-ի և Choquet -ի ինտեգրալները ([3],[28]):

Վարիացիան ևս ունի սահմանման մի քանի մոտեցում (համակարգված ձևով սրանց մի մասը նկարագրված են [27]-ում):

Մեկը դասական մոտեցումն է, ինչպես նկարագրված է մաթեմատիկական սպասման գաղափարի դեպքում: Սա էլ վարիացիան սահմանում է որպես ոչ հստակ բազմություն: Այս դեպքում ևս α-կտրվածքները սահմանվում է այսպես՝

$$Var_\alpha(\tilde{X}) = \{Var(X)|X(\omega) \in \tilde{X}_\alpha(\omega)\} \tag{34}$$

Մյուս մոտեցումը Ֆրեշեի կողմից վարիացիայի սահմնաման վերաձևումն է ոչ հստակ դեպքի համար: Մասնավորապես՝ այն սահմանում է մաթեմատիկական սպասումը որպես մի թիվ, որը ինչ-որ իմաստով մոտ է տրված պատահական մեծությանը: Այսինքն՝ սահմանելով հեռավորության գաղափարը, վարիացիայի հասկացությունը տվյալ դեպքում կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$Var(\tilde{X}) = \inf_{\tilde{Y}} \int_{\Omega} d^2(\tilde{X}, \tilde{Y}) dP \tag{35}$$

Իսկ արդեն մինիմալացնող $\tilde{Y}$-ը (նրա միակությունը ապահովվում է d-ի մետրիկա լինելով) կլինի մաթեմատիկական սպասումը:

Սրա հետ կապված մի շարք էական հատկություններ նկարագրված են և մասամբ դուրս բերված [59]-ում:

Նկատեք, որ քանի որ ոչ հստակ թվերը իրենց մեջ պարունակում են նաև սովորական իրական թվերը, այդ դեպքում սահմանելով մետրիկա ոչ հստակ թվերի դասում, որպես մաթսպասում կարող ենք ընդունել մերը նշված սահմանումներից ցանկացածը:

Որպես մետրիկա հաճախ ընդունում են՝ $d(X,Y) = \left(\int_S \left(s_X(x) - s_Y(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, որտեղ $s_A(x)$-ը A բազմության հենման ֆունկցիան է, իսկ S-ը 1-շրջանագիծն է:

Այսպիսով վարիացիայի վերջնական տեսքը ստացվում է՝

$$Var(\tilde{X}) = \int_{\Omega}\int_{S}\left(s_{\tilde{X}}(x) - s_{E(\tilde{X})}(x)\right)^2 dxdP \qquad (36)$$

Երբեմն էլ վերցնում են հաուսդորֆյան մետրիկան` $d(X,Y) = \sup_{x\in S}|s_X(x) - s_Y(x)|$:

Վերջապես վարիացիան սահմանվում է նաև կովարիացիայի հետևյալ սահմանումից`

$$Cov(\tilde{X},\tilde{Y}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(Cov(\tilde{X}_\alpha^-,\tilde{Y}_\alpha^-) + Cov(\tilde{X}_\alpha^+,\tilde{Y}_\alpha^+)\right)d\alpha \qquad (37)$$

Այս սահմանումը արդեն իսկ ենթադրում է որ մեր ոչ հստակ պատահական մեծությունը ունի այսպես ասած աջակողմյան և ձախակողմյան բաշխումներ, այսինքն` որ $\tilde{X}_\alpha^-$, $\tilde{Y}_\alpha^-$, $\tilde{X}_\alpha^+$ և $\tilde{Y}_\alpha^+$ պատահական մեծություններ են: Այս սահմանմանը կարելի է ծանոթանալ [37]-ից:

Կարելի է նկատել, որ հենման ֆունկցիաները ոչ հստակ պատահական մեծություններին տանում եմ ոչ հստակ դաշտերի դաս: Սա հնարավորություն է տալիս ուսումնասիրել դրանք ավելի համակարգված (ընդհանուր տեսության համար [1], [105]): Մասնավորապես` կարելի է վարիացիան սահմանել կովարիոգրամի միջոցով:

Մյուս կողմից կարելի է նկատել, որ այս ձևով ոչ հստակ բազմությունները իրենցից ներկայացնում են ինչ-որ տիրույթում ուռուցիկ մարմիններ (ենթաբազմություններ), և հետևաբար ոչ հստակ պատահական մեծություններին կարելի է վերաբերվել որպես պատահական բազմությունների ինչի առանձին տեսությանը կարելի է ծանոթանալ օրինակ Molchanov-ի գրքից ([83]):

Վարիացիան նույնպես կարելի է սահմանել մաթսպասման օպերատորի լեզվով: Օգտվելով ոչ հստակ թվերի բազմապատկման սահմանումից կարելի մաթսպասման օպերատորը կիրառել $\tilde{X}^2$ վրա, և ստանալ հետևյալը

$$Var(\tilde{X}) = \int_{\Omega} \left(E[\tilde{X}^2] - E[\tilde{X}]^2\right) dP \qquad (38)$$

<u>2.</u> Երկրորդ սահմանումը համապատասխանում է այն դեպքին երբ մենք գիտենք հնարավոր ելքերը, և մեր ենթադրությունը ավելի շատ վերաբերվում է այդ ելքերի հավանականություններին, և հենց սրանք են դառնում ոչ հստակ թվեր: Այս սահմանմամբ ոչ հստակ պատահական մեծությունների համար սահմանվում է խտության ֆունկցիա, ինչը լավ գործիք է հանդիսանում թվային բնութագրիչները ստանալու համար:

Մասնավորապես որպես խտության ֆունկցիա, վերցվում է ոչ հստակ արժեքներ ընդունող ֆունկցիա: Այսինքն՝ այս դեպքում P-ն է ոչ հստակ ֆունկցիա: (Ոչ հստակ չափը ունի իր սահմանումը և այստեղ մենք ի նկատի ունենք , որ $P: \Omega \to \mathcal{T}$): Թարգմանելով սա խտությունների լեզվով անընդհատ պատահական մեծությունների համար ստացվում է՝ $\underline{\pi}, \overline{\pi} : R \to \mathcal{T}$: Սակայն այս դեպքում դրվում է լրացուցիչ սահմանափակում խտության ֆունկցիայի վրա: Այն է՝ $\exists f(x) \in [\underline{\pi}_1(x); \overline{\pi}_1(x)]$, այնպիսին որ $f(x) \geq 0, \int f(x)dx = 1$, կամ որ նույն է որ $f(x)$-ը դասական խտության ֆունկցիա է, ինչպես նաև $\int \overline{\pi}_\alpha(x)dx$ և $\int \underline{\pi}_\alpha(x)dx$, գոյություն ունեն և վերջավոր են բոլոր α-ների համար:

Այս պատահական մեծությունը կարելի սահմանել նաև ոչ հստակ չափերի օգնությամբ՝ $P(\omega) = \{G(\omega) | G \in \mathbb{P}\}$, որտեղ $\mathbb{P}$-ն ոչ հստակ հավանականային (այսինքն՝ $G(\Omega) = 1$) չափերի որևէ դաս է (ցանկալի հատկություններով):

Այստեղ ներկայացված ոչ հստակ պատահական մեծությունների սահմանումները հիմնականում ամենաընդունվածն են, բայց սպառիչ չեն: Նայեք, օրինակ, [42],[60] ավելի ընդհանուր սահմանման համար:

2.4 Ոչ հստակ Բայեսյան թեորեմ

Ոչ հստակ պատահական մեծությունները (անընդհատ դեպքը), ներկայացվում են իրենց խտության ֆունկցիայով հետևյալ կերպ. ոչ հստակ խտությունը յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանեցնում է որևէ ոչ հստակ թիվ (կամ երբեմն միջակայք), շատ ավելի հաճախ սրանց տակ հասկանում ենք հենց այնպիսին ուռուցիկ բազմություններ որոնք ամբողջ որոշման տիրույթի համար են ուռուցիկ (այսինքն՝ ենթադրվում է որ չպատկանող կետերը ուղղակի ունեն 0 պատկանելիության չափ, այլ ոչ թե ուղղակի չեն դիտարկվում):

Ոչ հստակ հավանականային չափերի տեսության շրջանակներում, ի հայտ է գալիս ոչ հստակ պատահական մեծությունների, դրանց բաշխման և խտության ֆունցկաիների գաղափարները, ոչ հստակ տվյալների ուսումնասիրության և հիպոթեզների ստուգման խնդիրներ, նման տվյալների մոդելավորման հարցեր (օրինակ ոչ հստակ ռեգրեսիաները) և այլն (Այս ամենին ավելի մանրամասն կարելի է ծոնաթանալ [107],[110]-ից):) Ընդհանուր դեպքում ոչ հստակ բայեսյան անալիզի հարցը առաջինը բարձրացրել է Viertl-ը, իր զեկույցներից մեկում: Դրանից հետո իր կողմից փորձ կատարվեց համակարգել ընդհանուր մոտեցումները և ստեղծել բայեսյան թեորեմի ոչ հստակ տարբերակը: Նրա այդ տարբերակը ձևակերպված է իր գրքում՝ [107], ինչպես նաև ավելի համառոտ բայց հակիրճ ձևով անդրադարձել է իր և իր կոլեգայի հոդվածում՝ [106]:

Ոչ հստակ խտությունների համար պահանջում ենք՝ որ $\exists f(x)\,;\ \underline{\pi}_1(x) \le f(x) \le \overline{\pi}_1(x)(\forall x)$, այնպիսին որ $f(x)$-ը լինի սովորական խտության ֆունկցիա: Նկատենք որ միանշանակ $\underline{\pi}_\alpha(x) \neq \overline{\pi}_\alpha(x)$-ը , չեն կարող երկուսն էլ միաժամանակ խտության ֆունկցիաներ լինեն: Այնուամենայնիվ նրանցից պահանջվում է որ իրենք $\forall \delta \in (0,1]$ մակարդակի համար ունենան վերջավոր ինտեգրալ :

Չնայած նրան, որ սրանք կարելի է մեկնաբանել որպես ամենամեծ և ամենափոքր հավանականություններ, որպես այդպիսին սրանք առաջանում են խիստ ձևով, բորելյան բազմությունների հետ որևէ ընդհանուր կետ ունենալուց (այդպիսի բորելյան բազմությունները շատ կարող են լինել, և հետևաբար սա կկանխորոշի մեծ հավանականությունը) և ամբողջովին պարունակելուց (սրան չափը կլինի փոքրը, և հետևաբար կկանխորոշի փոքր հավանականությունը): Պարզվում է որ սրանք այնքան էլ չեն համընկնում Zadeh-ի սկզբունքով կառուցվող ամենամեծ և ամենափոքր հավանականություններին, ինչպես նշված [107]-ում հղում անելով Trutschnig-ի դոկտորական աշխատանքին[42]: Մենք այնուամենայնիվ չենք ընկալի դա որպես փաստացիորեն տարբերվող հասկացություններ:

Պատահական խտության այսպիսի ներկայացման դեպքում Բայեսի թեորեմը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\underline{\pi}_\alpha(\theta|x_1\,;\dots;\ x_n) = \frac{\underline{\pi}_\alpha(\theta)\,l(\theta;x_1\,;\dots;\ x_n)}{\int \frac{\underline{\pi}_\alpha(\theta)+\overline{\pi}_\alpha(\theta)}{2}\,l(\theta;x_1\,;\dots;\ x_n)\,d\theta}$$

$$\overline{\pi}_\alpha(\theta|x_1\,;\dots;\ x_n) = \frac{\overline{\pi}_\alpha(\theta)\,l(\theta;x_1\,;\dots;\ x_n)}{\int \frac{\underline{\pi}_\alpha(\theta)+\overline{\pi}_\alpha(\theta)}{2}\,l(\theta;x_1\,;\dots;\ x_n)\,d\theta} \tag{39}$$

[42] Սա հասանելի չէ մեզ, և դրա համար մենք հղում ենք կատարում Viertl-ի գրքից:

Երբ մենք գործ ունենք այնպիսի ոչ հստակ պատահական մեծության հետ որի խտությունը յուրաքանչյուր արժեքի համար ոչ հստակ եռանկյուն թիվ է, ապա ակնհայտ է որ $\underline{\pi}_1(x) = f(x) = \overline{\pi}_1(x)$, և հետևաբար $\frac{\underline{\pi}_1(\theta)+\overline{\pi}_1(\theta)}{2} = f(\theta) = \overline{\pi}_1(\theta) = \underline{\pi}_1(\theta)$:

Հետևյալ ձևով սահմանված posterior ոչ հստակ խտության ֆունկցիաների δ-մակարդակների համար, ճիշտ է այն որ տարբերություն չկա միանգամից կիրառել բոլոր դիտարկումները, թե դրանց մի մասի կիրառությունից ստացված posterior խտությունը օգտագործել որպես նոր նախնական խտություն և կիրառել մնացածը:

Մասնավորապես Viertl-ը վերցրել է այս տարբերակը որովհետև դասական մեծագույն և փոքրագույն հնարավոր արժեքների մոտեցումը այսպիսի ճշմարտանմանության ֆունկցիայի դեպքում կորցնում է վերը նշված հատկությունը, ինչը սակայն հիմնավոր չէ:

Սա շատ էական պնդում է, քանզի եթե մենք գտնենք բաշխումը, որը նույն դասում կմնա (միգուցե պարամետրերի փոփոխությամբ) մեկ դիտարկում ներառելուց հետո, ապա այն նույն դասում կմնա բոլոր դիտարկումները ներառելուց հետո: Հաշվի առնելով որ այստեղ որպես ճշմարտանմանության ֆունկցիա Viertl-ը առաջարկում է $l(\theta; x_1 ; \ldots ; x_n) = \prod_i \left(\int_{l_i}^{r_i} \mu_i(x) f(x|\theta) dx\right)$, ապա սա շատ կհեշտացնի գործը: Այստեղ $\mu(x)$-ը պատկանելության չափի ֆունկցիան է: (Այս հասկացությունները ավելի մանրամասն նկարագրված են իր գրքում [107] և նաև [106]-ում):

Մասնավորապես, բայեսյան թեորեմի այս տեսքը ընդունվում է այն պատճառով որ դասական ինտուիտիվ ընկալումից ելնելով մենք պետք է բաժանեինք ամենաքիչ հավանական կոմբինացիան ամենահավանական կոմբինացիաների գումարին, ինչը խանգարում է բայեսյան թեորեմի հերթական կիրառմանը այն իմաստով, որ առաջացնում է լրացուցիչ գործակից:[43]

Մասնավորապես, եթե մենք վերցնենք՝

$$\underline{\pi}_\alpha(\theta|x_1\,;\dots;\,x_n) = \frac{\underline{\pi}_\alpha(\theta)l(\theta;x_1\,;\dots;\,x_n)}{\int \overline{\pi}_\alpha(\theta)l(\theta;x_1\,;\dots;\,x_n)d\theta} \tag{40}$$

$$\overline{\pi}_\alpha(\theta|x_1\,;\dots;\,x_n) = \frac{\overline{\pi}_\alpha(\theta)l(\theta;x_1\,;\dots;\,x_n)}{\int \underline{\pi}_\alpha(\theta)l(\theta;x_1\,;\dots;\,x_n)d\theta}$$

ապա հերթական կիրառումների համար կստանանք հետևյալ առընչությունը (տես [108] էջ 94)՝

$$\underline{\pi}_\alpha(\theta|x_1\,;x_2) = \frac{\underline{\pi}_\alpha(\theta)l(\theta;x_1)\;l(\theta;x_2)}{\int \overline{\pi}_\alpha(\theta)l(\theta;x_1)l(\theta;x_2)d\theta} \times \frac{\int \underline{\pi}_\alpha(\theta)l(\theta;x_1)d\theta}{\int \overline{\pi}_\alpha(\theta)l(\theta;x_1)d\theta} \tag{41}$$

Վերջին կոտորակը ընդհանրապես ասած մեկ չգերազանցող գործակից է և եթե մեր բաշխումները ոչ հստակ են ապա խիստ փոքր է մեկից:

<u>Դիտողություն</u> կարելի է նկատել, որ մաքսիմումը կամ մինմումը համարիչում վերցված չէ ըստ դիտարկումների մաքսիմալ նպաստող էլեմենտների ճշմարտանմանության ֆունկցիաների մեջ: Այլ կերպ ասած ճշմարտանմանության ֆունկցիաները մնում են այնպիսի ինչպես տրված է իրենց բանաձևում:

Հետո Viertl-ը տվել է նաև այդ ընդհանրացումը (որի մեջ ճշմարտանմանության ֆունկցիան ևս ոչ հստակ բաշխում ունի):

$$\underline{\pi}_\alpha(\theta|x_1\,;\dots;\,x_n) = \frac{\underline{\pi}_\alpha(\theta)\underline{l}_\alpha(\theta;x_1\,;\dots;\,x_n)}{\int \frac{1}{2}\left(\underline{\pi}_\alpha(\theta)\underline{l}_\alpha(\theta;x_1\,;\dots;\,x_n) + \overline{\pi}_\alpha(\theta)\bar{l}_\alpha(\theta;x_1\,;\dots;\,x_n)\right)d\theta} \tag{40}$$

[43] Այսինքն՝ փոքր հավանականությունները մեծերի բաժանելով, և նույն գործողությունը կրկնելով մեկ այլ դիտարկման համար, մենք չենք ստանում նույն արդյունքը, ինչ երկու դիտարկումները միասին մտցնելով ճշմարտանմանության ֆունկցիայի մեջ: Սրա պատճառը նրանում է որ հայտարարում գտնվող մեծ հավանականությունները առաջին դիտարկման ներմուծումից հետո ևս փոխվում են, և միգուցե ոչ նույն համամասնությամբ (ոչ սիմետրիկ):

$$\overline{\pi}_{\alpha}(\theta|x_1\,;\dots;\,x_n)=\frac{\overline{\pi}_{\alpha}(\theta)l_{\alpha}(\theta;x_1\,;\dots;\,x_n)}{\int\frac{1}{2}\left(\underline{\pi}_{\alpha}(\theta)\underline{l}_{\alpha}(\theta;x_1\,;\dots;\,x_n)+\overline{\pi}_{\alpha}(\theta)\overline{l}_{\alpha}(\theta;x_1\,;\dots;\,x_n)\right)d\theta}$$

Այստեղ ճշմարտանմանության ֆունկցիան հասկացվում է որպես ֆունցկիակիրառված ոչ հստակ թվերի դասում:

