ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ռաֆիկ Աղասու Խաչատրյան

Վրանների մեթոդը բազմարժեք արտապատկերումների տեսությունում և օպտիմիզացիայի ոչ ողորկ խնդիրներում

Ա 01.01 «Մաթեմատիկական անալիզ» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան - 2017

Ереванский государственный университет

Хачатрян Рафик Агасиевич

Метод шатров в теории многозначных отображений и в негладких задачах оптимизации

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности
01.01.01-«Математический анализ»

Ереван - 2017

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ա.Դ. Իոֆե
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Մ.Վ. Բալաշով
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ա.Ա. Սահակյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Ժողովուրդների բարեկամության ռուսական համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2017 թ մայիսի 19-ին, ժամը 15^{00}- ին ԵՊՀ-ում գործող ՀՀ ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:
Սեղմագիրը առաքված է 1017թ մարտի 17-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Официальные оппоненты:

доктор физ.- мат. наук А.Д. Иоффе
доктор физ.- мат. наук М.В. Балашов
доктор физ.- мат. наук А.А. Саакян

Ведущая организация: Российский университет дружбы народов (РУДН)

Защита диссертации состоится 19 мая 2017 г. в 15^{00} часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета 050 ВАК РА, по адресу: 0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан 17 марта 2017 г.

Ученый секретарь специализированного совета Т.Н. Арутюнян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.Теория многозначных отображений – интенсивно развиваемая область математики, находящая многочисленные приложения в теории оптимизации, негладком и выпуклом анализе, теории игр, математической экономике, управляемых системах и других разделах современной математики. В последнее время многозначные отображения все чаще становятся объектом исследования математиков. Различные классы многозначных отображений были рассмотрены многими авторами. В результате этих исследований методом выпуклого анализа были введены различные характеристики многозначных отображений: селекторы, производные и т.п. Одной из важных проблем в теории многозначных отображений является вопрос существования однозначных аппроксимаций и селекций с определенными свойствами. Вопрос существования селекций, обладающих некоторыми топологическими свойствами, весьма интересен и находит разнообразные приложения во многих областях математики. В частности в задачах существования решений дифференциальных включений и в теории управления, когда область управления зависит от времени и от фазовых координат, принципиальное значение имеет вопрос существования непрерывных, липшицевых и гладких селекций от многозначных отображений с невыпуклыми значениями. Следовательно, задача выделения таких селекций от многозначных отображений несомненно является актуальной. Поэтому принципиально важно разработать единый метод исследования задач такого рода. Оказывается, что метод шатров является достаточно эффективным методом исследования таких проблем. Метод шатров, разработанный В.Г. Болтянским [3-4], является единым методом решения экстремальных задач. Он применял его для обоснования принципа Лагранжа в гладких экстремальных задачах и принципа максимума в теории оптимального управления. В работах Ф. Кларка [8] и А. Иоффе [20] с использованием вариационного принципа доказано правило множителей Лагранжа в негладких задачах с ограничениями типа равенства. Однако существуют многочисленные примеры, которые показывают, что этим необходимым условиям удовлетворяют не только оптимальные точки, но и точки, которые заведомо не являются оптимальными. Поэтому при исследовании экстремальных задач актуальными являются следующие два аспекта: широкое использование техники выпуклого анализа для невыпуклых задач и учет негладких ограничений типа равенства.

Цель работы:

1) исследовать вопрос непрерывности многозначных отображений со звездными значениями и графиками. Изучить вопрос непрерывности пересечения отображений со звездными значениями;

2) рассмотреть вопрос существования измеримых, непрерывных и гладких селекций для многозначных отображений со звездными значениями. Представить много-

значное отображение при помощи однозначных селекций;

3) построить шатры или конусы касательных направлений различной гладкости для звездных множеств и множеств, задаваемых с негладкими ограничениями типа равенств и неравенств; доказать теоремы о пересечении шатров;

4) методом шатров ввести понятие производной многозначных отображений. Описать эти многозначные производные через однозначные селекции исходного отображения;

5) применить метод шатров в негладких задачах оптимизации и получить необходимые условия экстремума в задачах с ограничениями типа равенств и неравенств, включая и нефункциональные ограничения;

6) получить необходимые условия экстремума в терминах асимптотических субдифференциалов;

7) получить необходимые условия экстремума в экстремальных задачах, где участвуют не локально липшицевые функции.

Общая методика исследования. Общий метод исследования базируется на результатах выпуклого анализа. Теоремы о неявных функциях и теорема Брауера о неподвижной точке относятся к тем немногим методам, которыми мы располагаем при изучении вопроса существования непрерывных и липшицевых локальных селекций многозначных отображений. Методом шатров изучен вопрос существования производной многозначной функции.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Среди них следует отметить теоремы, которые описывают непрерывные и липшицевые свойства многозначных отображений со звездными графиками и значениями. Отметим также теоремы о непрерывных шатрах и о пересечении регулярных конусов касательных направлений для множеств, задаваемых с негладкими ограничениями типа равенств. Новыми являются необходимые условия в терминах асимптотических субдифференциалов и правило множителей Лагранжа в задачах, где участвуют не локально липшицевые функции.

Практическая значимость. Полученные в диссертации результаты могут быть применены при исследовании как гладких, так и негладких параметризованных экстремальных задач, а также в задачах, требующих изучение свойств многозначных отображений в теории игр и в дифференциальных включениях. Результаты первой главы (теорема о представлении звездных множеств при помощи относительно крайних точек, теоремы отделимости звездных тел, теоремы о непрерывном изменении объемов звездных тел и т.п.) с успехом можно применить к задачам выпуклого анализа. Параграф 4.6 главы 4 посвящен вопросам применения полученных результатов в задачах математической экономики.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры численного анализа и математиеского моделирования ЕГУ, на общем семинаре факультета информатики и прикладной математики ЕГУ, на семинарах факультета математики и механики, на международных конференциях [26*-32*], на XIV Всероссийской конференции по математическому программированию и приложениям (Екатеринбург, 28 февраль - 4 март, 2011 г.) и на ежегодных заседаниях армянского математического общества (2014 г., 2016 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 24 научные статьи, монография и тезисы, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка использованной литературы, содержащего 150 наименований. Объем - 201 страница.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении диссертации обоснована актуальность темы, определены цели и задачи работы, указаны объект и методы исследования, обозначена научная новизна полученных результатов и их практическая значимость, приведены сведения об апробации полученных результатов, о публикациях, структуре и объеме работы.

В первой главе приведены предварительные сведения, обзор литературы по теме диссертации и основные результаты диссертации. Приведены необходимые определения и обозначения из выпуклого и нелинейного анализа [1, 11, 14, 16, 18].
Пусть $X, Y-$ банаховы пространства.
$B_r(x)-$ замкнутый шар радиуса r с центром в точке x. $cl\{M\}-$ замыкание множества M. Положим

$$con(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x = \lambda x_1,\ x_1 \in M,\ \lambda > 0\},$$

$$LinM = cl\{conM - conM\}.$$

$A \stackrel{\bullet}{-} B \equiv \{x \in R^n / M_2 + x \subseteq M_1\}-$ геометрическая разность множеств A и B.

$< x^*, x > -$ значение линейного функционала x^* из сопряженного пространства X^* на элементе $x \in X$.
Если $a\colon X \to 2^Y-$ многозначное отображение, то

$$graf(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y)/\ y \in a(x)\},\ dom(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{x/\ a(x) \neq \emptyset\}.$$

Пусть на множестве $M \subseteq X$ определена выпуклая функция $f(x)$. Субдифференциалом функции f в точке $x_0 \in M$ называется множество

$$\partial f(x_0) \equiv \{x^* \in X^* / f(x) - f(x_0) \geq < x^*, x - x_0 > \ \forall x \in M\}.$$

Функция $g: R^n \to R$ называется строго дифференцируемой в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность V точки x_0, что

$$| g(y) - g(z) - < g'(x_0), y - z > | \leq \varepsilon \|y - z\| \ \ \forall y, z \in V,$$

где $g'(x_0)-$ градиент функции g в точке x_0.

Приведем также определения некоторых известных в литературе обобщенных производных по направлениям и субдифференциалов, в терминах которых описываются различные конусы касательных направлений для множеств, задаваемые при помощи негладких функций.

Обобщенная производная Мишеля- Пено функции f по направлению $\overline{x}$, обозначаемая $f'_{MP}(x_0, \overline{x})$, определяется так:

$$f'_{MP}(x_0, \overline{x}) = \sup_{w \in X} \{\limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda(\overline{x} + w)) - f(x_0 + \lambda w)}{\lambda}\}.$$

Субдифференциалом Мишеля-Пено для локально липшицевой функции f в точке x_0 называется множество

$$\partial_{MP} f(x_0) = \{x^* \in X^* / f'_{MP}(x_0, \overline{x}) \geq < x^*, \overline{x} > \ \ \forall \overline{x} \in X\}.$$

Пусть $M^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M / \ \forall y \in M, \ \ \lambda x + (1 - \lambda) y \in M, \ \ \forall \lambda \in [0, 1]\}$. Подмножество $M^0 \subseteq M$ называется ядром звездности множества M. Если $M^0 \neq \emptyset$, то множество M называется звездным. Звездное множество M называется звездным телом, если $int\ M^0 \neq \emptyset$.

В дальнейшем, если $a \colon X \to 2^Y$, то $a_0 \colon X \to 2^Y, \ a_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} (a(x))^0$.

Однозначное отображение $y: X \to Y$ называется селекцией многозначного отображения a, если $y(x) \in a(x)\ \forall x \in dom(a)$.

Однозначное отображение $y: X \to Y$ называется локальной селекцией многозначного отображения $a: X \to 2^Y$, проходящей через точку $(x_0, y_0) \in graf(a)$ графика, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что

$$y(x_0) = y_0 \text{ и } y(x) \in a(x)\ \forall x \in dom(a) \bigcap U(x_0).$$

Многозначное отображение $a: X \to 2^X$ называется непрерывным в метрике Хаусдорфа в точке $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что

$$H(a(x), a(x_0)) < \varepsilon\ \forall x \in B_\delta(x_0).$$

Здесь $H(A, B)$- Хаусдорфово расстояние между множествами A и B.

