ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Բարդախչյան Վարդան Գևորգի

ԱՐԺԵԹՂԹԵՐԻ ՇՈՒԿԱՆԵՐՈՒՄ ՖԻՆԱՆՍԱԿԱՆ ԳՈՐԾԻՔՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄԸ ՈՉ ՀՍՏԱԿ ՄԵԹՈԴՆԵՐՈՎ

Ը.00.08-«Մաթեմատիկական տնտեսագիտություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2017

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար (խորհրդատու)՝	տնտ. դոկտոր, դոցենտ Գևորգյան Ռուբեն Ալբերտի
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	տնտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Սարգսյան Հայկ Լևոնի
	ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Օհանյան Վիկտոր Կարոյի
Առաջատար կազմակերպություն՝	Հայ-ռուսական (սլավոնական) համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2017թ. հուլիսի 15-ին ժամը 10^{00}–ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ՀՀ ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2017թ. հունիսի -ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝ Տ.Ն. Հարությունյան

Անորոշության ընդհանուր բնութագիրը

Անորոշության թեմայի արդիականությունը: Ոչ հստակ բազմությունների և լոգիկայի գաղափարը առաջին անգամ ներկայացրել է Զադեն 1965թ. ([15]) : Այդ ժամանակից մինչ այժմ ոչ հստակ բազմությունները գտել են կիրառություններ շատ ոլորտներում: Որպես մի քանի օրինակ կարելի է թվարկել՝ ոչ հստակ չափերի տեսությունը, ոչ հստակ պատահական մեծությունների տեսությունը, ոչ հստակ թվերի տեսությունը, ոչ հստակ ռեգրեսիաները, ոչ հստակ մեծություններով վիճակագրությունը, ոչ հստակ ֆունկցիաների տեսությունը, ոչ հստակ օպտիմալացման և մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրներ և այլն:

Շատ են նաև ոչ հստակ մեծություններով չափվող ֆինանսական գործիքներից կազմված պայուսակների մոդելները: Առանձին գրքեր կան նվիրված ոչ հստակ մեթոդների կիրառմանը պայուսակների տեսությունում (օրինակ՝ [8],[10]): Այստեղ առաջարկվող մոդելներում ավելի հաճախ ոչ հստակ մեծությունների կիրառումը պայմանավորված է որոշ մեծությունների ճշգրիտ չափելու, հաշվարկելու հետ կապված դժվարություններով: Սա ոչ հստակ բազմությունների հասկացության մի մեկնաբանություն է:

Ոչ հստակ բազմությունները, սակայն, ավելի հաճախ համապատասխանում են ինտուիտիվ հակսացություններին, որտեղ ոչ այդքան հաշվարկելու հետ կապված բարդություններ կան ինչքան որևէ հասկացության մեկնաբանման, ամողջությամբ ընկալման խնդիրներ:

Այսպիսի մեկնաբանմամբ ոչ հստակ բազմությունները ավելի կիրառելի են ֆինանսական գործիքների պայուսակների այն մոդելներում, որոնք կիրառում են ներդրողների կողմից գնահատականներ, և ավելի շատ են կախված սուբյեկտիվ ընկալումներից: Այսպիսի պայուսակի տեսության օրինակ է Բլեք-Լիտերմանի մոդելը ([2],[3]):

Բլեք-Լիտերմանի մոդելը առաջ է քաշվել որպես ֆինանսական պայուսակների կառուցման մի մոդել, որը հաղթահարում է Մարկովիցի դասական մոդելի ([13]) կիրառման հետ կապված խնդիրները, հաշվի առնելով նաև ներդրողի կարծիքը: Այս մոդելը հիմնավորվում է նրանով, որ ապագա գները (կամ եկամտբերությունները) կանխատեսելու համար պատմական տվյալներում ոչ լրիվ ինֆորմացիա է արտացոլված, և կա շուկայից դուրս ինֆորմացիա, որը հասանելի է փորձագետներին: Հաճախ այս ինֆորմացիան թվային տեսքի չի լինում: Այն արտացոլված է լինում տեքստային ինֆորմացիայում կամ փորձագիտական ինտուիտիվ ընկալման մեջ:

Բլեք-Լիտերմանի մոդելի հիմնական առարկա է հանդիսանում ֆինանսական գործիքների եկամտաբերությունները:

Այս մոդելը օգտագործելով երկու հիմնական մեթոդաբանություն (բայեսյան, և տնտեսաչափական), հնարավորություն է ընձեռում կոմբինացնել երկու աղբյուրների ինֆորմացիա՝ շուկայի և փորձագիտական հանրության: Երկու մեթոդներն էլ բերում են նույն արդյունքին՝ եկամտաբերությունների միջինների պատմական տվյալների հիման վրա կառուցված գնահատականներից ավելի կայուն գնահատականների:

Մասնավորապես, շատ շուկաներ թույլ արդյունավետ են, ինչը նշանակում է, որ ողջ հրապարակայնորեն հասանելի ինֆորմացիայի հիման վրա այդ շուկաները արդյունավետ չեն: Հետևաբար, ներդրողների կամ փորձագետների կարծիքները հաշվի առնելը կարող է բարելավել կառուցվող պայուսակների բնութագրիչները և էականորեն բարձրացնել ճիշտ որոշումներ կայացնելու հնարավորությունները, հատկապես այդ տիպի շուկաներում:

Սակայն Բլեք-Լիտերմանի մոդելը՝ փորձագիտական գնահատականները հաշվի առնելու համար պահանջում է, որ այդ գնահատականները լինեն կետային, այսինքն՝ որ յուրաքանչյուր փորձագետ տա որևէ արժեթղթի եկամտաբերության հստակ կանխատեսում: Հաճախ փորձագիտական գնահատականները այդպիսի՝ կետային, տեսք չեն կրում: Նրանք իրենցից ներկայացնում են միջակայքեր (կամ ունենում են ավելի բարդ տեսք): Եթե հաշվի առնվի նաև փորձագետների համոզվածության աստիճանը, ապա փորձագիտական կանխատեսումները կարելի է տալ ոչ հստակ թվերի միջոցով:

Սա հաշվի առնելով որոշ հեղինակներ ([7],[9],[12]) անդրադաձել են Բլեք-Լիտերմանի մոդելի ընդհանրացման այս ուղղությանը:

Սակայն նշված աշխատանքներում, հեղինակները միջին եկամտաբերությունների նոր գնահատականները համարել են հիմնական մոդելում ստացվող արդյունքի ոչ հստակ դարձված տարբերակները, առանց մաթեմատիկական խիստ հիմնավորման և ոչ հստակ դարձնելու ճիշտ ձևը նշելու:

Ատենախոսությունը նվիրված է նշված աշխատություններում առաջ քաշված մոդելի ընդհանրացմանը, և երկու եղանակներով (ոչ հստակ բայեսյան, և ոչ հստակ տնտեսաչափական) Բլեք-Լիտերմանի գնահատականի դուրս բերմանը և մոտարկմանկառուցմանը:

Հետազոտության նպատակը և խնդիրները: Աշխատանքի հիմնական նպատակն է ընդհանրացնել Բլեք–Լիտերմանի մոդելը այնպես որ փորձագիտական գնահատականները լինեն ավելի ընդհանուր, և արդյունքը արտացոլվի ինտուտիվ կառույցների (ոչ հստակ թվերի) միջոցով:

Այս նպատակին հասնելու համար, աշխատանքում տրվում են փորձագետների կողմից տրված ինտուիտիվ գնահատականների և առկա գնահատականների կոմբինացիան կառուցելու մեթոդաբանություն, ինչպես նաև տեսական հիմքեր՝ նման գնահատականի վիճակագրական նշանակալիության համար: Նշված նպատակին հասնելու համար առանձնացվել են հետևյալ խնդիրները՝

- Տալ ոչ հստակ տեսության հիմնական գործիքների սպառիչ նկարագրություն:
- Ոչ հստակ պատահական մեծությունների տեսության շրջանակներում ներկայացնել անհրաժեշտ արդյունքներ, որոնք կօգնեն ուսումնասիրել ոչ հստակ գնահատականների հատկությունները
- Կառուցել բայեսյան գնահատականների ոչ հստակ տարբերակներ:
- Կառուցել փոքրագույն քառակուսիների և ընդհանրացված փոքրագույն քառակուսիների գնահատակնների ոչ հստակ տարբերակները:
- Ուսումնասիրել բայեսյան թեորեմի ոչ հստակ տարբերակի և ոչ հստակ ընդհանրացված փոքրագույն քառակուսիների գնահատականի համարժեքության պայմանները, դրա համար նախօրոք ստանալով ոչ հստակ պատահական մեծությունների երկու հայտնի սահմանումների համարժեքությունը ապահովող պայմաններ:
- Ներկայացնել Բլեք–Լիտերմանի գնահատականի ոչ հստակ տարբերակի կառուցման կամ մոտարկման մեթոդաբանություն:
- Օրինակով ներկայացնել այդ գնահատականի կիրառությունը:

Հետազոտության մեթոդաբանությունը: Ուսումնասիրության հիմնական մեթոդները հիմնված են ոչ հստակ բազմությունների տեսության և ոչ հստակ պատահական մեծությունների տեսության վրա:

Աշխատանքում կիրառվում են

1) բայեսյան հավանականությունների տեսությունը և բայեսյան տնտեսաչափության տարրեր

2) ուռուցիկ բազմությունների տեսության որոշ արդյունքներ և հասկացություններ
3) չափի տեսության հասկացություններ և մեթոդներ
4) պատահական դաշտերի տեսության որոշ հատկություններ

Գիտական նորույթը: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները նոր են: Դրանցից կարելի է առանձնացնել, ոչ հստակ դիտարկումներով բազմաչափ ռեգրեսիայում ռեգրեսիոն գործակիցների ունակ գնահատականի ստացումը, ոչ հստակ պատահական մեծությունների վարիացիայի և մաթեմատիկական սպասման դեֆազիֆիկացիայի (defuzzification) հետ կապված հատկությունների ստացումը, ոչ հստակ բայեսյան թեորեմի՝ դասական բայեսյան թեորեմի ընդհանրացում հանդիսացող տարբերակի առաջարկը, ոչ հստակ պատահական մեծությունների երկու տարբեր սահմանումների համարժեքության պայմանի ստացումը:

Ատենախոսության արդյունքների տեսական և կիրառական նշանակությունը: Աշխատանքի արդյունքները կրում են թե՛ տեսական, թե՛ գործնական բնույթ, սակայն ավելի գերակշռող է արդյունքների տեսական նշանակությունը: Արդյունքները առաջին հերթին կարող են օգտագործվել ոչ հստակ ռեգրեսիաներում, թույլ տալով ընդհանրացնել ոչ հստակ փոքրագույն քառակուսիների գնահատականը:

Արդյունքների մի մասը վերաբերվում են ոչ հստակ պատահական մեծությունների տեսությանը, և կարող են օգտագործվել այս ուղղությամբ որոշ ընդհանրացումներ կատարելու և ոչ հստակ տվյալներով վիճակագրության մեջ:

Հիմնական արդյունքներն ունեն նաև պրակտիկ նշանակություն, հաշվի առնելով Բլեք–Լիտերմանի մոդելի կիրառական բնույթը և փորձագիտական գնահատականների ոչ կետային լինելը: Մոդելի առաջարկվող ընդհանրացումը և կառուցման ձևը կարող են կիրառվել ֆինանսական գործիքների պայուսակների կառավարիչների կողմից:

Հայտնի է որ, զարգացող և անցումային երկրների շուկաները նույնիսկ թույլ արդյունավետ չեն: Հետևաբար, աշխատանքում ստացված արդյունքները հատկապես կարևոր են անցումային և զարգացող երկներում ֆինանսական որոշումներ կայացնելու և պայուսակներ կառուցելու համար: Մասնավորապես, Հայաստանում կենսաթոշակային ռեֆորմի արյդունքում ստեղծվել են ֆոնդեր, որոնց միջոցները տեղաբաշխվում են ինչպես Հայաստանում, այնպես էլ օտարերկրյա շուկաներում: Այդ պորտֆելների կառուցման համար անհրաժեշտ է

վերլուծել մեծածավալ ինֆորմացիա, որը վերաբերվում է ինչպես կիսաուժեղ արդյունավետ, այնպես էլ թույլ արդյունավետ և անարդյունավետ շուկաներին: Այս աշխատանքում առաջարկվող մեթոդները թույլ են տալիս օգտագործել այդպիսի տարաբնույթ ինֆորմացիան պրակտիկ աշխատանքում պորտֆելներ կառուցելիս:
Ատենախոսության դրույթների փորձարկումը: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները ներկայացվել Երևանի պետական համալսարանում սեմինարների ձևով, և մեկ զեկույցով «Բազմաչափ վիճակագրական անալիզ և տնտեսաչափություն» միջազգային դպրոց-սեմինարի շրջանակներում:
Հրատարակումները: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները հրատարակված են հեղինակի չորս հոդվածներում, որոնց ցուցակը ներկայացված է սեղմագրի վերջում:
Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը: Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից, գրականության ցանկից՝ ընդհանուր 117 աղբյուրով, նշանակումների ցանկից: Աշխատանքի 105 էջ է:

Ատենախոսության հիմնական բովանդակությունը

Ատենախոսության ներածությունում ներկայացված են հիմնական դրույթները, արդյունքները: Հիմնավորված է արդիականությունը: Ներկայացված են նպատակները, արդյունքներին հասնելու համար օգտագործված մեթոդները, աշխատանքի գործնական և տեսական նշանակությունը: Հիմնավորված է գիտական նորույթ լինելը: Ներկայացված է աշխատանքի կառուցվածքը և աշխատանքի վերաբերվող հրատարակությունների քանակը:
Առաջին գլուխը նվիրված է Բլեք-Լիտերմանի մոդելին: Նախ ներկայացված է ֆինանսական գործիքների պայուսակի մարկովիցի մոդելը, որը հիմնված է եկամտաբերության մաքսիմալացման և ռիսկի զսպման վրա: Դասական մոդելում որպես ռիսկ վերցվում է կառուցվող պայուսակի ստանդարտ շեղումը: Մոդելի հիմնական խնդիրը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} w_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = w^T \mu \to max \\ Var(X) = w^T \Sigma w = \bar{\sigma} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{cases}$$

որտեղ $w=\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ - կշիռների սյունն է, $\mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ - պատմական տվյալների վրա հաշվարկված միջինների (մաթեմատիկական սպասումների) սյունն է, $\Sigma=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$ - պատմական տվյալների վրա հաշվարկված կովարիացիոն մատրիցան է, n-ը դիտարկվող ակտիվների քանակն է:

Այնուհետև նշվում են Մարկովիցի մոդելի գրականությունում նշվող հիմնական թերությունները;

Դրանցից մի քանիսն են՝ զգայունությունը (հատկապես գործիքների միջին եկամտաբերությունների փոփոխությունների նկատմամբ), խիստ կոնցենտրիկ արդյունքները (շատ 0-ական կշիռներ, իսկ առանց կարճ վաճառքի վրա դրվող սահմանափակման շատ մեծ դրական կշիռներով և շատ մեծ բացասական կշիռներով պայուսակներ), տնտեսական բաղադրիչի և այլ ինֆորմացիայի հաշվի չառնելը: (նշված թերությունները թվարկված են շատ հեղինակների մոտ, օրինակ՝ [1],[4],[11]):

Այնուհետև ներկայացված են նշված թերությունները հաղթահարելու առկա ձևերը և մոդելները, որոնցից է բլեք-լիտերմանի մոդելը:

Շարունակությունում ներկայացված է բլեք-լիտերմանի մոդելում խնդրի դրվածքը, որը արտահայտվում է երկու հավասարումներով, միջին եկամտաբերությունների երկու գնահատականներով՝ հավասարակշիռ վիճակի և փորձագիտական:

Ներկայացվում են հիմնական հավասարումները և ստացվող հիմնական բանաձևը՝

$$\Pi=\mu_{BL}+\varepsilon, \tag{1}$$

$$Q=P\mu_{BL}+\eta, \tag{2}$$

որտեղ

$$\Pi=\delta\Sigma w_M$$

$\Pi\sim(n\times 1)$-ն եկամտաբերությունների գնահատականների սյունն է, $\Sigma\sim(n\times n)$-ն շուկայական պայուսակի կովարիացիոն մատրիցը, $w_M\sim(n\times 1)$-ն շուկայական պայուսակում յուրաքանչյուր գործիքի կշիռը (կամ մասնաբաժինը), $\varepsilon\sim N(0,\tau\Sigma)$, $\varepsilon\sim(n\times 1)$, τ-ն ճշգրտող թիվ է, $\eta\sim N(0,\Omega)$, ε-ը և η-ն անկախ են: $P\sim(m\times n)$; $\Omega\sim(m\times m)$; $Q\sim(m\times 1)$; $\eta\sim(m\times 1)$: m-ը փորձագետների կողմից հնչեցված գնահատականների քանակն է: P-ն փոխարկող մատրիցն է:

Եվ ներկայացված մոդելի միջին եկամտաբերությունների (μ_{BL}) հիմնական բանաձևը, որը տրվում է երկու համարժեք տեսքերով՝

$$\mu_{BL}=\Pi+\tau\Sigma P^T(\Omega+\tau P\Sigma P^T)^{-1}(Q-P\Pi), \tag{3}$$

$$\mu_{BL}=((\tau\Sigma)^{-1}+P^T\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi+P^T\Omega^{-1}Q): \tag{4}$$

Նշված բանաձևերը ստանալու համար, օգտագործվում է երկու մոտեցում: Առաջինը՝ (1) և (2) բանաձևերի համադրումն է մեկ հավասարման մեջ՝

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \mu_{BL} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}:$$

Վերջինս ռեգրեսիոն հավասարում է, որում μ_{BL} -ը գնահատավող պարամետրերի սյունն է: Գտնելով ընդհանրացված փոքրագույն քառակուսիների գնահատականը և կատարելով որոշակի ձևափոխություններ, կարելի է հանգել հիմնական (4) բանաձևին:
Մյուս մոտեցումը բայեսյան թեորեմի օգտագործմամբ է, որում որպես նախնական բաշխում վերցվում է $\mu_{BL} \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$, իսկ որպես պայմանական բաշխում՝ $E(r)|\mu_{BL} \sim N(P^{-1}Q, (P^T\Omega^{-1}P)^{-1})$:
Այնուհետև ներկայացված են սահմանային դեպքերը, τ, δ, Ω, Σ մեծությունների ընտրության առանձնահատկությունները, բլեք-լիտերմանի մոդելի էմպիրիկան, բլեք-լիտերմանի մոդելի հիմնական թերությունները, ինչպես նաև առաջարկվող տարբերակի հիմնավորումը:

Երկրորդ գլխում ոչ հստակ տեսության հիմնական հասկացություններն են ներկայացված; Այն բաժանված է հինգ ենթագլխի;
Առաջին ենթագլուխը նվիրված է ոչ հստակ բազմություններին և ոչ հստակ թվերին: Բերված են հիմնական սահմանումները:
Ոչ հստակ բազմությունը որոշվում է որպես X բազմության և [0,1] հատվածի դեկարտյան արտադրյալի ենթաբազմություն, այնպիսի որ X-ի յուրաքանչյուր տարրի համար սահմանվի ֆունկցիա՝ $\tilde{X} = \{X,\ \xi_X(x)\}$, որտեղ $\xi_X : X \to [0,1]$- ը անվանում են պատկանելության ֆունկցիա:
Ոչ հստակ բազմության α-մակարդակները սահմանվում են հետևյալ կերպ՝ $C_\alpha(\tilde{X}) = \{x \in X \mid \xi_X(x) = \alpha\}$: ([14]):
n-չափանի ոչ հստակ թվերը ոչ հստակ բազմություններ են, որոնց համար ճիշտ է հետևյալը՝

1. նորմավորված են; ($\max_x \xi_X(x) = 1$)
2. α-մակարդակները ուռուցիկ բազմություններ են:
3. Պատկանելության ֆունկցիան կտոր առ կտոր անընդհատ է: (ըստ որոշ սահմանումների՝ անընդհատ ([6]):
4. որոշման տիրույթը $\mathbb{R}^n$ է:

Ոչ հստակ թվերի հետ գործողություններն արվում են իրենց α-մակարդակների հետ, այսինքն՝ որպես ուռուցիկ բազմությունների հետ գործողություններ: Սակայն ոչ հստակ թվերի բազմությունը այսպիսի դրվածքի դեպքում վեկտորական տարածություն չէ, քանզի ոչ մի երկու ոչ հստակ բազմությունների տարբերություն (բացառությամբ տրիվյալ դեպքի, երբ խոսքը գնում է հասարակ թվերի մասին՝ 1 կետ 1 պատկանելության չափով), չի տա 0-ական բազմություն:

Այստեղից խնդիր է առաջանում՝ կապված թե՛ ոչ հստակ փոփոխականներով ֆունկցիաների սահմնման թե՛ դրանց ածանցման հետ:

Երկրորդ ենթագլուխը նվիրված է ոչ հստակ պատահական մեծություններին և դրանց թվային բնութագրիչներին:

Նշվածները սահմանվում են մի քանի ոչ իրար համարժեք ձևերով:

Մասնավորապես ոչ հստակ պատահական մեծությունները ունեն հիմնական երկու սահմանում, որպես ոչ հստակ արժեքներ ընդունող պատահական մեծություններ, այսինքն՝ երբ յուրաքանչյուր պատահույթի համար պատահական մեծությունը ոչ հստակ թիվ է, և ոչ հստակ խտության ֆունկցիաների միջոցով, այսիքն՝ երբ մաքսիմալ և մինիմալ հավանականություններ են գնահատվում որևէ դասական պատահական մեծության համար, սակայն արժեքներ ընդունելու հավանականությունները հստակ հայտնի չեն:

1. Ըստ ոչ հստակ պատահական մեծությունների առաջին սահմանման ունեինք հետևյալը: Տրված է հավանականային տարածությունը՝ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$: Ոչ հստակ պատահական մեծությունը չափելի ֆունկցիա է՝ $\widetilde{\mathrm{X}}: \Omega \to \mathcal{T}$: (այստեղ՝ $\mathcal{T}$-ն ոչ հստակ թվերի բազմությունն է:)

2. Երկրորդ սահմանումը համապատասխանում է այն դեպքին երբ մենք գիտենք հնարավոր ելքերը, և ոչ հստակ պատահական մեծությունների համար սահմանվում է ոչ հստակ խտության ֆունկցիաներ՝ $\underline{\pi}, \overline{\pi}: R \to \mathcal{T}$, $\exists\, f(x) \in \left[\underline{\pi}_1(x); \overline{\pi}_1(x)\right]$, այնպիսին որ $f(x) \geq 0, \int f(x)dx = 1$, և $\int \overline{\pi}_\alpha\,(x)dx$ և $\int \underline{\pi}_\alpha(x)dx$, գոյություն ունեն և վերջավոր են բոլոր δ-ների համար:

Ոչ հստակ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն էլ սահմանվում է մի քանի եղանակով, շատերը՝ որպես ոչ հստակ թիվ, մեկ եղանակ որպես դասական թիվ:

Մաթեմատիկական սպասումը որպես ոչ հստակ թիվ սահմանում են են հետևյալ կերպ՝

$$E_\alpha\big(\tilde{X}\big) = \{E(X) | X(\omega) \in \tilde{X}_\alpha(\omega)\} \tag{5}$$

Մաթեմատիկական սպասումը մաթեմատիկական սպասման օպերատորի միջոցով սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$E[\tilde{X}] = \int_0^{\infty} Cr(\tilde{X} \geq x)dx - \int_{-\infty}^{0} Cr(\tilde{X} \leq x)dx, \quad (6)$$

Այստեղ՝

$$E(\tilde{X}) = \int_{\Omega} E[\tilde{X}]dP,$$

$$Cr(A) = \frac{1}{2}\big(Pos(A) + Nes(A)\big),$$

$$Pos(A) = \sup_{x\in A} \xi_{\tilde{X}(\omega)}(x),$$

$$Nes(A) = 1 - Pos(\bar{A}) = 1 - \sup_{x\in \bar{A}} \xi_{\tilde{X}(\omega)}(x),$$

$E[\cdot]$-ն անվանում են մաթեմատիկական սպասման օպերատոր: Այն ցանկացած ոչ հստակ պատահական մեծությանը համապատասխանեցման մեջ է դնում (սովորական) պատահական մեծություն:

Վարիացիայի համար ևս կան մի քանի սահմանումներ: Հիմնական արդյունքը, սակայն, կապված է վարիացիայի որպես թիվ սահմանման հետ:

$$Var(\tilde{X}) = \int_{\Omega} \int_{S^{n-1}} \left(s_{\tilde{X}}(x) - s_{E(\tilde{X})}(x)\right)^2 dxdP \quad (7)$$

որտեղ $s_{\tilde{A}}(x,\alpha)$-ը $\tilde{A}$ ոչ հստակ պատահական մեծության α-մակարդակի հենման ֆունկցիայի արժեքն է ըստ $x \in S^{n-1}$ ուղղության, S^{n-1}-ը n-1-գունդն է, և n-ը այն տիրույթի չափողականությունն է որտեղ մենք գործում ենք (այսինքն՝ n-1-ը ոչ հստակ թվի կրիչի տիրույթի չափողականությունն է:)

Երրորդ ենթագլուխը նվիրված է Զադեի սկզբունքին: Ներկայացված է դասական ֆունկցիաների ընդհանրացման սկզբունքը ոչ հստակ փոփոխականների համար: Մասնավորապես, ոչ հստակ մեծությունների վրա որոշված ֆունկցիաների արժեքները որոշելու համար Զադեն առաջարկել է հետևյալ ընդլայնման սկզբունքը՝

$$\mathrm{f}(\tilde{\mathrm{x}}) = \tilde{\mathrm{y}}$$

որտեղ $\tilde{\mathrm{y}}$-ի պատկանելության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\xi_{\tilde{\mathrm{y}}}(\mathrm{y}) = \begin{cases} \sup\limits_{\mathrm{x}\in \mathrm{M}, \mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{y}} \xi_{\tilde{\mathrm{x}}}(\mathrm{x})\,; & \text{եթե } \exists \mathrm{x} \in \mathrm{M}, \text{այնպիսի որ } \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{y} \\ 0 \quad ; & \text{եթե } \nexists \mathrm{x} \in \mathrm{M}, \text{այնպիսի որ } \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{y} \end{cases}$$

որտեղ M-ը $\xi_{\tilde{\mathrm{x}}}(\mathrm{x})$-ի որոշման տիրույթն է, այսինքն՝ $\tilde{\mathrm{x}}$-ի կրիչը լիովին պատկանում է M-ին:

Երբ f-ը անընդհատ ֆունկցիա է իր որոշման տիրույթում, ապա ỹ-ի α-մակարդակները համընկնում են x̃-ի α-մակարդակներում f-ի ընդունած արժեքների բազմության հետ: Այսինքն՝

$$C_\alpha(\tilde{y}) = \{f(x) |\ x \in C_\alpha(\tilde{x})\}$$

Չորրորդ ենթագլուխը նվիրված է ոչ հստակ բայեսյան թեորեմին:
Բայեսյան թեորեմի ընդհանրացումն առաջարկվել է Վիերտլի կողմից ([14]), և այն տրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\underline{\pi}_\delta(\theta|x_1;\dots;x_n) = \frac{\underline{\pi}_\delta(\theta)l(\theta;x_1;\dots;x_n)}{\int \frac{\underline{\pi}_\delta(\theta)+\overline{\pi}_\delta(\theta)}{2} l(\theta;x_1;\dots;x_n)d\theta},$$

$$\overline{\pi}_\delta(\theta|x_1;\dots;x_n) = \frac{\overline{\pi}_\delta(\theta)l(\theta;x_1;\dots;x_n)}{\int \frac{\underline{\pi}_\delta(\theta)+\overline{\pi}_\delta(\theta)}{2} l(\theta;x_1;\dots;x_n)d\theta},\qquad (8)$$

որտեղ $\underline{\pi}_\delta(\theta)$ և $\overline{\pi}_\delta(\theta)$ նախնական (prior) ոչ հստակ խտության ֆունկցիաներն են (ամենափոքր և ամենամեծը հավանականությունները համապատասխանաբար), իսկ $\underline{\pi}_\delta(\theta|x_1;\dots;x_n)$ և $\overline{\pi}_\delta(\theta|x_1;\dots;x_n)$ հետահայաց (posterior) խտության ֆունկցիաները, δ-ն համապատասխան մակարդակն է (պատկանելության չափը): x_i-երը ոչ հստակ դիտարկումներ են:
Ոչ հստակ խտությունների համար պահանջվում է, որ $\exists f(x)$; $\underline{\pi}_1(x) \le f(x) \le \overline{\pi}_1(x) (\forall x)$, այնպիսին որ f(x)-ը լինի սովորական խտության ֆունկցիա:
Ճշմարտանմանության ֆունկցիան Վիերտլի առաջարկած տարբերակում վերցվում է հետևյալ տեսքով՝

$$l(\theta;x_1;\dots;x_n) = \prod_i \left(\int_{l_i}^{r_i} \xi_i(x) f(x|\theta)dx\right) \qquad (9)$$

Եթե օգտագործվի Զադեի սկզբունքը, ապա պետք է վերցվի բայեսյան թեորեմի հետևյալ տեսքը:

$$\underline{\pi}_\delta(\theta|x_1;\dots;x_n) = \frac{\underline{\pi}_\delta(\theta)l(\theta;x_1;\dots;x_n)}{\int \overline{\pi}_\delta(\theta)l(\theta;x_1;\dots;x_n)d\theta},$$

$$\overline{\pi}_\delta(\theta|x_1;\dots;x_n) = \frac{\overline{\pi}_\delta(\theta)l(\theta;x_1;\dots;x_n)}{\int \underline{\pi}_\delta(\theta)l(\theta;x_1;\dots;x_n)d\theta}: \qquad (10)$$

Սակայն (8) բանաձևով տրվող տեսքը հաջորդականորեն կիրառելի չէ, այդ պատճառով առաջադրվել է (7) տեսքը, որի համար Վիերտլը ապացուցել է հաջորդական կիրառելիությունը ([14]):

Հինգերորդ ենթագլուխը նվիրված է ոչ հստակ ռեգրեսիաներին: Ներկայացված են ռեգրեսիաների երեք տեսակներ՝ Տանակայի, Կելմինսի և Դայմոնդի ռեգրեսիաները:
Որպես փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի ընդհանրացում ավելի հաճախ ընդունվում է դայմոնդի ռեգրեսիան: Վերջինս հիմնված է բացատրող և բացատրվող փոփոխականների միջև մետրիկայի վրա ([5]):
Որպես երկու n-չափանի ոչ հստակ թվերի միջև հեռավորության չափ (մետրիկա) Դայմոնդը վերցրել է հետևյալ տեսքը

$$d(\tilde{A},\tilde{B}) = \left(n\int_0^1 \int_{S^{n-1}} \left(s_{\tilde{A}}(x,\alpha) - s_{\tilde{B}}(x,\alpha)\right)^2 dx d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (11)$$

Դայմոնդը ցույց է տվել, որ այսպես չափվող հեռավորությունը մետրիկա է:
Իսկ որպես երկու ոչ հստակ էլեմենտներով վեկտորների միջև հեռավորություն վերցրել է համապատասխան տարրերի միջև հեռավորությունների քառակուսիների գումարը:
Երրորդ գլուխը իր հերթին ունի երեք ենթագլուխ:
Առաջին ենթագլուխը նվիրված է ոչ հստակ բայեսյան թեորեմի վիերտլի կողմից առաջարկված տեսքին:
Ցույց է տրված, որ ճշմարտանմանության ֆունկցիայի իր կողմից առաջարկված տեսքի դեպքում ոչ հստակ բայեսյան թեորեմը դասական բայեսյան թեորեմի ընդհանրացում չէ:
Թեկուզ եռանկյուն դիտարկումների համար ստացվում է, որ

$$\int_{l_i}^{r_i} \boldsymbol{\xi_i(x) f(x|\theta) dx} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r_i - m_i}} \int_{m_i}^{r_i} \boldsymbol{F(x|\theta) dx} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m_i - l_i}} \int_{l_i}^{m_i} \boldsymbol{F(x|\theta) dx} \qquad (12)$$

(12) բանաձևում գրվածը երկու տարբեր միջակայքերում պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի միջին արժեքների տարբերություն է:
Հետևաբար, եթե $l_i \to r_i$, ապա մի կողմից դա կնշանակի որ i-րդ դիտարկում սովորական է (ոչ թե ոչ հստակ), իսկ մյուս կողմից՝ նոր խտության ֆունկցիայի արժեքը կդառնա 0:
Այս գլխում նաև առաջարկված են երկու այլ տարբերակներ ճշմարտանմանության ֆունկցիայի համար, հիմնված դեֆազիֆիկացիայի վրա:
Դրանցից առաջինը ստացվում է դիտրակումների դեֆազիֆիկացիայից հետո ստացված սովորական թիվը որպես դիտարկում վերցնելով: Այսինքն՝

$$l(\theta; x_1 ; \dots ;\ x_n) = \prod_i f(DF(\boldsymbol{x_i})|\theta), \qquad (13)$$