2.5 Ոչ հստակ ռեգրեսիաներ

Ոչ հստակ ռեգրեսիաները պայմանականորեն բաժանվում են երեք հիմնական տեսակների՝ Տանակայի ռեգրեսիան, Կելմինսի ռեգրեսիան, և Դայմոնդի մետրիկայի հիման վրա ռեգրեսիան:

Սրանցից յուրաքանչյուրում բացատրվող փոփոխականները ոչ հստակ բազմություններ են: Հիմնականում դիտարկվում է այն դեպքը երբ խոսքը գնում է եռանկյուն կամ ամենաշատը ուղղանկյուն ոչ հստակ թվերի մասին: Ընդ որում հիմնական արդյունքները վերաբերվում են հենց միաչափ դեպքին, այսինքն երբ ոչ հստակ թվերը սահմանվում են $\mathbb{R}^1$-ի վրա:

Տանակայի ռեգրեսիան

Տանակայի կողմից առաջարկված ռեգրեսսիոն սխեման (նկարագրված [104]- ում), ոչ հստակ ռեգրեսիաների կատարման առաջին փորձերից է:

Այստեղ խոսքը ընդհանրապես ասած գնում է ռեգրեսսիոն գործակիցների և բացարտվող փոփոխականների ոչ հստակ լինելուն, իսկ բացատրող փոփոխականները անպայմանորեն վերցվում է սովորական թվեր: Այսինքն՝ խնդիրը կայանում է ոչ հստակ այնպիսի գործակիցների փնտրման մեջ, որ նրանցով կազմված գծային կոմբինացիաների վեկտորը ինչ-որ իմաստով

մոտ լինի բացատրվող փոփոխականների ոչ հստակ ռեալիզացիաների (ոչ հստակեցումը պարտադիր չէ որ կապված լինի փոփոխականի բնույթով, և հետևաբար նա կարող ուղղակի լինել սովորական պատահական մեծության ռեալիզացիայի ֆազիֆիկացված տարբերակ) վեկտորին:
Տանակայի մոտեցմամբ սատրվում է որպես պարունակում:

Այսինքն՝ գծային կոմբինացիայով ստացված արդյունքը (որը նույնպես կլինի ոչ հստակ թիվ), պետք լինի այն ամենափոքր ոչ հստակ թիվը որը կպարունակի բացատրվող ոչ հստակ փոփոխականը: Տանակայի ռեգրեսիայի դասական տարբերակը տրվում է եռանկյուն ոչ հստակ թվերի համար: Եվ հենց այդ պատկանելության ֆունկցիայով թվերի համար մաթեմատիկական ձևակերպումը տրվում է հետևյալ կերպ:

$$\tilde{Y} \sim \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1 x_1 + \tilde{B}_2 x_2 + \dots + \tilde{B}_k x_k \tag{42}$$

որտեղ $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_n)^T$, բացատրվող փոփոխականի ոչ հստակ դիտարկումների վեկտորն է, $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})^T$:

Ընդ որում՝ ենթադրվում է, որ $\tilde{B}_j = (a_j, c_j)$, $(c_j \geq 0)$ այսինքն՝ հանդիսանում է եռանկյուն սիմետրիկ ոչ հստակ թիվ որը կարելի է տալ երկու կետով, միջինով, և սպրեդով՝ միջինից ծայրերի հեռվորությամբ: Եվ՝ $\tilde{Y}_i = (y_i, e_i)$, $(e_i \geq 0)$ (այստեղ մենք հավատարիմ ենք մնացել [99]-ի նշանակումներին):
Մինիմալը այստեղ հասկանում են հետևյալ իմաստով՝

$$\min_{c_0, c_1, \dots, c_n} \left(c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j |x_{ij}| \right) \tag{43}$$

Այլ կերպ ասած փնտրվում է գումարային մինիմալ «ֆազիաֆիկացիայով» ոչ հստակ պարամետրերի համախումբը:

Իսկ որպես համապատասխան սահմանափակում վերցվում է համապատասխանաբար α-մակարդակների պարունակվելիությունը, այսինքն՝

$$\begin{cases} a_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j x_{ij} + (1-\alpha)\left(c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j |x_{ij}|\right) > y_i + (1-\alpha)e_i \\ a_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j x_{ij} - (1-\alpha)\left(c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j |x_{ij}|\right) < y_i - (1-\alpha)e_i \\ i = 1, \dots, n \\ c_j \geq 0\ ; j = 0, \dots, k \end{cases} \tag{44}$$

<u>Կելմինսի ռեգրեսիան</u>

Կելմինսի ռեգրեսիան (տես [20]) նախատեսում է պրոցեդուրա, որի նպատակն է գտնել ինչ-որ իմաստով ամենամոտիկ ոչ հստակ գծային կոմբինացիան (ոչ պարտադիր ծածկողը):

Այսինքն՝ որպես այդպիսին վերցվում է մոտիկությունը նկարագրող այլ չափ:

Ի տարբերություն տանակայի ռեգրեսիայի, այստեղ բացատրվող փոփոխականները նույնպես կարող են լինել ոչ հստակ (բայց ոչ պատահական):

Եվ այսպես, որպես երկու ոչ հստակ թվերի հեռավորության գաղափար Կելմինսը առաջարկել է համադրելիության չափը, որը տրվում է հետևյալ կերպ ցանկացած երկու ոչ հստակ $\tilde{A}, \tilde{B}$ թվերի համար՝

$$\gamma(\tilde{A}, \tilde{B}) = \max_x \min \{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \tag{45}$$

Իրականում ինչքան «մոտ» են ոչ հստակ թվերը այնքան այս մեծությունը մոտենում է մեկի: Մասնավորապես, եթե մի ոչ հստակ թիվը պատկանում է մյուսին, ապա իրենց համադրելիության չափը 1 է, իսկ երբ իրենց կրիչները ընդհանրապես հատում չունեն, ապա համադրելիությունը 0 է (տես [20]):

Եվ որպես ռեգրեսսիոն մինիմիզացվող հեռվորություն վերցվում է`

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)^2 \qquad (46)$$

որտեղ γ_i-ն i-րդ դիտարկման համար համադրելիության չափն է: Այսինքն` $\gamma_i = \gamma(\tilde{Y}_i\,,\ \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1\tilde{X}_{11} + \cdots + \tilde{B}_k\tilde{X}_{1k})$:

Սրա առավելությունը կայանում է նրանում, որ այստեղ ոչ հստակ թվերի պատկանելության ֆունկցիան չի սպեցիֆիկացվում, սակայն խնդիրը կարող է դժվար լուծելի լինել բարդ պատկանելության ֆունկցիաների դասում:

Մյուս կողմից, խնդիրը կարող է միակ լուծում չունենալ: Մասնավորապես, եթե ստացվի այնպես, որ մենք կարողանանք գործակիցների վեկտոր գտնենք, որի բացատրող փոփոխականների գծային կոմբինացիան ունենա 1 համադրելիության չափ, այնպիսին որ կոմբիանցիան ամբողջովին պարունակվի բացատրվող փոփոխականի արժեքի մեջ, ապա նրանից նրա մեջ պարունակվող բոլոր ոչ հստակ գործակիցների համար նույնպես 1 համադրելիության չափ կունենան, նույնը` եթե բացատրվող պարունակվի կոմբինացիայի մեջ:

Դայմոնդի ռեգրեսիան

Մաթեմատիկորեն ամենահիմնավորված և խիստ ոչ հստակ ռեգրեսիան առաջարկվել է Դայմոնդի կողմից (տես [32]): Այն պայմանականորեն ընդունված է անվանել Դայմոնդի փոքրագույն քառակուսիների կամ ոչ հստակ փոքրագույն քառակուսների մեթոդ:

Այստեղ ինչպես և Կելմինսի ռեգրեսիայի դեպքում բացատրող փոփոխականները ևս կարող են լինել ոչ հստակ թվեր: Այս դեպքը բավականաչափ նման է կելմինսի ռեգրեսիային այնքանով որ այն ևս փոքրացնում է որոշակի հեռավորություն երկու ոչ հստակ թվերի միջև: Սակայն այստեղ այդ հեռավորությունը մետրիկա է ոչ հստակ թվերի միջև:

Ամենաընդհանուր տեսքով Դայմոնդի կողմից առաջարկված մետրիկան վերցվում է հետևյալ տեսքով ([32],[33])`

$$d\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=\left(n\int_0^1\int_{S^{n-1}}\left(s_{\tilde{A}}(x,\alpha)-s_{\tilde{B}}(x,\alpha)\right)^2dxd\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (47)$$

որտեղ $s_{\tilde{A}}(x,\alpha)$-ը $\tilde{A}$ ոչ հստակ պատահական մեծության α-մակարդակի հենման ֆունկցիայի արժեքն է ըստ $x\in S^{n-1}$ ուղղության, S^{n-1}-ը-գունդն է, և n-ը այն տիրույթի չափողականությունն է որտեղ մենք գործում ենք (այսինքն` n-1-ը ոչ հստակ թվի կրիչի տիրույթի չափողականությունն է:)

Օրինակ եռանկյուն ոչ հստակ թվերի դեպքում մետրիկան ընդունում է հետևյալ տեսքը`

$$d(<l_{\tilde{A}},m_{\tilde{A}},r_{\tilde{A}}>,<l_{\tilde{B}},m_{\tilde{B}},r_{\tilde{B}}>) = (m_{\tilde{A}}-m_{\tilde{B}})^2+\left((m_{\tilde{A}}-l_{\tilde{A}})-(m_{\tilde{B}}-l_{\tilde{B}})\right)^2+\left((m_{\tilde{A}}+r_{\tilde{A}})-(m_{\tilde{B}}+r \qquad (48)$$

Դայմոնդը ապացուցել է որ այս ձևով տրվող բինար հարաբերությունը իրենից ներկայացնում է մետրիկա ([32],[33]):

Դայմոնդը ցույց է տվել օգտվելով Հիլբերտյան տարածություններում պրոյեկցիայի մասին թեորեմից, որ այս մետրիկայի համար միշտ գոյություն ունի ամենամոտիկ (մինիմալ հեռվորությամբ) վեկտոր որը մինիմիզացնում է

$$d\left(\tilde{Y},\tilde{A}_0+\tilde{A}_1\tilde{X}_1+\tilde{A}_2\tilde{X}_2+\ \dots+\tilde{A}_k\tilde{X}_k\right)=\sum_{i=1}^{n}d(\tilde{Y}_i,\tilde{A}_0+\tilde{A}_1\tilde{X}_{i1}+\dots+\tilde{A}_k\tilde{X}_{ik})^2 \qquad (49)$$

Այսինքն՝ եթե որպես սխալներ հասկանանք հենց հեռավորությունը, ապա սա կներկայացնի իրենից փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը:

Ավելին մետրիկայի ընտրությունը կատարվել է այնպես, որ այն արտացոլի L^2 մետրիկան համապատասխան չափողականության հենման ֆունկցիաների տարածությունում:

Ոչ հստակ ռեգրեսիայի այս տարբերակը այնումանեայնիվ միշտ չէ որ հեշտորեն բերում է լուծման վերջնական տեսքի: Եվ ինչպես և մյուս մոդելներում այստեղ նույնպես դժվար է խոսել բաշխումների մասին, կամ սխալների վիճակագրական հատկությունների մասին:

ԳԼՈՒԽ III. ՈՉ ՀՍՏԱԿ ԲԱՅԵՍՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

3.1. Ոչ հստակ դիտարկումներով բայեսյան թեորեմը

Այստեղ մենք օգտվելու ենք եռանկյուն դիտարկումներից, և հենց այսպիսի դիտարկումների համար ենք արտածելու բայեսյան թեորեմը:

Բայեսյան թեորեմի ընդհանուր տեսքը ընդունում է ընդհանրացում, որը թույլ է տալիս ճշմարտանմանության ֆունցկայի համար ևս վերցնել ոչ հստակ ֆունցկիա, նույն ձ-մակարդակով:

Տվյալ դեպքում որպես ճշմարտանմանության ֆունկցիա վերցվում է՝ $l(\theta; x_1; ...; x_n) = \prod_i \left(\int_{l_i}^{r_i} \mu_i(x) f(x|\theta) dx\right)$ (որտեղ $\mu_i(x)$-ը պատկանելության ֆունկցիան է):

Պնդում 3.1 Եռանկյուն ոչ հստակ թվերի համար ճշմարտանմանության ֆունկցիայի վերը նշված ընդհանրացումը ունի հետևյալ տեսքը:

$$\int_{l_i}^{r_i} \boldsymbol{\mu_i(x) f(x|\theta) dx} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r_i - m_i}} \int_{m_i}^{r_i} \boldsymbol{F(x|\theta) dx} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m_i - l_i}} \int_{l_i}^{m_i} \boldsymbol{F(x|\theta) dx} \tag{50}$$

Ապացույց

$$\begin{aligned}
\int_{l_i}^{r_i} \boldsymbol{\mu_i(x) f(x|\theta) dx} &= \int_{l_i}^{m_i} \frac{x - l_i}{m_i - l_i} f(x|\theta) dx + \int_{m_i}^{r_i} \frac{r_i - x}{r_i - m_i} f(x|\theta) dx \\
&= \int_{l_i}^{m_i} \frac{x}{m_i - l_i} f(x|\theta) dx - \frac{l_i}{m_i - l_i} \int_{l_i}^{m_i} f(x|\theta) dx + \frac{r_i}{r_i - m_i} \int_{m_i}^{r_i} f(x|\theta) dx \\
&- \int_{m_i}^{r_i} \frac{x}{r_i - m_i} f(x|\theta) dx \\
&= \frac{1}{m_i - l_i} \big(m_i F(m_i|\theta) - l_i F(l_i|\theta)\big) - \frac{1}{m_i - l_i} \int_{l_i}^{m_i} F(x|\theta) dx \\
&- \frac{l_i}{m_i - l_i} \big(F(m_i|\theta) - F(l_i|\theta)\big) + \frac{r_i}{r_i - m_i} \big(F(r_i|\theta) - F(m_i|\theta)\big) \\
&- \frac{1}{r_i - m_i} \big(r_i F(r_i|\theta) - m_i F(m_i|\theta)\big) + \frac{1}{r_i - m_i} \int_{m_i}^{r_i} F(x|\theta) dx \\
&= F(m_i|\theta) - \frac{1}{m_i - l_i} \int_{l_i}^{m_i} F(x|\theta) dx - F(m_i|\theta) + \frac{1}{r_i - m_i} \int_{m_i}^{r_i} F(x|\theta) dx \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r_i - m_i}} \int_{m_i}^{r_i} \boldsymbol{F(x|\theta) dx} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m_i - l_i}} \int_{l_i}^{m_i} \boldsymbol{F(x|\theta) dx}
\end{aligned} \tag{51}$$

Այստեղ փաստացիորեն գրված է, որ ճշմարտանմանության ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է բաշխման ֆունկցիայի (CDF) $[m_i; r_i]$ միջակայքի միջինի և $[l_i; m_i]$ միջակայքի միջինի տարբերությունը: Սրա դրականությունը ակնհայտ է: Սակայն դժվար չէ նկատելը, որ սա չի կարող հանդիսանալ սովորական ճշմարտանմանության ֆունկցիայի ընդհանրացում, քանի որ եթե $l_i \to r_i$ սակձգտի 0-ի:

Ընդհանուր դեպքում մի դիտարկման համար, ճիշտ են հետևյալ երկու պնդումները:

Պնդում 3.2 Եթե մենք գործ ունենք նախնական ոչ հստակ պատահական մեծության հետ, որի խտությունը ամեն արժեքում ոչ հստակ եռանկյուն թիվ է, իսկ գագաթում խտության ֆունկցիան ունի նորմալ բաշխում, և ունենք դիտարկումներ, որոնք նորմալ բաշխումից են, ապա հետահայաց բաշխումը գագաթում ևս կլինի նորմալ:

Այս պնդման համար հերիք է հասկանալ որ՝ $\underline{\pi}_1(\theta) = \overline{\pi}_1(\theta) = f(\theta)$: Եվ այստեղ կարելի է ասել, որ երբ խոսքը գնում է հստակ կետային դիտարկուկների մասին, մենք օգտագործում ենք ստանդարտ ճշմարտնմանության ֆունկցիան: Ինչպես հայտնի է բայեսյան դուսբերումների տեսությունից, այս դեպքում posterior բաշխումը նույնպես նորմալ է:

Պատկերը լրիվ այլ է, երբ դիտարկումները ոչ հստակ են:

<u>Թեորեմ 3.1</u> Ոչ հստակ եռանկյուն դիտարկման դեպքում, նախնական նորմալ բաշխումը ($N(\mu_0, \sigma_0^2)$) չի մնա նորմալ (հետահայաց) բաշխում, եթե դիտարկումները նորմալ բաշխման են ($N(\theta, \sigma^2)$): Այդ դիտարկման դեպքում նոր միջինի գնահատական կլինի՝ $\hat{\theta} = \frac{\mu_0\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2} + \frac{\sigma_0^2 B}{(\sigma^2+\sigma_0^2)A}$, որտեղ A-ն և B-ն տրված են **(58)**, **(60)** բանաձևերով:

<u>Ապացույց</u> Դիցուք՝

$$f(\theta) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \tag{52}$$

և

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}} \tag{53}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-l}{m-l} & ; l \le x \le m \\ \dfrac{r-x}{r-m} & ; m \le x \le r \end{cases} \tag{54}$$

Նոր գնահատականը կլինի՝

$$\hat{\theta} = \frac{\int_{\Theta} \theta f(\theta) l(x,\theta) d\theta}{\int_{\Theta} f(\theta) l(x,\theta) d\theta} \tag{55}$$

Նախ հաշվենք հայտարարը՝

$$\int_{\Theta} f(\theta) l(x,\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}} dx \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\sigma_0\sigma\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}} d\theta \right) dx \tag{56}$$

$$= \frac{1}{2\sigma_0\sigma\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(\theta-\left(\mu_0\alpha+x(1-\alpha)\right)\right)^2+\mu_0^2\alpha(1-\alpha)+x^2\alpha(1-\alpha)-2\mu_0 x\alpha(1-\alpha)}{2\alpha(1-\alpha)(\sigma^2+\sigma_0^2)}} d \right.$$

Որտեղ՝ $\alpha = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2}$

Ստացվում է՝

$$\int_{\Theta} f(\theta) l(x,\theta) d\theta = \frac{1}{2\sigma_0\sigma\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2(\sigma^2+\sigma_0^2)}} \sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)(\sigma^2+\sigma_0^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\sigma_0^2}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) e^{-\frac{(}{2(}} \tag{57}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) l(x,\theta) d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}{m-l} \left(\varphi\left(\frac{l-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right) - \varphi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right) \right) - \frac{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}{r-m} \left(\varphi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right) - \varphi\left(\frac{r-}{\sqrt{\sigma_0^2}}\right. \right.$$

$$+ \frac{\mu_0-l}{m-l} \left(\Phi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right) \right) + \frac{r-\mu_0}{r-m} \left(\Phi\left(\frac{r-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right) \right) \tag{58}$$