Отображение $a: X \to 2^Y$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $E \subseteq X$, если существует такое число $L \geq 0$, что

$$a(x_1) \subseteq a(x_2) + L\|x_1 - x_2\| B_1(0)\ \forall x_1, x_2 \in E.$$

Нижним касательным конусом ко множеству M в точке $x_0 \in cl\{M\}$ называется множество вида

$$T_M(x_0) \equiv \{\overline{x} \in X/ \lim_{\lambda \downarrow 0} d(\overline{x}, \lambda^{-1}(M - x_0)) = 0\}.$$

Конус $K \subseteq T_M(x_0)$ называется шатром в точке $x_0 \in M$, если существует отображение r, определенное в некоторой окрестности U нуля, такое, что

$$x_0 + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M, \text{ если } \overline{x} \in K \bigcap U \text{ и}$$

$$\frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0 \text{ при } \overline{x} \to 0.$$

Шатер K называется непрерывным (липшицевым), если r непрерывно (липшицево). Шатер K называется строго дифференцируемым, если r строго дифференцируемо в нуле, т.е. для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что $\|r(\overline{x_1}) - r(\overline{x_2})\| < \varepsilon \|\overline{x_1} - \overline{x_2}\|$ для $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in B_\delta(0) \subseteq U$.

Шатер называется компактным, если образ любого замкнутого ограниченного множества при отображении r является компакным множеством. Пусть $f : R^n \to R-$ локально липшицевая функция и $M = epi(f) \equiv \{(\alpha, x) \in R^{n+1}/\alpha \geq f(x) \}$. Пусть $K \subseteq T_M(x_0, f(x_0))-$ выпуклый замкнутый конус, а $f'_K(x_0, \overline{x})-$ положительно однородная выпуклая функция, надграфиком которой является конус K.

Функция $f'_K(x_0, \overline{x})$ называется обобщенной K- производной функции f в точке x_0 по направлениям, а K -субдифференциалом функции f в точке x_0 называется множество

$$\partial_K f(x_0) \equiv \{x^* \in R^n / f'_K(x_0, \overline{x}) \geq < x^*, \overline{x} > \quad \forall \overline{x} \in R^n\}.$$

Если $K = T_M(x_0, f(x_0)) \stackrel{\bullet}{-} T_M(x_0, f(x_0))$, то обозначим

$$f'_K(x_0, \overline{x}) = f'_{AL}(x_0, \overline{x}).$$

Тогда $\partial_K f(x_0)$ называется нижним асимптотическим субдифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается через $\partial_{AL} f(x_0)$ (см.[11]). В [11, стр. 334] показано, что

$$\partial_{AL} f(x) \subseteq \partial_{MP} f(x) \subseteq \partial_C f(x),$$

где $\partial_C f(x)-$ субдифференциал Кларка [8].

Во второй главе диссертации рассматривается новый класс многозначных отображений – отображения со звездными значениями и графиками. Сначала введено понятие относительно крайней точки звездных множеств. Звездное множество представляется через эти точки. Для любой точки $x_0 \in M$ положим

$$L(x_0, M^0) \equiv cl\{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(x_0 - M^0)\}.$$

Определение 2.1.1. Точка x_0 называется крайней точкой относительно M^0, если $(x_0+L(x_0,M^0))\bigcap M=\{x_0\}$. Геометрически это означает, что конус $x_0+L(x_0,M^0)$ опирает множество M с внешней стороны в точке x_0.

Верны следующие результаты.

Теорема 2.1.1. Пусть $M\subset X-$ звездное компактное подмножество банахова пространства X, $K_x=\bigcup_{y\in M^0}[x,y]$. Тогда если Q множество крайних точек M относительно M^0, то $M=\bigcup_{x\in Q}K_x$.

Теорема 2.1.2. Пусть $M\subset R^n-$ компактное звездное множество. Если из некоторой точки $y_0\in M$ видны все крайние точки множества M относительно M^0, то $y_0\in M^0$.

Обсуждается связь звездных множеств и липшицевых функций. Верны следующие результаты.

Предложение 2.1.4. Пусть $f(x)-$ липшицевая функция на замкнутом шаре $B_\varepsilon(x_0)$, $x_0\in X$. Тогда $M\overset{\mathrm{def}}{=}epi(f)=\{(\mu,\ x)/\ \mu\geq f(x),\ x\in B_\varepsilon(x_0)\}$ является звездным множеством.

Теорема 2.1.3. Пусть $f(x)$, $x\in R^n-$ непрерывная функция, определенная в некоторой окрестности U точки x_0. Предположим также, что существует такое число $\overline{\mu}$, что $(\overline{\mu},x)\in M^0\equiv(epi(f))^0$, $x\in U$. Тогда f липшицева в некоторой окрестности $V\subseteq U$ точки x_0.

Рассматривается вопрос непрерывности пересечения непрерывных многозначных отображений со звездными значениями. Верна следующая теорема.

Теорема 2.3.1. Пусть $a:R^n\to 2^{R^m}$ и $b:R^n\to 2^{R^m}-$многозначные отображения со звездными и компактными значениями. Пусть отображения a, a_0 и b, b_0 непрерывны в точке x_0 и

$$0\subseteq int\ (a_0(x_0)-b_0(x_0)).$$

Тогда отображение $c(x)\equiv a(x)\bigcap b(x)$ непрерывно в x_0.

Изучен вопрос непрерывности отображения a_0. Доказаны следующие результаты.

Лемма 2.4.1. Пусть отображение $a:X\to 2^Y$ со звездными компактными значениями непрерывно. Тогда отображение $a_0:X\to 2^Y$ полунепрерывно сверху.

Следствие 2.4.1. Пусть $X-$ полное метрическое пространство, $Y-$ компактное метрическое пространство и отображение $a:X\to 2^Y$ со звездными компактными значениями непрерывно. Тогда внутренность точек, где a_0 не непрерывно, пуста.

Для мультиотображений со звездными значениями рассматривается вопрос аппроксимации измеримых селекций в смысле сходимости почти всюду последовательностью непрерывных селекций. А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 2.4.2. Пусть $X-$ компактное метрическое пространство, отображения $a:X\to 2^{R^m}$ и $a_0:X\to 2^{R^m}$ полунепрерывны снизу. Пусть, кроме того, множества $a(x)$ компактны и $int\ a_0(x)\neq\emptyset$. Тогда, если $m(x)-$ измеримая ограниченная селекция отображения a, то существует последовательность $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ непрерывных селекций отображения a, сходящаяся почти всюду к $m(x)$.

Доказан результат аналогично известной теореме Кастена о представлении измеримых замкнутозначных отображений. Однако здесь замкнутость значений не предполагается.

Доказываются также теоремы о существовании непрерывных селекций для непрерывных многозначных отображений со звездными замкнутыми значениями, представляющие собой варианты теоремы Майкла [19].

Определение 2.5.1[15]. Множество $M \subseteq R^n$ удовлетворяет условию выпуклости с константой θ, если для любых $y_j \in M, \lambda_j \geq 0, j \in J$, где $J-$ конечное множество таких индексов, что $\sum_{j\in J} \lambda_j = 1$, выполняется $\sum_{j\in J} \lambda_j y_j \in M + \theta r^2 B_1(0)$, где $r = \max_{i,j\in J} \|y_i - y_j\|$.

Верна следующая теорема.

Теорема 2.5.1. Пусть $X-$ компактное метрическое пространство, а отображение $a : X \to 2^{R^m}$ непрерывно, причем для любого x множество $a(x)$ удовлетворяет условию выпуклости с константой $\theta(x)$ и $int\, a(x) \neq \emptyset$. Допустим также, что

$$\eta = \sup_{x\in X} \theta(x) < \infty, \;\; d(x) \leq \frac{1}{4\theta(x)}, \;\; \text{где } d(x) - \text{ диаметр множества } \; a(x).$$

Тогда отображение a допускает непрерывную селекцию.

Предложение 2.5.1. Пусть отображение $a : X \to 2^{R^m}$ непрерывно. Пусть далее множества $a(x)$ компактны, звездны и удовлетворяют условию выпуклости с некоторой константой $\theta(x)$. Предположим, что для каждого x $int\ a_0(x) \neq \emptyset$ и $\eta = \sup_{x\in X} \theta(x) < \infty$. Тогда отображение a_0 непрерывно.

Предложение 2.6.1. Пусть $a : R^n \to 2^{R^m}-$ многозначное отображение с компактными звездными значениями и такое, что для любого x $int\, a_0(x) \neq \emptyset$. Предположим таже, что отображения a и a_0 непрерывны. Тогда для любого $(x_0, y_0) \in graf(a)$ существует такое непрерывное отображение $y(x)$, что $y(x) \in a(x)$ $\forall x \in R^n$ и $y(x_0) = y_0$.

Многозначное отображение со звездными значениями представляется при помощи гладких селекций. Верна следующая теорема:

Теорема 2.6.1. Пусть

1. $E-$ ограниченная замкнутая область из R^m, а отображение $a : E \to 2^{R^n}$ со звездными замкнутыми значениями полунепрерывно снизу на E.
2. Отображение $a_0 : E \to 2^{R^n}$ полунепрерывно снизу.
3. Для каждого $x \in E$ множество $inta_0(x)$ непусто.
4. $M-$ такое звездное замкнутое множество, что $inta_0(x) \bigcap M^0 \neq \emptyset \; \forall x \in E$.

Тогда существует счетное число гладких $\{y_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ селекций отображения a таких, что

$$a(x)\bigcap M = cl\{\bigcup_{i=1}^{\infty} y_i(x)\}\ \forall x \in E.$$

Рассматривается свойство липшицевости отображения со звездным графиком.

Рассматривается вопрос существования липшицевых селекций многозначных отображений со звездными значениями. Этот вопрос важен в проблемах существования решений дифференциальных включений. Верна следующая теорема.

Теорема 2.7.1. Пусть

1. $a : R^n \to 2^{R^m}-$ многозначное отображение со звездными замкнутыми значениями липшицево на компактном множестве E.

2. Существует полунепрерывное снизу многозначное отображение $\tilde{a}$ с выпуклыми замкнутыми значениями такое, что

$$int\tilde{a}(x) \neq \emptyset,\ \tilde{a}(x) \subseteq a_0(x)\ \forall x \in E.$$

Тогда для каждого $(x_0, y_0) \in graf(a), x_0 \in E$ существует липшицево отображение $y(x)$, определенное на E такое, что

$$y(x_0) = y_0,\ y(x) \in a(x)\ \forall x \in E.$$

Рассматривается вопрос непрерывности отображений со звездными графиками.

Пусть $a\colon R^n \to 2^{R^m}-$ многозначное отображение. Обозначим через a^0 отображение графиком которого является множество $(graf(a))^0$. Верна следующая теорема.

Теорема 2.9.1. Пусть $a\colon R^n \to 2^{R^m}-$ многозначное отображение со звездным и замкнутым графиком. Тогда оно полунепрерывно снизу в любой точке $x_0 \in int\ dom(a^0)$.