որտեղ DF(.)-ը նշանակում է դեֆազիֆիկացիա, այսինքն՝ ոչ հստակ թվի կրիչից որևէ էլեմենտի ընտրություն:

Սակայն այս տարբերակը ընդհանրապես հաշվի չի առնում ոչ հստակ թվի տեսքը, կամ կրիչի լայնությունը, և DF(.)-ը որևէ ձևով կախված չէ θ-ի արժեքից:
Մյուս տեսքը հիմնված է ոչ հստակ դիտարկումներից ոչ հստակ հավանականությունների անցնելու վրա: Դա կատարվում է հետևյալ ալգորիթմով:
Գնահատվում է $y_\alpha = \left[\min_{x \in x_\alpha} f(x|\theta)\ ;\ \max_{x \in x_\alpha} f(x|\theta)\right]$, որտեղ x_α-ն x դիտարկման α-կտրվածքն է: Այսինքն՝ յուրաքանչյուր մակարդակում գնահատվում են մաքսիմալ և մինիմալ հավանականությունները, որոնք դիտարկումը կունենար տվյալ θ-ի դեպքում: Եվ որպես ոչ հստակ թվի պատկանելության ֆունկցիա վերցվում է՝ $\eta(y) = \max\{\alpha | y \in y_\alpha\}$:
Արդեն որպես ճշմարտանմանության ֆունկցիա վերցվում է՝

$$l(\theta; x_1 ; \dots ; x_n) = \prod_i DF(\boldsymbol{y_i}) \tag{14}$$

Այս տարբերակը միգուցե չունի լուրջ առավելություններ, բայց այն հանդիսանում է դասական բայեսյան թեորեմի ընդհանրացում:
Երկրորդ ենթագլուխը նվիրված է ոչ հստակ պատահական մեծությունների երկու սահմանումների համարժեքությանը: Դա մասնավորապես պետք է (12)-ի համար նախնական անցումը ապահովելու համար:
Այսինքն՝ այս ենթագլխում գտնված է պայմանների խումբ, որոնք բավարարվելու դեպքում կարելի է անցում կատարել ոչ հստակ դիտարկումներից ոչ հստակ խտության ֆունկցիաների (կամ ոչ հստակ հավանականություններին):
Անցման ձևը կարող է միակը չլինել, բայց վերը նշված եղանակով անցում հնարավոր է. երբ բավարարվում են թեորեմի բոլոր պայմանները: Պայմանները միգուցե ավելի խիստ են քան անհրաժեշտ է:
<u>Թեորեմ</u> Երկու սահմանումներով պատահական մեծությունները համարժեք են, եթե առաջին սահմանման պատահական մեծությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

1). $\forall x$ -ի համար, որի համար գոյություն ունի $\exists \omega_1 ; \omega_2$, այնպիսին որ $x \in \widetilde{X}(\omega_1), x \in \widetilde{X}(\omega_2)$, և այնպիսին որ $P(\omega_1) \neq P(\omega_2)$, $\forall p \in \big(\min\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big) ; \max\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big)\big)$ համար $\exists \omega$, այնպիսին որ $P(\omega) = p$ և $x \in \widetilde{X}(\omega)$:
2). $\forall x$ -ի համար, որի համար $\exists \omega_1 ; \omega_2$, այնպիսին որ $\xi_{\widetilde{X}(\omega_1)}(x) = \xi_{\widetilde{X}(\omega_2)}(x) > 0$, $P(\omega_1) \neq P(\omega_2)$, $\forall \omega$ համար, որի համար ճիշտ է $P(\omega) \in \big(\min\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big) ; \max\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big)\big)$, տեղի ունի $\xi_{\widetilde{X}(\omega)}(x) \geq \xi_{\widetilde{X}(\omega_1)}(x)$, և քանի դեռ $\xi_{\widetilde{X}(\omega_1)}(x) \neq 1$, $\exists \omega_0$; $P(\omega_0) \in \big(\min\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big) ; \max\big(P(\omega_1), P(\omega_2)\big)\big)$; $\xi_{\widetilde{X}(\omega_0)}(x) > \xi_{\widetilde{X}(\omega_1)}(x)$:

3) $\forall x$ -ի համար, որի համար $\exists\omega$, $\xi_{\widetilde{X}(\omega)}(x) > 0$, $\exists\omega_0$ այնպիսին որ $\xi_{\widetilde{X}(\omega_0)}(x) = 1$:
4) Ավելին եթե $= \sup\{\xi_{\widetilde{X}(\omega)} | x \in \widetilde{X}(\omega),\ P(\omega) = p\} < 1$, ապա $\forall\beta > \alpha \quad \forall\alpha' \in (\alpha, \beta)$, համար $\exists p' \in \left(P(\omega), P(\omega_\beta)\right)$ այնպսիսին որ $\alpha' = \max\{\xi_{\widetilde{X}(\omega)} | x \in \widetilde{X}(\omega),\ P(\omega) = p'\}$

Երրորդ ենթագլուխը նվիրված ոչ հստակ պատահական մեծությունների թվային բնութագրիչներին:

Ցույց է տրված երկու հատկություն:

<u>Թեորեմ</u> Դիցուք ξ-ն պատահական մեծություն է, իսկ $\widetilde{B}$-ը որևէ ոչ հստակ թիվ, ապա $\widetilde{B}\xi$-ն ոչ հստակ պատահական մեծություն է, որի (6) սահմանումով տրվող մաթեմատիկական սպասումը՝ $E(\widetilde{B}\xi) = E(\xi)DF(\widetilde{B})$ ինչ-որ դեֆազիֆիկացիա համար:

<u>Թեորեմ</u> Դիցուք ξ-ն որևէ ոչ հստակ պատահական մեծություն է: Ընդ որում $s_{\widetilde{X}}(x,\alpha)$ և $s_{E(\widetilde{X})}(x,\alpha)$ սահմանափակ են ցանկացած ω-ի և (x,α)-ի համար, և $E(\widetilde{X})$ տրվում է (5) բանաձևով: Այդ դեպքում $\exists \overline{E}(\widetilde{X})$ այնպիսին որ

$$\int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(s_{\widetilde{X}}(x,\alpha) - s_{E(\widetilde{X})}(x,\alpha)\right)^2 dxd\alpha = \int_0^1 \int_{S^{m-1}} \left(s_{\widetilde{X}}(x,\alpha) - s_{\overline{E}(\widetilde{X})}(x,\alpha)\right)^2 dxd\alpha$$

Այսինքն՝ ոչ հստակ ձևով սահմանված մաթսպասումով վարիացիան կարելի է փոխարինել որևէ թվային մաթեմատիկական սպասումով և վարիացիայով:

Չորրորդ գլուխը նվիրված է ոչ հստակ ռեգրեսիաներում ոչ հստակ գործքակիցների գնահատականի կառուցմանը:

Այստեղ որդեգրվել է հետևյալ տրամաբանությունը: Ոչ հստակ գործակիցների գնահատական ստանալու համար, կարելի է անցում կատարել ցանկացած մակարդակի հենման ֆունկցիաների արժեքների՝ ըստ ուղղությունների: Յուրաքանչյուր ուղղության համար կատարել ռեգրեսիան, ստանալով փոքրագույն քառակուսիների գնահատականը, ստացված գնահատականների բոլոր ուղղությամբ արժեքները վերցնելով, վերականգնել գործակիցների α-մակարդակները: Սակայն այստեղ մի խնդիր է առաջանում: Փոքրագույն քառակուսիների գնահատականները բոլոր ուղղություններով հաշվելու դեպքում ստացված արդյունքը կարող է չլինել ուռուցիկ ըստ ուղղությունը ներկայացնող փոփոխականի: Անըդհատությունը հեշտ ապացուցվում է, իսկ ուռուցիկությունը ստանալու համար օգտագործվում է կոնվեքսիֆիկացիա (ուռուցիկացում):

Նախնական ռեգրեսիոն հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\tilde{Y} = \tilde{b}_1\tilde{X}_1 + \tilde{b}_2\tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{b}_n\tilde{X}_n + \mathcal{E}$$

Այստեղ $\widetilde{Y}$-ը բացատրվող փոփոխականի ոչ հստակ դիտարկումների վեկտորն է, $\widetilde{X}_i$-երը՝ համապատասխանաբար բացատրող փոփոխականների դիտարկումների վեկտորը: Ɛ-ը սխալների վեկտորն է:
Նախնական խնդրի դրվածքից անցնելով հենման ֆունկցիաների արժեքների կստացվի՝

$$\tilde{Y}_{\alpha,x} = \tilde{b}_{1,\alpha,x}\tilde{X}_{1,\alpha,x} + \tilde{b}_{2,\alpha,x}\tilde{X}_{2,\alpha,x} + \ldots + \tilde{b}_{n,\alpha,x}\tilde{X}_{n,\alpha,x} + \widetilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x} = \tilde{X}_{\alpha,x}\tilde{B}_{\alpha,x} + \widetilde{\mathcal{E}}_{\alpha,x} \qquad (15)$$

Որտեղ ինդեքսավորումով նշվել է վեկտորի յուրաքանչյուր կոմպոնենտի հենման ֆունկցիայի արժեքները (այսինքն՝ ստացվել է հենման ֆունկցիաների արժեքներից բաղկացած վեկտորներ):
Փոքրագույն քառակուսիների գնահտականը (15) ռեգրեսիայի համար կունենա հետևյալ տեսքը:

$$\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x} = (\tilde{X}_{\alpha,x}^T\tilde{X}_{\alpha,x})^{-1}\tilde{X}_{\alpha,x}^T\tilde{Y}_{\alpha,x}$$

Այն անընդհատ է ըստ x-ի , բայց կարող է ըստ x-ի ուռուցիկ չլինել:
Դրա համար վերցվում է այս ֆունկցիայի ուռուցիկացումը (ֆունկցիան չգերազանցող, ամենամոտ անընդհատ ուռուցիկ ֆունկցիան, որը ստացվում է հերթականությամբ փոխարինելով ոչ ուռուցիկ հատվածները հիպերհարթություններով:)
Այդ ձևով ստացված նոր գնահատականը նշանակում են՝

$$conv(\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x}) \qquad (16)$$

Վերջինիս համար ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը
<u>Թեորեմ</u> Դիցուք

1) $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\widetilde{X}_{\alpha,x}^T\widetilde{X}_{\alpha,x}\right) = Q_{\alpha,x}$, որտեղ $Q_{\alpha,x}$-ը որևէ k-չափանի շրջելի մատրից է հավասարաչափ սահմանափակ ըստ x-ի և α-ի:

2) $\widetilde{\mathcal{E}}_\alpha = (\tilde{\varepsilon}_{1\alpha}, \ldots, \tilde{\varepsilon}_{m\alpha}) \sim iidGF$ (սխալները անկախ և միատեսակ բաշխված գաուսյան դաշտեր են), որտեղ $\tilde{\varepsilon}_{i\alpha} = \{\tilde{\varepsilon}_{i,\alpha,}(x) | \, x \in S^{n-1}\}$: $\tilde{\varepsilon}_{i,\alpha,}(x)$-ը ըստ ուղղության դաշտի արժեքն է:

Այդ դեպքում

$$conv\left(\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x}\right)$$

գնահատականը ունակային է, ըստ հավանականության, համարյա բոլոր x-երի համար:
Խնդրին նման մոտեցումը հնարավորություն է տալիս է կառուցել նաև ընդհանրացված փոքրագույն քառակուսիների գնահատականի ուռուցիկացումից ստացվող գնահատականը, որի համար ևս ապացուցվում է նմանատիպ թեորեմ:

$$conv\left(\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x,GLS}\right) = conv\left(\left(\tilde{X}^T_{\alpha,x}\Omega_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x}\right)^{-1}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\Omega_{\alpha,x}\tilde{Y}_{\alpha,x}\right) \quad (17)$$

որտեղ Ω-ն որևէ դրական որոշված մատրից է:
Թեորեմ Դիցուք

1) $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{\alpha,x}\Omega_{\alpha,x}\tilde{X}_{\alpha,x}\right) = Q_{\alpha,x}$, որտեղ $Q_{\alpha,x}$-ը որևէ k-չափանի շրջելի մատրից է հավասարաչափ սահմանափակ ըստ x-ի և α-ի:

2) $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha = (\tilde{\varepsilon}_{1\alpha}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{m\alpha}) \sim GF$ (սխալները գաուսյան դաշտեր են), որտեղ $\tilde{\varepsilon}_{i\alpha} = \{\tilde{\varepsilon}_{i,\alpha,}(x) | x \in S^{n-1}\}$: $\tilde{\varepsilon}_{i,\alpha,}(x)$-ը ըստ ուղղության դաշտի արժեքն է, $\Omega_{\alpha,x}$-ն իրենց հենման ֆունկցիաների դաշտի կովարիացիոն ֆունկցիայի արժեքն է x-ուղղությամբ:

Այդ դեպքում

$$conv\left(\hat{\tilde{B}}_{\alpha.x,GLS}\right)$$

գնահատականը ունակային է, ըստ հավանականության, համարյա բոլոր x-երի համար:

Գրականություն

[1] Becker F., Gurtler M. ; "Quantitative Forecast Model for The Application of The Black-Litterman Approach" ; IF Working Paper Series, 2008, p 28. SSRN: https://ssrn.com/abstract=1483571

[2] Black F. , Litterman R. B. ; "Asset Allocation: Combining Investor Views With Market Equilibrium" ; The Journal of Fixed Income, Vol. 1, Issue 2, pp. 7-18, 1991

[3] Black F. , Litterman R. B. ; "Global Portfolio Optimization" ; Financial Analysts Journal, Vol. 48, Issue 5, pp. 28-43, 1992

[4] Cevizci A. ; "A Comparison of Optimal Performances of Three Optimization Methods"; International Journal of Commerce and Finance, Vol. 2, Issue 1, pp. 137-146, 2016

[5] Diamond Ph. ; "Fuzzy least squeares"; Information sciences, vol. 46, issue 3, pp. 141-157, 1988

[6] Diamond Ph. , Kloeden P. ; "*Metric Spaces of Fuzzy Sets:Theory and Applications*"; World Scientific, 1994

[7] Echaust K., Piasecki K.; “Black-Litterman Model with Inuitionistic Fuzzy Posterior Return”; The IEB International Journal of Finance,vol 15, pp. 8-19, 2017
[8] Fang Y., Lai K.K., Wang Sh. ; “*Fuzzy Portfolio Optimization: Theory and Methods*” ; 1st edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
[9] Gharakhani M., Sadjadi S.J.; “A Fuzzy Compromise Programming Approach for The Black-Litterman Portfolio Selection Model”; Decision Science Letters, Vol. 2, Issue 1, pp. 11-22, 2013
[10] Gupta P., Mehlawat K.M., Inuiguchi M., Chandra S. ; “*Fuzzy Portfolio Optimization: Advances in Hybrid Multi-criteria Methodologies*” ; 1st edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
[11] Harris R., Stoja E., Tan L. ; “The Dynamic Black-Litterman Approach to Asset Allocation” ; European Journal of Operational Research, Accepted Paper, December 2016, p. 35; SSRN: https://ssrn.com/abstract=2772561
[12] Lawrence K. D. ; Kleinman G. ; “A Fuzzy Programming Approach to Financial Portfolio Model” ; Emerald (MCB UP Book) , Vol. 10, pp. 53-59, 2009
[13] Markowitz H. ; “Portfolio Selection” ; The Journal of Finance , Vol. 7, Issue 1, pp. 77-99, 1952
[14] Viertl, R. ; “*Statistical Methods for Fuzzy Data*” ; Wiley, Chichester, 2011
[15] Zadeh L.A. ; “Fuzzy Sets” ; Information and Control, Vol. 8, Issue 3, pp. 338-353, 1965.

Ատենախոսության հիմնական դրույթները արտացոլվել են հեղինակի գիտական հրապարակումներում.

[I] Գևորգյան Ռ. Ա., Բարդախչյան Վ. Գ.; "Ոչ հստակ պատահական մեծությունների թվային բնութագրիչներ " ; Հայաստանի Ճարտարագիտական Ակադեմիայի Լրաբեր , Հատոր 14, համար 1, էջ 9-13, 2017
[II] Բարդախչյան Վ. Գ.; "Ոչ հստակ պատահական մեծությունների ոչ հստակ խտության ֆունկցիաներ" ; Հայաստանի Ճարտարագիտական Ակադեմիայի Լրաբեր , Հատոր 14, համար 2, էջ 207-210, 2017

[III] Бардахчян В.Г., Геворкян Р.А. ; "Нечёткая Оценка Наименьших Квадратов по Выпуклым Оболочкам α-уровней"; Известия НАН Армении, Математика , том 52, н. 2, стр. 78-84, 2017б.
[IV] Bardakhchyan V.G. ; "Fuzzy Bayesian Inferences" ; Proceedings of Yerevan State University, Mathematics, vol. 51, issue 1, pp. 8-12, 2017.

Заключение

Диссертация посвящена применениям теории нечётких множеств к построению портфелей ценных бумаг.

В диссертации рассмотрена задача построения портфелей ценных бумаг с помощью модели Блэка-Литтермана, при нечётких экспертных оценках прибыльности. В частности, для обеих подходов нахождение оценки Блэка-Литтермана – байесовском и регрессионном, рассмотрены нечёткие аналоги соответствующих методов.

Основные результаты связаны с нечёткими случайными величинами и их применениями в эконометрическом и байесовском подходах к решению задачи Блэк-Литтермана.

Получены следующие результаты.

- Показано что предложенная Виертлом форма нечёткой теоремы Байеса не является обобщением теоремы Байеса.
- Предложены два альтернативных варианта нечётких теорем Байеса, с помощью других форм функций правдоподобия.
- Доказано, что оператор математического ожидания, не только линейный относительно поля вещественных чисел, но также однородный, относитально пространства нечётких чисел.

- Доказано, что численная вариация нечёткой случайной величины можно определить с помощью численного значения математического ожидания данной нечёткой величины. (Изначальное определение даётся при помощи математического ожидания в форме нечёткого числа.)
- Найдено условие, при котором одно определение нечёткой случайной величины равносильно другому определению. Также описан метод перехода к нечётким функциям плотности.
- Получен способ построения состоятельной оценки для регрессий с нечёткими переменными, с помощью регрессий опорных функций α–уровней нечётких наблюдений, когда ошибки независимые и одинаково распределённые гауссовские поля, или их выпуклые оболочки
- Дано обобщение оценки наименьших квадратов в случае нечётких регрессий, при условии, что ошибки являются гауссовскими полями, или их выпуклыми оболочками.

Resume

Dissertation is devoted to the applications of fuzzy set theory to the financial portfolio construction theory.

Portfolio construction with Black-Litterman model is considered when expert opinions about future rates are fuzzy random variables. Particularly for both approaches in the theory of Black-Litterman portfolios – Bayesian and econometric, the fuzzy analogs of main methods are considered.

Main results of the dissertation are connected with fuzzy random variables and their application to the two approaches in Black-Litterman portfolio construction.

The following results are obtained.

- It is shown that Viertl's fuzzy Bayesian theorem is not generalization of classical Bayesian theorem
- Two other forms of likelihood function are incorporated in the fuzzy case of Bayesian theorem, which resolves the problem for the crisp quantities.
- It is proved that expectation operator is not only linear with respect to real numbers but also is homogeneous of first order with respect to fuzzy numbers.
- It is shown that crisp variance of fuzzy random variable, that is defined by means of the distance between the fuzzy output and the fuzzy mathematical expectation, has its equivalent with the same distance with crisp mathematical expectation.
- The sufficient conditions are found for which to definitions of fuzzy random variables can be made equivalent. And the transformation is given for which the fuzzy density functions can be found explicitly.
- The consistent estimator is found for the fuzzy regressions, constructed by the means of least squares estimators of support functions of α-levels of fuzzy

observations, when the error are independent and identically distributed Gaussian fields, or convex hulls of independent and identically distributed Gaussian fields.

- The generalization of least squares estimator is given for fuzzy regressions, when error are Gaussian fields, or convex hulls of Gaussian fields.