Վերը ստացվածը նշանակենք A-ով։

$$\int_{\Theta} \theta f(\theta) l(x,\theta) d\theta = \mu_0\alpha A + (1-\alpha)B \tag{59}$$

Որտեղ B-ն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$
\begin{aligned}
B:=\ & \frac{r}{r-m}\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}\Bigg(\varphi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)-\varphi\left(\frac{r-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\Bigg)\\
&+\frac{r}{r-m}\mu_0\Bigg(\Phi\left(\frac{r-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)-\Phi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\Bigg)\\
&-\frac{l}{l-m}\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}\Bigg(\varphi\left(\frac{l-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)-\varphi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\Bigg)\\
&-\frac{l}{l-m}\mu_0\Bigg(\Phi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)-\Phi\left(\frac{l-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\Bigg)\\
&+\frac{2\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}\mu_0}{m-l}\Bigg(\varphi\left(\frac{l-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)-\varphi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\Bigg)\\
&+\frac{\mu_0^2}{m-l}\Bigg(\Phi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)-\Phi\left(\frac{l-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\Bigg)\\
&+\frac{\sigma_0^2+\sigma^2}{m-l}\Bigg(\Phi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)-\Phi\left(\frac{l-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)+\varphi\left(\frac{l-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\frac{l-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\\
&-\varphi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\Bigg)-\frac{2\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}\mu_0}{r-m}\Bigg(\varphi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)-\varphi\left(\frac{r-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\Bigg)\\
&-\frac{\mu_0^2}{r-m}\Bigg(\Phi\left(\frac{r-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)-\Phi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\Bigg)\\
&-\frac{\sigma_0^2+\sigma^2}{r-m}\Bigg(\Phi\left(\frac{r-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)-\Phi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)+\varphi\left(\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\frac{m-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\\
&-\varphi\left(\frac{r-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right)\frac{r-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Այս հաշվարկների համար օգտվում ենք նրանից որ՝
$\int \varphi(x)dx = \Phi(x) + C$; $\int x\varphi(x)dx = -\varphi(x) + C$; $\int x^2\varphi(x)dx = \Phi(x) - x\varphi(x) + C$
(Տես [86]:)

Այսպիսով վերջնական նոր միջինը կլինի՝

$$\hat{\theta} = \frac{\mu_0\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2} + \frac{\sigma_0^2 B}{(\sigma^2+\sigma_0^2)A} \tag{61}$$

Սակայն արդեն ավելի մեծ ընտրանքի համար կունենանք այլ պատկեր: (Թե հայտարարում, թե համարիչում նշված ինտեգրալները չեն հաշվվի վերջնական բանաձևով: Ավելի կոնկրետ՝ չեն ներկայացվի անալիտիկ ֆունկցիաների տեսքով:) Ավելին մենք չենք կարող նոր հաշվարկ կատարել, այս տվյալները ընդունելով որպես նոր a priori բաշխման գործակիցներ, քանի որ այս θ-ն նորմալ բաշխումից չի:

Առաջարկվող մեկ այլ ձևով կարելի է ոչ հստակ դիտարկումներով բայեսյան թեորում ճշմարտանմանության ֆունկցիան ձևակերպել հետևյալ կերպ:

$$l(\theta; x_1 ; \ldots ; x_n) = \prod_i f(DF(\boldsymbol{x}_i)|\theta) \qquad (62)$$

որտեղ $DF(\boldsymbol{x}_i)$-ը ոչ հստակ եռանկյուն թվի որևէ դեֆազիֆիկացիա է (այսինքն՝ ինչ-որ սկզբունքով կրիչից կետի ընտրություն):

Այս դեպքում ամենինչ կկարգավորվի: Այնսինքն՝ ցանկացած դեֆազիֆիակցիայի դեպքում նորմալի posterior բաշխումը կմնա նորմալ :

Խնդիրը կայանում է նրանում, որ նախնական տեսքով ոչ հստակ բայեսյան թեորեմի ձևակերպումում համարիչում գրվածը այնքան էլ չի արտահայտում հավանականություն:

Մեկ այլ առաջարկվող եղանակով մեր դիտարկումների համար գնահատում ենք հավնականությունների ոչ հստակ բազմությունը: Այսինքն, որպես α-կտրվածքներ մեզ մոտ կլինեն հետևյալը՝ $y_\alpha = \left[\min_{x\in x_\alpha} f(x|\theta) ; \max_{x\in x_\alpha} f(x|\theta)\right]$, որտեղ x_α-ն x դիտարկման α-կտրվածքն է: Այսինքն յուրաքանչյուր մակարդակում գնահատում ենք մաքսիմալ և մինիմալ հավանականությունները որը մեր դիտարկումը կունենար տվյալ θ-ի դեպքում: Եվ որպես ոչ հստակ թիվ վերցնում ենք՝ $\eta(y) = \max\{\alpha | y \in y_\alpha\}$:

Իսկ որպես ճշմարտանմանության ֆունկցիա վերցնում ենք՝ $l(\theta; x_1 ; \ldots ; x_n) = \prod_i DF(\boldsymbol{y}_i)$: (Այս եղանակը էականորեն նման է Sugeno-ի ինտեգրալի կառուցմանը: Դրա հետ կարող եք ծանոթանալ ՝ [103]:)

Նկատեք որ այստեղ y_i-երը արդեն արտահայտում են «հավանականություններ»: Այդ իմաստով այս ներկայացումը ավելի լավ է արտահայտում ճշմարտանմանության ֆունկցիայի էությունը:

Սակայն այս ներկայացման մեջ, դեֆազիֆիկացիայի տեսքից կախված կարող է չունենանք նախորդ պատկերը: Այսինքն՝ նորմալի հետահայաց բաշխումը կարող է նորմալ չլինել: Օրինակ որպես դասական դեֆազիֆիկացիա վերցնենք $F(\boldsymbol{y_i}) = \int \eta_i(y) y dy$:

Այս դեպքում մենք կունենանք հետևյալ պատկերը նորմալ բաշխման համար, երբ դիտարկումները ոչ հստակ եռանկյուն թվեր են (հեշտության համար սիմետրիկ $= \frac{r+l}{2}$):

I.$\theta \in (-\infty, l]$

$$\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{r - \sigma\sqrt{2}\sqrt{-\ln(y\sigma\sqrt{2\pi}) - \theta}}{r-m}\ ;\ y \in \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\theta)^2}{2\sigma^2}}\right) \\ \dfrac{\sigma\sqrt{2}\sqrt{-\ln(y\sigma\sqrt{2\pi}) + \theta - l}}{m-l}\ ;\ y \in \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-\theta)^2}{2\sigma^2}}\right) \end{cases} \tag{63}$$

II.$\theta \in \ [r, \infty)$

$$\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{\theta - \sigma\sqrt{2}\sqrt{-\ln(y\sigma\sqrt{2\pi}) - l}}{m-l}\ ;\ y \in \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-l)^2}{2\sigma^2}}, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-m)^2}{2\sigma^2}}\right) \\ \dfrac{r - \theta + \sigma\sqrt{2}\sqrt{-\ln(y\sigma\sqrt{2\pi})}}{r-m}\ ;\ y \in \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-m)^2}{2\sigma^2}}, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-r)^2}{2\sigma^2}}\right) \end{cases} \tag{64}$$

III.$\theta \in \ (l, m]$

$$\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{r - \sigma\sqrt{2}\sqrt{-\ln(y\sigma\sqrt{2\pi}) - \theta}}{r-m}\ ;\ y \in \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\theta)^2}{2\sigma^2}}\right) \\ \dfrac{\sigma\sqrt{2}\sqrt{-\ln(y\sigma\sqrt{2\pi}) + \theta - l}}{m-l}\ ;\ y \in \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \end{cases} \tag{65}$$

IV. $\theta \in [m, r)$

$$\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{\theta - \sigma\sqrt{2}\sqrt{-\ln(y\sigma\sqrt{2\pi})} - l}{m - l}; \ y \in \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-l)^2}{2\sigma^2}}, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-m)^2}{2\sigma^2}}\right) \\ \dfrac{r - \theta + \sigma\sqrt{2}\sqrt{-\ln(y\sigma\sqrt{2\pi})}}{r - m}; \ y \in \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-m)^2}{2\sigma^2}}, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \end{cases} \tag{66}$$

Սակայն հենց առաջին դեպքի համար մենք կունենանք՝

$$DF(y) = \int \eta(y) y dy = \\ = \int_{m-\theta}^{r-\theta} \frac{r - t - \theta}{r - m} \frac{1}{\sigma^2 2\pi} \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} dt + \int_{l-\theta}^{m-\theta} \frac{t + \theta - l}{m - l} \frac{1}{\sigma^2 2\pi} \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} dt \tag{67}$$

Այստեղից երևում է, որ θ-ն հայտնվում է Φ-ի արգումենտի մեջ, և ունենում ենք $\Phi + \varphi$ տեսքի արտահայտություն: Պարզ է որ այս դեպքում բաշխումը նորմալ մնալ չի կարող:

Այնուամենայնիվ կարելի է պնդել որ որոշակի տեսքի դեֆազիֆիկացիաների համար, մենք կունենանք նորմալ բաշխում: Օրինակ վերցնելով գագաթի էլեմենտը:

3.2. Ոչ հստակ պատահական մեծություններ

Ոչ հստակ պատահական մեծության հասկացությունը կարելի է բաժանել երկու տարբեր գաղափարների (սահմանումների):

Հիմնական սահմանումները և հասկացությունները տրվել են առաջին գլխում: Որոշների կբերենք կրկին համեմատության համար:

1. Ըստ ոչ հստակ պատահական մեծությունների առաջին սահմանման ունեհինք հետևյալը: Տրված է հավանականային տարածությունը՝ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$: Ոչ հստակ պատահական մեծությունը չափելի ֆունկցիա է՝ $\tilde{X}: \Omega \to \mathcal{T}$: (այստեղ՝ $\mathcal{T}$-ն ոչ հստակ թվերի բազմությունն է:)

2. Երկրորդ սահմանումը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ մենք գիտենք հնարավոր ելքերը, և ոչ հստակ պատահական մեծությունների համար սահմանվում է ոչ հստակ խտության ֆունկցիաներ՝ $\underline{\pi},\overline{\pi}: R \to \mathcal{T}$, $\exists f(x) \in [\underline{\pi}_1(x);\overline{\pi}_1(x)]$, այնպիսին որ $f(x) \geq 0, \int f(x)dx = 1$, և $\int \overline{\pi}_\alpha(x)dx$ և $\int \underline{\pi}_\alpha(x)dx$, գոյություն ունեն և վերջավոր են բոլոր δ-ների համար:

Թեորեմ 3.2 Առաջին և երկրորդ սահմանման պատահական մեծությունները համարժեք են, եթե առաջին սահմանման պատահական մեծությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

1). $\forall x$ -ի համար, որի համար $\exists \omega_1 ; \omega_2$, $x \in \tilde{X}(\omega_1), x \in \tilde{X}(\omega_2)$, $P(\omega_1) \neq P(\omega_2)$, ճիշտ է, որ $\forall p \in \big(min\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big); max\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big)\big)$-ի համար $\exists \omega$, այնպիսին որ $P(\omega) = p$ և $x \in \tilde{X}(\omega)$:

2). $\forall x$ -ի համար, որի համար $\exists \omega_1 ; \omega_2$, այնպիսին որ $\mu_{\tilde{X}(\omega_1)}(x) = \mu_{\tilde{X}(\omega_2)}(x) > 0$, $P(\omega_1) \neq P(\omega_2)$, և $\forall \omega$ համար, որի համար ճիշտ է $P(\omega) \in \big(min\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big); max\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big)\big)$, տեղի ունի $\mu_{\tilde{X}(\omega)}(x) \geq \mu_{\tilde{X}(\omega_1)}(x)$, և քանի դեռ $\mu_{\tilde{X}(\omega_1)}(x) \neq 1$, $\exists \omega_0$; $P(\omega_0) \in \big(min\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big); max\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big)\big)$, $\mu_{\tilde{X}(\omega_0)}(x) > \mu_{\tilde{X}(\omega_1)}(x)$:

3) $\forall x$ -ի համար, որի համար $\exists \omega$, $\mu_{\tilde{X}(\omega)}(x) > 0$, $\exists \omega_0$ այնպիսին որ $\mu_{\tilde{X}(\omega_0)}(x) = 1$:

4) Ավելին եթե $\gamma = sup\{\mu_{\tilde{X}(\omega)} | x \in \tilde{X}(\omega),\ P(\omega) = p\} < 1$, ապա $1 > \beta > \gamma$ $\forall \gamma' \in (\gamma, \beta)$, համար $\exists p' \in \big(P(\omega), P(\omega_\beta)\big)$ այնպիսին, որ $\gamma' = max\{\mu_{\tilde{X}(\omega)} | x \in \tilde{X}(\omega),\ P(\omega) = p'\}$

Մինչ ապացույցին անցնելը տանք մի դիտարկում:

Դիտողություն 3.1 Այստեղ առաջին երկու պայմանները ապահովում են որ ինչ-որ կոմբինացիայով (որը կներկայացնենք) ստացված բազմությունները լինել քվազի գոգավոր, այսինքն՝ իրենցից ներկայացնեն ոչ հստակ թվեր: Երրորդ պայմանը ապահովում է, որ այդ թվերը լինեն նորմավորված, և ամենակարևորը որ մեկ մակարդակում պարունակվի դասական խտություն: Չորրորդ պայմանը ապահովում է որ բազմությունը լինի անընդհատ: Այնուամենայնիվ չափելիության պահանջները պետք դրվեն անկախ այս երեք պահանջներից: Այն մենք պետք է պահանջենք առանձին: Եվ վերջապես վերը նշվածում ինչպես նաև ապացույցում անընդհատ դեպքի տեսանկյունից, որպես $P(\omega)$ կհասկացվի խտության ֆունկցիան:

<u>Ապացույց</u>: Ապացույցը տրիվիալ է, եթե ներմուծենք հետևյալ կառուցումը՝ $\forall x$ -ի համար,

$$\underline{\pi}_\alpha(x) = \inf\{P(\omega) \mid \mu_{\tilde{X}(\omega)} \geq \alpha\}$$

(68)

$$\overline{\pi}_\alpha(x) = \sup\{P(\omega) \mid \mu_{\tilde{X}(\omega)} \geq \alpha\}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ $\exists f(x) \in [\underline{\pi}_1(x); \overline{\pi}_1(x)]$: Ինչպես նշված է դիտողությունում անընդհատ դեպքի համար, մենք վերցրել ենք որպես $P(\omega)$-ներ հենց խտության ֆունկցիաները: Այս դեպքում երրորդ հատկությունից բխում է որ քանի որ $\forall x$-ի համար $f(x)$-ը որոշված է, ապա $\int f(x)dx = \int dP = 1$:

Մնում է ցույց տալ, որ այս ձևերով սահմանվածները կազմում են ոչ հստակ թվեր կամայական $\forall x$ -ի համար:

Դիցուք տվյալ x-ի համար $\exists!\,\omega$ այնպիսին որ $x \in \tilde{X}(\omega)$, այդ դեպքում ըստ երրորդ հատկության $\mu_{\tilde{X}(\omega)}(x) = 1$: Հետևաբար $\underline{\pi}_\alpha(x) = \overline{\pi}_\alpha(x) = \pi(x) = P(\omega)$ (α>0), որը թիվ է և հետևաբար նաև ոչ հստակ թիվ:

Դիցուք այժմ որևէ ω_1 ; ω_2-ի համար $\in \tilde{X}(\omega_1), x \in \tilde{X}(\omega_2)$: Որպեսզի ցույց տանք, որ ստացվողը ոչ հստակ թիվ է մենք մասնավորապես պետք է ցույց տանք, որ

$$\mu_x\left(\lambda P(\omega_1) + (1-\lambda)P(\omega_2)\right) \geq \min\left(\mu_x(P(\omega_1)), \mu_x(P(\omega_2))\right) = \min\{\delta | \left(\underline{\pi}_\alpha(x) = P(\omega_1) \bigwedge P(\omega_2)\right) \wedge \left(\overline{\pi}_\alpha(x) = P(\omega_1) \bigwedge P(\omega_2)\right)\} \quad (69)$$

$\forall\lambda \in (0,1)$ (այստեղ ենթադրված է, որ հենց իրենք են հանդիսանում մաքսիմալացնող կամ մինիմալացնող հավանականությունները)։ Նախ նկատենք, որ $\forall\lambda \in (0,1)$-ի համար սահմանված է ըստ առաջին հատկության:

Հեշտության համար առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք՝ $(\omega_1) \leq P(\omega_2)$, և $\underline{\pi}_\alpha(x) = P(\omega_1)$; $\overline{\pi}_\alpha(x) = P(\omega_2)$։ Դիցուք $\mu_x(P(\omega_1)) = \mu_x(P(\omega_2))$, այդ դեպքում խնդիրը լուծված է ըստ երկրորդ պայմանի,

Այսինքն՝ $\mu_{\tilde{X}(\omega_1)}(x) = \mu_{\tilde{X}(\omega_2)}(x) <=> \mu_x(P(\omega_1)) = \mu_x(P(\omega_2))$, հետևաբար $\mu_x(P(\omega)) \geq \mu_x(P(\omega_1))$:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\mu_x(P(\omega_1)) > \mu_x(P(\omega_2))$: Դիցուք $\alpha_1 = \mu_x(P(\omega_1))$, $\alpha_2 = \mu_x(P(\omega_1))$, Եթե $\lambda P(\omega_1) + (1-\lambda)P(\omega_2) \in [\underline{\pi}_{\alpha_1}(x), \overline{\pi}_{\alpha_1}(x)]$, ապա խնդիրը կրկին կարելի է լուծված համարել, ըստ երկրորդ հատկության: Մնում է այն դեպքը երբ $\lambda P(\omega_1) + (1-\lambda)P(\omega_2) \in \left(\overline{\pi}_{\alpha_1}(x), \overline{\pi}_{\alpha_2}(x)\right)$:

Դիցուք հակառակը՝ $\mu_x\left(\lambda P(\omega_1) + (1-\lambda)P(\omega_2)\right) \coloneqq \alpha < \alpha_2$, այդ դեպքում ըստ առաջին հատկության, եթե $\gamma = \alpha_2$, ապա $\forall\alpha' \in (\alpha_2, \alpha_1)$, $\exists p'$, $\alpha' = max\{\mu_{\tilde{X}(\omega)} | x \in \tilde{X}(\omega),\ P(\omega) = p'\}$: Պնդումն ապացուցված է, քանի որ $\alpha' > \alpha, \overline{\pi}_{\alpha'}(x) = \overline{\pi}_\alpha(x) = sup\{P(\omega) \mid \mu_{\tilde{X}(\omega)} \geq \alpha'\}$:

Չնայած այս պայմանները կարող են խիստ թվալ, բայց դրանք ապահովվում են միայն անընդհատությունը: Այսինքն՝ սրանք բավականաչափ բնական պայմաններ են, երբ մեր պատահական մեծությունները անընդհատ են:

Դիտողություն 3.2 Կարելի է նկատել, որ (30) բանաձևով տրված սահմանումը կարող է ներկայացվել որպես ոչ հստակ թիվ, քանի որ յուրաքանչյուր α-մակարդակի համար այն իրենից ներկայացնելու է $\left[\int x\underline{\pi}_{\alpha}(x)dx, \int x\overline{\pi}_{\alpha}(x)dx\right]$: Մասնավորապես, եթե պահանջենք նշված ինտեգրալների գոյությունը (վերջավորության իմաստով), կստանանք ոչ հստակ թիվ: Մյուս կողմից սրանով կարող են լուծվել չափելիության խնդիրները: Չի առաջանում լրացուցիչ կարիք առանձին սահմանելու չափելիությունը: Եվ վերջապես (37) բանաձևով տրված սահմանումը դառնում է որոշված:

π_{δ}-երը առաջին սահմանմամբ ոչ հստակ պատահական մեծությունից գտնելու համար կարող եք նայել [29]:

Երկու սահմանումների միջև կապը, մասնավորապես ցույց է տալիս թե ինչ պայմանների առկայության դեպքում մենք կկարողանանք անցում կատարել մի սահմանումից մյուսին: Սա հնարավորություն կտա թվային բնութագրիչների ոչ հստակ տարբերակները սահմանել ոչ հստակ խառնության ֆունկցիաների լեզվով: Սա կարող է օգտագործվել ոչ հստակ բայեսյան թեորեմում հաշվարկները հեշտացնելու և մաթեմատիկական սպասման այլ սահմանումներ օգտագործելու համար:

Մասնավորապես նշված թեորեմը թույլ է տալիս պնդել, որ ոչ հստակ նորմալ բաշխումը կարելի է գրել և՛ որպես նորմալ բաշխում ոչ հստակ պարամետրերով (որը ընդունված սահմանումն է) և՛ ոչ հստակ բաշխումով բնորոշվող:

Պնդում 3.3 Ոչ հստակ նորմալ բաշխման խառնության ֆունկցիան, սիմետրիկ ոչ հստակ եռանկյուն պարամետրերի դեպքում, տրվում է հետևյալ բանաձևերով:

$$\bar{\pi}_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\underline{\mu}_\alpha)^2}{2\bar{\sigma}_\alpha^2}}; & x \in (-\infty; \underline{\mu}_\alpha - \bar{\sigma}_\alpha] \\ \frac{1}{|x-\underline{\mu}_\alpha|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}; & x \in (\underline{\mu}_\alpha - \bar{\sigma}_\alpha; \underline{\mu}_\alpha - \underline{\sigma}_\alpha) \\ \frac{1}{\underline{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\underline{\mu}_\alpha)^2}{2\underline{\sigma}_\alpha^2}}; & x \in [\underline{\mu}_\alpha - \underline{\sigma}_\alpha; \underline{\mu}_\alpha] \\ \frac{1}{\underline{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}}; & x \in (\underline{\mu}_\alpha ; \bar{\mu}_\alpha) \\ \frac{1}{\underline{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{\mu}_\alpha)^2}{2\underline{\sigma}_\alpha^2}}; & x \in [\bar{\mu}_\alpha; \bar{\mu}_\alpha + \underline{\sigma}_\alpha] \\ \frac{1}{|x-\bar{\mu}_\alpha|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}; & x \in (\bar{\mu}_\alpha + \underline{\sigma}_\alpha ; \bar{\mu}_\alpha + \bar{\sigma}_\alpha) \\ \frac{1}{\bar{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{\mu}_\alpha)^2}{2\bar{\sigma}_\alpha^2}}; & x \in (\bar{\mu}_\alpha + \bar{\sigma}_\alpha; \infty) \end{cases} \tag{70}$$

$$
\underline{\pi}_\alpha(x)=\begin{cases}
\dfrac{1}{\underline{\sigma}_\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{\mu}_\alpha)^2}{2\underline{\sigma}_\delta^2}}; & x\in\left(-\infty;\min\left(\underline{\mu}_\alpha;\bar{\mu}_\alpha-\bar{\sigma}_\alpha\right)\right]\\
\dfrac{1}{|x-\bar{\mu}_\alpha|\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}; & x\in\left(-\infty;\underline{\mu}_\alpha\right]\cap\left(\bar{\mu}_\alpha-\bar{\sigma}_\alpha;\bar{\mu}_\alpha-\underline{\sigma}_\alpha\right)\\
\dfrac{1}{\bar{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{\mu}_\alpha)^2}{2\bar{\sigma}_\alpha^2}}; & x\in\left(-\infty;\underline{\mu}_\alpha\right]\cap\left[\bar{\mu}_\alpha-\underline{\sigma}_\alpha;\infty\right)\\
\dfrac{1}{\bar{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{\mu}_\alpha)^2}{2\bar{\sigma}_\alpha^2}}; & x\in\left(\underline{\mu}_\alpha;\dfrac{\underline{\mu}_\alpha+\bar{\mu}_\alpha}{2}\right]\cap\left(-\infty;\bar{\mu}_\alpha-\bar{\sigma}_\alpha\right]\\
\dfrac{1}{|x-\bar{\mu}_\alpha|\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}; & x\in\left(\underline{\mu}_\alpha;\dfrac{\underline{\mu}_\alpha+\bar{\mu}_\alpha}{2}\right]\cap\left(\bar{\mu}_\alpha-\bar{\sigma}_\alpha;\bar{\mu}_\alpha-\alpha\right)\\
\dfrac{1}{\underline{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{\mu}_\alpha)^2}{2\underline{\sigma}_\alpha^2}}; & x\in\left(\underline{\mu}_\alpha;\dfrac{\underline{\mu}_\alpha+\bar{\mu}_\alpha}{2}\right]\cap\left[\bar{\mu}_\alpha-\underline{\sigma}_\alpha;\infty\right)\\
\dfrac{1}{\bar{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\underline{\mu}_\alpha)^2}{2\bar{\sigma}_\alpha^2}}; & x\in\left[\dfrac{\underline{\mu}_\alpha+\bar{\mu}_\alpha}{2};\bar{\mu}_\alpha\right)\cap\left(-\infty;\underline{\mu}_\alpha+\underline{\sigma}_\alpha\right]\\
\dfrac{1}{|x-\underline{\mu}_\alpha|\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}; & x\in\left[\dfrac{\underline{\mu}_\alpha+\bar{\mu}_\alpha}{2};\bar{\mu}_\alpha\right)\cap\left(\underline{\mu}_\alpha+\underline{\sigma}_\alpha;\underline{\mu}_\alpha+\bar{\sigma}_\alpha\right)\\
\dfrac{1}{\underline{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\underline{\mu}_\alpha)^2}{2\underline{\sigma}_\alpha^2}}; & x\in\left[\dfrac{\underline{\mu}_\alpha+\bar{\mu}_\alpha}{2};\bar{\mu}_\alpha\right)\cap\left[\underline{\mu}_\alpha+\bar{\sigma}_\alpha;\infty\right)\\
\dfrac{1}{\bar{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\underline{\mu}_\alpha)^2}{2\bar{\sigma}_\alpha^2}}; & x\in\left[\bar{\mu}_\alpha;\infty\right)\cap\left(-\infty;\underline{\mu}_\alpha+\underline{\sigma}_\alpha\right]\\
\dfrac{1}{|x-\underline{\mu}_\alpha|\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}; & x\in\left[\bar{\mu}_\alpha;\infty\right)\cap\left(\underline{\mu}_\alpha+\underline{\sigma}_\alpha;\underline{\mu}_\alpha+\bar{\sigma}_\alpha\right)\\
\dfrac{1}{\underline{\sigma}_\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\underline{\mu}_\alpha)^2}{2\underline{\sigma}_\alpha^2}}; & x\in\left[\max\left(\bar{\mu}_\alpha;\underline{\mu}_\alpha+\bar{\sigma}_\alpha\right);\infty\right)
\end{cases}\qquad(71)
$$

Ակնհայտ է, որ ոչ հստակ նորմալ բաշխումը, երբ միայն մաթսպասումն է ոչ հստակ, ստացվում է վերը նշված բանաձևից երբ վերցվում է՝ $\bar{\sigma}_\alpha=\underline{\sigma}_\alpha$

Մասնավորապես ճիշտ է հետևյալ պնդումը։

Պնդում 3.4: Եթե ξ-ն նորմալ բաշխված պատահական մեծություն է, իսկ $\tilde{a}$-ն ոչ հստակ թիվ, ապա $\xi+\tilde{a}$-ն ոչ հստակ նորմալ բաշխված պատահական մեծություն է։

Ապացույց $\xi+\tilde{a}$-ն պատահական մեծություն է առաջին իմաստով, այսինքն՝ յուրաքանչյուր ω-ի համար այն ընդունում է հստակ արժեք գումարած ոչ հստակ թիվ: Այդ գումարը ոչ հստակ թիվ է: Մյուս կողմից, օգտվելով 3.2 թեորեմում տրվող անցման հնարավորությունից, կարելի է պնդել, որ սա ոչ հստակ նորմալ բաշխում ունեցող թիվ է, որովհետև ցանկցած $a \in C_{\alpha}(\tilde{a})$-ի համար այն մնում է նորմալ բաշխված պատահական մեծություն: Պնդումն ապացուցված է:

Սրանից մասնավորապես կարելի է հետևացնել, որ (6) հավասարումով որոշվող մեծությունների բաշխումը ոչ թե նորմալ, այլ հենց ոչ հստակ նորմալ են:

Այսինքն՝ ցանկացած ոչ հստակ դիտարկումների դեպքում, եթե նույնիսկ նրանց ոչ հստակ լինելու բնույթը պայմանավորված չէ բաշխմամբ, բաշխումը դառնում են ոչ հստակ պատահական մեծության բաշխում:

Այլ կերպ ասած, ոչ հստակ բայեսյան թեորեմում պետք կիրառվի ոչ թե ճշմատանմանության ֆունկցիա նորմալ բաշխման համար, այլ պետք է կիրառվի ճշմարտանմանության ֆունկցիաոչ հստակ նորմալ բաշխման համար:

3.3. Ոչ հստակ պատահական մեծությունների մաթ. սպասումը և վարիացիան

Տրված՝ (31) սահմանումով մաթ.սպասումը ունի գծայնության հատկություն, բայց միայն, երբ որպես դաշտ վերցնում ենք դասական թվերը՝ $E(a\tilde{X} + b\tilde{Y}) = aE(\tilde{X}) + bE(\tilde{Y})$: Այն բավարարում է նաև հետևյալ հատկությանը:

Թեորեմ 3.3 Դիցուք ξ-ն պատահական մեծություն է, իսկ $\tilde{B}$-ը որևէ ոչ հստակ թիվ, ապա $\tilde{B}\xi$-ն ոչ հստակ պատահական մեծություն է, որի մաթսպասումը՝ $E(\tilde{B}\xi) = E(\xi)DF(\tilde{B})$ ինչ-որ դեֆազիֆիկացիայի համար:

Ապացույց: $\tilde{B}\xi$ -ի ոչ հստակ պատահական մեծություն լինելը գալիս է նրանից, որ այն որոշված է Ω-ի վրա, և նրանից, որ $\tilde{B}\xi : \Omega \to \mathcal{T}$: Չափելիությունը բխում է նրանից, որ $\tilde{B}$-ն սահմանափակ է ըստ ոչ հստակ թվերի սահմանման: Մաթսպասումը կստացվի այսպես`

$$E(\tilde{B}\xi) = \int_{\Omega} E[\tilde{B}\xi]dP = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} Cr(\tilde{B}\xi(\omega) \geq x)dx - \int_{-\infty}^{0} Cr(\tilde{B}\xi(\omega) \leq x)dx\right)dP$$
$$= \int_{\Omega} \xi(\omega)\left(\int_0^{\infty} Cr(\tilde{B} \geq x)dx - \int_{-\infty}^{0} Cr(\tilde{B} \leq x)dx\right)dP$$
$$= \left(\int_0^{\infty} Cr(\tilde{B} \geq x)dx - \int_{-\infty}^{0} Cr(\tilde{B} \leq x)dx\right)\int_{\Omega} \xi(\omega)dP$$
$$= \left(\int_0^{\infty} Cr(\tilde{B} \geq x)dx - \int_{-\infty}^{0} Cr(\tilde{B} \leq x)dx\right)E(\xi) = E(\xi)E[\tilde{B}] \quad (72)$$

Մնում է ցույց տալ որ $E[\tilde{B}]$-ն իսկապես դեֆազիֆիկացիա է: Այսինքն` $\mu_{\tilde{B}}\left(\left(\int_0^{\infty} Cr(\tilde{B} \geq x)dx - \int_{-\infty}^{0} Cr(\tilde{B} \leq x)dx\right)\right) \neq 0$, կամ որ նույնն է, ինչ նշված թիվը գտնվում է ոչ հստակ թվի կրիչում:

Հեշտության համար կվերցնենք, որ տվյալ ոչ հստակ թվի կրիչը դրական թվերի ենթաբազմություն է:

Ենթադրենք, որ $\mu_{\tilde{B}}(x) = 0 , x \in (-\infty, a] \cup [d, \infty)$; $\mu_{\tilde{B}}(x) = 1 , x \in [b, c]$ և, որ $\mu_{\tilde{B}}(x) \uparrow , x \in [a, b]$ և $\mu_{\tilde{B}}(x) \downarrow , x \in [c, d]$: Իրականում այսպես նկարագրվում են բոլոր ոչ հստակ թվերը (ելնելով ոչ հստակ թվերի ուռուցիկության պահանջից): $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$: Այս ենթադրությունը չի խախտում ընդհանրությունը (միայն փոփոխում է հաշվարկը):

Կունենանք`

$$E[\tilde{B}] = \frac{a+d}{2} + \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{2}\int_a^b \mu_{\tilde{B}}(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_c^d \mu_{\tilde{B}}(x)\,dx - \frac{1}{2}(d-c) \quad (73)$$

Օգտվելով միջին արժեքի մասին թեորեմից կարելի է այս մեծությունը գնահատել վերևից և ներքևից:

$$E[\tilde{B}] \le \frac{a+d}{2} + \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2}(d-c) - \frac{1}{2}(d-c) = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{d+b}{2}$$

$$E[\tilde{B}] \ge \frac{a+d}{2} + \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{2}(d-c) = \frac{a+d}{2} - \frac{1}{2}(d-c) = \frac{a+c}{2} \tag{74}$$

Այս հատկությունը հնարավորություն է տալիս ընկալել այս մաթսպասումը որպես դասական մաթսպասման ընդհանրացում:

Ոչ հստակ պատահական մեծության վարիացիայի մի սահմանումը Ֆրեշեյի կողմից վարիացիայի հասկացության նկարագրությունից է դուրս բերվում: Մասնավորապես՝ այն սահմանում է վարիացիան որպես մի թիվ որը նկարագրում է պատահական մեծության միջին հեռվորությունը իր մաթսպասումից: Այսինքն՝ սահմանելով հեռավորության գաղափարը, վարիացիայի հասկացությունը տվյալ դեպքում կընդունի հետևյալ տեսքը՝ , $Var(\tilde{X}) = \int_\Omega d^2\left(\tilde{X}, E(\tilde{X})\right) dP$: Որպես մետրիկա հաճախ ընդունում են ՝ $d(X,Y) = \left(\int_S \left(s_X(x) - s_Y(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, որտեղ $s_A(x)$-ը A բազմության հենման ֆունկցիան է, իսկ S-ը 1-շրջանագիծն է (այսինքն երկու կետ 1-ը և -1-ը):

Այսպիսով վարիացիայի վերջնական տեսքը ստացվում է՝

$$Var(\tilde{X}) = \int_\Omega \int_S \left(s_{\tilde{X}}(x) - s_{E(\tilde{X})}(x)\right)^2 dx dP \tag{75}$$

Հաուսդորֆյան մետրիկան՝ $d(X,Y) = \sup_{x \in S} |s_X(x) - s_Y(x)|$, երբեմն ավելի ընդունված ձև է:[44]

44 Շատ հաճախ հաուսդորֆյան մետրիկան ընկալվում է որպես L^∞ մետրիկա, իսկ հիմնականը իհարկե L^2 մետրիկա:

Ավելի մեծ չափողականությամբ դասերի համար ոչ հստակ պատահական բազմությունները ընդհանրանում են բնական ձևով, այսինքն` $\mathcal{T}^m$, կարելի է գրել որպես $\left(\mathbb{R}^{m-1}, \mu(x)\right)$:

Այս դեպքում վարիացիայի սահմանումը ավելի հաճախ վերցնում են`

$$Var(\tilde{X}) = \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{S^{m-1}} m\left(s_{\tilde{X}}(x,\alpha) - s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha)\right)^2 dx d\alpha dP \tag{76}$$

Իրականում $\int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(s_{\tilde{X}}(x,\alpha) - s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha)\right)^2 dx d\alpha$ ևս հանդիսանում է մետրիկա, և առաջին անգամ օգտագործվել է Bobylev-ի կողմից ([15]):

Նկատեք որ, քանի որ ոչ հստակ թվերը իրենց մեջ պարունակում են նաև սովորական իրական թվերը, այդ դեպքում սահմանելով մետրիկա ոչ հստակ թվերի դասում, որպես մաթսպասում կարող ենք ընդունել վերը նշված սահմանումներից ցանկացածը: Դրա հետ կապված է հետևյալ արդյունքը:

Թեորեմ 3.4 Դիցուք ξ-ն որևէ ոչ հստակ պատահական մեծություն է: Ընդ որում $s_{\tilde{X}}(x,\alpha)$ և $s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha)$ սահմանափակ են ցանկացած ω-ի և (x,α)-ի համար, և $E(\tilde{X})$ տրվում է (30) բանաձևով: Այդ դեպքում $\exists \overline{E}(\tilde{X})$ այնպիսին որ

$$\int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(s_{\tilde{X}}(x,\alpha) - s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha)\right)^2 dx d\alpha = \int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(s_{\tilde{X}}(x,\alpha) - s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x,\alpha)\right)^2 dx d\alpha \tag{77}$$