Кроме того, если в некоторой точке $x_0 \in dom(a^0)$ множество $a(x_0)$ ограничено, то a удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки x_0.

Введено понятие отделимости для двух звездных множеств.

Определение 2.10.1. Пусть множества $M_1,\ M_2 \subseteq X$, такие, что $M_1 \bigcap M_2 \neq \emptyset$. Они отделимы, если существуют вектор w и число $\delta > 0$ такие, что

$$(M_1 + \alpha w)\bigcap M_2 = \emptyset \text{ для всех } \ \alpha \in (0, \delta).$$

Доказано, что если два звездных множества находятся в экстремальном положении, то можно сдвинуть одно из этих множеств по направлению некоторого *фиксированного* вектора сколь угодно достаточно мало, что пересечение полученных множеств станет пустым. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 2.10.2. Пусть M_1, M_2- звездные подмножества пространства R^n, причем M_1 является телом и $intM_1 \bigcap M_2 = \emptyset$. Тогда они отделимы.

Теорема 2.10.3. Пусть M_1, M_2- такие два замкнутых звездных множества из R^n, что $M_1 \bigcap M_2 = \emptyset$. Тогда существует такая пара непустых дополняющих друг друга звездных множеств $A_1,\ A_2$ таких, что $M_1 \subseteq A_1,\ M_2 \subseteq A_2$ и $M_1^0 \subseteq A_1^0,\ M_2^0 \subseteq A_2^0$.

В третьей главе диссертации изложены некоторые вопросы устойчивости в параметризованных задачах оптимизации.

Нередко при рассмотрении практических задач, математическими моделями которых являются задачи математического программирования, исходная информация носит приближенный характер. В таких случаях существенно следующее: зависят ли непрерывно оптимальные решения этих задач от исходных данных, иначе, будут ли искомые решения устойчивыми по отношению к возмущениям входных данных. Кроме этого, на практике при численном решении этих задач оптимальные решения определяются с некоторой точностью. Поэтому, естественно было бы рассматривать вопрос устойчивости не самого оптимального решения, а рассматривать этот вопрос для так называемых ε- оптимальных решений:

$$a_\varepsilon^M(x) = \{y \in M : f(x,y) \le \min_{y\in M} f(x,y) + \varepsilon\}.$$

Заметим, что в литературе (см. например, [9,12,14]) в основном исследовался вопрос непрерывности маргинальной функции $V(x) \equiv inf_{y\in M} f(x,y)$ и отображения $a_\epsilon^M(x)$ при $\epsilon = 0$. Оказывается, что при довольно общих и естественных предположениях (например, если f непрерывна по совокупности переменных, а M компактно, (см. [13], Предложение 23, гл. 3, п.1, стр.125) функция V будет непрерывной, а отображение a_0 полунепрерывным сверху и, вообще говоря, не является непрерывным. Однако, если дополнительно предположить выпуклость функции $f(x,y)$ по переменной y и звездность множества M, то в тех точках x_0, где $V(x_0) = f(x_0, y_0),\ y_0 \in M^0$ отображение $a_\epsilon(x)$ при $\epsilon > 0$ будет непрерывным.

Теорема 3.1.1. Пусть $f(x,y)$ непрерывна по $x \in R^n$ и выпукла по $y \in R^n$ и $M \subseteq R^m-$ звездное компактное множество. Предположим, что для некоторого x_0 существует такая точка $\overline{y} \in M^0$, что

$$\min_{y\in M} f(x_0, y) = f(x_0, \overline{y}).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ многозначное отображение $a_\varepsilon^M(x)$ непрерывно в точке x_0.

В этой главе рассматривается вопрос аппроксимации множества $a_\epsilon^M(x)$ сеточными множествами. Пусть $h_j \to +0$. Построим такие конечные M_{h_j} сетки на компакте M, что расстояние между любой точкой $y \in M$ и ближащей к ней точкой сетки M_{h_j} будет меньше h_j.

Пусть

$$\overline{M_{h_1}} = M_{h_1},\ \overline{M_{h_2}} = \overline{M_{h_1}} \bigcup M_{h_2},\ \ldots, \overline{M_{h_j}} = \overline{M_{h_{j-1}}} \bigcup M_{h_{j-1}}, \ldots,$$

Положим

$$V_j(x) \equiv \min_{y\in\overline{M_{h_j}}} f(x,y),\ a_\epsilon^{M_{h_j}}(x) \equiv \{y \in \overline{M_{h_j}} / f(x,y) \leq V_j(x) + \epsilon\}.$$

Теорема 3.2.1. Пусть выполнены предположения теоремы 3.1.1 и $x_j \to x_0$. Тогда в метрике Хаусдорфа $a_\epsilon^{M_{h_j}}(x_j) \to a_\epsilon^M(x_0)$.

В параграфе 3.3 оценивается хаусдорфово расстояние между ε- оптимальными точками функций Тихонова в некорректных задачах математического программирования.

Остановимся на одном аспекте задач минимизации функции f на множестве M.

Положим $\beta = \inf_{x\in M} f(x)$, и обозначим через A множество решений задачи, т.е. $A = \{x \in M:\ \ \beta = f(x)\}$. Предположим, что $f-$ выпуклая замкнутая функция, определенная на выпуклом замкнутом и ограниченном подмножестве M гильбертова пространства X. Тогда множество A непусто. В тех случаях, когда множество A состоит более чем из одной точки, можно поставить задачу об отыскании наилучшей в некотором смысле точки этого множества. Например, можно поставить задачу определения точки $x^* \in A$, ближайшей к некоторой фиксированной точке $x_0 \in X$. Отметим, что такой вопрос рассматривается, например, в задачах оперативного планирования, где x^* является оптимальным планом, элемент x_0 характеризует план предшествующего периода, существенное отклонение от которого может быть связано с организационными и технологическими перестройками и, следовательно, сопряжено с дополнительными затратами. Пусть $x_0 \in X-$ некоторая фиксированная точка. Точку $x^* \in A$ назовем нормальным решением задачи минимизации , если $\min_{x\in A} \|x - x_0\| = \|x^* - x_0\|$. Следует подчеркнуть, что задача определения нормального решения весьма осложняется тем, что множество A задано неявно, и оно лишь в редких случаях может быть точно и конструктивно описано. Одним из эффективных средств определения нормального решения является метод регуляризации, разработанный А. Н. Тихоновым. Для положительного $\alpha > 0$ положим

$$T(\alpha, x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(y) + \alpha\|x - y\|^2, \text{ где } y \in M,\ x \in X.$$

$T(\alpha, x, y)$ называется функцией Тихонова. Известно, что если последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $\{x_k\}$, $\{\alpha_k\}$ таковы, что $\varepsilon_k \to 0$, $x_k \to x_0$, $\alpha_k = \sqrt{\varepsilon_k}$, то последовательность $\{u_k\}$, определяемая из условий

$$\inf_{y\in M} T(\alpha_k, x_k, y) \leq T(\alpha_k, x_k, u_k) \leq \inf_{y\in M} T(\alpha_k, x_k, y) + \varepsilon_k$$

сходится к нормальному решению.

Пусть $V_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y\in M} T(\sqrt{\varepsilon}, x, y)$.

Определение 3.3.3. Множество $a^T_\varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} \{y \in M/\ f(y) + \sqrt{\varepsilon}\|x-y\|^2 \leq V_\varepsilon(x) + \varepsilon\}$ называется множеством ε- нормальных решений.

Показано, что задача определения ε- нормального решения является устойчивой задачей. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 3.3.1. Многозначное отображение a^T_ε удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x_0: существуют такие числа $L > 0$ и $\delta > 0$, что

$$H(a^T_\varepsilon(x_1), a^T_\varepsilon(x_2)) \leq \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1,\ x_2 \in B_\delta(x_0).$$

В четвертой главе диссертации строятся касательные конусы и шатры различной гладкости ко звездным множествам и множествам, задаваемых с негладкими ограничениями типа равенств и неравенств. Показано, что нижний конус касательных направлений в некоторых точках звездного множества является шатром, и доказана теорема о пересечении шатров для таких типов конусов. Особенность этих теорем состоит в том, что конусы, в общем случае, невыпуклые. Для множеств вида

$$M_1 = \{x \in R^n/g(x) = 0\}, \ \text{ и } M_2 = \{x \in R^n/f_i(x) \leq 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, p\}$$

построены строго дифференцируемые шатры при предположении, что функции $g, f_i, i = 1, 2, \ldots, p$ строго дифференцируемы. Следует отметить, что если g выпукла (в общем случае недифференцируема), то удается построить подпространство, которое является строго дифференцируемым шатром ко множеству M_1.

Доказано, что нижний касательный конус $T_M(x)$ для звездных множеств является шатром. Верны следующие теоремы.

Теорема 4.1.2. Пусть $M \subseteq R^n-$ звездное тело и $x \in M^0$. Тогда конус $T_M(x)$ является шатром для M в точке x.

Теорема 4.1.3. Пусть

1. $M_1 \subseteq R^n-$ выпуклое замкнутое множество, $M_2 \subseteq R^n-$ замкнутое звездное тело,
2. $M_1 \bigcap int\, M_2^0 \neq \emptyset$ и $x_0 \in M_1 \bigcap M_2^0$.

Тогда конус $T_{M_1}(x_0) \bigcap T_{M_2}(x_0)$ является шатром для множества $M_1 \bigcap M_2$ в точке x_0.

Теорема 4.2.2. Пусть $\Omega = \{x \in R^n/g_i(x) \leq 0, i \in I\}$, где $I-$ конечное множество индексов, функции $g_i(x)$ строго дифференцируемы в точке $x_0 \in \Omega$. Предположим, что существует такой вектор $w, \|w\| = 1$, что $< g_i'(x_0), w >< 0,\ \forall i \in I(x_0)$, где $I(x_0) = \{i \in I/g_i(x_0) = 0\}$.

Тогда конус $K_\Omega(x_0) = \{\overline{x} \in R^n/ < g_i'(x_0), \overline{x} >\leq 0,\ i \in I(x_0)\}$ является строго дифференцируемым шатром для Ω в x_0.

Построены строго дифференцируемые шатры для множеств, задаваемых негладкими ограничениями типа равенства.

Теорема 4.2.3. Пусть
1. $M \equiv \{x \in R^n / g(x) = 0,$ где $g(x)-$ выпуклая функция, определенная на R^n,
2. $x_0 \in M$ и $0 \notin \partial g(x_0)$.

Тогда подпространство $H \equiv \{\overline{x} \in R^n / g'(x_0, \overline{x}) \leq 0, \ g'(x_0, -\overline{x}) \leq 0\}$ является строго дифференцируемым шатром ко множеству M в точке x_0.

Для множества M_1 построено целое семейство выпуклых конусов, которые являются непрерывными шатрами. А именно: имеет место следующий результат.

Теорема 4.3.1. Пусть g выпукла и $x_0 \in M_1$, причем $0 \notin \partial g(x_0)$. Тогда для любого $x^* \in \partial g(x_0)$ конус

$$K_{M_1}(x_0) = \{\overline{x} \in R^n / g'(x_0, \overline{x}) \leq 0, \ < x^*, \overline{x} > \geq 0\}-$$

непрерывный шатер к M_1 в точке x_0.

Отметим, что этот результат играет ключевую роль в главе 6 при выводе новых необходимых условий экстремума с негладкими ограничениями типа равенства и условиях трансверсальности в задачах оптимального управления.

Пусть $g(x) = \max_{i \in I} f_i(x)$, где $I-$ конечное множество индексов и при фиксированном x_0 рассмотрим множество индексов $I(x_0) : \ I(x_0) \equiv \{i \in I : g(x_0) = f_i(x_0)\}$. Положим

$$g'_C(x_0, \overline{x}) \equiv \max_{x^* \in \partial_C g(x_0)} < x^*, \overline{x} >, \ \partial_C g(x_0) \equiv conv\{f'_i(x_0), \ i \in I(x_0)\}.$$

Теорема 4.3.2. Пусть $X-$ банахово пространство, а функции $f_i(x), \ i \in I$ непрерывно дифференцируемы и $x_0 \in X-$ такая точка, что

$$x_0 \in M \equiv \{x \in X : g(x) = 0\} \text{ и } 0 \notin \partial_C g(x_0).$$

Тогда подпространство $H \equiv \{\overline{x} \in X / g'_C(x_0, \overline{x}) \leq 0, \ g'_C(x_0, -\overline{x}) \leq 0\}$ является компактным шатром ко множеству M в точке x_0.

Показано, что конус Кларка (см. [8]) является липшицевым шатром для звездных множеств.

Теорема 4.3.4. Пусть $M \subseteq R^n-$ звездное тело. Тогда для любого $x_0 \in M$ конус $C_M(x_0)$ Кларка является липшицевым шатром для M в точке x_0.

Построены шатры, при ослабленных условиях гладкости. Верна следующая теорема.

Теорема 4.3.5. Пусть

1. $F(x_0) = 0, \ x_0 \in K$, где $K \subseteq R^n-$ выпуклый замкнутый конус,

2. $f_i, \ i = 1, 2, \ldots, k-$ дифференцируемые в точке x_0 функции и непрерывные в некоторой окрестности этой точки,

3. $F'(x_0)K = R^k$.

Тогда выпуклый конус $L \equiv K \cap KerF'(x_0)$ является **шатром** ко множеству $\Omega = \{x / F(x) = 0\} \cap K$ в точке x_0.

Одними из основных результатов этой главы являются теоремы о пересечении строго дифференцируемых шатров и непрерывных компактных шатров в бесконечномерном пространстве.

Теорема 4.4.2. Пусть выпуклые замкнутые конусы K_1, K_2 являются компактными шатрами для множеств Ω_1 и Ω_2 соответственно, в точке $x_0 \in \Omega_1 \bigcap \Omega_2$. Пусть $K_1 - K_2 = X$. Тогда конус $K_1 \bigcap K_2$ является шатром (вообще говоря, не непрерывным) ко множеству $\Omega_1 \bigcap \Omega_2$ в точке x_0.

В случае строго дифференцируемых шатров, показано, что их пересечение – строго дифференцируемый шатер.

Аналогичные результаты установлены и для регулярных касательных конусов.

В параграфе 4.6 доказаны следующие результаты.

Теорема 4.6.1. (Теорема о неявных функциях для многозначных отображений на конусе.) Пусть $a\colon R^n \times R^p \to 2^{R^n}-$ непрерывное отображение со звездными компактными значениями, такое, что $a(x,y) = \Lambda x + r(x,y)$, $\Lambda-$ $n \times n$ матрица и

$$\|r(x,y)\| \le \overline{r}(\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}), \quad \text{где } \overline{r}(\lambda) = o(\lambda).$$

Пусть $K \subseteq R^n$ такой выпуклый замкнутый конус, что $\Lambda K = R^n$. Тогда для достаточно малых y включение $0 \in a(x,y)$ разрешимо относительно y, причем существует такое решение $x(y) \in K$, что $x(y) = o(y)$.

Предложение 4.6.2. Пусть $a\colon R^n \to 2^{R^m}-$ отображение такое, что $a(x) = \Lambda(x) + r(x)$, где $\Lambda\colon R^n \to R^m-$ линейный сюръективный оператор, $r-$ непрерывное многозначное отображение со звездными компактными значениями и $\|r(x)\| = o(x)$. Тогда подпространство $H \overset{\text{def}}{=} \{\overline{x} : \Lambda\overline{x} = 0\}$ является шатром для $M \overset{\text{def}}{=} \{x : 0 \in a(x)\}$ в нуле.

Следствие 4.6.1. Если $H \neq 0$, то для любой окрестности нуля существует такая точка $\widehat{x} \neq 0$ в этой окрестности, что $0 \in a(\widehat{x})$.

Обобщена также теорема Какутани о неподвижной точке для непрерывных многозначных отображений со звездными компактными значениями.

Рассматривается вопрос существования неподвижной точки и для нерастягивающего отображения:

Теорема 4.6.2. Пусть $M-$ компактное звездное подмножество банахова пространства X, $a\colon M \to 2^M-$ нерастягивающее многозначное отображение с замкнутыми значениями. Тогда a имеет неподвижную точку.

Методом шатров изучен также вопрос существования нулей многозначного отображения со звездными компактными значениями.

В пятой главе диссертации введено понятие K-производной многозначного отображения. Как известно основная идея дифференциального исчисления мультифункций состоит в локальном приближении отображения положительно однородными и выпуклыми отображениями. Ближе всего к определению многозначной производной, принятому в данной работе, состоит определение Ж. П. Обена [17] , С. Е. Половинкина [10]. Приведем определение производной многозначного отображения, введенное в данной работе. Это определение идейно связано с понятием многозначной производной, введенным Е. С. Половинкиным в [10].

Пусть $a : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$- многозначное отображение и $(x_0, y_0) \in graf(a)$.

Определение 5.1.1. Пусть $K \subseteq T_{graf(a)}(x_0, y_0)$–замкнутый конус. K-производной от многозначного отображения a в точке его графика $(x_0, y_0) \in graf(a)$ называется отображение $D^K a(x_0, y_0) : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$ вида

$$D^K a(x_0, y_0)(\overline{x}) \equiv \{\overline{y} \in R^m : (\overline{x}, \overline{y}) \in K\},\ \overline{x} \in R^n.$$

Если $K = T_{graf(a)}(x_0, y_0)$, то положим $D^{T_{graf(a)}}(z_0) \equiv D^K a(x_0, y_0)$. Такое определение производной позволяет выяснить вопрос существования селекций, имеющих производные по направлениям, и представить многозначную производную через производные однозначных селекций.

Определение 5.1.2. Многозначное отображение $a\colon R^n \to 2^{R^m}$ является дифференцируемым в точке x_0, если найдется такое положительно однородное отображение $\Lambda\colon R^n \to 2^{R^m}$, что $H(a(x_0) + \Lambda(\overline{x}), a(x_0 + \overline{x})) = o(\overline{x})$.

Определение 5.1.3. Положительно однородное отображение $\Lambda\colon R^n \to 2^{R^m}$ называется нижним дифференциалом для a в точке $(x_0, y_0) \in graf(a)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $y_0 + \Lambda(\overline{x}) \subseteq a(x_0 + \overline{x}) + \varepsilon\|\overline{x}\|B_1(0)$ для всех $\overline{x} \in B_\delta(0)$.

Определение 5.1.4. Положительно однородное отображение $\Lambda\colon R^n \to 2^{R^m}$ называется верхним дифференциалом для a в точке $(x_0, y_0) \in graf(a)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $a(x_0+\overline{x}) \subseteq y_0+\Lambda(\overline{x})+\varepsilon\|\overline{x}\|B_1(0)$ для всех $\overline{x} \in B_\delta(0)$.

Предложение 5.1.2. Пусть $a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in R^n / g(x) + \mathbf{A}y = 0\}$, где $g\colon R^n \to R^m-$ дифференцируемое отображение, $\mathbf{A}\colon R^n \to R^m-$ такой линейный оператор, что $Im\mathbf{A} = R^m$. Тогда отображение $\Lambda_x(\overline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{y / g'(x)\overline{x} + \mathbf{A}\overline{y} = 0\}$ является дифференциалом для a в точке x.

В дальнейшем многозначное отображение $a^0 : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$ определяется по правилу:

$$a^0(x) \equiv \{y \in R^m : (x, y) \in (graf(a))^0\},\ x \in R^n.$$

Теорема 5.1.1. Пусть $a\colon R^n \to 2^{R^m}-$ многозначное отображение со звездным и замкнутым графиком, а $(x_0, y_0) \in graf(a^0)$, причем $x_0 \in int\, dom(a^0)$, а множество $a(x_0)$ ограничено. Тогда

1. найдется такое $\gamma_0 > 0$, что для любого $\gamma \geq \gamma_0$ отображение $\Lambda_1(\overline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} D^{T_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x}) \bigcap \gamma\|\overline{x}\|B_1(0)$ является нижним дифференциалом для a в точке (x_0, y_0);

2. отображение $\Lambda_2(\overline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} D^{T_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x})$ является верхним дифференциалом

для a в точке (x_0, y_0).

Основным инструментом, при помощи которого строятся селекции, производные которых входят в многозначную производную, является следующее утверждение.

Предложение 5.2.4. Пусть a многозначное отображение, графиком которого является такой выпуклый замкнутый конус, что

$$dom(a) = X,\ inta(x) \neq \emptyset\ \forall x \in X.$$

Тогда через любую точку его графика проходит положительно однородная липшицевая селекция этого отображения.

Для отображений со звездным графиком доказано существование локальных селекций, имеющих производные по направлениям.