Այսինքն` ոչ հստակ ձևով սահմանված մաթսպասումով վարիացիան կարելի է փոխարինել որևէ թվային մաթսպասումով:

Ապացույց: Նախ նկատեք, որ (77) բանաձևում բաց է թողնված ըստ հավանականության ինտեգրալը: Սրա կարիքը չկա, քանի որ ոչ $s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha)$-ը ոչ էլ $s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x,\alpha)$-ը կախված չեն ω-ից, $s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x,\alpha)$-ը նաև կախված չէ α-ից(այդ պատճառով կգրենք $s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)$), սակայն երկուսն էլ կախված են ուղղությունից՝ x-ից:

Գնահատենք հետևյալ տարբերությունը:

$$\int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(s_{\tilde{X}}(x,\alpha) - s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha)\right)^2 dx d\alpha - \int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(s_{\tilde{X}}(x,\alpha) - s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)\right)^2 dx d\alpha \quad (78)$$

Կունենանք՝

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(\left(s_{\tilde{X}}(x,\alpha) - s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha)\right)^2 - \left(s_{\tilde{X}}(x,\alpha) - s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)\right)^2\right) dx d\alpha \\ &\quad = \int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(\left(s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha) - s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)\right)\left(2s_{\tilde{X}}(x,\alpha) - s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha) - s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)\right)\right) dx d\alpha \end{aligned} \quad (79)$$

Նկատենք որ մեզ պետք է գտնել $s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)$ այնպիսին, որ (79) դառնա 0:

Օգտվելով $s_{\tilde{X}}(x,\alpha)$-ի և $s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha)$-ի սահմանափակությունից, կարող ենք գրել՝

$$\begin{aligned} m &\int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha) - s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)\right) dx d\alpha \\ &\le \int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(\left(s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha) - s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)\right)\left(2s_{\tilde{X}}(x,\alpha) - s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha) \right.\right. \\ &\left.\left. - s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)\right)\right) dx d\alpha \le M \int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha) - s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)\right) dx d\alpha \end{aligned} \quad (80)$$

Բավական է գտնել $s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)$ այնպիսին, որ

$$\int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha) - s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x)\right) dx d\alpha = 0 \quad (81)$$

և մենք կունենանք լուծումը:

Բայց ակնհայտորեն այդպիսի $\overline{E}$ կա: Դրա համար եկեք անենք հետևյալը:

$$\int_0^1 \int_{S^{m-1}} s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha) dx d\alpha = \int_0^1 \int_{S^{m-1}} s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x) dx d\alpha = \int_{S^{m-1}} s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x) dx \quad (82)$$

Հիշենք որ $\overline{E}(\tilde{X})$-ը կետ է դասական իմաստով $\mathbb{R}^{d-1}$ տարածությունում 1 պատկանելության չափով: Հետևաբար,

$$s_{\overline{E}(\tilde{X})}(x) = < x, \overline{E}(\tilde{X}) > \quad (83)$$

Այսինքն՝

$$\int_0^1 \int_{S^{m-1}} s_{E(\tilde{X})}(x,\alpha)\,dx\,d\alpha = \int_{S^{m-1}} < x, \overline{E}(\tilde{X}) > dx = < \int_{S^{m-1}} x\,dx\,, \overline{E}(\tilde{X}) > \quad (84)$$

Որտեղ վերջին արտահայտության մեջ վեկտորի ինտեգրալ է (այսինքն՝ ինտեգրալ որի արժեքը վեկտոր է, ինտեգրալ ըստ ներմուծված վեկտորի յուրաքանչյուր կոմպոնենտի) (տես [2]):

Բայց (84)-ի վերջում գրված արտահայտությունը դասական սկալյար արտադրյալն է (Էվկլիդյան վեկտորական տարածություններում): Իսկ ձախ մասում թիվ է գրված: Նման արտահայտությունը միշտ ունի լուծում: Ավելին այն կարող է ունենալ անվերջ քանակությամբ լուծումներ: Հերիք է, որ այն գոյություն ունի:

Պնդումը ապացուցված է:

<u>Դիտողություն 2</u> Կարելի է նկատել, որ այս ձևով ևս սահմանվում է մաթսպասում: Իրականում, քանզի (84)-ը ունի շատ լուծումներ, դժվար է պնդել, որ սրանք հանդիսանում են $E(\tilde{X})$-ի դեֆազիֆիկացիաներ: Սակայն հետագա ուսումնասիրություններում կարելի փորձել պարզել այդ հարցը:

ԳԼՈՒԽ IV. ՈՉ ՀՍՏԱԿ ՌԵԳՐԵՍԻԱՆԵՐԸ ԲԼԵՔ–ԼԻՏԵՐՄԱՆԻ ՄՈԴԵԼՈՒՄ

Ոչ հստակ թվերով կամ ոչ հստակ տվյալներով ռեգրեսիաների մի քանի հիմնական ձևերը նկարագրված են Shapiro-ի հոդվածում: Դրանք ֆորմալ կարելի է բաժանել մի քանի խմբի: Tanaka-ի ռեգրեսիան, Clemins-ի ռեգրեսիան, և Diamond-ի ([99]) առաջարկած՝ մետրիկայի վրա հիմնված ռեգրեսիան:

Մեր աշխատանքը նվիրված է հենց վերջինին: Խնդրի դրվածքը հետևյալն է. գտնել ոչ հստակ գործակիցների վեկտոր այնպիսին որ դիտարկման արդյունքում ստացված ոչ հստակ տվյալները ինչքան հնարավոր է մոտ լինեն ընտրված ոչ հստակ գործակիցներով բացատրող փոփոխականների գծային կոմբինացիային՝ ըստ ինչ-որ մետրիկայի: Եթե մենք շեշտադրում ենք կատարում հենց փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի վրա, ապա մետրիկան ընտրվում է այն, որը ինչ որ իմաստով կարտացոլի հենց տարբերությունների քառակուսների գումարը:

Ավելի ֆորմալ, $\tilde{b}$-գործակիցները պետք է այնպիսին լինեն, որ

$$D(\tilde{Y}, \tilde{b}_1 \tilde{X}_1 + \tilde{b}_2 \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{b}_n \tilde{X}_n) \quad (85)$$

լինի ամենափոքրը: Այստեղ $\tilde{Y}$-ը բացատրվող փոփոխականի ոչ հստակ դիտարկումների վեկտորն է, $\tilde{X}_i$-երը համապատասխանաբար բացատրող փոփոխականների դիտարկումների վեկտորը:

Ոչ հստակ թվերի բազմությունը (նշանակենք այն $\mathcal{T}$-ով), իրենից ներկայացնում է սովորական էվկլիդյան տարածության բանախյան ենթաբազմություն: Այստեղ մետրիկական տարածությունը տալու համար, օգտվում են նրանից, որ ոչ հստակ թվերը իրենց պատկանելության ֆունցկիայի ցանկացած α-կտրվածքում իրենցից ներկայացնում են ուռուցիկ բազմություններ, որոնք միորոշ ձևով որոշվում են իրենց հենման հարթությունների և իրենց հենման ֆունկցիաների միջոցով:

Հաճախ մետրիկան վերցնում են (47) բանաձևով: Եվ համապատասխանաբար՝ $D(\tilde{Z}, \tilde{U}) = \sum_{j=1}^{m} d^2(\tilde{Z}_j, \tilde{U}_j)$

Դասական ռեգրեսիայի դրվածքին համաձայն մեզնից պահանջվելու կառուցել գնահատական, որը բնականաբար ֆունկցիա է ընտրանքից, և հետևաբար պատահական մեծություն: Տվյալ դեպքում այն ոչ հստակ պատահական մեծություն է:

Եվ որպես ոչ հստակ պատահական մեծություն ցանկալի է ստուգել նրա վիճակագրական հատկությունները (ունակայնություն, անշեղություն և այլն):

Diamond-ը իր հոդվածում ապացուցել է, որ գոյություն ունի տրված մետրիկայի դեպքում լուծում (տես [32]): Սակայն այդ լուծման կառուցման գործընթացը, կարող է շատ բարդ լինել կախված ոչ հստակ թվերի այն դասից, որը մենք վերցնում ենք բացատրող և բացատրվող փոփոխականների համար, այսինքն՝ կախված պատկանելության ֆունկցիայի ընտրությունից: Ավելին այստեղ գնահատականի վիճակագրական հատկությունները ուսումնասիրելը խնդրահարույց է, քանզի մենք պետք է նախօրոք սպեցիֆիկացնենք սխալները:

Այստեղ մենք առաջարկում ենք կառուցել գնահատականներ, որոնք իրենցից կներկայացնեն հենց դասական փոքրագույն քառակուսիների գնահատականները հենման հարթության տվյալ ուղղության դեպքում, այնուհետև կոմբինացնել գնահատականները ամենամոտ ոչ հստակ թվի մեջ վերցնելով ամբողջին ամենամոտ ուռուցիկ ֆունցկիան: Մենք ուսումնասիրում ենք նաև այս ձևով կառուցվող գնահատականի վիճակագրական հատկությունները:

Մասնավորապես ցույց է տրված ստացվող գնահատականի ունակայնությունը, և կառուցված է օրինակ:

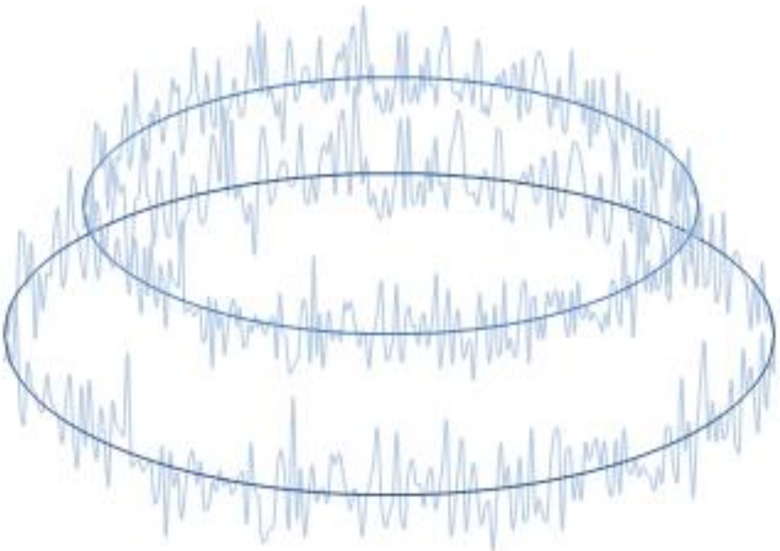
4.1. **Փոքրագույն քառակուսիների գնահատականի կառուցումը և հատկությունները**

Փոխանակ նայելու երկու ոչ հստակ թվերի α-մակարդակի ուռուցիկ կրիչների վրա սահմանվող հենման ֆունկցիաների տարբերությունների ըստ ուղղությունների և մակարդակների գումարի (կամ ինտեգրալի) վրա կառուցվող ագրեգացված մեծության մինիմալացմանը ըստ ընտրվող ոչ հստակ գործակիցների, մենք առաջարկում ենք ուղղակի ցանկացած x-ի համար S^{n-1}-ից, (այսինքն՝ ցանկացած ուղղության համար), կառուցել հենման ֆունկցիաների վրա փոքրագույն քառակուսիների գնահատականը, ցանկացած α-մակարդակի համար:

Մասնավորապես՝

$$\tilde{Y}_{\alpha,x} = \tilde{b}_{1,\alpha,x}\tilde{X}_{1,\alpha,x} + \tilde{b}_{2,\alpha,x}\tilde{X}_{2,\alpha,x} + \ldots + \tilde{b}_{n,\alpha,x}\tilde{X}_{n,\alpha,x} + \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x} = \tilde{X}_{\alpha,x}\tilde{B}_{\alpha,x} + \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x} \tag{86}$$

Որտեղ $\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x}$-ն գաուսյան դաշտերի ոչ հստակ կոմբինացիաների վեկտորի, α-մակարդակին հենման ֆունկցաիների x-ուղղությամբ արժեքին համատասխանող վեկտորն է: Այսինքն՝ եթե վերցնենք գաուսյան դաշտերը յուրաքանչյուր α-մակարդակի համար և նայենք դրանց միավորումը, այն պետք է լինի ոչ հստակ պատահական մեծություն:



Գծապատկեր 3: α-կտրվածքները երբ ավելացվում է գաուսյան դաշտ (ոչ թե գաուսյան դաշտի ուռուցիկ թաղանթ):

Այսպես ստացվող փոքրագույն քառակուսիների գնահատականը, որը կունենահետևյալ տեսքը՝

$$\hat{B}_{\alpha.x} = (\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x})^{-1}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{Y}_{\alpha,x} \quad (87)$$

կլինի հենց հենման ֆունկցիայի գնահատական:

Նկատենք որ սխալների վեկտորի վրա անհրաժեշտ սահմանափակումները դնելով կարելի է գրել փոքրագույն քառակուսիների գնահատականը յուրաքանչյուր α-մակարդակի և յուրաքնաչյուր ուղղության(x-ի) համար:

<u>Պնդում 4.1</u> Եթե դիտարկումների քանակը մեծ է բացատրող փոփոխականների քանակից` m>k, ապա ստացված գնահատականը անընդհատ է ըստ x-ի (այսինքն` ըստ x-ի բոլոր n-1 կոմպոնենտների):

<u>Ապացույց</u> Իրոք գնահատականը կառուցելիս մենք փաստացիորեն գործ ունենք իրական թվերի հետ: Եվ հետևաբար, որպեսզի մատրիցների $\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x}$ արտադրյալը լինի շրջելի անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\tilde{X}_{\alpha,x}$ մատրիցը ունենա մաքսիմալ ռանգ m, այսինքն` m>k: Մյուս կողմից, քանի որ հենման ֆունկցիաները անընդհատ են ըստ x-ի , ապա որպես հենման ֆունկցիաների կոմբինացիա ստացվող գնահատականը ևս անըդնհատ է ըստ x-ի:

Խնդիրը կայանում է նրանում, որ մենք ստանում ենք հենման ֆունկցիայի համար գնահատական: Սակայն, որպեսզի վերականգնենք ինքը գնահատականը, մենք պետք է համոզվենք, որ տվյալ մեթոդով կառուցվող ֆունկցիան 1-կարգի համասեռ է, և ուռուցիկ: Քանի որ S^{n-1}-ը մեկ շառավիղ ունի, համասեռության հարցը միշտ կարող է լուծվել բազմապատկելով գնահատականը ուղղության նորմով:

Սակայն ուռուցիկությունը չի բավարարվում: Դրա համար, որպեսզի մենք կարողանանք միորոշ ձևով նկարագրենք գնահատականը` մենք պետք այս ձևով տրված ֆունկցիան դարձնենք ուռուցիկ: Ինչպես հայտնի է $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիային չգերազանցող ամենամոտ ուռուցիկ ֆունկցիան ստացվում է, երբ գոգավորության կապակցված հատվածները՝ U, փոխարինում ենք հիպերհարթություններով անցնող ∂U-ով: Այս պրոցեդուրան կատարվում է այնքան ժամանակ մինչև ստացվի ուռուցիկ ֆունկցիա: Այդ ֆունցկիան նշանակենք՝ $conv(f(x))$ (տես [71]):

<u>Դիտողություն 4.1</u> Նկատենք, որ

1)Տվյալ ձևով ստացվող գնահականն անընդհատ է ըստ ուղղության:

2)Գնահատականը առաջին կարգի համասեռ ֆունցկիա է ըստ ուղղության, քանի որ փոխարինվող հատվածները հիպերհարթություններ են, իսկ դրանք 1-ին կարգի համասեռ են:

3)Ուռուցիկ թաղանթի եզրագծի ֆունկցիոնալ տեսքը կախված է գոգավորության հատվածներից: Եվ մասնավորապես, եթե հենման ֆւնկցիաները բավականաչափ լավն են, այն իմաստով որ ունեն անընդհատ երկրորդ կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, ապա կարելի է որոշել գոգավորության հատվածները և փոխարինել դրանք հիպերհարթություններով (ուղիղներով երկու չափանի դեպքում):

4)Վեկտորի նկատմամբ կիրառելով այս գործողությունը կհասկանանք նրա յուրաքանչյուր կոմպոնենտի ուռուցիկացում:

<u>Դիտողություն 4.2</u> Դժվար չէ նկատել, որ այս ձևով գնահատականը ոչ թե «գերագնահատված» է, այլ «թերագնահատված», այն իմաստով, որ այն անպայամանորեն պարունակվելու է իրական փոքրագույն քառակուսիների

գնահատականում (գնահատականները բոլոր ուղղություններով), քանի որ գոգավոր ֆունկցիայի արժեքը այս ձևով փոքրանում է:

<u>Պնդում 4.2</u> Դիցուք $A(x)$-ը, $B(x)$-ը և $A_n(x)$-երը $n \in \mathbb{N}$ որևէ անընդհատ ֆունկցիաներ են:

1) Եթե $A(x) \le B(x)$, յուրաքանչյուր x-ի համար, ապա $conv(A(x)) \le conv\big(B(x)\big)$, յուրաքանչյուր x-ի համար:

2) $conv\big(A(x)+B(x)\big) \ge conv\big(A(x)\big) + conv\big(B(x)\big)$:

3) Եթե $A(x)$-ը ուռուցիկ է, ապա $conv\big(A(x)\big) = A(x)$:

4) Եթե $A_n(x) \to A(x)$ $(n \to \infty)$ համարյա ամենուրեք, և $A(x)$-ը ուռուցիկ է, ապա $conv\big(A_n(x)\big) \to A(x)$ համարյա ամենուրեք:

<u>Ապացույց</u> 1)-3) պնդումների ապացույցը կարող եք գտնել [94]-ում, իսկ վերջին կետը կարելի է ապացուցել հետևյալ կերպ: Բազմությունը որտեղ $conv\big(A_n(x)\big) \nrightarrow A(x)$ կարելի է բաժանել երկու մասի: Դրանք են՝ այն x-երի բազմությունը, որտեղ $A_n(x) \nrightarrow A(x)$, և այն x-երի բազմությունը, որտեղ $A_n(x) \to A(x)$ սակայն $A_n(x)$-երը որևէ ուռուցիկ չեն (որևէ ոչ կարողից սկսած բոլոր $A_n(x)$-երը ուռուցիկ են):

Առաջին բազմության չափը 0 է: Մյուս կողմից ըստ սահմանման $conv(A_n(x))$-ը $A_n(x)$-ին ամենամոտիկ ուռուցիկ ֆունկցիան է և $A(x)$-ը ինքը ուռուցիկ ֆունկցիա է, որը ինչքան ասեք մոտիկ է $A_n(x)$-ին, հետևաբար երկրորդ բազմության վրա $\lim_{n\to\infty} conv\big(A_n(x)\big)$ և $A(x)$-ը համընկնում են:

<u>Դիտողություն 4.3</u> $conv\left(\hat{B}_{\alpha.x}\right)$ գնահատականը, ընդհանրապես ասած, անշեղ չէ: Մասնավորապես, իրական գնահատականի գոգավորության հատվածներում ուռուցիկացված գնահատականը ինչ-որ չափով տարբերվելու է իրականից:

Չնայած սրան այս գնահականը վիճակագրական այլ հատկության է բավարարում: Որոշակի ստանդարտ պայմանների դեպքում ստացված գնահատականը վիճակագրորեն ունակային է:

<u>Թեորեմ 4.1</u> Դիցուք

1) $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x}\right)=Q_{\alpha,x}$, որտեղ $Q_{\alpha,x}$-ը որևէ k-չափանի շրջելի մատրից է հավասարաչափ սահմանափակ ըստ x-ի և α-ի:

2) $\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha}=(\tilde{\varepsilon}_{1\alpha},\dots,\tilde{\varepsilon}_{m\alpha})\sim iidGF$ (սխալները անկախ և միատեսակ բաշխված գաուսյան դաշտեր են), որտեղ $\tilde{\varepsilon}_{i\alpha}=\{\tilde{\varepsilon}_{i,\alpha,}(x)|\ x\in S^{n-1}\}$: $\tilde{\varepsilon}_{i,\alpha,}(x)$-ը ըստ x ուղղության դաշտի արժեքն է:

Այդ դեպքում

$conv\left(\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x}\right)$

գնահատականը ունակային է ըստ հավանականության, համարյա բոլոր x-երի համար:

<u>Դիտողություն 4.4</u> Այստեղ ուռուցիկացումը կատարվում է ըստ x-երի բոլոր $\omega\in\Omega$-ների համար: Հարկ է նաև նշել, որ թեորեմի առաջին պայմանը ստանդարտ պահանջ է տնտեսաչափությունում գնահատականի ունակայնությունը պահանջելու համար (տես [115]):

<u>Ապացույց</u> Սկսենք նրանից, որ

$$\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x} = (\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x})^{-1}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{Y}_{\alpha,x} = \tilde{B}_{\alpha,x} + (\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x})^{-1}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x} \qquad (88)$$

$$\begin{aligned} conv\left(\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x}\right) &= conv\left(\tilde{B}_{\alpha,x} + \left(\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x}\right)^{-1}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x}\right) \\ &\geq conv\left(\tilde{B}_{\alpha,x}\right) + conv\left(\left(\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x}\right)^{-1}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x}\right) \\ &= \tilde{B}_{\alpha,x} + conv\left(\left(\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x}\right)^{-1}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x}\right) \\ &= \tilde{B}_{\alpha,x} + conv\left(\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x}\right)^{-1}\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x}\right)\right) \end{aligned} \qquad (89)$$

Նախավերջին քայլում օգտագործված է այն որ, քանի որ B-ի մակարդակը ուռուցիկ որևէ բազմություն է և հետևաբար նրա հենման ֆունկցիան ևս ուռուցիկ լինելով, ուռուցիկացումից հետո չի փոխվի, ըստ Պնդում 4.2-ի 3-րդ կետի:

Նշանակենք $\tilde{\eta}_{\alpha}$-ով $\tilde{\varepsilon}_{\alpha}$-ի կոմպոնենտների ուռուցիկ թաղանթների վեկտորը: Այդ դեպքում օգտվելով՝ Davidov-ի և Paulauscas-ի հոդվածում [30]-ում ստացված արդյունքից՝ $\underset{m\to\infty}{\text{plim}}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\tilde{\eta}_{x.\alpha}\right) = E_{x,\alpha}$, որտեղ E_{α}-ն փակ վերջավոր էլիպս է, կարող ենք պնդել որ $\underset{m\to\infty}{\text{plim}}\left(\frac{1}{m}\tilde{\eta}_{x.\alpha}\right) = 0$:

Վերջինից, նրանից որ $\tilde{\varepsilon}_{i,\alpha} \subseteq \tilde{\eta}_{i.\alpha}$, և թեորեմի առաջին պայմանից ստանում ենք՝

$$\underset{m\to\infty}{\text{plim}}\frac{1}{m}\tilde{X}_{\alpha,x}^{T}\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x} = 0 \ \ , \textit{բոլոր} \ \ x \in S^{n-1}, \alpha \in [0,1] - \textit{երի համար} \quad (90)$$

Սա նշանակում է համարյա հավաստի զուգամիտություն $S^{n-1} \times \Omega$-ի վրա որոշված չափով, (x,ω) զույգերի համար: Սրանից հետևում է, որ կա բնական թվերի ենթահաջորդականություն՝ $\{m_l\}$, որի համար ճիշտ է $\lim_{l\to\infty}\frac{1}{m_l}\tilde{X}_{\alpha,x}^{T}\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x} = 0$ համարյա բոլոր $(x,\omega) \in S^{n-1} \times \Omega$ զույգերի համար:

Համաձայն վերը նշվածի, թեորեմի պայմանների և Պնդում 4.2-ի 4-րդ կետի, համարյա բոլոր $x \in S^{n-1}$-երի համար կունենանք՝

$$\lim_{l\to\infty} conv\left(\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}_{\alpha,x}^{T}\tilde{X}_{\alpha,x}\right)^{-1}\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}_{\alpha,x}^{T}\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x}\right)\right) = 0 \, : \quad (91)$$

Եվ հետևաբար,

$$\underset{l\to\infty}{\text{plim}}\, conv\left(\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}_{\alpha,x}^{T}\tilde{X}_{\alpha,x}\right)^{-1}\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}_{\alpha,x}^{T}\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x}\right)\right) = 0 \quad (92)$$

գրեթե բոլոր $x \in S^{n-1}$-երի համար: (88)-ից և (92)-ից հետևում է

$$\operatorname*{plim}_{m\to\infty} conv\left(\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x}\right) \geq \tilde{B}_{\alpha,x} \tag{93}$$

գրեթե բոլոր $x \in S^{n-1}$-երի համար:

Մյուս կողմից`

$$\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x} \geq conv\left(\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x}\right) \tag{94}$$

$$\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x} = \tilde{B}_{\alpha,x} + (\tilde{X}_{\alpha,x}^T\tilde{X}_{\alpha,x})^{-1}\tilde{X}_{\alpha,x}^T\tilde{\varepsilon}_{\alpha,x} = \tilde{B}_{\alpha,x} + \left(\frac{1}{n}\tilde{X}_{\alpha,x}^T\tilde{X}_{\alpha,x}\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\tilde{X}_{\alpha,x}^T\tilde{\varepsilon}_{\alpha,x}\right) \tag{95}$$

Նույն պնդումների համաձայն

$$plim\hat{\tilde{B}}_{\alpha,x} = \tilde{B}_{\alpha,x} \tag{96}$$

Հետևաբար ունեցանք`

$$\tilde{B}_{\alpha,x} \geq plim\ conv\left(\hat{\tilde{B}}_{\alpha,x}\right) \geq \tilde{B}_{\alpha,x} \tag{97}$$

համարյա բոլոր $x \in S^{n-1}$-երի համար:

Թեորեմը ապացուցված է:

<u>Դիտողություն 4.5</u> Իրականում, որպեսզի չխախտվի ոչ հստակ թվի սահմանումը ճիշտ է վերցնել $\tilde{\eta}_\alpha$-ները, $\tilde{\varepsilon}_\alpha$-ների փոխարեն (86) հիմնական բանաձևում: Անկախ դրանից թեորեմի արդյունքը չի փոխվի: Գաուսյան դաշտերը կարող են ինքնահատող լինել և այդ դեպքում անհասկանալի կլինի նոր առաջացած թվի մեկնաբանությունը, և կարող է չպահպանվել α-կտրվածքի ուռուցիկությունը:

Հիմնական գնահատականը կարելի է ստանալ ռեվերսիայի օգնությամբ հետևյալ գործողությունով (տես [94]):

Նշանակելով`

$$\delta_{i,\alpha}(a) = \sup_{x\in S^{n-1}}\left(< x, a > - conv\left(\hat{\tilde{b}}_{i,\alpha,x}\right)\right) \tag{98}$$

α-կտրվածքի գնահատականը կլինի`

$$\hat{\tilde{b}}_{i,\alpha} = \left\{a \in \mathbb{R}^{n-1}: \delta_{i,\alpha}(a) = 0\right\} \tag{99}$$

Ավելի ընդհանուր դրվածքում նման գնահատականի կառուցումը թույլ է տալիս խոսել ընդհանրացված փոքրագույն քառակուսիների գնահատականի մասին, ինչը թույլ չի տալիս Diamond-ի խնդրի հիմնական դրվածքը:

Այդ դեպքում գնահատականը կընդունի հետևյալ տեսքը`

$$conv\left(\hat{\hat{B}}_{\alpha.x,GLS}\right) = conv\left(\left(\tilde{X}^T_{\alpha,x}\Omega_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x}\right)^{-1}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\Omega_{\alpha,x}\tilde{Y}_{\alpha,x}\right) \qquad (100)$$

որտեղ $\Omega_{\alpha,x}$-ը $\tilde{\mathcal{E}}$-ի α-մակարդակի ոչ հստակ դաշտի հեմնան ֆունկցիաների դաշտի կովարիոգրամի(կամ կովարիացիոն ֆունկցիայի) արժեքն է x-ուղղությամբ:

և այս թեորեմը կընդունի հետևյալ տեսքը`

<u>Թեորեմ 4.2</u> Դիցուք

1) $\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\Omega_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x}\right) = Q_{\alpha,x}$, որտեղ $Q_{\alpha,x}$-ը որևէ k-չափանի շրջելի մատրից է հավասարաչափ ըստ x-ի և α-ի:

2) $\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha} = (\tilde{\varepsilon}_{1\alpha}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{m\alpha}) \sim GF$ (սխալները գաուսյան դաշտեր են), որտեղ $\tilde{\varepsilon}_{i\alpha} = \{\tilde{\varepsilon}_{i,\alpha,}(x) | \, x \in S^{n-1}\}$: $\tilde{\varepsilon}_{i,\alpha,}(x)$-ը ըստ x ուղղության դաշտի արժեքն է, $\Omega_{\alpha,x}$-ն իրենց հենման ֆունկցիաների դաշտի կովարիացիոն ֆունկցիայի արժեքն է x-ուղղությամբ:

Այդ դեպքում

$conv\left(\hat{\hat{B}}_{\alpha.x,GLS}\right)$

գնահատականը ունակային է ըստ հավանականության, համարյա բոլոր x-երի համար:

Ապացույցը կատարվում է ճիշտ այնպես ինչպես <u>թեորեմ 4.1</u>-ինը:

4.2.Օրինակ

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը: Դիցուք ինչ-որ մակարդակի մեր ոչ հստակ դիտարկումների կրիչները քառակուսիներ են, և բացատրող և բացատրվող փոփոխականների համար:

Ընդ որում քառակուսիները ունեն նույն ուղղվածությունը, այսինքն՝ քառակուսու կողմերը զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին: Հեշտության համար ենթադրենք որ ունենք երեք դիտարկում, և երկու բացատրող փոփոխական, (առանց հաստատունի):

Տվյալ դեպքում ցանկացած քառակուսու համար, որի կողմի երկարությունը a է, ներքևի ձախ գագաթի կոորդինատները (x', y'), հենման ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը ($\vec{x} = (x, y)$)՝

$$s(\vec{x}) = \begin{cases} x'x + y'y\,; & x \le 0, y \le 0 \\ (x' + a)x + y'y\,; & x \ge 0, y \le 0 \\ x'x + (y' + a)y\,; & x \le 0, y \ge 0 \\ (x' + a)x + (y' + a)y\,; & x \ge 0, y \ge 0 \end{cases} \tag{101}$$

մեր գնահատականը կլինի՝

1) $x \le 0, y \le 0$

$$\hat{B}_{\cdot x} = \left(\begin{pmatrix} x'_{11}x + y'_{11}y & x'_{21}x + y'_{21}y & x'_{31}x + y'_{31}y \\ x'_{12}x + y'_{12}y & x'_{22}x + y'_{22}y & x'_{32}x + y'_{32}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{11}x + y'_{11}y & x'_{12}x + y'_{12}y \\ x'_{21}x + y'_{21}y & x'_{22}x + y'_{22}y \\ x'_{31}x + y'_{31}y & x'_{32}x + y'_{32}y \end{pmatrix} \right)^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} x'_{11}x + y'_{11}y & x'_{21}x + y'_{21}y & x'_{31}x + y'_{31}y \\ x'_{12}x + y'_{12}y & x'_{22}x + y'_{22}y & x'_{32}x + y'_{32}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'_1x + w'_1y \\ z'_2x + w'_2y \\ z'_3x + w'_3y \end{pmatrix}$$

2) $x \ge 0, y \le 0$

$$\hat{B}_{\cdot x} = \Bigg(\begin{pmatrix} (x'_{11} + a_{11})x + y'_{11}y & (x'_{21} + a_{21})x + y'_{21}y & (x'_{31} + a_{31})x + y'_{31}y \\ (x'_{12} + a_{12})x + y'_{12}y & (x'_{22} + a_{22})x + y'_{22}y & (x'_{32} + a_{32})x + y'_{32}y \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (x'_{11} + a_{11})x + y'_{11}y & (x'_{12} + a_{12})x + y'_{12}y \\ (x'_{21} + a_{21})x + y'_{21}y & (x'_{22} + a_{22})x + y'_{22}y \\ (x'_{31} + a_{31})x + y'_{31}y & (x'_{32} + a_{32})x + y'_{32}y \end{pmatrix} \Bigg)^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (x'_{11}+a_{11})x+y'_{11}y & (x'_{21}+a_{21})x+y'_{21}y & (x'_{31}+a_{31})x+y'_{31}y \\ (x'_{12}+a_{12})x+y'_{12}y & (x'_{22}+a_{22})x+y'_{22}y & (x'_{32}+a_{32})x+y'_{32}y \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (z'_1+b_1)x+w'_1y \\ (z'_2+b_2)x+w'_2y \\ (z'_3+b_3)x+w'_3y \end{pmatrix}$$

3) $x \leq 0, y \geq 0$

$$\hat{B}_{,x} = \left(\begin{pmatrix} x'_{11}x+(y'_{11}+a_{11})y & x'_{21}x+(y'_{21}+a_{21})y & x'_{31}x+(y'_{31}+a_{31})y \\ x'_{12}x+(y'_{12}+a_{12})y & x'_{22}x+(y'_{22}+a_{22})y & x'_{32}x+(y'_{32}+a_{32})y \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} x'_{11}x+(y'_{11}+a_{11})y & x'_{12}x+(y'_{12}+a_{12})y \\ x'_{21}x+(y'_{21}+a_{21})y & x'_{22}x+(y'_{22}+a_{22})y \\ x'_{31}x+(y'_{31}+a_{31})y & x'_{32}x+(y'_{32}+a_{32})y \end{pmatrix} \right)^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} x'_{11}x+(y'_{11}+a_{11})y & x'_{21}x+(y'_{21}+a_{21})y & x'_{31}x+(y'_{31}+a_{31})y \\ x'_{12}x+(y'_{12}+a_{12})y & x'_{22}x+(y'_{22}+a_{22})y & x'_{32}x+(y'_{32}+a_{32})y \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} z'_1x+(w'_1+b_1)y \\ z'_2x+(w'_2+b_2)y \\ z'_3x+(w'_3+b_3)y \end{pmatrix}$$

4) $x \geq 0, y \geq 0$

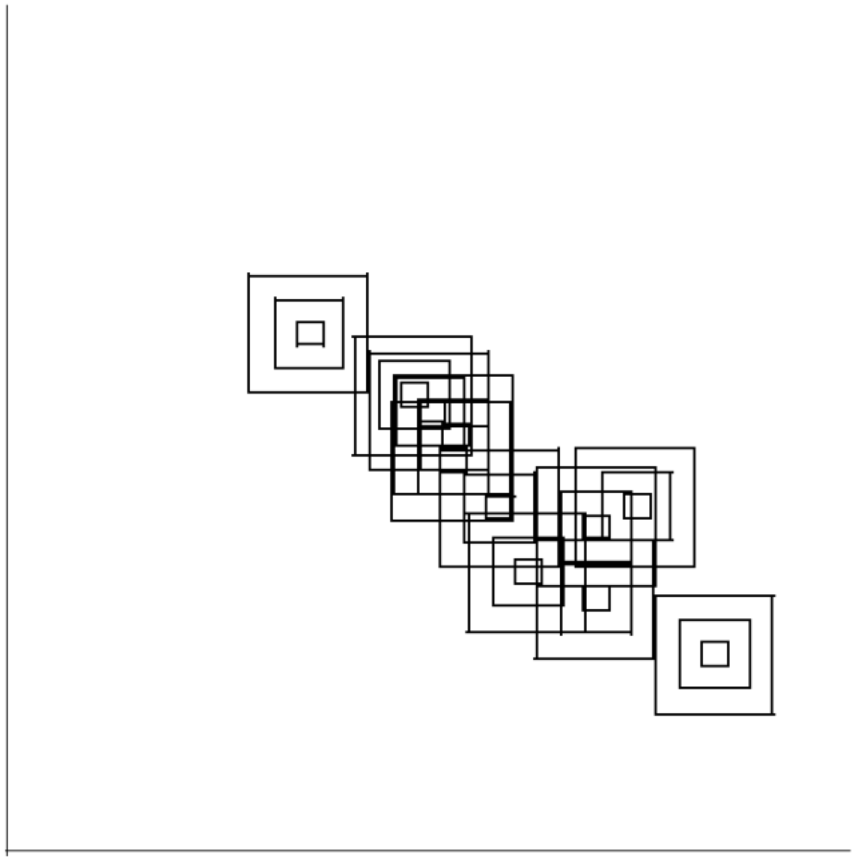
$$\ddot{B}_{,x} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} (x'_{11}+a_{11})x+(y'_{11}+a_{11})y & (x'_{21}+a_{21})x+(y'_{21}+a_{21})y & (x'_{31}+a_{31})x+(y'_{31}+a_{31})y \\ (x'_{12}+a_{12})x+(y'_{12}+a_{12})y & (x'_{22}+a_{22})x+(y'_{22}+a_{22})y & (x'_{32}+a_{32})x+(y'_{32}+a_{32})y \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} (x'_{11}+a_{11})x+(y'_{11}+a_{11})y & (x'_{12}+a_{12})x+(y'_{12}+a_{12})y \\ (x'_{21}+a_{21})x+(y'_{21}+a_{21})y & (x'_{22}+a_{22})x+(y'_{22}+a_{22})y \\ (x'_{31}+a_{31})x+(y'_{31}+a_{31})y & (x'_{32}+a_{32})x+(y'_{32}+a_{32})y \end{pmatrix} \right)^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (x'_{11}+a_{11})x+(y'_{11}+a_{11})y & (x'_{21}+a_{21})x+(y'_{21}+a_{21})y & (x'_{31}+a_{31})x+(y'_{31}+a_{31})y \\ (x'_{12}+a_{12})x+(y'_{12}+a_{12})y & (x'_{22}+a_{22})x+(y'_{22}+a_{22})y & (x'_{32}+a_{32})x+(y'_{32}+a_{32})y \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} (z'_1+b_1)x+(w'_1+b_1)y \\ (z'_2+b_2)x+(w'_2+b_2)y \\ (z'_3+b_3)x+(w'_3+b_3)y \end{pmatrix}$$