Теорема 5.2.1. Пусть $a : R^n \to 2^{R^m}-$ многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями, график которого является звездное тело и

$$(x_0, y_0) \in graf(a^0), x_0 \in int\ dom(a^0).$$

Тогда для любого $(\hat{x}, \hat{y}) \in graf(D^{T_{graf(a)}}(x_0, y_0))$ $(\hat{x} \neq 0)$ существует такое дифференцируемое по направлению отображение y, определенное в некоторой окрестности V точки x_0, что

$$y(x_0) = y_0,\ y(x) \in a(x)\ \ \forall x \in V.$$
$$y^{'}(x_0, \overline{x}) \in D^{T_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x})\ \ \forall \overline{x} \in R^n,\ \ y'(x_0, \hat{x}) = \hat{y}.$$

Одним из основных результатов этой главы является следующий результат.

Теорема 5.2.2. Пусть $a : R^n \to 2^{R^m}-$ многозначное отображение, и выпуклый замкнутый конус $K \subseteq K_{graf(a)}(x_0, y_0)$ является строго дифференцируемым шатром к $graf(a)$ в точке (x_0, y_0). Предположим также, что $dom(D^K a(x_0, y_0)) = R^n$ и для каждого $\overline{x} \in R^n$ $intD^K a(x_0, y_0)(\overline{x}) \neq \emptyset$.
Тогда для любого $(\hat{x}, \hat{y}) \in K$ $(\hat{x} \neq 0)$
1. существует липшицево отображение y, определенное в некоторой окрестности V точки x_0, такое, что

$$y(x) \in a(x),\ \forall x \in V,\ \ y(x_0) = y_0;$$

2. существует производная $y^{'}(x_0, \overline{x})$ по каждому направлению $\overline{x}$. Она липшицева по переменной $\overline{x}$ на R^n и

$$y^{'}(x_0, \overline{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\overline{x})\ \ \forall \overline{x} \in R^n,\ \ y^{'}(x_0, \hat{x}) = \hat{y}.$$

Приведены достаточные условия, при которых существуют гладкие селекции многозначных отображений:

Теорема 5.3.1. Пусть $X, Y-$ гильбертовы пространства, и подпространство $K-$ гладкий шатер к $graf(a)$ в точке $(x_0, y_0) \in graf(a)$. Пусть $domD^K a(x_0, y_0) = X$. Тогда существует такое гладкое отображение $y : X \to Y$, определенное в окрестности точки x_0, что

$$y(x_0) = y_0,\ y(x) \in a(x),\ y'(x_0)(\overline{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\overline{x})\ \forall x, \overline{x} \in X.$$

Рассматривается вопрос существования дифференцируемых селекций для многозначного отображения: $a_\epsilon(x) \equiv \{y \in R^m / f(x, y) \leq \min_{y \in R^m} f(x, y) + \epsilon\}$. Предполагается, что $f(x, y)$ $x \in R^n$, $y \in R^m-$ выпуклая дифференцируемая функция по совокупности переменных. Положим $V(x) \equiv \inf_{y \in R^m} f(x, y)$. Предположим, что множество $a_0(x_0) \equiv \{y \in R^m / f(x_0, y) \leq V(x_0)\}$ непусто и ограничено. Верна следующая теорема.

Теорема 5.3.2. Пусть выполнены вышеуказанные предположения и $y_0 \in a_\epsilon(x_0)$. Тогда существует непрерывное отображение $y(x)$, определенное в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и дифференцируемое в этой точке, такое, что

$$y(x_0) = y_0,\ y(x) \in a_\epsilon(x)\ \forall x \in U(x_0).$$

Пусть многозначное отображение a задано при помощи систем неравенств:

$$a(x) = \{y \in R^m / g_i(x, y) \leq 0,\ i \in I\},$$

где I - конечное множество индексов. Пусть$(x_0, y_0) \in graf(a)$ и функции $g_i,\ i \in I$ строго дифференцируемы в (x_0, y_0). Положим

$$I(x_0, y_0) = \{i \in I / g_i(x_0, y_0) = 0\}.$$

Предположим также, что существует вектор $w \in R^n$ такой, что

$$< g'_{iy}(x_0, y_0), w >< 0,\ \ i \in I(x_0, y_0).$$

Положим

$$K = \{(\overline{x}, \overline{y}) \in R^{n+m} / < g'_{iy}(x_0, y_0), \overline{y} > + < g'_{ix}(x_0, y_0), \overline{x} >\leq 0,\ i \in I(x_0, y_0)\}.$$

Следующий результат можно интерпретировать как теорему о неявных функциях для систем неравенств.

Теорема 5.4.1. Пусть выполнены вышеуказанные предположения. Тогда для каждого $(\hat{x}, \hat{y}) \in K$ $(\hat{x} \neq 0)$

1. существует липшицево отображение y, определенное в некоторой окрестности V точки x_0, такое, что

$$g_i(x, y(x)) \leq 0,\ \forall x \in V,\ \ y(x_0) = y_0;$$

2. существует производная $y'(x_0, \overline{x})$ по каждому направлению $\overline{x}$. Она липшицева по переменной $\overline{x}$ на R^n и

$$y'(x_0, \overline{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\overline{x})\ \ \forall \overline{x} \in R^n,\ \ y'(x_0, \hat{x}) = \hat{y}.$$

Обобщена теорема о неявных функциях в негладком случае.

Теорема 5.5.1. Пусть многозначное отображение a задано при помощи систем равенств:

$$a(x) = \{y \in R^m : f_i(x,y) = 0, i \in I^0, g(y) = 0\},$$
$$x \in R^n, y \in R^m,$$

где функции $f_i(x,y), i \in I^0$ строго дифференцируемы (I^0- конечное множество индексов), а $g(y)$ локально липшицева. Предположим, что
1. $(x_0, y_0) \in graf(a),\ 0 \notin \partial_C g(x_0)$.
2. Для каждого $y^* \in Lin\partial_C g(x_0)$ система векторов $\{y^*,\ f'_{iy}(x_0,y_0),\ i \in I^0\}$ линейно независима.

Тогда существует отображение $y(x)$, определенное в некоторой окрестности V точки x_0 и дифференцируемое в этой точке, такое, что

$$y(x) \in a(x)\ \forall x \in V,\ y(x_0) = y_0.$$

Используя метод шатров доказана также следующая теорема, которая является уточнением весьма важного в теории управляемых систем результата, установленного в его первоначальном виде А. Ф. Филипповым. В современной литературе это утверждение известно как лемма Филиппова о неявной функции.

Теорема 5.5.2. Пусть

1. вектор- функция $y(x)$ строго дифференцируема в точке x_0, а функции $f_i(x,u),\ i = 1,\ldots,k$ строго дифференцируемы в точке $(x_0,u_0) \in R^{n+m}$, $U \subseteq R^m-$ выпуклое замкнутое множество и $y(x_0) = f(x_0,u_0),\ u_0 \in U$, где $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$.

2. Векторы $f'_{iu}(x_0,u_0),\ i \in I^0$ линейно независими.

3. Существует вектор $(\overline{x}, \overline{u})$ такой, что

$$< f'_{ix}(x_0,u_0), \overline{x} > + < f'_{iu}(x_0,u_0), \overline{u} >= 0,\ i \in I^0,\ \overline{u} \in (riU - u_0).$$

4. Множество $\{u \in (f'_u(x_0,u_0))^* u \in [con(U - u_0)]^*\}$ содержит только нулевой элемент.

Тогда существует такое отображение $u(x)$, определенное в некоторой окрестности V точки x_0, имеющее производную по направлениям, что

$$u(x_0) = u_0,\ y(x) = f(x,u(x)),\ u(x) \in U\ \forall x \in V.$$

Доказана следующая теорема о существовании гельдеровых селекций для выпуклых многозначных отображений:

Теорема 5.6.1. Пусть $a : R^n \to 2^{R^m}-$отображение с выпуклым замкнутым графиком определено в некоторой окрестности U точки x_0. Пусть $(x_0,y_0) \in graf(a)$. Тогда
1. существуют число $L > 0$ и отображение y, определенное в некоторой окрестности $\overline{U} \subseteq U$ точки x_0, такие, что

$$y(x) \in a(x)\ \forall x \in \overline{U},\ y(x_0) = y_0 \text{ и}$$

$$\|y(x_1) - y(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|^{1/2} \ \forall x_1, x_2 \in \overline{U};$$

2.существует производная $y^{'}(x_0, \overline{x})$ по каждому направлению $\overline{x}$. Она липшицева по $\overline{x}$ на R^n и $y^{'}(x_0, \overline{x}) \in D^{T_{graf(a)}}(x_0, y_0)(\overline{x}) \ \forall \overline{x} \in R^n$.

Пусть $X, Y-$ банаховы пространства.

Теорема 5.6.2. Пусть многозначное отображение $a : X \longrightarrow 2^Y$ с выпуклым замкнутым графиком и $dom(a) = X$. Тогда для любого $(x_0, y_0) \in graf(a)$ существуют непрерывное отображение $y(x)$, определенное в некоторой окрестности V точки x_0 и число $C > 0$ такие, что

$$y(x_0) = y_0, \ \|y(x) - y_0\| \leq C\|x - x_0\|, \ y(x) \in a(x) \ \forall x \in V.$$

Следствие 5.6.1 Пусть $X, \ Y-$ банаховы пространства, а $a : X \to 2^Y$ многозначное отображение, графиком которого является такой выпуклый замкнутый конус, что $dom(a) = X$. Тогда существуют положительно однородное и непрерывное отображение $P : X \to Y$ и число $C > 0$ такие, что $\|P(x)\| \leq C\|x\|, \ \ P(x) \in a(x) \ \forall x \in X$.

Шестая глава диссертации посвящена необходимым условиям экстремума в негладких задачах математического программирования с ограничениями типа равенств. Исследования по необходимым условиям экстремума в последние годы были связаны в основном с более детальным изучением задач, в которых участвуют негладкие функции. При этом на первый план выдвигается учет негладких ограничений типа равенства. Экстремальные задачи с такими ограничениями рассматривались в работах [1-2] и [5-7]. В работах [5-7], используя теоремы о накрывании, доказывается теорема Люстерника о касательном конусе для множества вида $\{x \in X / G(x) = 0\}$, где $G-$ строго дифференцируемый оператор. После этого выводится правило множителей Лагранжа с такими операторными ограничениями.
А в статье [2] обобщена теорема Люстерника в том случае, когда функция дифференцируема в точке и непрерывна в некоторой окрестности этой точки.

В этой главе показано, что использование метода шатров в негладких задачах приводит к получению принципиально новых результатов. Настоящая глава идейно связана с работами Ф. Кларка [8] и Б.Н. Пшеничного [12-13]. Несмотря на хорошие свойства субдифференциала Кларка, его использование в необходимых условиях экстремума не всегда приводит к удовлетворительному результату. Это связано с тем, что для невыпуклой функции его локальное поведение не всегда хорошо описывает обобщенная производная Кларка.

В диссертации с использованием метода шатров получено правило множителей Лагранжа в следующей негладкой задаче оптимизации:

$$f_0(x) \longrightarrow min, f_i(x) = 0, i = 0, 1, ..., k, \ x \in M. \qquad (1)$$

Теорема 6.1.1. Пусть точка $x_0 \in R^n-$ решение задачи (1). Предположим, что функции $f_i(x), i = 0, 1, ..., k$ непрерывны в окрестности точки x_0 и дифференцируемы в этой точке. Пусть $K_M(x_0)-$ непрерывный шатер для множества в точке x_0.
Тогда существуют такие числа $\lambda_i, i = 0, i, ..., k,$ не все равные нулю, что

$$0 \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i'(x_0) - K_M^*(x_0).$$

Отметим, что если $M-$ выпуклое множество, то этот результат получен А. Арутюновым в статье [2].

Следствие 6.1.1. Пусть x_0- точка минимума функции $f_0(x)$ при ограничениях $f_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \dots, p,\ g(x) = 0.$
Предполагается, что функции $f_i(x),\ i = 0, 1, \dots, p$ непрерывны в некоторой окрестности x_0 и дифференцируемы в этой точке, а функция $g(x)$ выпукла и $0 \notin \partial g(x_0)$. Тогда для любого $x^* \in \partial g(x_0)$ существуют числа $\lambda_0, \lambda_1 \dots, \lambda_p,$ не все равные нулю одновременно и такие, что

$$0 \in \sum_{i=0}^{p} \lambda_i f_i'(x_0) + cl\{con\partial g(x_0) - conx^*\}.$$

Следует отметить, что функции $f_i,\ i = 0, 1, \dots, p$ вообще говоря не являются локально липшицевыми, а функция g может и не быть дифференцируемой. Поэтому, правило множителей Лагранжа в этой задаче нельзя получить, используя вариационный принцип Экланда, или при помощи какой-либо теоремы о неявных функциях.

Следствие 6.1.2. Пусть в задаче (1) множество M задано так:

$$M = \{x \in R^n / g_i(x) = 0,\ i = k+1, \dots, p\},$$

где g_i- выпуклые функции. Пусть x_0- решение задачи и

$$0 \notin \partial g_i(x_0),\ (i = k+1, \dots p).$$

Тогда существуют числа $\lambda_i (i = 0, 1, \dots, k)$ и векторы

$$x_i^* \in Lin\partial g_i(x_0), (i = k+1, \dots, p),$$

не все равные нулю одновременно и такие, что

$$0 = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i'(x_0) + \sum_{i=k+1}^{p} x_i^*.$$

Приведем еще один результат, который является следствием полученных необходимых условий.

Теорема 6.1.2. Пусть x_0- точка минимума функции $f(x)$ при ограничении $g(x) = 0$. Пусть $f(x)$ выпукла и дифференцируема, а $g(x)$ выпукла и $g(x_0) = 0,\ \ 0 \notin \partial g(x_0)$ и $dimcon\partial g(x_0) \geq 2$. Тогда x_0- точка минимума функции $f(x)$ на множестве

$$M \equiv \{x \in X / g(x) \leq 0\}.$$

Рассматривается задача минимизации функции $f_0(x)$ при условиях

$$\varphi_1(x) = \max_{i \in I} f_i(x) = 0,$$

$$\varphi_2(x) = \max_{j \in J} g_j(x) = 0,$$

где функции $f_i(x),\ i \in 0 \cap I,\ g_j(x),\ j \in J$ выпуклы и дифференцируемы, $I,\ J-$ конечные множества индексов. Пусть $x_0 \in R^n-$ некоторая точка. Положим

$$I(x_0) = \{i \in I / f_i(x_0) = \varphi_1(x_0)\},\ J(x_0) = \{j \in J / \varphi_2(x_0) = g_j(x_0)\}.$$

Теорема 6.1.5. Пусть x_0- решение вышеуказанной задачи. Тогда для любых $i_0 \in I(x_0),\ j_0 \in J(x_0)$ существуют числа $\lambda_0, \lambda_i,\ i \in I,\quad \mu_j,\ j \in J,$ не все равные нулю одновременно такие, что

$$\lambda_0 f_0'(x_0) + \sum_{i \in I} \lambda_i f_i'(x_0) + \sum_{j \in J} \mu_j g_j'(x_0) = 0,$$

причем

$$\lambda_0 \geq 0,\ \lambda_i \geq 0,\ i \in I \setminus i_0,\ \mu_j \geq 0,\ j \in J \setminus j_0.$$

Полученный результат указывает на то, что множители Лагранжа определяются не единственным образом и, кроме того, указывает на то, какие из них можно взять с положительными знаками.

Получено необходимое условие минимума для задач с ограничениями типа равенств, задаваемых локально липшицевыми функциями. Это условие выражено в терминах субдифференциалов Мишеля-Пено. Получено также необходимое условие экстремума в терминах K-субдифференциалов.

Рассматривается задача минимизации липшицевой функции $f(x)$ на пересечении множеств

$$f_0(x) \to min,\ x \in \bigcap_{i=1}^{k} M_i,$$

где $M_i = \{x \in R^n / f_i(x) \leq 0\},\ i = 1, 2, \ldots, k$ и $f_i,\ i = 1, 2, \ldots, k-$ липшицевы функции. Верна

Теорема 6.1.6. Пусть x_0- решение вышеуказанной задачи. Тогда существуют такие числа $\lambda_0 \geq 0, \lambda_i \geq 0,\ i \in I,$ не равные нулю одновременно, что

$$0 \in \sum_{i \in I \cup \{0\}} \lambda_i \partial_K f_i(x_0).$$

Теорема 6.1.7. Пусть x_0- точка минимума локально липшицевой функции $f_0(x)$ при ограничениях

$$f_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k,\ x \in R^n,$$

где $f_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$ также локально липшицевы функции. Пусть существуют такие векторы w_i, что $f'_{iMP}(x_0, w_i) < 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$ и функции $f'_{iMP}(x, w_i)$ полунепрерывны сверху в точке x_0. Тогда существуют число $\lambda_0 \geq 0$ и векторы $x_1^*, \dots, x_k^*$, не все одновременно равные нулю такие, что

$$0 \in \lambda_0 \partial_{AL} f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{k} x_i^*, \ x_i^* \in Lin \partial_{MP} f_i(x_0), \ i = 1, \dots, k.$$

Получены необходимые условия экстремума в терминах асимптотического субдифференциала Половинкина.

А именно, верны следующие результаты.

Теорема 6.2.1. Пусть x_0- точка минимума локально липшицевой функции $f_0(x)$ при наличии ограничений $f_i(x) = 0, \ i = 1, 2, \dots, k$, где $f_i(x), \ i = 1, 2, \dots, k$ локально липшицевы, имеющие производные по направлениям. Тогда существуют числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что

$$0 \in \partial_{AL}(\lambda_0 f_0)(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \partial_{AL} f_i(x_0).$$

Теорема 6.2.2. Пусть x_0- точка минимума функции $f_0(x)$ при наличии ограничений

$$f_i(x) \leq 0, \ i = 1, 2, \dots, k, \ g(x) = 0.$$

Предположим, что $f_i, \ i = 0, 1, \dots, k$ локально липшицевы функции, а $g(x)$ выпукла. Тогда существуют числа $\lambda_i, \ i = 0, 1, \dots, k+1$, не все равные нулю одновременно и такие, что

$$0 \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \partial_{AL} f_i(x_0) + \lambda_{k+1} \partial g(x_0),$$

причем $\lambda_i \geq 0, \ \lambda_i f_i(x_0) = 0, \ i = 1, 2, \dots, k$.

Рассмотрим теперь задачу с операторными ограничениями

$$f(x) \longrightarrow min, \ F(x) = 0, x \in K.$$

Теорема 6.2.3. Пусть

1. x_0- решение вышеуказанной задачи, f дифференцируема в этой точке,

2. $X, Y-$ банаховы пространства, $K \subseteq X-$ выпуклый замкнутый конус,

3. $F : X \longrightarrow Y$ строго дифференцируемое в точке x_0 отображение и такое, что множество $F'(x_0)K$ замкнуто.

Тогда существуют число λ и вектор $y^* \in Y^*$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$0 \in \lambda f'(x_0) + (F'(x_0))^* y^* - K^*.$$

В этой главе построены также конусы касательных направлений второго порядка ко множествам и получено необходимое условие второго порядка в задачах, где функции не строго дифференцируемы и вообще говоря не дважды дифференцируемы.

Пусть для функций $f_i : R^n \longrightarrow R^1,\ i = 1, \ldots, k$ имеет место представление

$$f_i(x_0 + h) = f_i(x_0) + < f_i'(x_0), h > +1/2 < A_i(x_0)h, h > +r_i(h),$$

где $r_i(h) = o(\|h\|^2),\ A_i(x_0)(n \times n)-$ симметричные матрицы.
Положим

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)), \mathbf{A}(x_0)[h, h] \equiv (< A_1(x_0)h, h >, \ldots, < A_k(x_0)h, h >);$$

$$M = \{x/F(x) = 0\},\ K_M(x_0, \overline{h}) = \{\overline{z}/F'(x_0)\overline{z} + A(x_0)[\bar{h}, \bar{h}] = 0\}.$$

Каждый элемент множества $\overline{z} \in K_M(x_0, \overline{h})$ называется касательным вектором второго порядка ко множеству M в точке x_0 по направлению $\overline{h} \in KerF'(x_0)$.

Теорема 6.3.1. Пусть

1. градиенты $f_i'(x_0), i = 1, 2, \ldots, k$ линейно независимы в точке $x_0 \in M$;

2. отображение $r(h) = (r_1(h) \ldots, r_k(h))$ непрерывно в окрестности нуля;

3. $\overline{h} \in KerF'(x_0),\ \overline{z} \in K_M(x_0, \overline{h})$.

Тогда существует отображение $o(\alpha^2)$ такое, что

$$F(x_0 + \alpha\overline{h} + \frac{\alpha^2}{2}\overline{z} + o(\alpha^2)) = 0.$$

В конце этой главы рассматриваются задачи оптимального управления с дискретным временем с негладкими ограничениями типа равенств для начала траектории.
В некоторых случаях уточнены условия трансверсальности.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления с дискретным временем:

$$x_{t+1} \in a(x_t),\ t = 0, 1, \ldots, T - 1,$$

$$x_0 \in W,$$

$$g(x_T) \to min.$$

Теорема 6.4.1. Пусть

1.$a(x) \equiv \{y \in R^n / f(x, y) \le 0\}$, где $f(z) = f(x, y)-$ дифференцируемая функция.