Գծապատկեր 4. Վերցված է Viertl-ի գրքից (տես [106]): Համապատասխանում է քառակուսի դիտարկումներով ոչ հստակ ռեգրեսիայի դեպքին: Այստեղ ներկայացված են միաժամանակ տարբեր α-կտրվածքներ:

Օրինակ առաջին դեպքի կտրվածքով առաջին գործակիցը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned}\frac{1}{ad-b^2}\Big(\Big(\big(x'_{11}x+y'_{11}y\big)d-\big(x'_{12}x+y'_{12}y\big)b\Big)\,(z'_1x+w'_1y)\\ +\Big(\big(x'_{21}x+y'_{21}y\big)d-\big(x'_{22}x+y'_{22}y\big)b\Big)\,(z'_2x+w'_2y)\\ +\Big(\big(x'_{31}x+y'_{31}y\big)d-\big(x'_{32}x+y'_{32}y\big)b\Big)\,(z'_3x+w'_3y)\Big) =: f(x,y\end{aligned} \quad (101)$$

Որտեղ՝

$$\begin{aligned} a &= (x'_{11}x+y'_{11}y)^2+(x'_{21}x+y'_{21}y)^2+(x'_{31}x+y'_{31}y)^2\\ d &= (x'_{12}x+y'_{12}y)^2+(x'_{22}x+y'_{22}y)^2+(x'_{32}x+y'_{32}y)^2\end{aligned} \quad (102)$$

$$b = (x'_{11}x + y'_{11}y)(x'_{12}x + y'_{12}y) + (x'_{21}x + y'_{21}y)(x'_{22}x + y'_{22}y) + (x'_{31}x + y'_{31}y)(x'_{32}x + y'_{32}y)$$

Ստուգելով Հեսյան մատրիցան կարելի է համոզվել, որ սա կամ ամենուրեք ուռուցիկ է, կամ ամենուրեք գոգավոր: Երբ գոգավոր է ուղղակի պետք է փոխարինել նրան $(0,-1)$; $f(-1,0)$; $f(0,0)$ կետերով անցնող հարթությունով:

Որպես օրինակ ընտրելը հենց քառակուսի գնահատականների հիմնավորվում է հետևյալ կերպ:

Երբ մենք ունենք մի քանի փորձագետների գնահատականներ, փոխանակ դրանք տալու առանձին ինտերվալային գնահատականների տեսքով, դրանք կարելի է տալ այդ ինտերվալների դեկարտյան արտադրյալի միջոցով: Այսինքն՝ այս դեպքում վերը նշված օրինակը կհամապատասխանի երկու փորձագետների ինտերվալների արտադրյալի դեպքին (քառակուսի կամ ուղղանկյուն): Բայց որպեսզի ճիշտ լինի հենց դեկարտյան արտադրյալի վերցնելը պետք է պահանջել որ փորձագիտական գնահատականները անկախ լինեն: (Հակառակ դեպքում տարբեր արժեքների համար կունենանք տարբեր տեսքեր, և չի ստացվի քառակուսի կամ ուղղանկյուն): Այսինքն՝ այստեղ միաժամանակ նաև ենթադրվում է (կամ կարելի է ասել պահանջվում է) փորձագիտական գնահատականների անկախությունը:

Մյուս կողմից այս մոտեցումը կարող է միաժամանակ լուծել նաև այն հարցը, երբ գնահատական է տրվում միաժամանակ և միջինի և տատանողականության (վարիացիայի, կովարիացիաների) վերաբերյալ: Այս դեպքում մի առանցքի վրա կլինի միջինի գնահատականը, մյուս առանցքի վրա վարիացիայինը: (Հավանական է որ այն կունենա շրջանագծի կամ էլիպսի, կամ կտրված էլիպսի տեսք):

Սա ամենևին չի հեշտացնում Diamond-ի կողմից առաջարկված խնդրի լուծումը լիարժեքորեն: Ընդհանրապես ասած ուռուցիկացումը նույնիսկ հեշտ բազմությունների հենման ֆունկցիաների համար կարող է շատ դժվար տեսք ունենալ:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները կապված են ոչ հստակ պատահական մեծությունների և դրանց՝ Բլեք-Լիտերմանի մոդելում տնտեսաչափական և բայեսյան մոտեցումներում կիրառման հետ: Հիմնական արդյունքները վերբերվում են ոչ հստակ փոքրագույն քառակուսիների գնահատականին, ոչ հստակ բայեսյան թեորեմի թերություններին և դրանց հաղթահարմանը, ոչ հստակ պատահական մեծություններին և դրանց թվային բնութագրիչներին:

Հիմնական արդյունքներն են՝

- Ցույց է տրված որ Viertl-ի կողմից ներկայացված ոչ հստակ բայեսյան թեորեմը չի հանդիսանում դասական բայեսյան թեորեմի ընդհանրացում:
- Առաջարկված է ոչ հստակ բայեսյան թեորեմի երկու այլ տարբերակ, ճշմարտանմանության ֆունկցիայի տարբեր տեսքերի միջոցով:
- Ապացուցված է, որ ոչ հստակ պատահական մեծության մաթսպասման օպերատորը ոչ միայն գծային է դասական թվերում, այլ նաև մեկ կարգի համասեռ է ոչ հստակ թվերով, հաշվի առնելով դեֆազիֆիկացիան:

- Ապացուցված է, որ ոչ հստակ պատահական մեծության որպես թիվ սահմանվող վարիացիան, կարելի է սահմանել նաև ոչ հստակ պատահական մեծության՝ թիվ հանդիսացող մաթեմատիկական սպասման միջոցով:
- Ստացված է անհրաժեշտ պայման ոչ հստակ պատահական մեծությունների երկու սահմանումների համարժեքության համար: Բերված են ոչ հստակ խտության ֆունկցիաները՝ ըստ երկրորդ սահմանման:
- Ներկայացված է ունակ գնահատականի կառուցումը ոչ հստակ դիտարկումներով ռեգրեսիաներում, α-մակարդակների հենման ֆունկցիաների բոլոր ուղղություններով ռեգրեսիաների միջոցով, երբ սխալները անկախ գաուսյան դաշտեր են:
- Ներկայացված է ընդհանրացված փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը ոչ հստակ դիտարկումներով ռեգրեսիաներում, երբ սխալները ոչ հստակ պատահական դաշտեր, կամ դրանց ուռուցիկ թաղանթներ են:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Գրականության ցանկը կազմված է հետևյալ տրամաբանությամբ: Նախ նշված են հեղինակների ազգանունները անունների առաջին տառերի հետ միասին, հետո տրված է աշխատության անվանումը, այնուհետև նշված են հրատարակության հետ կապված տվյալները:

Երբ խոսքը գնում է գրքերի մասին, անվանումները շեղատառ են:

Գրականությունը բերված է այբբենական կարգով:

1.Adler R.J. ; “*The Geometry of Random Fields*”, Wiley & Sons 1981

2.Akcoglu M. , Bartha P. , Ha D. ; “*Analysis in vector spaces: a Course in advanced analysis*” ; Wiley, 2009

3.Aumann J. R. ; “Integral of Set-Valued Functions” ; Journal of Mathematical Analysis and Applications 12, pp. 1-12, 1965

4. Avramov D. , Zhou G. ; "Bayesian Portfolio Analysis"; Annual Review of Financial Economics, Vol. 2, Issue 1, pp. 25-47, 2010
5. Babameto, Elton and Harris, Richard D. F.; "Exploiting Predictability in the Returns to Value and Momentum Investment Strategies: A Portfolio Approach"; 2008, p. 36 SSRN: https://ssrn.com/abstract=1302772
6. Beach L.S. , Orlov G.A. ; "An application of the Black–Litterman model with EGARCH-M-derived views for international portfolio management" ; Financial Markets and Portfolio Management, Vol. 21, Issue 2, pp. 147-166, 2007
7. Becker F., Gurtler M. ; "Quantitative Forecast Model for The Application of The Black-Litterman Approach" ; IF Working Paper Series, 2008, p. 28 , SSRN: https://ssrn.com/abstract=1483571
8. Benninga S. ; "*Financial Modeling*" ; 3rd edition, The MIT Press, 2008
9. Bertsimas D. , Gupta V. , Paschalidis I. Ch. ; "Inverse Optimization: A New Perspective on The Black-Litterman Model" ; Operations Research, Vol. 60, Issue 6, pp. 1389-1403, 2012
10. Best J. M. , Grauer R. R. ; "On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results" ; Review of Financial Studies , Vol. 4, Issue 2, pp. 315-342, 1991
11. Best J. M. , Grauer R. R. ; "Sensitivity Analysis for Mean-Variance Portfolio Problems" ; Management Science, Vol. 37, Issue 8, pp. 980-989, 1991
12. Bevan A. , Winkelman K. ; "Using Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience" ; Fixed Income Research, Goldman Sachs Company, 1998, p. 15
13. Black F. , Litterman R. B. ; "Asset Allocation: Combining Investor Views With Market Equilibrium" ; The Journal of Fixed Income, Vol. 1, Issue 2, pp. 7-18, 1991
14. Black F. , Litterman R. B. ; "Global Portfolio Optimization" ; Financial Analysts Journal, Vol. 48, Issue 5, pp. 28-43, 1992
15. Bobylev V. ; "Support function of a fuzzy set and its characteristic properties" Mathematical notes, vol. 37, issue 4, pp. 281-285, 1985

16. Bojadziev G. , Bojadziev M. ; "*Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management (Advances in Fuzzy Systems U Applications and Theory) (Advances in Fuzzy Systems - Applications and Theory)*" ; 2007
17. Braga M. D. , Natale, F. P. ; "TEV Sensitivity to Views in Black-Litterman Model" ; 20th Australasian Finance & Banking Conference 2007 Paper, p. 16, SSRN: https://ssrn.com/abstract=1009635
18. Bruggisser A. D. ; "Parameter Uncertainty and Learning in Dynamic Financial Decisions" ; Dissertation Thesis, Haupt Verlag, 2011
19. Buckley J. ; "*Fuzzy probability and statistics" ,* Springer-Verlag ,Berlin, Heidelberg, 2006.
20. Celmiņš A. ; "Multidimensional least-squares fitting of fuzzy models"; Mathematical Modelling , Vol. 9, Issue 9, pp. 669-690, 1987
21. Cevizci A. ; "A Comparison of Optimal Performances of Three Optimization Methods"; International Journal of Commerce and Finance, Vol. 2, Issue 1, pp. 137-146, 2016
22. Chen S. D. ; "Dynamic Bayesian Learning and Optimization in Portfolio Choice Models" ; Thesis, US Berkeley, 2014, p.53, http://digitalassets.lib.berkeley.edu/etd/ucb/text/Chen_berkeley_0028E_14201.pdf
23. Cheung W. ; "The Black-Litterman Model Explained" ; Journal of Asset Management , Vol. 11, Issue 4, pp. 229-243, 2010
24. Chincarini B. L. , Kim D. ; "Uses and Misuses of the Black-Litterman Model in Portfolio Construction" ; Journal of Mathematical Finance, Vol. 3, pp. 153-164, 2013. SSRN: https://ssrn.com/abstract=2191278
25. Chopra K. V. ; Ziemba T. W. ; "The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice" ; The Journal of Portfolio Management , Vol. 19, Issue 2, pp. 6-11, 1993
26. Cooper R.A. , Molyboga M., Molyboga G. ; "Black-Litterman, Exotic Beta, and Varying Efficient Portfolios: An Integrated Approach"; Journal of Investment Strategies, 2017, p.31, SSRN: https://ssrn.com/abstract=2902047

27. Couso I. , Dubois D. ; “On the variability of the concept of variance for fuzzy random variables” ; IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 17, pp. 1070-1080, 2009
28. Couso I. , Dubois D. , Sanchez L. ; “*Random Sets and Random Fuzzy Sets as Ill-Perceived Random Variables: An Introduction for Ph.D. Students and Practitioners*” ; Springer International Publishing, 2014
29. Couso I. , Sanchez L. ; “Upper and Lower Probabilities Induced by a Fuzzy Random Variable” ; Fuzzy Sets and Systems , Vol. 165, Issue 1, pp. 1-23, 2011
30. Davidov Y., Paulauscas V. ; “On the asymptotic form of convex hulls of Gaussian random fields” ; vol. 12, issue 5, pp. 711-720, 2014
31. Davis M. , Lleo S. ; “A simple procedure to incorporate predictive models in a continuous time asset allocation” ; Quantitative Finance Letters, Vol. 4, Issue 1, pp. 40-46, 2016
32. Diamond Ph. ; “Fuzzy least squeares”; Information sciences, vol. 46, issue 3, pp. 141-157, 1988
33. Diamond Ph. , Kloeden P. ; “*Metric Spaces of Fuzzy Sets:Theory and Applications*”; World Scientific, 1994
34. Echaust K., Piasecki K.; “Black-Litterman Model with Inuitionistic Fuzzy Posterior Return”; The IEB International Journal of Finance,vol 15, pp. 8-19, 2017
35. Fabozzi F. J. , Focardi S. M. , Kolm P. N. ; “Incorporating Trading Strategies in the Black-Litterman Framework” ; The Journal of Trading , Vol. 1, Issue 2, pp. 28-37, 2006
36. Fisher O. E. , Murg M. ; “A Combined Regime-Switching and Black-Litterman Model for Optimal Asset Allocation” , Journal of Investment Strategies, Vol. 4, Issue 3, pp. 1-36, 2015
37. Feng Y. , Hu L. , Shu H. ; “The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications”; Fuzzy Sets and Systems ; vol. 120, issue 3, pp. 487-497, 2001

38. Fang Y., Lai K.K., Wang Sh. ; "*Fuzzy Portfolio Optimization: Theory and Methods*" ; 1st edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
39. Geweke J. ; "*Contemporary Bayesian Econometrics and Statistics*" ; John Wiley, 2005
40. Gharakhani M. , Sadjadi S.J. ; "A Fuzzy Compromise Programming Approach for The Black-Litterman Portfolio Selection Model" ; Decision Science Letters, Vol. 2, Issue 1, pp. 11-22, 2013
41. Giacometti R. , Bertocchi M., Rachev S. T. , Fabozzi F. J. ; "Stable Distributions in The Black-Litterman Approach to Asset Allocation"; Quatitative Finance, Vol. 7, Issue 4, pp 423-433, 2007
42. Gil Á.M., López-Diaz M., Ralescu D. A. ; "Overview on The Development of Fuzzy Random Variables" Fuzzy Sets and Systems, Vol. 157, Issue 19, pp. 2546-2557, 2006
43. Gupta P., Mehlawat K.M., Inuiguchi M., Chandra S. ; "*Fuzzy Portfolio Optimization: Advances in Hybrid Multi-criteria Methodologies*" ; 1st edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
44. Hälikkä L ; "Global Tactical Asset Allocation Using The Black-litterman Model";http://www.doria.fi/bitstream/handle/10024/113991/10057.pdf?sequence=1 , Thesis, 2009.
45. Harris R., Stoja E., Tan L. ; "The Dynamic Black-Litterman Approach to Asset Allocation" ; European Journal of Operational Research, Accepted Paper, December 2016.
46. He G. , Litterman R.B. ; "The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios" ; Goldman Sachs Investment Management Seires, 1999, p. 27, SSRN: https://ssrn.com/abstract=334304
47. Hirani Sh. , Wallström J. ; "The Black-Litterman Asset Allocation Model: An Empirical Comparison to the Classical Mean-Variance Framework" ; Thesis, Linköping University , 2014, p. 57, http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:758241/FULLTEXT01

48.Hoff D.P. ; “*A First Course in Bayesian Statistical Methods*” ; Springer-Verlag New York 2009

49.Hueter I. ; “Limit Theorems for the Convex Hull of Random Points in Higher Dimensions” ; Transactions of the American Mathematical Society, vol. 351, issue 11, pp. 4337-4363, 1999

50.Idzorek T. ; “A Step-by-step Guide to The Black-Litterman Model: Incorporating User-specified Confidence Levels”, Chicago, Ibbotson Associates,https://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2006/Idzorek_onBL.pdf , 2005, p. 34,

51.Jagannathan R. , Ma T. ; “Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps” ; The Journal of Finance , Vol. 58, Issue 4, pp. 1651-1684, 2003

52.Jobson J.D. , Korkie M.R. ; “Estimation for Markowitz Efficient Portfolios” ; Journal of the American Statistical Association, Vol. 75, Issue 371, pp. 544-554, 1980

53.Jobson J.D. , Korkie M.R. ; “Putting Markowitz Theory to Work” ; The Journal of Portfolio Management, Vol. 7, Issue 4, pp. 70-74, 1981

54.Jones C.R. , Lim T., Zangari J. P. ; “The Black-Litterman Model for Structured Equity Portfolios” ; The Journal of Portfolio Management, Vol. 33, Issue 2, pp. 24-33, 2007

55.Jørgensen M. F. ; “An Investigation into the Black-Litterman Model” ;Thesis, Copenhagen Business School, 2016, p.83, http://studenttheses.cbs.dk/bitstream/handle/10417/5984/martin_felix_joergensen.pdf?sequence=1

56.Jorion Ph. ; “Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis” ; Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 21, Issue 3, pp. 279-292, 1986

57.Klir J. G. , Yuan B. ; “*Fuzzy sets and Fuzzy logic:Theory and applications”* ; Prentice Hall PTR, 1995

58.Kolm P. , Ritter G. ; “On The Bayesian Interpretation of Black–Litterman” ; European Journal of Operational Research, Vol. 258, Issue 2, pp. 564-572, 2017

59.Körner R. ; “On the variance of fuzzy random variables”; Fuzzy Sets and Systems, vol. 92, pp. 83-93, 1997

60.Krätschmer V. ; “A unified approach to fuzzy random variables”; Fuzzy Sets and Systems, vol. 123, pp. 1-9, 2001

61.Kwakernaak H. ; “Fuzzy Random Variables-I. Definitions and Theorems”; Information sciences, vol. 1, pp. 1-29, 1978

62.Lawrence K. D. ; Kleinman G. ; “A Fuzzy Programming Approach to Financial Portfolio Model” ; Emerald (MCB UP Book) , Vol. 10, pp. 53-59, 2009

63.Lejuene A.M. ; “A VaR Black–Litterman Model for the Construction of Absolute Return Fund-of-funds”; Quantitative Finance, Vol. 11, Issue 10, pp. 1489-1501, 2011

64.Li F. ; “Predicting Future Returns with Investor Views”; Thesis, 2011,p.62, https://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb11/110620.pdf

65.Lindberg C. ; “Portfolio Optimization when Expected Stock Returns are Determined by Exposure to Risk”; Bernoulli, Vol. 15, Issue 2, pp. 464-474, 2009

66.Litterman B. , with Quntitative Resources Group; “*Modern Invetsment Management: An Equilibrium Approach*” ; Wiley, 2003

67.Litterman R.; “Hot Spots and Hedges” ; The Journal of Portfolio Management, Vol. 23, Issue 5, pp. 52-75, 1996

68.Liu Y.K. , Liu B. ; “Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models” , IEEE Transactions on Fuzzy Systems ; vol. 10, issue 4, pp. 445-450 , 2002

69.Liu Y.K. , Liu B. ; “Expected Value Operator of Random Fuzzy Variable and Random Fuzzy Expected Value Models” , International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems ; vol. 11, issue 2, pp. 195-215 , 2003

70. Locatelli M ; "Convex envelopes for quadratic and polynomial functions over polytopes quadratic forms"; Mathematical Programming, Vol. 124 pp.33-43, 2010
71. Locatelli M., Schoen F. ; "On convex envelopes and underestimators for bivariate functions"; 2010, Preprint, http://www.optimizationonline.org/DB HTML/2009/11/2462.html
72. López-Diaz M., Gil Á.M. , Grzegorzewski P., Hryniewicz O., Lawry J. ; "*Soft Methodology and Random Information Systems*"; Springer-Verlag Berlin Heidelberg , 2004
73. López-Diaz M., Ralescu D. ; "Tools for fuzzy random variables: Embeddings and measurabilities"; Computational Statistics and Data Analysis, vol. 51, issue 1, pp. 109-114, 2006
74. Maggiar A. ; "Active Fixed-Income Portfolio Management Using the Black-Litterman Model"; 2009, p. 108, SSRN: https://ssrn.com/abstract=2655810
75. Mankert Ch. ; "The Black-Litterman Model Mathematical and Behavioral Finance Approaches Towards Its Use in Practice";Thesis, Royal Institute of Technology, School of Industrial Engineering and Management, Sweden http://kth.diva-portal.org/smash/get/diva2:10311/FULLTEXT01.pdf, p. 111, 2006,
76. Mankert Ch., Seiler M. ; "Mathematical Derivations and Practical Implications for the Use of the Black-Litterman Model" ; Journal of Real Estate Portfolio Management, Vol. 17, Issue 2, pp. 139-159, 2011
77. Markowitz H. ; "Portfolio Selection" ; The Journal of Finance , Vol. 7, Issue 1, pp. 77-99, 1952
78. Martellini L. , Ziemann V. ; "Extending Black-Litterman Analysis Beyond the Mean-Variance Framework" ; The Journal of Portfolio Management , Vol. 33, Issue 4, pp. 33-44, 2007
79. Meucci A. ; "*Risk and Asset Allocation*", Springer Finance 2005.
80. Michaud, Richard O. ; "The Markowitz Optimization Enigma: is 'Optimized' Optimal?." Financial Analysts Journal, Vol. 45, pp. 31-42, 1989.

SSRN: https://ssrn.com/abstract=2387669 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2387669

81. Michaud O.R. , Michaud O.R. ; "*Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*" ; Oxford University Press, USA , 2nd ed. , 2008
82. Mishra A.K., Pisispati S. , Vyas I. ; "An Equilibrium Approach for Tactical Asset Allocation: Assessing Black-Litterman Model to Indian Stock Market" ; Journal of Economics and International Finance, Vol. 10 , Issue 3, pp.553-563, 2011
83. Molchanov I. ; "*Theory of Random Sets*"; Springer 2005
84. Norrel J. , Dove E. ; "Black-Litterman Portfolio Allocation Stability and Financial Performance with MGARCH-M Derived Views" Thesis, Lund University, 2016
85. Osobo O. , Miataim S., Kosko B. ; "Bayesian Inference with Adaptive Fuzzy Priors and Likelihoods"; IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,Vol. 41, Issue 5, pp. 1183-1197, 2011
86. Owen. D. B. ; "A Table of Normal Integrals" ; Communications in Statistics-Simulation and Computation , Vol.9, Issue 4, pp. 389-419, 1980
87. Papanicolaou A., Sircar R., Fouque J.P. ; "Perturbation Analysis for Investment Portfolios Under Partial Information with Expert Opinions"; 2014 SSRN: https://ssrn.com/abstract=2532051 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2532051
88. Pástor L. , Stambaugh F.R. ; "Comparing asset pricing models: an investment perspective" ; Journal of Financial Economics, Vol. 56, Issue 3, pp. 335-381, 2000
89. Pézier J. ; "Global Portfolio Optimization Revisited: A Least Discrimination Alternative to Black-Litterman" ; ICMA Centre Discussion Papers in Finance DP07, 2007
90. Puri M.L. , Ralescu D.A. ; "Fuzzy Random Variables" ; Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 114, pp. 409-422, 1986

91.Qian E., Gorman S. ; "Conditional Distribution in Portfolio Theory" ; Financial Analysts Journal , Vol. 57, Issue 2, pp. 44-51, 2001

92.Rachev T.S. , Hsu J.S.J. , Bagasheva S.B., Fabozzi J.F. ; "*Bayesian Methods in Finance*" ; Wiley, 2008

93.Reoder D.E. ; "Dealing With Data: An Empirical Analysis of Bayesian Black-Litterman Model Extensions"; Thesis, 2015, p. 46, https://sites.duke.edu/djepapers/files/2016/10/danielroeder-dje.original.pdf

94.Rockafellar R. ; "*Convex analysis*" ; Princeton University Press, 1970

95.Salomons A. ; "The Black-Litterman Model , Hype or Improvement?"; Thesis, http://scripties.fwn.eldoc.ub.rug.nl/FILES/scripties/Technischewiskunde/Masters/2007/Salomons.A./Anisa_Salomons_scriptie_web.pdf , 2007, p. 115

96.Satchell S., Scowcroft A. ; "A demystification of the Black–Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction" ; Journal of Asset Management , Vol. 1, Issue 2, pp. 138-150, 2000

97.Satchell S., Scowcroft A. ; "*Advances in Portfolio Construction and Implementati*on" ; Butterworth-Heinemann, 2003.

98.Satchell S. ; "*Forecasting Expected Returns in The Financial Markets*" ; Academic Press, 2007

99.Shapiro A. , "Fuzzy regression models", Proceedings of Actuaries Research Conference (ARC), Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), Mexico, Society of Actuaries, IL, 2005.

100.Shapiro A.F. ; "Fuzzy random variables", Insurance: Mathematics and Economics ; vol. 44, issue 2, pp. 307-314, 2009

101.Sharpe W. ; "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Condition of Risk" ; Journal of Finance, Vol. 19, Issue 3, pp. 425–442, 1964.

102.Siemertz D. ;"Black-Litterman Allocation Model: Application and Comparision with OMX Stockholm Benchmark PI (OMXSBPI)"; Thesis, 2015, http://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordOId=5472145&fileOId=5472158 , p. 35

103.Sugeno, M., “Theory of fuzzy integrals and its applications”, Doctoral. Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974

104.Tanaka H., Uejima S., Asai K. ; “Linear Regression Analysis with Fuzzy Model” ; IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, Vol. 12, Issue 6, pp. 903-907, 1982

105.Vanmarcke E. ; “*Random Fields: Analysis and Synthesis*”; MIT Press, 1988

106.Viertl R., Sunanta O. ; “Fuzzy Bayesian Inference” ; METRON , vol. 71, issue 3, pp. 207-216, 2013

107.Viertl, R. ; “*Statistical Methods for Fuzzy Data”* ; Wiley, Chichester, 2011.

108.Walters J. ; “The Black-Litterman Model In Detail” Working paper, 2009. p.65, https://ssrn.com/abstract=1314585

109.Wang X. ; “The Study of BL Asset Allocation Model Based on Inflation”; Communications in Information Science and Management Engineering, Vol 2., Issue 3, pp. 47-51, 2012

110.Yang, C.C. ; “Fuzzy Bayesian Inference”; Proceeding of Systems, Man, and Cybernetics, IEEE International Conference, Vol. 3, pp. 2707-2712, 1997

111.Zadeh L.A. ; “Fuzzy Sets” ; Information and Control, Vol. 8, Issue 3, pp. 338-353, 1965

112.Zhaohui L. ; “Tactical Asset Allocation Imbeded With Investors’ Subjective Views” ; Thesis, National University of Singapore, 2009.

113.Zhou G.; “Beyond Black-Litterman: Letting data speak”; The Journal of Portfolio Management, Vol. 36, Issue 1, pp. 36-45, 2009

114.Zhou X. Y. ; “Continuous-Time Mean-Variance Portfolio Selection: A Stochastic LQ Framework” ; Applied Mathematics & Optimization, Vol. 42, Issue 1, pp. 19-33, 2000

115.Магнус Я.Р. , Катышев П.К. , Пересецкий А.А. ; “*Эконометрика: Начальный курс*”; Издательство ``Дело'', Москва, 2004

116.Мееров И.Б. , Никонов А. С. ; “Программная Реализация и Особенности Модели Блэка-Литтермана для Управления Портфелем Инвестора”;

Вестник Нижегородского университета им. Н.И . Лобачевского , Vol. 1, Issue 3, pp. 200-206, 2010

Կայքեր

1)www.blacklitterman.org

Հեղինակի՝ ատենախոսության թեմային համապատասխանող հոդվածները

[I] Գևորգյան Ռ. Ա., Բարդախչյան Վ. Գ.; "Ոչ հստակ պատահական մեծությունների թվային բնութագրիչներ" ; Հայաստանի Ճարտարագիտական Ակադեմիայի Լրաբեր , Հատոր 14, համար 1, էջ 9-13, 2017

[II] Բարդախչյան Վ. Գ.; "Ոչ հստակ պատահական մեծությունների ոչ հստակ խտության ֆունկցիաներ" ; Հայաստանի Ճարտարագիտական Ակադեմիայի Լրաբեր , Հատոր 14, համար 2, էջ 207-210, 2017

[III] Бардахчян В.Г., Геворкян Р.А. ; "Нечёткая Оценка Наименьших Квадратов по Выпуклым Оболочкам α-уровней"; Известия НАН Армении, Математика , том 52, н. 2, стр. 78-84, 2017б.

[IV] Bardakhchyan V.G. ; "Fuzzy Bayesian Inferences" ; Proceedings of Yerevan State University, Mathematics, vol. 51, issue 1, pp. 8-12, 2017.

ՆՇԱՆԱԿՈՒՄՆԵՐԻ ՑԱՆԿ

Նշանակումների ցանկում պահպանված չէ ատենախոսությունում հանդիպման հերթականությունը:

Y – բացատրվող փոփոխական կամ բացատրվող փոփոխականի վեկտոր

X – բացատրող փոփոխական կամ բացատրող փոփոխականի վեկտոր

U – օգտակարության ֆունկցիա

Ω – երկու իմաստով է օգտագործվում՝ կամ որպես պարզագույն պատահույթների տարածություն կամ որպես փորձագիտական գնահատականներում շեղումների կովարիացիոն մատրից Բլեք-Լիտերմանի մոդելում

ω – պարզագույն պատահույթ

P – օգտագործվում է երկու իմաստով՝ կամ որպես հավանականային չափ կամ որպես փորձագիտական գնահատականների փոխարկող մատրից Բլեք-Լիտերմանի մոդելում

$\mathcal{F}$ - սիգմա-հանրահաշիվ

F –բաշխման ֆունկցիա

f, p – խտության ֆունկցիա

f(|), p(|) - պայմանական խտության ֆունկցիա

F(|) - պայմանական բաշխման ֆունկցիա

$\mathbb{P}$ - բաշխումների դաս

r, R - Եկամտաբերություն (կամ ավելցուկային եկամտաբերություն) կամ եկամտաբերությունների վեկտոր, կամ եկամտաբերությունների (ավելցուկային եկամտաբերությունների) վեկտոր:

r_f , R_f – ոչ ռիսկային եկամտաբերություն

r_M – շուկայական կամ ուղենշային պայուսակի եկամտաբերություն

Σ – Կովարիացիոն մատրից: (Ավելցուկային եկամտաբերությունների կովարիացիոն մատրից Բլեք-Լիտերմանի մոդելում:)

τ – Փոխարկող մեծությունը Բլեք-Լիտերմանի մոդելում:

μ_{BL} – Բլեք-Լիտերմանի եկամտաբերությունների միջինների վեկտորը

Σ_{BL} – Բլեք-Լիտերմանի գնահատականում կովարիացիոն մատրիցը

Q – Փորձագիտական գնահատականների մատրից Բլեք-Լիտերմանի մոդելում:

Π – Հավասարակշիռ, կամ նախնական վիճակը նկարագրող եկամտաբերությունների միջինի վեկտորը Բլեք-Լիտերմանի մոդելում:

w – կշիռ կամ կշիռների վեկտոր

w_{BL} – Բլեք-Լիտերմանի մոդելում ստացվող կշիռ կամ կշիռների վեկտոր

w_M – շուկայական կամ ուղենշային պայուսակի կշիռներ

δ, λ – ռիսկից խուսափման գործակից

β – CAPM-ում բետագործակից

σ_M^2 - շուկայական կամ ուղենշային պայուսակի վարիացիա:

CAPM – Capital Asset Pricing Model` ակտիվների գնագոյացման մոդել

v, υ – շեղումները ներկայացնող պատահական վեկտորները Բլեք-Լիտերմանի մոդելում

ε - Նորմալ բաշխում ունեցող պատահական սխալ կամ սխալների վեկտոր

η - ոչ հստակ գաուսյան դաշտերի ուռուցիկ թաղանթների վեկտոր

$\tilde{a}$ – ոչ հստակ թիվ

$\mu_{\tilde{a}}(x)$ – $\tilde{a}$ ոչ հստակ պատահական թվի պատկանելության ֆունցկիա կամ չափ

$\tilde{A}$ – ոչ հստակ մեծությունների, թվերի վեկտոր

α – [0,1]-ից մակարդակ

$C_{\alpha,\tilde{a}}$ – α –կտրվածքներ` $\{x \in X|\mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}$

α- մակարդակ – $\{x \in X|\mu_{\tilde{a}}(x) = \alpha\}$

n – Ոչ հստակ թվերի չափողականությունը

m – դիտարկումների քանակը

k – բացատրող փոփոխականների քանակը

$\overline{\pi}_\alpha(\cdot)$, $\underline{\pi}_\alpha(\cdot)$ – մեկ չափանի ոչ հստակ պատահական մեծությունների բաշխման խտության ֆունկցիաները` աջակողմյան և ձախակողմյան համապատասխանաբար:

θ, $\hat{\theta}$ – վիճակագրական գնահատական

Θ – վիճակագրական գնահատականի թույլատրելի արժեքների տիրույթ

$l(\theta,\ \cdot)$ – ճշմարտանմանության ֆունկցիա

B^T – B մատրիցի տրանսպոնացիա

B^{-1} – B մատրիցի հակադարձ

$\tilde{A}_\alpha$ – $\tilde{A}$ բոլոր էլեմենտների α- մակարդակ

$supp_X(x)$ – X բազմության հենման ֆունկցիան x կետում կամ ուղղությամբ երբ x-ի որոշման տիրույթը S^k-ն է որևէ k-ի համար:

$\tilde{A}_{\alpha,x}$ – $\tilde{A}$ բոլոր էլեմենտների α- մակարդակների x-ուղղությամբ հենման ֆունկցիաների արժեքների վեկտոր

S^k – k-գունդ

$E(\cdot)$ – պատահական մեծության մաթսպասում

$Var(\cdot)$ – պատահական մեծության վարիացիա

$Cov(\cdot,\cdot)$ - երկու պատահական մեծությունների կովարիացիա

GF – Գաուսյան դաշտ

$N(,)$ – նորմալ բաշխում

$\Gamma(,)$ – գամմա բաշխում

$conv(f)$ – ուռուցիկացված ֆունկցիա

$a.s.lim$ – համարյա հավաստի սահման

$plim$ – ըստ հավանականության սահման

$a \cdot b$, $< a,b >$ – սկալյար արտադրյալ

$\mathbb{R}$ – Իրական թվերի բազմություն

$\mathbb{R}^n$ – n-չափանի իրականարժեք վեկտորների բազմություն, կամ ուղղակի n-չափողականության էվկլիդյան տարածություն:

$\mathbb{N}$ – բնական թվերի բազմություն

DF – Դեֆազիֆիկացիայի գործողություն

$\tilde{a} \ominus \tilde{b}$ - երկու ոչ հստակ թվեր Յակուհարայի տարբերություն

$\overline{\{A\}} - \{A\}$ բազմության փակում

$\sim$ - պատկանելություն որևէ բաշխման դասի

$\mathcal{T}$ - ոչ հստակ թվերի բազմությունը

$Cr(\cdot)$ - ինչ-որ բանի վստահելիության չափ

$\mathrm{Pos}(\cdot)$ - ինչ-որ բանի հնարավորության չափ

$\mathrm{Nes}(\cdot)$ - ինչ-որ բանի անհրաժեշտության չափ

E[] - մաթսպասման օպերատոր

$d(\cdot,\cdot)$; $D(\cdot,\cdot)$ - երկու մեծությունների միջև հեռավորության չափ (մետրիկա)