2. $W = \{x \in R^n / \varphi(x) = 0\}$, где $\varphi-$ выпуклая функция на R^n.

3. Пусть $\tilde{x_0}, \tilde{x_2}, \ldots, \tilde{x_T}-$ такая оптимальная траектория вышеуказанной задачи, что

$$f_x'(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}) \ne 0,\ f_y'(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}) \ne 0,\ t = 0, 1, \ldots, T - 1,$$
$$0 \notin \partial\varphi(\tilde{x_0}),\ dimcon\partial\varphi(\tilde{x_0}) \ge 2,\ g'(x_T) \ne 0.$$

Тогда найдутся такие векторы $x_0^*, x_1^*, \ldots, x_T^*$, что

$$x_t^* = \lambda_t f_x'(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}),$$

$$x_{t+1}^* = \lambda_t f_y'(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}),$$

$$\lambda_t \ge 0,\ \lambda_t f(\tilde{x}_t, \tilde{x_{t+1}}) = 0,\ t = 0, 1, \ldots, T - 1,$$

$$x_0^* \in con\partial\varphi(\tilde{x_0}),\ x_T^* = g'(\tilde{x_T}).$$

Пусть теперь $a(x) = Ax + U$, где $A - n \times n$ матрица, а $U-$ выпуклое множество в R^n. Требуется выбрать управление u_t, $t = 0, 1, \dots, T-1$ таким образом, чтобы траектория $\tilde{x_0} \in W, \tilde{x_1}, \dots, \tilde{x_T}$ минимизировала функцию $g(x)$. Здесь

$$W = \{x \in R^n / \varphi(x) = 0\},$$

где $\varphi-$ выпуклая функция на R^n.

Теорема 6.4.2. Пусть $\{\tilde{x_t}\}_{t=0}^T-$ оптимальная траектория, а $\tilde{u_t} \in U$ соответствующее управление задачи:

$$g(x_T) \to min,$$
$$x_{t+1} = Ax_t + u_t,\ t = 0, 1, \dots, T-1,$$
$$x_0 \in W = \{x / \varphi(x) = 0\}.$$

Предположим также, что $U-$ выпуклое множество, g выпукла и дифференцируема, а $\varphi-$ выпуклая функция и $dimcon\partial\varphi(\tilde{x_0}) \geq 2$. Тогда $\{\tilde{x_t}, \tilde{u_t}\}_{t=0}^T-$ оптимальный процесс для задачи

$$g(x_T) \to min,$$
$$x_{t+1} = Ax_t + u_t,\ t = 0, 1, \dots, T-1,$$
$$x_0 \in N \equiv \{x / \varphi(x) \leq 0\}.$$

Список использованной литературы

[1]. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.,* Оптимальное управление, Наука, Москва, 1979.

[2]. Арутюнов А. В., Винтер Р. Б., Метод конечномерной аппроксимации в теории оптимального управления, Дифф. Уравнения, 2003, т. 39, №1, стр. 1443-1451.

[3]. *Болтянский В. Г.,* Оптимальное управление дискретными системами, Наука, Москва, 1973.

[4]. *Болтянский В. Г.,* Метод шатров в теории экстремальных задач, Успехи мат. наук, 1975, т. 30, №3, стр. 3-55.

[5]. *Димитрук А.В.,Милютин А.А., Осмоловский Н. П.,* Теорема Люстерника и теория экстремума, Успехи мат. наук, 1980, т.33, №5, стр.11-46.

[6]. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.,* Задачи на экстремум при наличии ограничений, ЖВМ И МФ, 1965, т. 5, №3, стр. 395-453.

[7]. *Мордухович Б. Ш.,* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления, Наука, Москва, 1988.

[8]. *Кларк Ф.,* Оптимизация и негладкий анализ, Мир, Москва, 1988.

[9]. *Половинкин Е.С., Балашов М. В.,* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа, Физматлит, Москва, 2004.

[10]. *Половинкин Е.С.,* Теория многозначных отображений, Изт-во МФТИ, Москва, 1983.

[11]. *Половинкин Е.С.,* Многозначный анализ и дифференциальные включения, Физматлит, Москва, 2014.

[12]. *Пшеничный Б.Н.,* Выпуклый анализ и экстремальные задачи, Наука, Москва, 1980.

[13]. *Пшеничный Б.Н.,* Необходимые условия экстремума, Наука, Москва, 1982.

[14]. *Обен Ж.П., Экланд И.,* Прикладной нелинейный анализ, Мир, Москва, 1988.

[15]. *Остапенко В.В.,* Приближенное решение задач сближения-уклонения, Препринт-82-16, Институт Кибернетики АН УССР, Киев, 1982.

[16]. *Лейхтвейс К.,* Выпуклые множества, Наука, Москва, 1985.

[17]. *Aubin J.-P.,* Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and diferential inclusions, Advances in Math. Suppl. Studies, Acad. Press,1981, pp. 160-272.

[18]. *Michel P., Penot J.-P.,* Calcul sous-differentiel pour les functions lipschitziennes et non lipschitziennes, C. R. Acad. Sc. Paris. Ser.I, 1984, v.291, pp. 269-272.

[19]. *Michael E.,* Continuous selections 1, Ann. Math,1956, №63, pp. 361-381.

[20]. *Ioffe A.D.,* A Lagrange multiplier rule with small convex-valued subdifferentials for nonsmooth problems of mathematical programming involving equality and nonfunctional constraints, Mathematical Programming, 1993, №58, pp. 137-145.

Перечень публикаций по теме диссертации

Статьи

[1*]. *Пшеничный Б.Н.,Хачатрян Р.А.,* Ограничения типа равенств в негладких задачах оптимизации, Экономика и матем. методы, 1982, №6, стр.1133-1140.

[2*]. *Пшеничный Б. Н.,Хачатрян Р. А.,* Ограничения типа равенств в негладких задачах оптимизации, Докл. АН СССР, 1982, т. 267, №3, стр. 553- 556.

[3*]. *Пшеничный Б.Н., Хачатрян Р.А.,* О необходимых условиях экстремума для негладких функций, Известия АН АРМ ССР, Математика, 1983, т. 18, №. 4, стр. 318-325.

[4*]. *Пшеничный Б.Н.,Хачатрян Р.А.,* Необходимые условия экстремума для негладких задач, Кибернетика, Киев, 1983, №3, стр. 111- 115.

[5*]. *Хачатрян Р.А.,* О негладких задачах оптимизации в банаховом пространстве, Кибернетика, 1983, Киев, №5, стр. 124-125.

[6*]. *Хачатрян Р.А.,* О необходимых условиях экстремума в негладких задачах оптимального управления с дискретным временем, Кибернетика, Киев, 1985, №3, стр. 66-71.

[7*]. *Хачатрян Р.А.,Арутюнян В.В.,* Конусы касательных направлений в задачах с операторными ограничениями, Межвуз. сбор. науч. трудов Прикладная математика, выпуск 5, ЕГУ, 1987, стр. 107-120.

[8*]. *Хачатрян Р.А.,* О необходимых условиях экстремума в задачах с ограничениями типа равенств, Межвуз. сборник науч. трудов Прикладная математика, выпуск 7, ЕГУ, 1988, стр. 165-173.

[9*]. *Хачатрян Р. А.,* О пересечении шатров в гильбертовом пространстве и необходимых условиях экстремума для негладких функций, Известия АН АРМ ССР, Математика, 1988, т.23, №3, стр. 149-162.

[10*]. *Хачатрян Р.А.,Арутюнян Ф. Г,* О пересечении шатров в бесконечномерных пространствах, Известия НАН Армении, Математика, 2001, т.36, №2, стр. 64-71.

[11*]. *Хачатрян Р.А.,* О существовании непрерывных и гладких селекций многозначных отображений, Известия НАН Армении, Математика, 2002, т.36, №2, стр. 65-76.

[12*]. *Хачатрян А.Р., Хачатрян Р. А.,* О непрерывности многозначных отображений, Ученные записки, ЕГУ, 2003, №2, стр. 3-13.

[13*]. *Хачатрян Р.А., Аветисян Р.А., Хачатрян А.Р.,* Непрерывность множеств ε-оптимальных стратегий, Известия НАН Армении, Математика, 2003, т. 38, №1, стр. 69-82.

[14*]. *Хачатрян Р. А.,* О звездных множествах и объемах звездных тел, Вестник гос. инженерного университета Армении, серия Моделирование, оптимизация, управление, выпуск 11, 2008, т. 2, стр. 125-135.

[15*]. *Хачатрян Р.А.,* О звездных множествах и селекциях мултиотображений со звездными значениями. Доклады НАН Армении, Математика, 2008 т. 108, №4, стр. 301-308.

[16*]. *Хачатрян Р.А., Оганисян С.М.,* О производных многозначных отображений, Вестник инженерной Академии Армении, 2008, т. 3, №1, стр. 107-111.

[17*]. *Хачатрян Р.А.,* О непрерывных селекциях многозначных отображений со звездными значениями, Вестник гос. инженерного университета Армении, серия Моделирование, оптимизация, управление, 2009, выпуск 12, т. 2, стр. 77-87.

[18*]. *Хачатрян Р.А.,* Касательные конусы и шатры для звездных множеств, Вестник гос. инженерного университета Армении, серия Моделирование, оптимизация, управление, 2010, выпуск 13, т. 2, стр. 96-101.

[19*]. *Хачатрян Р.А.,* Экстремальные системы звездных множеств и теоремы отделимости, Вестник гос. инженерного университета Армении, серия Моделирование, оптимизация, управление, 2010, выпуск 13, т. 2, стр. 128- 134.

[20*]. *Хачатрян Р.А.,* Об ϵ- оптимальных точках выпуклой замкнутой функции, Известия НАН Армении, Математика, 2012, т. 47, №2, стр. 61-72.

[21*]. *Хачатрян Р.А.,* О многозначных отображениях со звездными графиками, Известия НАН Армении, Математика, 2012, т. 47, №1, стр. 51-78.

[22*]. *Хачатрян Р.А.,* О производных по направлению селекций многозначных отображений, Известия НАН Армении, Математика, 2016, т 51, №3, стр. 64-82.

[23*]. *Хачатрян Р.А.,* О необходимых условиях экстремума в негладких задачах с ограничениями типа равенств, Владикавказский мат. журнал, 2016, т.18, выпуск 3, стр. 73-84.

[24*]. *Хачатрян Р.А.,* О регулярных касательных конусах, Известия НАН Армении, Математика, 2017, т.52, №2, стр. 65-76.

Монография

[25*]. *Хачатрян Р.А.,* О многозначных отображениях со звездными значениями и графиками, LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrucken, Deutshland /Германия, 2013, 76 стр.

Тезисы

[26*]. *KhachatryanR.A.,*On continuity of some multi- valued mappings and the method of

tents.ISAAC Conference,17-21 September, 2002, Yerevan, Armenia, Abstracts, p.14.

[27*]. *Awetisyan R. A., Khachatryan A. R., Khachatryan R. A.,* Integrals of multivalued mappings, Inernational Conference Harmonic Analysis and Approximations, III, 20-27 September, 2005, Tsagkadzor, Armenia, Abstracts, pp. 11-12.

[28*]. *Khachatryan R., Avetisyan R.,* Lipshitz multivalued mappings in optimization linear problems. International Conference Harmonic Analysis and Approximations, IV, 19-26 September, 2008, Tsagkadzor, Armenia, Abstracts, p. 71.

[29*]. *Хачатрян Р.А., Аветисян Р. А.,* О звездных множествах и многозначных отображениях со звездными графиками. Тезисы докладов Международной конференции "Образование, наука и экономика в вузах, интеграция в международное образовательное пространство"26-30 сентября, 2011, Ереван, стр. 35-36.

[30*]. *Khachatryan R.A., Avetisyan R.A.,* On derivativs of multivalued maps. International Conference Harmonic Analysis and Approximations, V, 10-17 September, 2011, Tsaghkadzor, Armenia, Abstracts, p. 60.

[31*]. *Khachatryan R. A.,* On directionally differentiable selections of set- valued mappings, Second International Conference Mathematics in Armenia, Advances and Perspectives, 24-31 August 2013, Tsaghkadzor, Armenia, Abstracts, p.45.

[32*]. *Khachatryan R. A.,* The implicit function theorem for a system of inequalities, International Conference Harmonic Analysis and Approximations, VI, 12-18 September, 2015, Tsaghkadzor, Armenia, Abstracts, pp. 54-55.

RESUME

Multivalued mappings and related selection theorems are fundamental tools in many branches of mathematics. This classical area of mathematics has found various applications in general topology, functional and convex analysis, games theory, mathematical economics.

The fundamental results in this theory were laid down in the mid 1950's by E. Michael. This thesis is dedicated to the theory of continuous selections of multivalued mappings.

The thesis can be conditionally divided into two parts.

In the first part the multivalued mappings with star - like values and graphs are investigated.

The second part concerns the theory of necessary conditions in non-smooth optimization problems.

In the first part we investigate the issue of the existence of selections with various topologic properties for multivalued mappings with star- like values and graphs.

The main objective of the first part is:

a) Finding out the existence of Lipschitz selections in multivalued functions, the graphics of which are cones.

b) Studying the existence of continuous, Lipschitz and smooth local selections.

The main objective of the second part is the application of the tents methods in equality type optimization problems with non-smooth boundaries. To compare the obtained necessary conditions for the minimum with the known ones.

In the thesis the folloing main results are obtained.

1. A concept of relative boundary point with respect to the kernel for star-like set is introduced. Moreover, the latter set is represented by means of these boundary points. A relation is stated between star-like sets and locally Lipshitzian functions.

2. Lipschitz selectors are separated from multivalued mappings, the graphics of which are closed convex cones.

3. The multivalued mappings with star-like values are represented by smooth selections.

4. The concept of separation of star-like sets is introduced. It is shown, that if star-like bodies are in the extremal state, then they can be separated.

5. The issue of continuous dependence of ϵ - optimal points from parameters is studied in the optimization problems. The Hausdorff distance between the ϵ- optimal points of the Thikhonov functions in the non- correct problems of matematical programming is estimated.

6. Lipshitz selections are separated from a multivalued function, the values of which are star-like sets.
7. For certain sets given by equality type restrictions a family of continuous tents is constructed. Also, regular cones of tangential directions are constructed for these sets. Theorems about the intersections of continuous, compact and strictly differentiable tents are proved.
8. The concept of K-derivative for a multivalued function is introduced. Sufficient conditions are obtained in case of which a multivalued function contains continuous selection whose directional derivatives are involved in the multivalued derivative.
9. It is shown, that convex multivalued mapping has a Holder selection, which has directional derivatives.
10. Necessary conditions have been obtained in the non-smooth optimization problems given by equality and inequality type constraints, as well as non-functional constraints.
11. The implicit function theorem for the system of equations is generalized for the system of inequalities.
12. A whole family of necessary conditions is obtained for the characterization of optimal points in non-smooth optimization problems, with equality type constraints.
13. Necessary conditions for minimum were obtained in terms of asymptotic subdifferentials.
14. The transversality conditions are adjusted in the non-smooth problems of certain classes of optimal control with discrete time. The problem of existence of the multivalued functions zeroes is studied by the tents method.

Ամփոփում

Բազմարժեք արտապատկերումների սելեկցիաներին վերաբերվող թեորեմները ֆունդամենտալ նշանակություն ունեն մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառների համար: Մաթեմատիկայի այս դասական ոլորտը ունի բազմաթիվ կիրառություններ ընդհանուր տոպոլոգիայում, ֆունկցիոնալ և ուռուցիկ անալիզում, խաղերի տեսությունում և մաթեմատիկական տնտեսագիտությունում: Այդ բնագավառի հիմնական խնդիրները դրվել են Է. Մայքլի աշխատանքներում 50-ական թվականներին: Դրանք նվիրված են բազմարժեք ֆունկցիաների անընդհատ սելեկցիաների տեսությանը:

Ատենախոսությունը պայմանականորեն կարելի է բաժանել երկու մասի:

Առաջինում ուսումնասիրվում են ասպղաձև արժեքներով և գրաֆիկներով բազմարժեք արտապատկերումներ:

Երկրորդը վերաբերվում է ոչ ողորկ օպտիմիզացիայի խնդիրներում էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանների տեսությանը:

Աշխատանքի առաջին մասի հիմնական նպատակն է հետազոտել տարբեր տոպոլոգիական հատկություններով օժտված սելեկտորների գոյության հարցը ասպղաձև արժեքներով բազմարժեք արտապատկերումներում:

Այստեղ ուսումնասիրվող հիմնական խնդիրներն են.

ա) Պարզել լիպշիցյան սելեկցիաների գոյության հարցը այնպիսի բազմարժեք ֆունկցիաներում, որոնց գրաֆիկները կոներ են:

բ) ՈՒսումնասիրել անընդհատ, լիպշիցյան, ողորկ լոկալ սելեկցիաների գոյությունը ասպղաձև արժեքներով բազմարժեք արտապատկերումներում:

Աշխատանքի երկրորդ մասի հիմնական խնդիրն է. կիրառել վրանների մեթոդը հավասարության տիպի ոչ ողորկ սահմանափակումներով օպտիմիզացիայի խնդիրներում: Ստանալ մինիմումի անհրաժեշտ պայմաններ օպտիմալ կետի բնութագրման համար: Համեմատել այդ պայմանները հայտնիների հետ:

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները:

1. Ասպղաձև բազմությունների համար ներմուծվում է միջուկի նկատմամբ հարա–բերական եզրային կետի գաղափարը: Ասպղաձև բազմությունը ներկայացվում է այդ կետերի միջոցով: Կապ է հաստատվում ասպղաձև բազմությունների և լիպշիցյան ֆունկցիաների միջև:

2. Բազմարժեք արտապատկերումներից, որոնց գրաֆիկները ուռուցիկ փակ կոներ են անջատվում են լիպշիցյան սելեկտորներ:

3. Ասպղաձև արժեքներով բազմարժեք արտապատկերումները ներկայացվում են ողորկ սելեկցիաների միջոցով:

4. Ներմուծվում է ասպղաձև բազմությունների անջատման գաղափարը: Ցույց է տրվում, որ եթե ասպղաձև մարմինները գտնվում են էքստրեմալ վիճակում, ապա նրանց

կարելի է բաժանել:

5. Օպտիմիզացիոն խնդիրներում ուսումնասիրվում է ϵ - օպտիմալ կետերի անընդհատ կախվածության հարցը պարամետրերից: Մաթեմատիկական ծրագրավորման ոչ-կոռեկտ խնդիրներում հաուսդորֆյան մետրիկայով գնահատվում է Տիխոնովի ֆունկցիայի ϵ- օպտիմալ կետերի միջև եղած հեռավորությունը:

6. Ասպղաձև արժեքներով բազմարժեք արտապատկերումներից անջատվում են լիպշիցյան լոկալ սելեկտորներ:

7. Հավասարության տիպի սահմանափակումներով տրվող բազմությունների համար կառուցվում է անընդհատ վրանների ընտանիք: Կառուցվում են նաև շոշափող վեկտորների ռեգուլյար կոներ: Ապացուցվում են թեորեմներ անընդհատ, կոմպակտ և խիստ դիֆերենցելի վրանների հատման մասին:

8. Ներմուծվում է K-ածանցյալի գաղափարը բազմարժեք ֆունկցիաների համար: Բերվում են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում բազմարժեք ֆունկցիան պարունակում է անընդհատ սելեկցիաներ, որոնց ըստ ուղղության ածացյալները ընկած են բազմարժեք ածանցյալի մեջ:

9. Ցույց է տրվում, որ ուռուցիկ բազմարժեք արտապատկերումը ունի գյոլդերյան սելեկցիա, որը ունի ածանցյալ ըստ ուղղության:

10. Ստացվել են անհրաժեշտ պայմաններ հավասարության և անհավասարության տիպի սահմանափակումներով տրվող ոչ ողորկ օպտիմիզացիոն խնդիրներում, որոնցում մասնակցում են ոչ ֆունկցիոնալ սահմանափակումներ:

11. Անբացահայտ ֆունկցիաների վերաբերյալ թեորեմը ընդհանրացվում է անհավա-սարումների համակարգերի համար:

12. Հավասարության տիպի սահմանափակումնրով ոչ ողորկ օպտիմիզացիոն խնդիր-ներում սպացվել է մինիմումի անհրաժեշտ պայմանների ընտանիք օպտիմալ կետերի բնութագրման համար:

13. Ստացվել են անհրաժեշտ պայմաններ ասիմպտոտիկ և Պենոտի սուբդիֆերենցիալ-ների տերմիններով:

14. Դիսկրետ ժամանակով օպտիմալ կառավարման որոշ դասի ոչ ողորկ խնդիրներում ճշգրտվում են տրանսվերսալության պայմանները: Վրանների մեթոդով ուսումնա-սիրվում է բազմարժեք ֆունկցիաների զրոների գոյության խնդիրը: