

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
АРМЕНИИ**

ДЖАНИБЕК СИМОНОВИЧ СУКИАСЯН

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН, УСИЛЕННЫХ СТРИНГЕРАМИ, И
РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ПРОЧНОСТНОГО РАСЧЕТА**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности

05.02.01 - "Машиноведение"

Научный руководитель:

к.ф.-м.н. Саркисян К. С.

ЕРЕВАН 2017

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР.	9
1.1. Структурная схема самолета и конструктивные схемы компоновки панели крыла и его механизации, фюзеляжа, хвостового оперения	9
1.2. Обзор прикладных контактных задач при исследовании подкрепленных панелей.....	17
1.3. Развитие контактных задач теории упругости.....	20
1.4. Выводы по первой главе	23
ГЛАВА 2. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ И БЕСКОНЕЧНЫМИ УПРУГИМИ СТРИНГЕРАМИ	24
2.1. Основные соотношения плоской задачи теории упругости.....	24
2.2. Вектор-функция влияния для однородной бесконечной пластины.	28
2.3. Математическое моделирование контактной задачи для однородной бесконечной упругой пластины, усиленной двумя конечными и одним бесконечным упругими стрингерами.....	32
2.4. Расчет контактных и нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах.....	39

2.5. Математическое моделирование контактной задачи для однородной бесконечной упругой пластины, усиленной одним конечным и двумя бесконечными упругими стрингерами.....	49
2.6. Вычисление касательных и нормальных напряжений в конечном стрингере.....	53
2.7. Выводы по второй главе	63
ГЛАВА 3. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ И БЕСКОНЕЧНЫМИ УПРУГИМИ СТРИНГЕРАМИ.....	64
3.1. Математическое моделирование контактной задачи для упругой бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными бесконечными и полубесконечными стрингерами.....	64
3.2. Количественный анализ напряжений, возникающих в полубесконечных стрингерах.....	70
3.3. Математическое моделирование контактной задачи для упругой бесконечной пластины, усиленной четырьмя параллельными полубесконечными и бесконечными стрингерами.....	79
3.4. Расчет нормальных и касательных напряжений в полубесконечных стрингерах.....	81
3.5. Выводы по третьей главе	91
ГЛАВА 4. ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ УПРУГИХ БЕСКОНЕЧНОГО И КОНЕЧНОГО СТРИНГЕРОВ К УПРУГОЙ ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ.....	92

4.1. Математическое моделирование контактной задачи о передаче нагрузки от двух параллельных упругих бесконечного и конечного стрингеров к упругой однородной бесконечной пластине.....	92
4.1.1. Некоторые частные случаи.....	104
4.2. Вычисление основных характеристик напряженно-деформированного состояния конечного и бесконечного стрингеров.....	107
4.2.1. Анализ напряженно-деформированного состояния в упругом бесконечном стрингере.....	107
4.2.2. Анализ напряженно-деформированного состояния в упругом конечном стрингере.....	111
4.3. Методы прочностного расчета элементов конструкций.....	116
4.4. Выводы по четвертой главе	118
ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ.....	120
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	122
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	134

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. С развитием машиностроительных технологий во многих случаях проектирования машин становится необходимым выявить особенности взаимодействия таких элементов, как стрингеры различных длин с однородной бесконечной пластиной и между собой, в рамках принятых физических гипотез. В частности, при проектировании различных тонкостенных панелей, подкрепленных тонкостенными ребрами жесткости, а также при расчете дорожных и аэродромных покрытий, фундаментов зданий и др. необходимо изучить подобные закономерности для тонкостенных элементов в достаточно широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров. Особенно актуальны эти задачи при проектировании панелей крыла, фюзеляжа и оперения самолета, армированных стрингерами различных длин, которые с точки зрения механики машин, представляют собой тонкостенную оболочку – обшивку с продольным набором стрингеров. Анализ существующих работ в данной области показал, что указанные задачи чаще всего решаются дорогостоящими экспериментальными методами, либо методом конечных элементов, которому наряду с его преимуществами присущи существенные недостатки: требуемый большой опыт расчетчика, отсутствие возможности выявления особых точек и анализа решений с непосредственной вариацией параметров задачи, проблемы сходимости решения и пр. Отсюда следует необходимость получить простые расчетные формулы и разработать вычислительные методы для определения контактных сил, действующих в пластинах под стрингерами,

что весьма важно для последующих прочностных расчетов. Таким образом, исследование круга указанных задач весьма актуально для современной практики инженерного проектирования.

Цель и задачи исследования. Диссертационная работа посвящена исследованию напряженно-деформированного состояния, разработке методов и вычислительных алгоритмов расчета прочности однородных пластин, усиленных стрингерами различных длин, применительно к проектированию тонкостенных панельных элементов самолетов и других технических объектов.

Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие задачи:

1. Моделирование обшивки фюзеляжа, крыла и оперения самолета в виде бесконечных пластин, усиленных различными сочетаниями бесконечных и конечных или полубесконечных стрингеров.
2. Математическая формулировка контактных задач о взаимодействии стрингеров, имеющих различные длины и физические свойства, с объектами в виде упругой однородной бесконечной пластины на базе физических и геометрических гипотез для тонкостенных элементов конструкций.
3. Выбор эффективных методов и разработка вычислительных алгоритмов решения поставленных задач для различных сочетаний и типоразмеров стрингеров.
4. Анализ влияния стрингеров на распределение интенсивностей тангенциальных сил и напряженно-деформированное состояние пластин в широком диапазоне варьирования физических и геометрических параметров.

Методы исследования. При решении поставленных задач были применены методы интегрального преобразования Фурье и ортогональных многочленов Чебышева в рамках теории аналитических функций, а также компьютерные методы моделирования и расчета задач в программной среде Wolfram Mathematica. Достоверность полученных результатов основана на адекватном применении математического аппарата. Для обоснования достоверности выбора методов

исследования, полученные в настоящей работе результаты сравнены с известными результатами.

Научная новизна работы

1. Сформулирован и изучен новый класс плоских контактных задач, описывающих передачу нагрузки от тонкостенных элементов в виде конечных, полубесконечных и бесконечных стрингеров к телам в виде упругой бесконечной пластины. Выявлен ряд специфических особенностей решения задач этого класса, обусловленных расположением контактирующих элементов.
2. На базе решения поставленных задач предложены новые подходы к моделированию и расчету на прочность тонкостенных элементов крыла самолета, которые могут быть применены также при проектировании других технических объектов, в составе которых имеются подобные конструкции, что позволит избежать применения дорогостоящих экспериментальных методов.
3. С применением различных математических методов разработаны алгоритмы решения задач напряженно-деформированного состояния крыла самолета для различных типоразмеров стрингеров. Строгое математическое решение рассмотренных задач, возникающих при проектировании элементов машин, летательных аппаратов, инженерных конструкций в рамках принятых математических моделей и гипотез дает возможность определить законы распределения контактных сил, действующих под армирующими элементами. Последние являются решающим фактором, определяющим прочность, долговечность и надежность современных машин, приборов и аппаратов.

Практическая значимость работы. Результаты диссертационной работы могут быть использованы при проектировании и расчетах на прочность и жесткость обшивки фюзеляжа, крыла и оперения самолета, а также при организации и проведении лабораторных испытаний перечисленных элементов самолета. Предложенные математические подходы и вычислительные методы могут быть использованы также в расчетах других инженерных конструкций, подкрепленных или армированных тонкостенными элементами, в строительстве дорожных и

аэродромных покрытий, при выборе сварочных и клеевых соединений, при расчете на прочность композиционных материалов. Разработанные расчетные методы и алгоритмы, эффективность которых была подтверждена на задачах данного исследования, могут быть использованы также для развития учебного курса конструкционной прочности машин в НПУА.

Диссертационная работа выполнена на кафедре Машиноведения НПУА в соответствии с планами исследовательских работ кафедры на 2014–2017 гг.

Основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

1. Постановка и методологический подход к решению новых контактных задач о взаимодействии тонкостенных элементов в виде стрингеров различных длин и с различными физическими свойствами с упругими телами, моделированными в виде упругой однородной бесконечной пластины.
2. Методы и вычислительные алгоритмы решения поставленных контактных задач в зависимости от параметров крыла и длин стрингеров для их двух разновидностей: а) пластина подкреплена сочетаниями бесконечных и конечных стрингеров; б) пластина подкреплена сочетаниями бесконечных и полубесконечных стрингеров.
3. Рекомендации для практики проектирования обшивки фюзеляжа, крыла и оперения самолета, разработанные на основе анализа численных результатов, полученных в достаточно широком диапазоне изменения физических и геометрических параметров стрингеров.

Апробация результатов исследования. Основные положения и результаты диссертации докладывались и обсуждались на: 74–й научно-методической и научно-исследовательской конференции "Детали машин и теория механизмов" (2 февраля 2016 г. Уфа, Россия); международной школе-конференции молодых ученых Mechanics–2016 (3–7 октября, 2016г., Цахкадзор, Армения); ежегодной научной конференции НПУА (2016г.); научных семинарах кафедры "Машиноведение" НПУА (2014–2017 гг.).

Публикации. Основные результаты исследования опубликованы в четырех научных статьях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, основных выводов, списка литературы из 119 наименований и приложений. Общий объем диссертации составляет 133 страницы, включая 62 рисунка и 1 таблицу. Диссертация написана на русском языке.

ГЛАВА 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

1.1. Структурная схема самолета и конструктивные схемы компоновки панели крыла и его механизации, фюзеляжа, хвостового оперения

С развитием современных методов расчетов на прочность, методов оптимизации, численных методов, а также в связи с проектированием прочных композиционных материалов авиационная промышленность получила бурное развитие.

Ввиду распространенности самой обширной областью авиационной промышленности является самолетостроение. Самолеты – составные механические устройства, состоящие из разных частей и конструктивных элементов, которые по назначению, функционированию и местоположению тесно взаимосвязаны. Упрощенная схема самолета представлена на рис. 1.1.1.

В современных самолетах широко применяются тонкостенные элементы, подвергающиеся разным воздействиям, которые укреплены ребрами жесткости. Ребра

жесткости обеспечивают прочность и жесткость конструкции при минимальной массе. Вышеуказанные тонкостенные элементы (обшивка) и в фюзеляже, и в крыле, и в оперении придают конструкции обтекаемую внешнюю форму.

Внешняя аэродинамическая нагрузка передается от обшивки к ее элементам, деформирующимся под воздействием продольного и поперечного силового набора. При этом под воздействием крутящего момента обшивка работает на чистый сдвиг, а под воздействием изгибающего момента совместно со стрингерами – на растяжение и сжатие [44, 112].

Исходя из предназначения, обшивка летающего аппарата в большинстве случаев выполняется из дюралюминиевых листов, а иногда, например, для самолетов с большой сверхзвуковой скоростью – из стали или титановых сплавов.

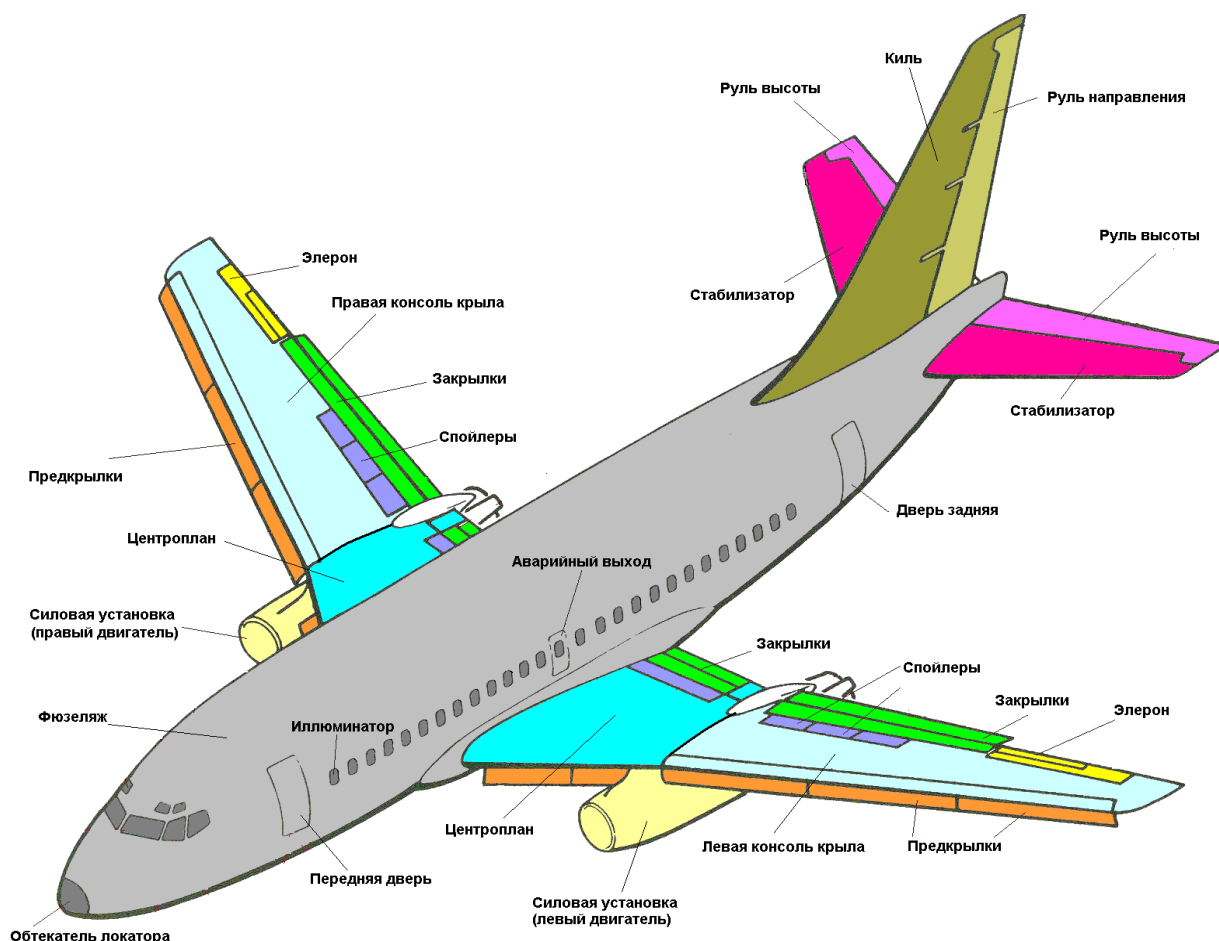


Рис. 1.1.1. Упрощенная схема самолета и конкретных его агрегатов и частей

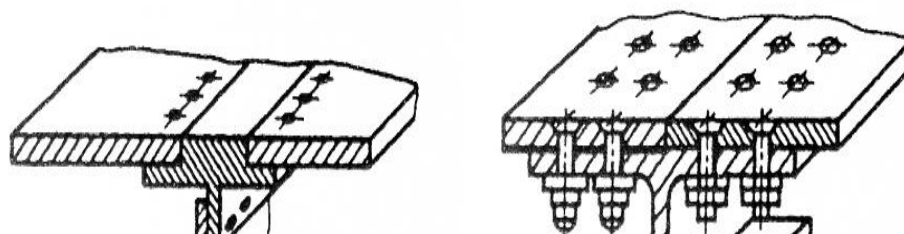


Рис. 1.1.2. Соединения обшивки со стрингерами

Толщина обшивки, в основном, составляет около 0,5...10 мм. Соединения листов обшивки со стрингерами показаны на рис. 1.1.2.

В случае растяжения обшивка разрушается при напряжениях $\sigma_{\text{разр}} = k\sigma_{\text{в}}$, где $k = 0,8...1,0$ – коэффициент, учитывающий концентрацию напряжений в местах соединений. Значение k зависит от типа соединения, например, для заклепочного соединения $k = 0,95$ (рис. 1.1.3) [44].

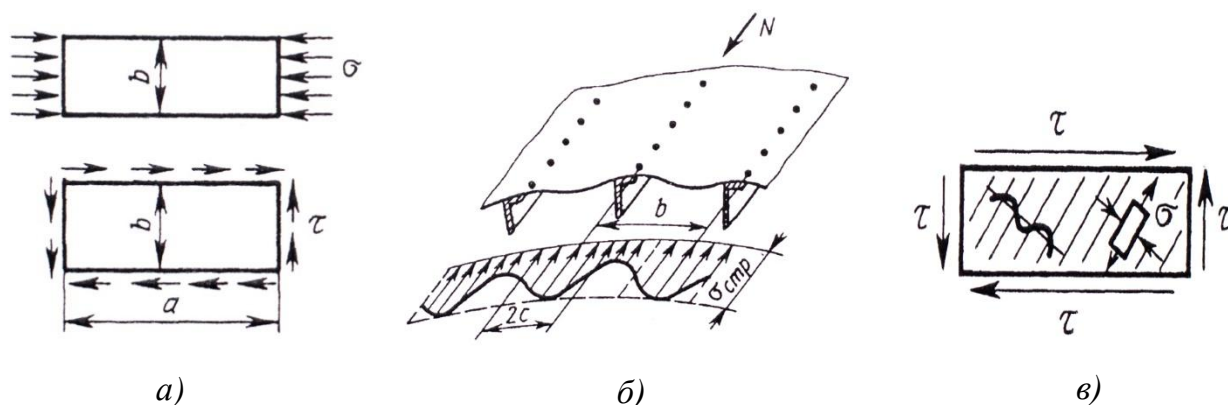


Рис. 1.1.3: *a* – схема нагружения элементов обшивки сжатием и сдвигом; *б* – работа панели, подкреплённой стрингерами, на осевые сжимающие силы. Распределение напряжений в элементах панели; *в* – работа элемента панели на сдвиг

Основной частью самолета является крыло. Крыло представляет собой одну из основных несущих поверхностей самолета, создающих аэродинамическую

подъемную силу, которая необходима для полета. Крыло способствует управляемости самолета, в него могут убираться шасси. С другой стороны, в крыле или под ним могут устанавливаться двигатели, во внутренней части размещаются элементы механизации крыла, баки топлива, вооружения и т.п. (см. рис. 1.1.4). В местах размещения агрегатов подкрепление панелей стрингерами прерывается, что математически моделируется в виде конечных, полубесконечных и бесконечных стрингеров.

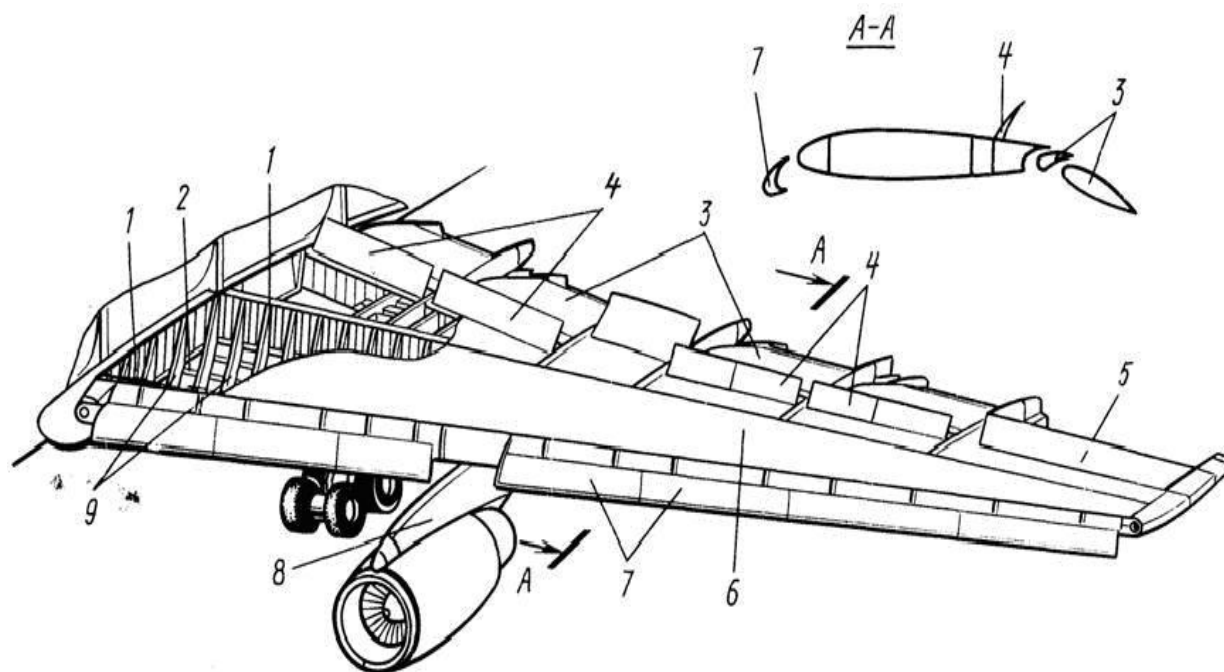


Рис. 1.1.4. Крыло современного пассажирского самолета: 1 – лонжероны, 2 – стенки и стрингеры, 3 – закрылки, 4 – интерцепторы, 5 – элероны, 6 – каркас, 7 – предкрылки, 8 – пилоны, 9 – нервюры

Стрингеры могут иметь различную форму сечения, например, открытое П – образное и закрытое П – образное. По способу изготовления стрингеры бывают гнутые (рис. 1.1.5 а, поз. 1–7) и прессованные (рис. 1.1.5 б, поз. 8–17).

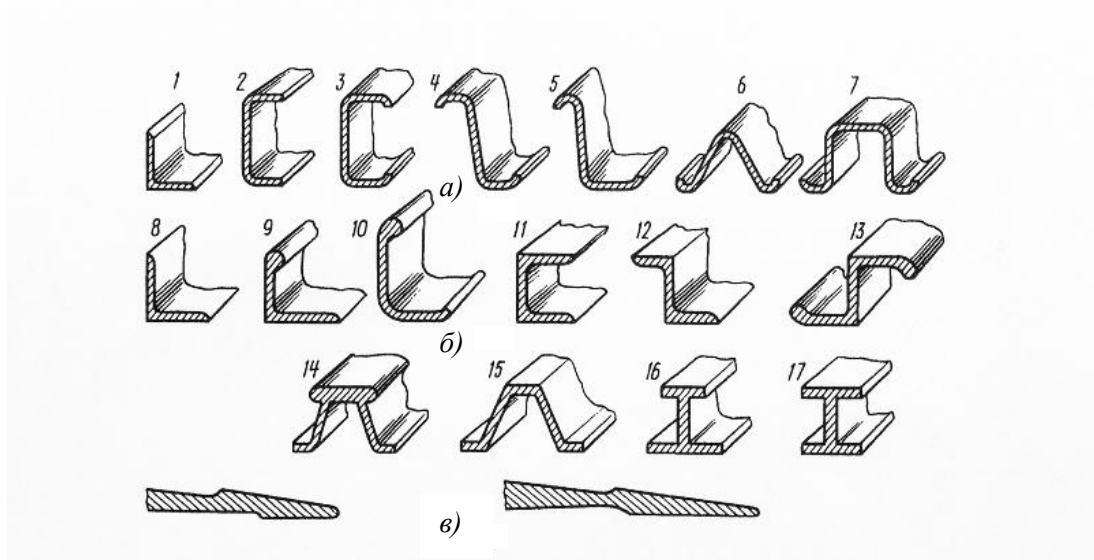


Рис. 1.1.5. Типовые профили стрингеров

На рис. 1.1.5 в представлены профили стрингера, которые предназначены для придания жесткости заднему краю крыла.

Кроме общих требований ко всему самолету, к крылу предъявляются дополнительные требования, такие как обеспечение по возможности наименьшей вариации параметров устойчивости и управляемости самолета, а также его аэродинамических свойств, когда самолет достигает сверхзвуковой скорости, как можно большего значения аэродинамических свойств и увеличения коэффициента подъемной силы путем механизации крыла (рис. 1.1.6). Вся механизация, приведенная на рис. 1.1.6, конструктивно представляет собой панели, подкрепленные стрингерами.

Так как крыло является основной несущей поверхностью самолета, то на его долю приходится от 30 до 50% тяжести летательного аппарата и от 30 до 50% полного сопротивления самолета. Отметим, что масса крыла относительно массы всего планера колеблется в пределах 0,08...0,15, что достигается оптимальным выбором размера толщины стенки панели и стрингера.

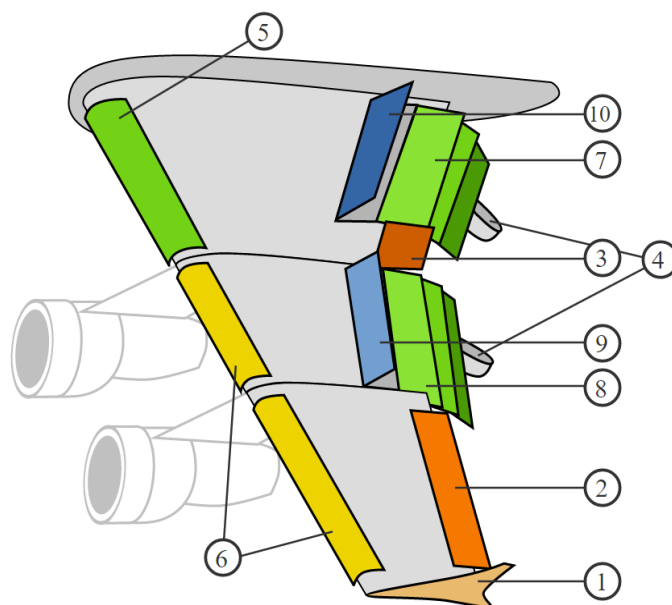


Рис. 1.1.6. Механизация крыла: 1 – аэродинамическая законцовка крыла, 2 – элерон, 3 – высокоскоростной элерон, 4 – обтекатели приводов закрылков, 5 – предкрылок Крюгера, 6 – предкрылки, 7, 8 – закрылки, 9 – интерцептор, 10 – спойлер

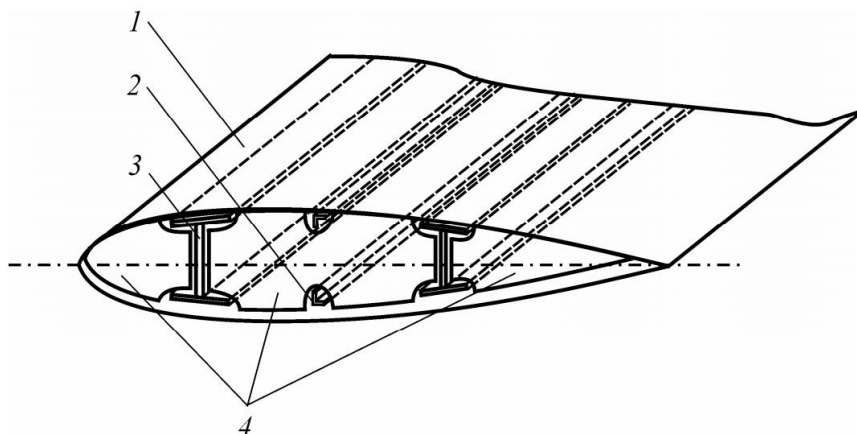


Рис. 1.1.7. Конструкция крыла: 1 – обшивка, 2 – стрингер, 3 – лонжерон, 4 – нервюра

На рис. 1.1.7 изображены стрингеры, усиливающие конструкцию крыла. Стрингеры являются продольными элементами жесткости, которые предназначены для подкрепления обшивки. Как правило, стрингеры обладают большей жесткостью, чем обшивки. Местные нагрузки, возникающие от изгибающего момента крыла

(осевые усилия), а также от воздушной нагрузки (поперечные силы), передаются от стрингеров к обшивке с меньшей величиной. Прочность стрингера определяется продольными усилиями, которые действуют в нем во время восприятия изгибающего момента крыла. В лонжеронных крыльях соотношение масс стрингеров и крыла может быть от 0,04 до 0,08, а в кессонных крыльях – от 0,25 до 0,30 [44].

Особенности в работе обшивки в фюзеляже детерминированы тем, что его герметизированные зоны принимают избыточное давление. Фюзеляж, как и крыло современного самолета, является тонкостенной оболочкой, которая в основном нагружена сосредоточенными силами и работает на изгиб и кручение. На этой основе между крылом и фюзеляжем имеется конструктивное сходство. Эта аналогия также приводит к одинаковому назначению основных силовых элементов.

Фюзеляж образован из каркаса с обшивкой. Каркас состоит из стрингеров, т.е. элементов продольного набора, и шпангоутов, т.е. элементов поперечного набора (рис. 1.1.8). От отдельных частей самолета сосредоточенные силы прикладываются к шпангоутам, с которых нагрузка передается к обшивке в виде касательных сил [48].

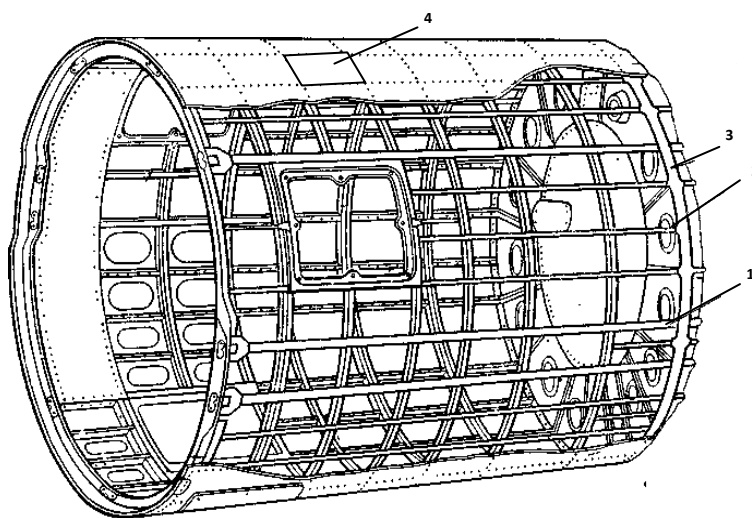


Рис. 1.1.8. Схема панелей фюзеляжа самолета: 1 и 2 – стрингеры, 3 – шпангоуты, 4 – элемент панели

Как было отмечено выше, от воздействия сосредоточенных сил фюзеляж работает на изгиб и кручение. От изгибающих моментов в стрингерах и обшивке возникают нормальные напряжения – осевые усилия. Крутящие моменты и поперечные силы создают в обшивке касательные напряжения. Таким образом, можем отметить, что стрингеры предназначены для подкрепления обшивки и увеличивают ее критические напряжения сдвига и сжатия.

По длине фюзеляжа присутствует ряд больших вырезов для доступа к грузам и оборудованию, шасси, вооружению, кабине, под бомбовые отсеки и т.д. В зоне вырезов нет стрингеров и обшивки, что приводит к ослаблению конструкции. Для возмещения этого ослабления по концам вырезов ставят усиленные шпангоуты, а в продольном направлении – усиленные стрингеры. При этом, чтобы стрингеры полностью включились в работу, они по длине фюзеляжа протянуты на некоторое расстояние за пределы выреза [48].

Несущую поверхность, предназначенную для обеспечения управляемости, устойчивости и балансировки летательного аппарата, называют оперением [43] (рис. 1.1.9).

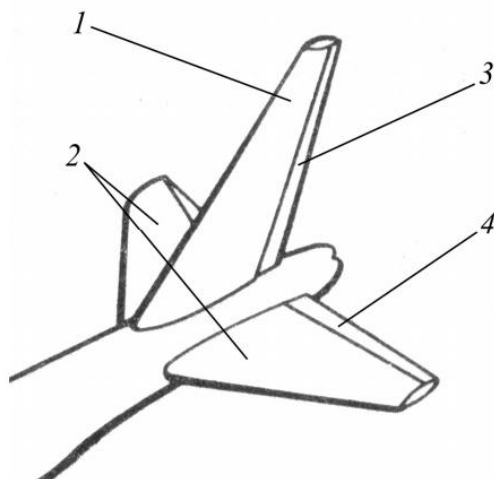


Рис. 1.1.9. Оперение самолета: 1 – киль, 2 – стабилизатор, 3 – руль направления, 4 – руль высоты

На вертикальное и горизонтальное оперения действуют массовые и распределенные аэродинамические силы, а на киль и стабилизатор в местах навески рулей – сосредоточенные силы.

Киль и стабилизатор имеют аналогичные конструкции, так же, как и рули высоты, и рули направления. Каркас оперения современных самолетов изготавливают из разных металлов, в то время как обшивки киля и стабилизатора выполнены из дюралюминия.

Основные элементы силового набора в оперении, подобно крыльям, работают следующим образом: изгибные напряжения передаются поясам лонжеронов, стрингерам и частично обшивке, в то время как поперечная сила передается стенке лонжеронов, а кручение – замкнутому контуру [43, 112].

1.2. Обзор прикладных контактных задач при исследовании подкрепленных панелей

Вопросы взаимодействия стрингеров и панели крыла, фюзеляжа, хвостового оперения рассматриваются в работе [64]. Согласно этой работе, панель образовывается полкой лонжерона, двумя стенками и двумя стрингерами (рис. 1.2.1). Стрингер деформируется под воздействием сжимающей силы, и требуется определить распределение усилий в конструкции. Решение поставленной задачи позволяет получить напряженно-деформированное состояние панели.

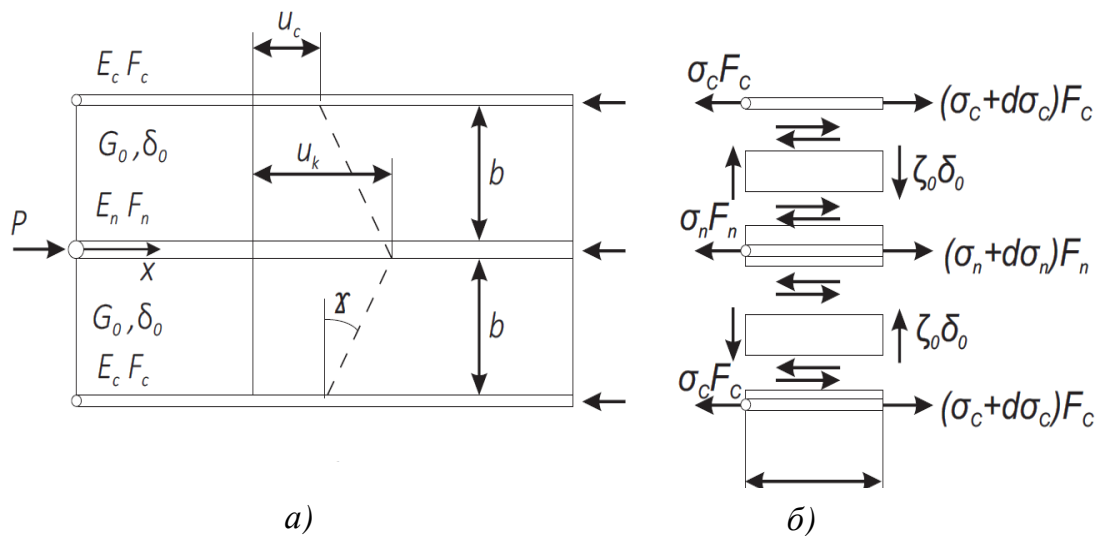


Рис. 1.2.1. Параметры подкрепленной панели (а) и ее напряженное состояние (б)

Разработке методики применения конечно-элементной дискретизации для численного моделирования задач строительной механики относительно различных компонентов самолета посвящена работа [65]. Указанная методика может быть успешно использована при исследовании объектов, представляющих собой панели, полученные оболочкой, которая подкреплена клепанными стрингерами. Стрингеры деформируются под воздействием сжимающей нагрузки. В исследовании [46] разработана методика численного моделирования элементов авиационных конструкций при вибрационном нагружении. Результаты работы позволяют выбрать

оптимальные геометрические параметры панелей [51]. С другой стороны, в работах [39, 40] исследуются вопросы бокового изгиба стрингеров на панели крыла с учетом эксцентricности расположения швов из заклепок. В [39] рассматривается возможность использования теории составного стержня на упругом основании, а в [40] использована модель составного стержня на дискретном упругом основании. Работы [42, 54, 97] посвящены расчетам на прочность крыла [42], фюзеляжа [54], элементов конструкции самолета с применением пакета программ MSC/NASTRAN [97]. В работе [95] рассматривается расчетная модель напряженно-деформированного состояния авиационных конструкций с помощью трехмерных конечных элементов.

Ряд работ [3, 63, 86, 88, 89, 93] посвящены методам расчета конструкции самолета и его элементов на прочность и жесткость, включающим силовой расчет, определение напряженно-деформированного состояния, подробный анализ которых позволяет произвести подбор сечения силовых элементов стрингерного отсека. Указанные исследования представлены в виде аналитического и численного моделирования с использованием метода конечных элементов и современных программ. Кроме того, рассмотрены вопросы надежности элементов конструкции [89].

В работе [18] представлены задачи статики, динамики и устойчивости элементов конструкции крыла, в частности, стрингеров, оболочек и пластин. Внимание уделяется вариационным и численным методам. Методика расчетов круговых цилиндрических оболочек с помощью конечно-элементной модели конструкции, для которой используются конечные элементы SHELL и SOLID, предложена в работе [45].

В [52] исследованы возможности укрепления поверхностей тонкостенных элементов летательных аппаратов с помощью метода поверхностной пластической деформации.

Некоторые особенности проектирования крыла летательного аппарата из композиционных материалов с учетом закритического поведения обшивки рассмотрены в работе [58].

Теоретическое исследование вопроса устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки с отверстием при продольном сжатии и внешнем давлении приведено в [81], где получено аналитическое выражение зависимости для критических нагрузок.

Указанные вопросы устойчивости тонкостенных оболочек продолжены в [49], согласно которой контуры тонкой оболочки закреплены четырьмя различными способами. Математическая модель представляется в виде функционала полной энергии деформации. Для решения задач использован функциональный метод Ритца. Результаты расчета задач получены с помощью метода последовательного решения по наилучшему параметру.

Представленные математические методы теории упругости позволяют решать большой спектр задач. Однако для оценки полученных результатов желательно иметь экспериментальные данные, в связи с чем предлагается способ экспериментального моделирования напряженно-деформированного состояния авиационной панели, состоящей из прямоугольной обшивки, нагруженной продольными и поперечными силами [71]. По результатам экспериментального моделирования предлагаются стрингеры специальной конструкции для панелей в самолетостроении и судостроении, формы поперечных сечений которых позволяют значительно улучшить прочностные и жесткостные характеристики панелей [69, 70]. Параметры конструкции обшивка-стрингер в случае учета усталостных нагрузений рассмотрены в работе [68].

В работах [20, 23, 24, 73, 92] излагаются вопросы проектирования элементов конструкции самолета, приведены справочные материалы, позволяющие определить предварительные параметры конструкции, по которым возможно проведение дальнейших уточняющих расчетов либо аналитическим, либо численными методами.

Работа [53] посвящена анализу воздействия нестационарной распределенной нагрузки на тонкослойную обшивку летательного аппарата, которая моделируется как упругий однородный бесконечный слой, имеющий постоянную толщину. Для решения используется метод совместного применения преобразований Лапласа и Фурье. Именно интегральное преобразование Фурье использовано в представленной

диссертационной работе при решении задачи упругой бесконечной пластины, подкрепленной различными комбинациями бесконечных и конечных, а также полубесконечных и бесконечных стрингеров.

1.3. Развитие контактных задач теории упругости

Задача о передаче нагрузки от стрингеров к упругим телам впервые была рассмотрена Е. Меланом [113] в 1932 году. Рассматриваются две фундаментальные задачи, тесно связанные с вопросами передачи нагрузки. Первая задача относится к передаче продольной сосредоточенной силы от бесконечного стрингера к полубесконечной упругой пластине. Целью второй задачи является определение напряженно-деформированного состояния бесконечной пластины, на поверхности которой наклеен бесконечный стрингер. В первой задаче изгибная жесткость стрингера не принимается в расчет, а во второй задаче предполагается, что пластина находится в обобщенном напряженно-деформированном состоянии, в то время как стрингер рассматривается как одномерный упругий континуум.

Во второй задаче действует гипотеза идеального контакта по линии между пластиной и стрингером, т.е. предполагается, что силы скрепления, которые возникают в пластине, представляются в виде сосредоточенной нагрузки по линии. Принимая в расчет эти предположения, обе задачи имеют одинаковую математическую формулировку и решаются, основываясь на представлении функции напряжений Эйри с помощью интегрального преобразования, выбранного так, чтобы касательные контактные напряжения относительно точки приложения сосредоточенной силы были симметричны и равнялись нулю в бесконечности, а также чтобы контактные напряжения между ребром жесткости и пластиной были равны нулю. Эти условия следуют из геометрических соображений и предположения о том, что стрингер деформируется лишь в одноосном напряженном состоянии. При решении первой задачи используется условие жесткого контакта, и относительно искомой функции получается интегральное уравнение, которое решается в явном

виде при помощи косинус-преобразования Фурье. Тем же методом решена вторая задача.

В последующих исследованиях были рассмотрены контактные задачи для бесконечных и конечных стрингеров, контактирующих с бесконечными и полубесконечными пластинами. Одно из первых исследований контакта между стрингером конечной длины и бесконечной пластиной проводилось в [102]. Контакт между полубесконечным стрингером и полубесконечной пластиной был исследован в [106].

Первая задача Мелана неоднократно пересматривалась с целью уточнения. Ограничиваясь стрингером прямоугольного поперечного сечения, в [107] рассмотрение осуществляется плоскими деформациями стрингера и пластины, т.е. имеют место соотношения двумерной теории упругости. Далее в [60, 61] к контактирующей паре (пластина-стрингер) применяется модель обобщенного плоского напряженного состояния, при этом изгибная жесткость стрингера рассматривается в рамках обычной теории балок. На основе уточненных моделей обнаружено, что, хотя порядок сингулярности касательных напряжений сохраняется, характер распределения этих напряжений изменяется исходя из выбора модели ребра жесткости. С другой стороны, показано, что в случае удаления от нагруженного сечения стрингеров решения уточненной модели и модели Мелана совпадают.

В дальнейшем задачи Мелана были обобщены и пересмотрены в различных исследованиях, в том числе в [91, 99, 103, 105, 111]. При этом рассматриваются не только точные, но и численные (приближенные) решения исследуемых контактных задач. Были предложены также разные модификации задачи Мелана. Например, в [117] рассматривается случай стрингера переменной жесткости, пересмотрены в [60] при двух различных способах крепления стрингера: контакт по линии и контакт по поверхности. Рассмотрен также контакт конечного стрингера переменного сечения с бесконечной пластиной [25]. Вторая задача Мелана обобщена на случай нескольких стрингеров в [21, 29, 82, 83]. Интенсивно рассматриваются также задачи усиления стрингерами пластин, которые ослаблены разрезами, щелями или трещинами [9, 104, 108, 119]. Обзорный анализ дальнейшего развития теории и практики контактных и

смешанных задач теории упругости более подробно описан в [10, 12, 13, 19, 26, 57, 59, 98].

Существенен вклад армянской школы механиков также и в области контактных и смешанных задач теории упругости. Н.Х. Арутюняном [14, 15, 100, 101] была поставлена и решена периодическая контактная задача для полуплоскости, к краю которой прикреплена периодическая система упругих конечных стрингеров. Решение задачи сведено к вполне регулярной или вполне квазрегулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Задача Арутюняна пересматривалась в [47, 55]. Дальнейшее развитие контактных задач получено его учениками [7, 31, 114].

Решен ряд контактных задач для бесконечной пластины, усиленной стрингерами разных длин, предложены разные математические методы для анализа напряженно-деформированного состояния. В работе [29] исследована контактная задача бесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными стрингерами, которые находятся на одной линии. Решение задачи сводится к решению интегрального уравнения относительно деформации пластины конечного промежуточного интервала между стрингерами. Аналогичная задача решена в работе [8]. Задачи с полубесконечными стрингерами исследованы в [34, 37]. В [36] рассмотрена контактная задача для пластины, которая усилена двумя бесконечными параллельными стрингерами. Для более полного обзора см. работы [1, 2, 11, 77].

1.4. Выводы по первой главе

1. Расчеты на прочность элементов конструкции самолета (обшивки фюзеляжа, крыла и оперения) проводятся, в основном, либо методом конечных элементов, либо по результатам экспериментальных исследований. Высокие требования, предъявляемые инженерами и проектировщиками к точности определения напряженного состояния в упругом теле, находящемся под воздействием

другого тела, являются весомым фактором для развития математических методов моделирования конструкций.

2. Значительное число контактных задач решается с применением точного математического аппарата, однако, в большинстве случаев отсутствуют их конкретные практические приложения. Указанные задачи непосредственно связаны с важными, с точки зрения инженерной практики, вопросами передачи нагрузки от тонкостенных элементов к массивным телам и имеют существенное значение, в частности, при расчете авиационных конструкций обшивок, усиленных упругими стрингерами. Обшивку фюзеляжа, крыла и оперения самолета можно моделировать в виде бесконечной пластины, усиленной стрингерами различных длин.
3. Развитый математический аппарат контактных задач теории упругости может быть успешно применен при проектировании и расчетах на прочность панелей и прочих конструктивных элементов различных летательных аппаратов.

ГЛАВА 2. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ И БЕСКОНЕЧНЫМИ УПРУГИМИ СТРИНГЕРАМИ

2.1. Основные соотношения плоской задачи теории упругости

В самом общем случае при исследовании напряженно-деформированного состояния упругих тел следует рассмотреть пространственные задачи теории упругости. Однако в специальных частных случаях нагружения, ввиду малости третьего измерения, в основном, можно ограничиться рассмотрением всего лишь двух взаимно перпендикулярных измерений [50, 56, 90]. Задачу определения напряженно-деформированного состояния в этих двух измерениях часто называют плоской задачей теории упругости. Плоскую задачу можно рассмотреть, например, для тонких пластин или оболочек, деформируемых в своих плоскостях.

Плоская задача теории упругости включает в себя задачи плоской деформации, плоского напряженного состояния и обобщенного плоского напряженного состояния. Несмотря на то обстоятельство, что эти задачи различны по существу и формулировке, математически они идентичны, т.е. эквивалентны определенным схожим (одинаковым) краевым задачам [56]. Это обстоятельство позволяет построить решение плоских задач теории упругости одинаковыми математическими (точными и численными) методами.

Не останавливаясь отдельно на особенностях рассмотрения этих задач, приведем здесь лишь некоторые соотношения и уравнения, которые будут использованы нами в дальнейшем при составлении математических моделей, рассматриваемых в настоящей диссертационной работе контактных задач.

Известно, что в общем случае плоской задачи напряженное состояние в упругом изотропном теле определяется тремя компонентами тензора напряжений: нормальными напряжениями $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y)$ и напряжением сдвига $\sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y)$. При отсутствии массовых (объемных) сил эти компоненты тензора напряжений удовлетворяют системе дифференциальных уравнений равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Если рассмотреть плоскую деформацию тела, при которой компоненты вектора упругих перемещений имеют вид

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0,$$

то для компонентов тензора деформаций, согласно (линейным) соотношениям Коши, будем иметь

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (2.1.2)$$

Здесь $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(x, y)$ – относительная деформация тела в направлении действия σ_{xx} ; $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}(x, y)$ – в направлении действия σ_{yy} ; $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}(x, y)$ – деформация сдвига. Выше при получении соотношений (2.1.2) была учтена малость компонентов тензора деформаций, т.е. $\varepsilon_{xx}^2, \varepsilon_{yy}^2, \varepsilon_{xy}^2 \ll 1$.

Поскольку, согласно (2.1.2), относительные деформации $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ и ε_{xy} выражаются через компоненты вектора перемещений u и v , то имеет место условие совместимости деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Если рассматриваемое тело является изотропным и однородным, то обобщенный закон Гука, устанавливающий связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций, будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda\theta_1 + 2\mu\varepsilon_{xx}, \\ \sigma_{yy} = \lambda\theta_1 + 2\mu\varepsilon_{yy}, \\ \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Здесь λ и μ – коэффициенты Ламе материала, а $\theta_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ – объемное расширение тела.

Решая (2.1.3) относительно компонентов тензора деформаций, получим обратную связь:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}. \end{cases}$$

Здесь E – модуль упругости (Юнга); ν – коэффициент Пуассона материала тела. Связь между модулем упругости, коэффициентом Пуассона и коэффициентами Ламе дается соотношениями

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Коэффициенты Ламе λ и μ также можно выразить через E и ν , однако это зависит от типа деформированного состояния тела. В частности, при плоском деформированном состоянии имеем

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

а при обобщенном плоском напряженном состоянии:

$$\lambda^* = \frac{E\nu}{1+\nu^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.1.4)$$

Бесконечные пластины в рамках контактных задач теории упругости, исследуемых в данной диссертационной работе, деформируются исключительно в обобщенном плоском напряженном состоянии, следовательно, в дальнейшем будем пользоваться соотношениями (2.1.4).

Дифференциальные уравнения (2.1.1) при помощи соотношений (2.1.3) можно выразить в форме Ламе

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \mu \Delta u &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \mu \Delta v &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

где функция объемного расширения θ_1 , очевидно, удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией

$$\Delta \theta_1 \equiv \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} = 0.$$

Имея в виду соотношения Коши (2.1.2), для функции объемного расширения будем иметь следующее представление:

$$\theta_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Подставляя полученное выражение в систему уравнений Ламе (2.1.5), окончательно получим

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Таким образом, система взаимосвязанных дифференциальных уравнений (2.1.6) описывает упругие перемещения в однородном изотропном теле при малых деформациях. При этом, если исследуемое тело деформируется в обобщенном плоском напряженном состоянии, то в уравнениях Ламе (2.1.6) вместо коэффициента λ будет фигурировать λ^* из (2.1.4).

Существуют разные математические методы для точного решения краевых задач для системы Ламе (2.1.6). Более подробно см. в работах [22, 62, 72]. В данной диссертационной работе систематически используется метод решения краевых задач, основанный на методе функции Грина и обобщенном преобразовании Фурье, который описывается в следующем разделе.

2.2. Вектор-функция влияния для однородной бесконечной пластины

В математической теории упругости функция, с помощью которой можно определить упругие смещения при единичных сосредоточенных силах, называется функцией влияния, функцией источника или же функцией Грина. Далее, используя представление Грина общего решения линейных краевых задач, удастся построить упругие смещения при произвольных воздействиях.

В этом разделе определим вектор-функцию влияния для однородной бесконечной упругой пластины малой постоянной толщины h , которая находится под действием сосредоточенной силы $P\delta(x)\delta(y)$ ($\delta(x)$ – функция Дирака), приложенной к точке $(0,0)$ пластины. Поскольку пластина бесконечна по направлениям x и y , то решение будет строиться с помощью действительного обобщенного интегрального преобразования Фурье [74, 84, 96]. Предполагается, что для пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния.

Поставленную задачу математически можно сформулировать при помощи уравнений Ламе (2.1.6) следующим образом [66]:

$$\begin{cases} (\lambda^* + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda^* + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + P\delta(x)\delta(y) = 0, \\ (\lambda^* + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda^* + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$$(-\infty < y < \infty, -\infty < \sigma < \infty),$$

где $u(x; y)$ и $v(x; y)$ – соответственно горизонтальные и вертикальные перемещения точек бесконечной упругой пластины.

Применив к (2.2.1) обобщенное преобразование Фурье по переменной $-\infty < x < \infty$, получим

$$\begin{cases} -\sigma^2 (\lambda^* + 2\mu) \bar{u} - i\sigma (\lambda^* + \mu) \frac{d\bar{v}}{dy} + \mu \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + P\delta(y) = 0, \\ (\lambda^* + 2\mu) \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - i\sigma (\lambda^* + \mu) \frac{d\bar{u}}{dy} - \sigma^2 \mu \bar{v} = 0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$(-\infty < y < \infty, -\infty < \sigma < \infty),$$

где

$$\bar{u}(\sigma; y) = F[u(x; y)], \quad \bar{v}(\sigma; y) = F[v(x; y)];$$

σ – параметр, а $F[\square]$ – оператор преобразования Фурье:

$$F[g(x)] = \bar{g}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\sigma x} dx.$$

Выше при получении системы (2.2.2) были использованы следующие формулы [74]:

$$F[\delta(x)] = 1, \quad F\left[\frac{d^n g}{dx^n}\right] = (-i\sigma)^n \bar{g}(\sigma).$$

Так как характеристическая система уравнений (2.2.2) имеет кратные корни в точках $\pm|\sigma|$, то решение этой системы следует искать в следующем виде [66]:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\sigma; y) &= \begin{cases} (a_1 + a_2 y) e^{-|\sigma|y}, & y > 0, \\ (a_3 + a_4 y) e^{|\sigma|y}, & y < 0, \end{cases} \\ \bar{v}(\sigma; y) &= \begin{cases} (b_1 + b_2 y) e^{-|\sigma|y}, & y > 0, \\ (b_3 + b_4 y) e^{|\sigma|y}, & y < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

где a_i, b_i ($i=1,2,3,4$) – неизвестные постоянные интегрирования, подлежащие определению.

Решение (2.2.3) ограничено при $y \rightarrow \pm\infty$. С другой стороны, учитывая, что это решение обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\sigma; -y) &= \bar{u}(\sigma; y), \\ \bar{v}(\sigma; -y) &= -\bar{v}(\sigma; y), \end{aligned}$$

для коэффициентов a_i, b_i получим

$$a_1 = a_3, \quad a_2 = -a_4,$$

$$b_1 = -b_3, \quad b_2 = b_4.$$

Следовательно, для решения (2.2.3) получим

$$\begin{cases} \bar{u}(\sigma; y) = (a_1 + a_2 |y|) e^{-|\sigma||y|}, \\ \bar{v}(\sigma; y) = (b_1 + b_2 |y|) e^{-|\sigma||y|} \text{sign } y. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Подставляя решение (2.2.4) в систему (2.2.2), с учетом того, что функции $|y|$, $\text{sign } y$, $\delta(y)$ и $\delta'(y)$ являются линейно независимыми, для искомого коэффициентов a_i, b_i получим

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{P(\lambda^* + 3\mu)}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|}, & a_2 &= -\frac{P(\lambda^* + \mu)}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}, \\ b_1 &= 0, & b_2 &= \frac{P(\lambda^* + \mu)}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} i \text{sign } \sigma. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Подставляя значения коэффициентов (2.2.5) в (2.2.4), для трансформантов Фурье горизонтальных и вертикальных перемещений упругой бесконечной пластины окончательно получим

$$\begin{cases} \bar{u}(\sigma; y) = \left[\frac{P(\lambda^* + 3\mu)}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{P(\lambda^* + \mu)}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} |y| \right] e^{-|\sigma||y|}, \\ \bar{v}(\sigma; y) = \frac{P(\lambda^* + \mu)}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} i \text{sign } \sigma y e^{-|\sigma||y|}, \end{cases} \quad (2.2.6)$$

$$(-\infty < y < \infty, -\infty < \sigma < \infty).$$

Применив к (2.2.6) обратное обобщенное интегральное преобразование Фурье, определяемое операцией

$$F^{-1}[g(\sigma)] = g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\sigma) e^{-i\sigma x} dx,$$

получим поле упругих перемещений, возникающих в упругой бесконечной пластине, подверженной воздействию сосредоточенной силы $P\delta(x)\delta(y)$.

Описанный метод широко использовался при решении разных видов контактных и смешанных задач теории упругости [4–9, 16, 27–38, 41, 66, 67, 77–80, 108–110, 114–116].

2.3. Математическое моделирование контактной задачи для однородной бесконечной упругой пластины, усиленной двумя конечными и одним бесконечным упругими стрингерами

Конструктивные схемы панелей (обшивка, подкрепленная стрингерами) зависят от компоновки различных агрегатов (шасси, подвеска двигателей (рис. 2.3.1), топливные баки, технические люки (рис. 2.3.2) и т.п. (рис. 1.1.4)), установка которых приводит к нарушению непрерывности стрингеров в обшивке.



Рис. 2.3.1. Компоновка двигателя и шасси в крыле самолета



Рис. 2.3.2. Установка агрегатов механизации крыла и технических люков

Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой однородной бесконечной пластины малой постоянной толщины h на линиях $y = b$ и $y = -b$ ($b > 0$) отрезка $-a \leq x \leq a$ ($a > 0$) своей верхней поверхности содержит два параллельных конечных, а на линии $y = 0$ – один бесконечный стрингер с разными упругими свойствами и достаточно малыми одинаковыми поперечными сечениями. Предполагается, что относительно горизонтальной оси симметрично расположенные упругие конечные стрингеры имеют одинаковые упругие свойства, а бесконечный стрингер – другие упругие свойства.

Цель исследования заключается в определении закона распределения интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий вдоль линий скрепления упругих конечных и бесконечного стрингеров с упругой сплошной изотропной однородной бесконечной пластиной и, тем самым, определении взаимовлияния упругих конечных и бесконечного стрингеров, когда контактирующая пара (пластина-стрингер) деформируется осевыми сосредоточенными силами P , приложенными к концам упругих конечных стрингеров (см. рис. 2.3.3).

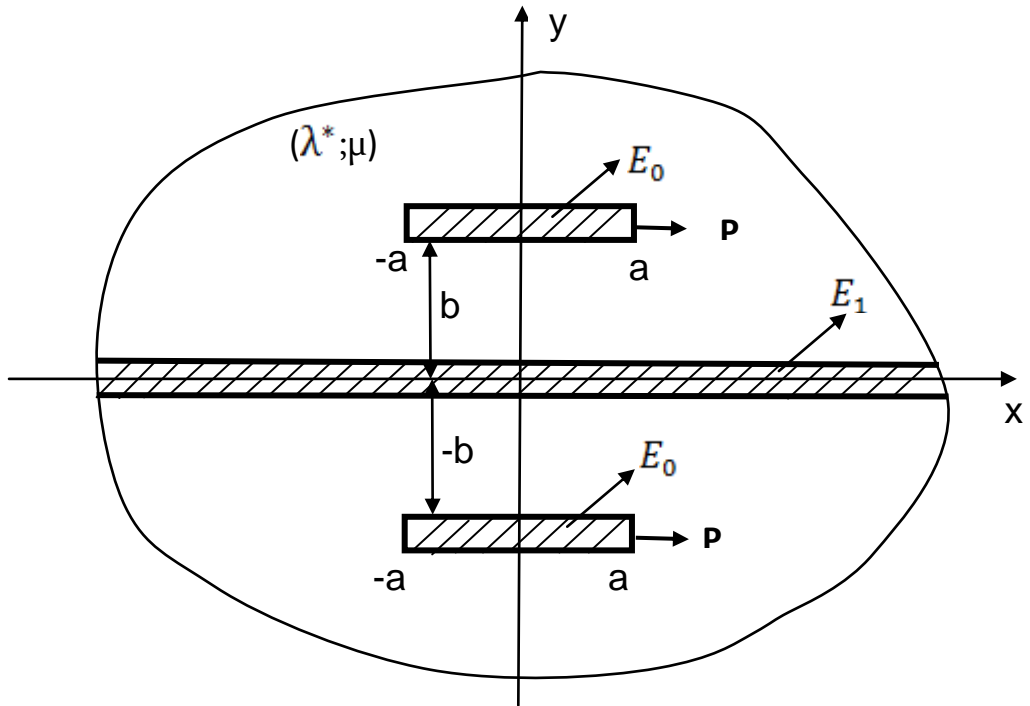


Рис. 2.3.3. Схема рассматриваемой контактной задачи

В рассматриваемой контактной задаче для упругих стрингеров принимается модель одноосного напряженного состояния в сочетании с моделью контакта по линии, т.е. считается, что распределения интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий сосредоточено вдоль средних линий контактных участков, и предполагается, что стрингеры не подвергаются изгибу. Относительно упругой сплошной изотропной однородной бесконечной пластины считается справедливой модель обобщенного плоского напряженного состояния [87].

Обращаясь теперь к выводу разрешающих функциональных уравнений поставленной контактной задачи, заметим, что упругие бесконечный и конечный стрингеры в горизонтальном направлении растягиваются или сжимаются, находясь в одноосном напряженном состоянии.

Теперь известно, что если в любой точке пластины приложена осевая сосредоточенная сила, то трансформанты Фурье горизонтальных и вертикальных перемещений пластины определяются формулой (2.2.6).

Для трансформантов Фурье горизонтальных перемещений на линиях контакта пластины и конечных и бесконечного стрингеров $y=0$ и $y=\pm b$ соответственно получим

$$\bar{u}(\sigma; y) = \frac{\bar{\tau}(\sigma; 0)}{h} \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot |y| \right] e^{-|\sigma||y|}, \quad (2.3.1)$$

$$\bar{u}(\sigma; y + b) = \frac{\bar{\tau}(\sigma; -b)}{h} \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot |y + b| \right] e^{-|\sigma||y+b|}, \quad (2.3.2)$$

$$\bar{u}(\sigma; y - b) = \frac{\bar{\tau}(\sigma; b)}{h} \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot |y - b| \right] e^{-|\sigma||y-b|} \quad (2.3.3)$$

$$(-\infty < \sigma; y < \infty).$$

Далее, учитывая симметричную расположенность конечных стрингеров относительно горизонтальной оси, получим

$$\bar{u}(\sigma; b) = \bar{u}(\sigma; -b) \quad (-\infty < \sigma < \infty), \quad (2.3.4)$$

а следовательно, и

$$\bar{\tau}(\sigma; b) = \bar{\tau}(\sigma; -b) \quad (-\infty < \sigma < \infty), \quad (2.3.5)$$

т.е. трансформанты Фурье функций горизонтальных перемещений, а также тангенциальных контактных напряжений на линиях $y=b$ и $y=-b$ принимают одинаковые значения. Ниже для записи этих функций будем использовать только $\bar{u}(\sigma; b)$ и $\bar{\tau}(\sigma; b)$ соответственно.

Теперь, учитывая соотношения (2.3.1) – (2.3.5), для трансформантов Фурье горизонтальных перемещений окончательно получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\sigma; b) &= \frac{\bar{\tau}(\sigma; -b)}{h} \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - 2b \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \right] e^{-2b|\sigma|} + \\
&+ \frac{\bar{\tau}(\sigma; 0)}{h} \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - b \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \right] e^{-b|\sigma|} + \\
&+ \frac{\bar{\tau}(\sigma; b)}{h} \frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|},
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\sigma; 0) &= \frac{\bar{\tau}(\sigma; b)}{h} \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - b \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \right] e^{-b|\sigma|} + \\
&+ \frac{\bar{\tau}(\sigma; 0)}{h} \frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|}
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

$$(-\infty < \sigma < \infty).$$

Так как относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, то дифференциальные уравнения равновесия стрингеров на линиях $y=0$ и $y=b$ будут иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 u_s(x; 0)}{dx^2} = \frac{1}{E_1 F} \tau(x; 0) \tag{2.3.8}$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

$$\frac{d^2 u_s(x; b)}{dx^2} = \frac{1}{E_0 F} \int_{-a}^x \tau(s; b) ds \tag{2.3.9}$$

$$(-a < x < a)$$

соответственно, где F – площадь поперечного сечения стрингеров; $\tau(x; 0)$ и $\tau(x; b)$ – интенсивности тангенциальных контактных усилий, которые возникают под бесконечным и конечными стрингерами; $u_s(x; b)$ и $u_s(x; 0)$ – горизонтальные

перемещения точек на линиях $y = b$ и $y = 0$; E_1 – модуль упругости бесконечного струнгера; E_0 – модуль упругости конечных струнгеров.

Применив к уравнению (2.3.8) преобразование Фурье, получим

$$-\sigma^2 \bar{u}_s(\sigma; 0) = \frac{1}{E_1 F} \bar{\tau}(\sigma; 0) \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (2.3.10)$$

Далее, имея в виду условие контакта

$$\bar{u}_s(\sigma; 0) = \bar{u}(\sigma; 0) \quad (-\infty < \sigma < \infty), \quad (2.3.11)$$

на основе (2.3.6) и (2.3.10) получим связь между трансформантами Фурье интенсивностей тангенциальных контактных напряжений на линиях контакта $y = 0$ и $y = b$:

$$\bar{\tau}(\sigma; 0) = 2 \frac{bk\sigma^2 - |\sigma|}{T_1 + |\sigma|} e^{-b|\sigma|} \bar{\tau}(\sigma; b) \quad (-\infty < \sigma < \infty), \quad (2.3.12)$$

где

$$T_1 = \frac{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}{\lambda^* + 3\mu} \frac{h}{E_1 F}.$$

Следовательно, на основе (2.3.7) и (2.3.12) между трансформантами Фурье функции горизонтальных перемещений пластины и интенсивности тангенциальных контактных напряжений на линии контакта $y = b$ получим следующее соотношение:

$$\bar{u}(\sigma; b) = \frac{1}{T_1} \left(\frac{T_1 - 2bkT_1|\sigma| - b^2k^2|\sigma|^3}{|\sigma|(T_1 + |\sigma|)} e^{-2b|\sigma|} + \frac{1}{|\sigma|} \right) \cdot \frac{1}{E_1 F} \bar{\tau}(\sigma; b) \quad (2.3.13)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty),$$

при этом здесь введено следующее обозначение:

$$k = \frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 3\mu}.$$

Теперь, применяя обратное преобразование Фурье к (2.3.13) и учитывая условие контакта

$$\frac{du(x; \mathbf{b})}{dx} = \frac{du_s(x; \mathbf{b})}{dx} \quad (-a \leq x \leq a), \quad (2.3.14)$$

на основе (2.3.11) относительно интенсивности тангенциальных контактных напряжений на линии $y = 0$, $\tau(x; 0)$, возникающих в конечном стрингере, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{s-x} + R_1(s-x) \right] \tau(s; b) ds = T_0 \int_{-a}^x \tau(s; b) ds \quad (2.3.15)$$

$$(-a < x < a),$$

где введены следующие обозначения:

$$R_1(x) = \int_0^{\infty} \frac{T_1 - 2bkT_1\sigma - b^2k^2\sigma^3}{T_1 + \sigma} e^{-2b\sigma} d\sigma, \quad (2.3.16)$$

$$T_0 = \frac{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}{\lambda^* + 3\mu} \frac{h}{E_0F}.$$

Заметим, что сингулярное интегральное уравнение (2.3.15) надо решать при наличии условия равновесия конечного стрингера:

$$\int_{-a}^a \tau(s; b) ds = P. \quad (2.3.17)$$

Следует отметить, что ядро сингулярного интегрального уравнения (2.3.15) состоит из сингулярной (ядро Коши) и регулярной ($R_1(s-x)$) частей.

2.4. Расчет контактных и нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах

В этом разделе численно исследуется контактная задача, изложенная в разделе 2.3. Поскольку задача математически сформулирована в виде сингулярного интегрального уравнения первого рода, состоящего из сингулярной и регулярной частей, то будем использовать метод дискретных особенностей, разработанный в [75, 76, 118].

Для удобства вычислений перейдем к безразмерным переменным и величинам

$$\frac{x}{a}, \quad \varphi(x) = \frac{a}{P} \tau(x; b),$$

$$A_0 = \frac{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}{\lambda^* + 3\mu} \frac{ha}{FE_0}.$$

Тогда из уравнений (2.3.15) – (2.3.17) соответственно будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-x} + R(x-s) \right] \varphi(s) ds = A_0 \int_{-1}^x \varphi(s) ds \quad (2.4.1)$$

$$(-1 < x < 1),$$

$$\int_{-1}^1 \varphi(s) ds = 1, \quad (2.4.2)$$

где

$$R(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{aT_1 + \sigma} \left(aT_1 - 2bkT_1\sigma - k^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sigma^3 \right) e^{-\frac{2b}{a}\sigma} \sin(\sigma x) d\sigma. \quad (2.4.3)$$

Согласно методу дискретных особенностей, решение сингулярного интегрального уравнения будем искать в виде

$$\varphi(t) = \frac{\phi(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (2.4.4)$$

С целью решения задачи используем квадратурные формулы

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi(x)}{x-z} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\phi(\xi_k)}{\xi_k - z} [1 - Q_k(z)] \quad (z \in \square, z \neq \pm 1), \quad (2.4.5)$$

$$\int_{-1}^x \frac{\phi(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(\xi_k) \left[\arcsin x + \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{T_m(\xi_k) U_{m-1}(x)}{m} \right], \quad (2.4.6)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{R(t-x)\phi(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n R(\xi_k - t)\phi(\xi_k), \quad (2.4.7)$$

где $\xi_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ ($k=1, 2, \dots, n$) – корни многочлена Чебышева первого рода

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ($|x| \leq 1$) [85], а функции $Q_k(z)$ определяются формулой

$$Q_j(z) = \begin{cases} \frac{1}{U_{n-1}(\xi_j)} \left[U_{n-1}(z) - \frac{T_n(z)}{\sqrt{z^2-1}} \right] & \text{при } z \notin [-1, 1], \\ \frac{U_{n-1}(z)}{U_{n-1}(\xi_j)} & \text{при } z \in (-1, 1). \end{cases}$$

Здесь $U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)}$ ($|x| \leq 1$) – многочлены Чебышева второго рода [85].

Заменяя интегралы в (2.4.1) и (2.4.2) суммами (2.4.5) – (2.4.7) и приравнявая обе части уравнения, полученного из (2.4.1) в корнях многочлена Чебышева второго рода $\zeta_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)$ ($k = 1, \dots, n-1$), обращающих в ноль функции $Q_k(z)$, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\phi(\xi_j)}{\xi_j - \zeta_k} - \sum_{j=1}^n R(\xi_j - \zeta_k) \phi(\xi_k) - A \sum_{j=1}^n D_{jk} \phi(\xi_j) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \phi(\xi_j) = 1,$$
(2.4.8)

где

$$D_{jk} = \arcsin \zeta_k + \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{1 - \zeta_k^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{T_m(\xi_j) U_{m-1}(\zeta_k)}{m},$$

$$\phi(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(\xi_i) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(x) T_m(\xi_i) \right].$$

Определив из системы линейных алгебраических уравнений (2.4.8) значения функции $\phi(x)$ в корнях многочлена Чебышева первого рода ξ_k , с учетом (2.4.3) из (2.4.4) получим выражение безразмерной функции $\varphi(x)$.

Для сравнения были выбраны три характерных значения: значения регулярной части решения $\varphi(x)$ на концах отрезка интегрирования $x = -1$ и $x = 1$ и среднеквадратичное отклонение двух решений, найденных при разных порядках аппроксимации в точках $x_i = \frac{i-1}{m}$ ($i = 1, m$), определяемых формулой

$$\Delta_n = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{[\phi_n^*(x_i) - \phi_j^*(x_i)]^2}{(m-1)m}} \quad (j < n).$$

В качестве признака стремления приближенного решения к точному приемом стремление среднеквадратичного отклонения Δ_n к нулю при увеличении порядка аппроксимации n .

Программная реализация численного алгоритма решения задачи о контактом взаимодействии между пластиной и одним полубесконечным и двумя конечными стрингерами в среде Wolfram Mathematica 11.0 приводится в приложении 1.

В результате получаются графики, изображенные на рис. 2.4.1–2.4.4, показывающие поведение касательных напряжений в контактной зоне между конечным стрингером и бесконечной пластиной для различных соотношений между геометрическими и физическими параметрами рассматриваемой контактной задачи. Вычислены также нормальные напряжения, возникающие в конечных стрингерах, которые графически изображены на рис. 2.4.5–2.4.7. В качестве геометрического параметра рассматривается величина $\frac{b}{a}$, описывающая отношение расстояния между конечными и бесконечным стрингерами к полудлине конечного стрингера. В качестве физических параметров рассматриваются величины $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$, характеризующие отношение модулей упругости конечных стрингеров и бесконечного стрингера к модулю упругости пластины.

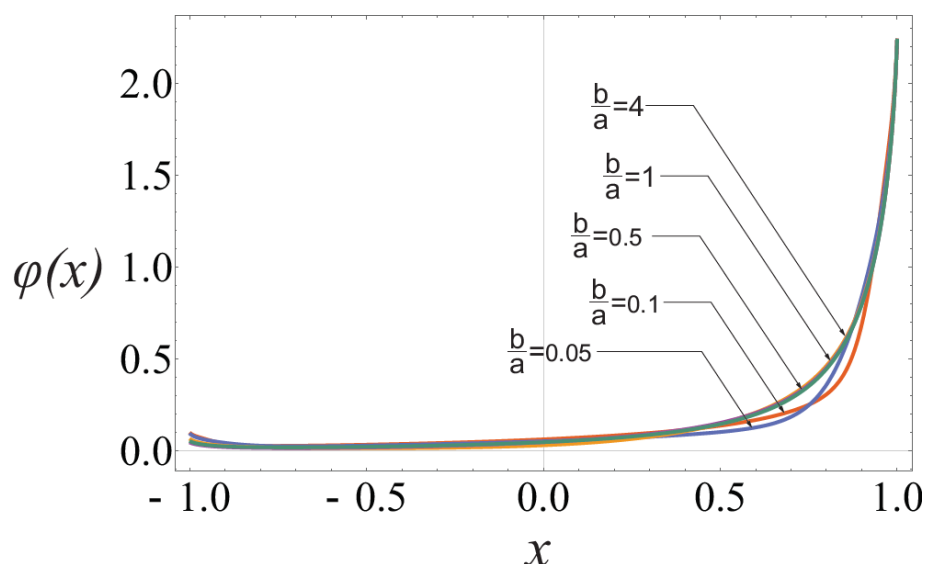


Рис. 2.4.1. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$

контакта между конечным стрингером и пластиной при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$

Из рис. 2.4.1 видно, что поведение безразмерной функции $\varphi(x)$, описывающей тангенциальные контактные напряжения на линии $y = b$ контакта между конечным стрингером и пластиной, особо не отличается при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$, когда $-1 \leq x \leq 0,5$ и $0,8 \leq x \leq 1$. Это означает, что в окрестности точки приложения сосредоточенной силы P , а также в левой половине конечного стрингера отношение $\frac{b}{a}$ в интервале $[0,05; 1]$ не влияет на значения тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$ контакта между конечным стрингером и пластиной. С другой стороны, в зоне $0,5 \leq x \leq 0,8$, где поведение тангенциальных контактных напряжений отличается при разных значениях отношения $\frac{b}{a}$, наблюдается отличие между поведением функции $\varphi(x)$ лишь при малых значениях отношения $\frac{b}{a}$, а именно, $\frac{b}{a} = 0,05$ и $\frac{b}{a} = 0,1$. При $\frac{b}{a} = 0,5$ и $\frac{b}{a} = 1$ поведение функций $\varphi(x)$ также

почти совпадает. Это явление также наблюдается при $\frac{b}{a} > 1$. На рис. 2.4.2 приводится поведение безразмерной функции $\varphi(x)$ при $0,5 \leq x \leq 0,8$.

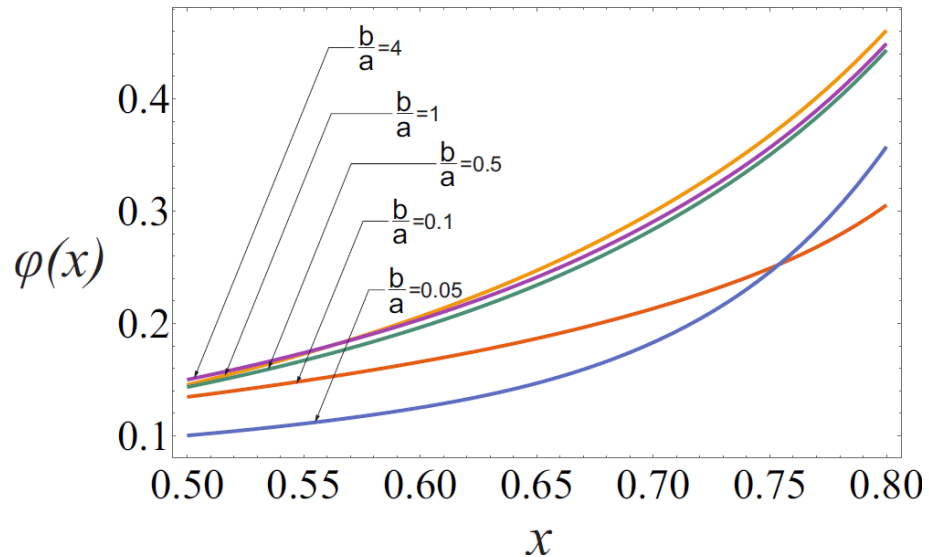


Рис. 2.4.2. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$ контакта между конечным стрингером и пластиной при $0,5 \leq x \leq 0,8$, где наблюдается явное различие между случаями $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$

На рис. 2.4.3 и 2.4.4 изображено поведение безразмерной функции $\varphi(x)$, описывающей тангенциальные контактные напряжения на линии $y = b$ контакта между конечным стрингером и пластиной при различных значениях физических параметров $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$, характеризующих отношение модулей упругости конечных стрингеров и бесконечного стрингера к модулю упругости пластины.

Из рис. 2.4.3 видно, что поведение безразмерной функции $\varphi(x)$ одинаково при $\frac{E_0}{E} = 1$ и $\frac{E_0}{E} = 2$, однако при переходе от $\frac{E_0}{E} = 2$ к $\frac{E_0}{E} = 3$ оно меняется существенно.

Несмотря на это, при $\frac{E_0}{E} = 3$ и $\frac{E_0}{E} = 4$ поведение безразмерной функции $\varphi(x)$ меняется несущественно. Это явление наблюдается и при $\frac{E_0}{E} > 4$.

Следует также отметить, что нагрузка, обусловленная сосредоточенной силой P , приложенной к правому концу (a, b) конечного стержня, почти не передается его левой половине. Более того, поведение контактных тангенциальных напряжений при $-1 \leq x \leq 0$ не зависит от значений отношения $\frac{E_0}{E}$ существенным образом. Однако в окрестности точки приложения сосредоточенной силы P поведение контактных тангенциальных напряжений идентично только при $\frac{E_0}{E} = 1$ и $\frac{E_0}{E} = 2$. В остальных случаях поведение контактных тангенциальных напряжений существенно зависит от величины $\frac{E_0}{E}$.

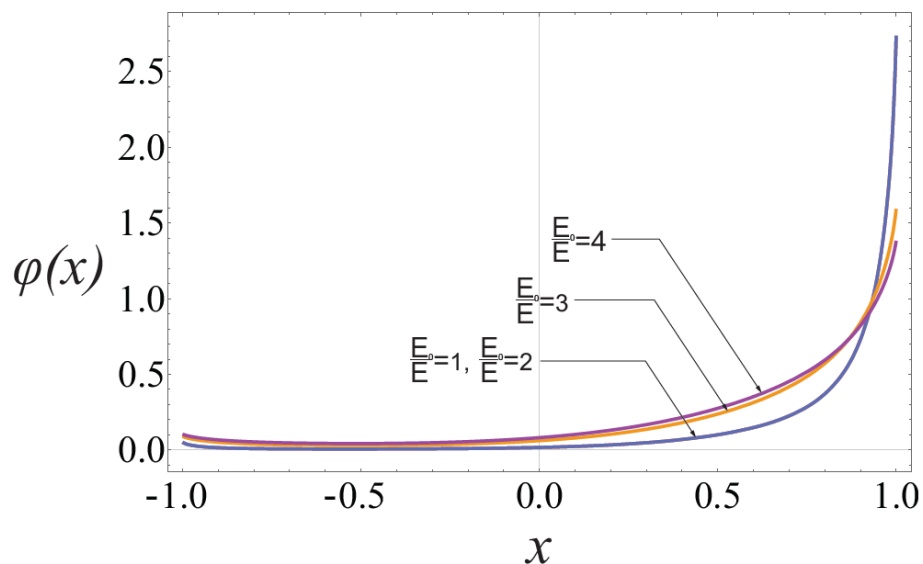


Рис. 2.4.3. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$ контакта между конечным стержнем и пластиной при $\frac{E_0}{E} = 1; 2; 3; 4$

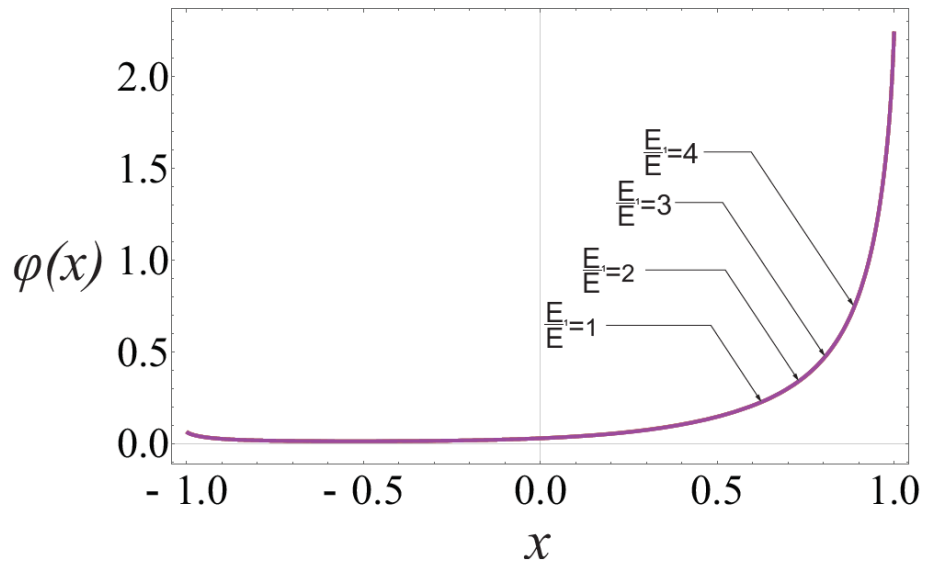


Рис. 2.4.4. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$ контакта между конечным стрингером и пластиной при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$

Рис. 2.4.4 показывает, что поведение безразмерной функции $\varphi(x)$, описывающей тангенциальные контактные напряжения на линии $y = b$ контакта между конечным стрингером и пластиной при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$, полностью идентично, т.е. отношение модулей упругости бесконечного стрингера и пластины никак не влияет на распределение тангенциальных контактных напряжений в зоне контакта между конечным стрингером и пластиной.

Исследуем теперь поведение интенсивности нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах. Для этого введем безразмерную функцию интенсивности нормальных напряжений:

$$\psi(x) = \frac{\sigma_x^{(1)}(x; b) F_s^{(1)}}{P}.$$

Согласно формуле (2.3.9) и обозначению $\varphi(x)$, имеем

$$\psi(x) = \frac{E_0}{E_1} \int_{-1}^x \varphi(\xi) d\xi.$$

Поведение функции $\psi(x)$, описывающей интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах при разных значениях геометрических и физических параметров, изображено на рис. 2.4.5–2.4.7. В качестве геометрического параметра рассматривается величина $\frac{b}{a}$, описывающая отношение расстояния между конечными и бесконечным стрингерами к полудлине конечного стрингера, а в качестве физических параметров рассматриваются величины $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$, характеризующие отношение модулей упругости конечных стрингеров и бесконечного стрингера к модулю упругости пластины.

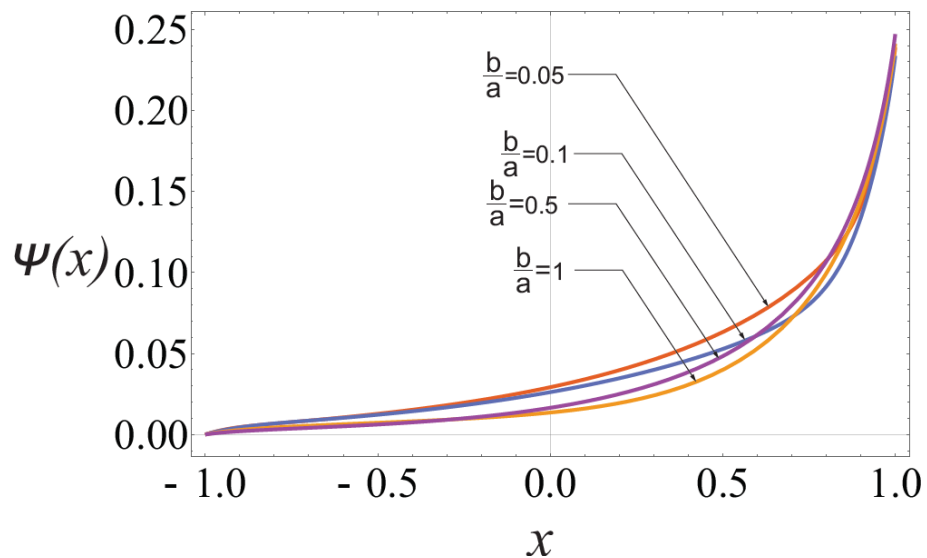


Рис. 2.4.5. Поведение нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах

при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$

Как следует из рис. 2.4.5, значение геометрической характеристики $\frac{b}{a}$ не влияет на передачу нагрузки конечным стрингерам в окрестности точки приложения сосредоточенной силы P .

Из рис. 2.4.6, где изображено поведение безразмерной функции $\psi(x)$, описывающей интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах, приходим к заключению, что при возрастании отношения $\frac{E_0}{E}$ интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах, возрастает. С другой стороны, при всех значениях отношения $\frac{E_0}{E}$ интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах, убывает при удалении от точки приложения сосредоточенной силы P к другому концу стрингера, что и следовало ожидать.

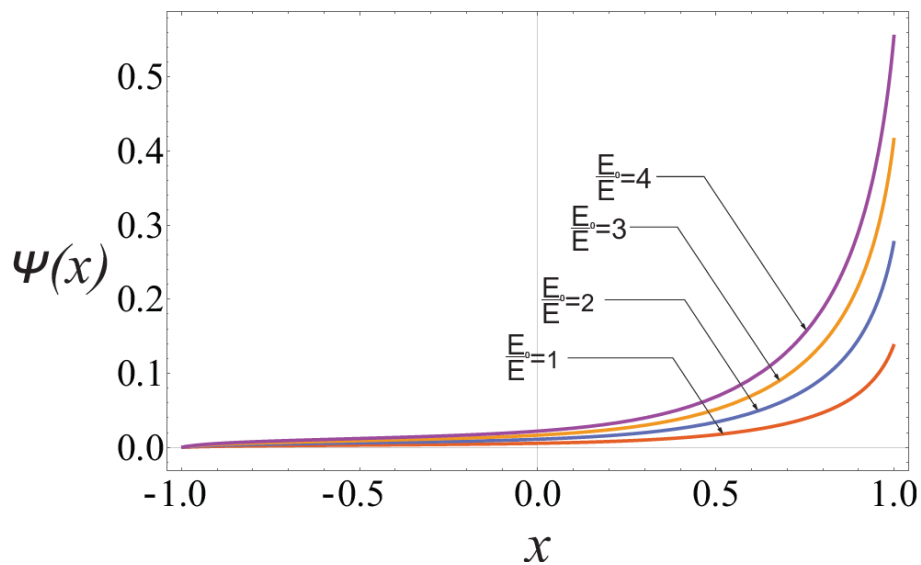


Рис. 2.4.6. Поведение нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах

при $\frac{E_0}{E} = 1; 2; 3; 4$

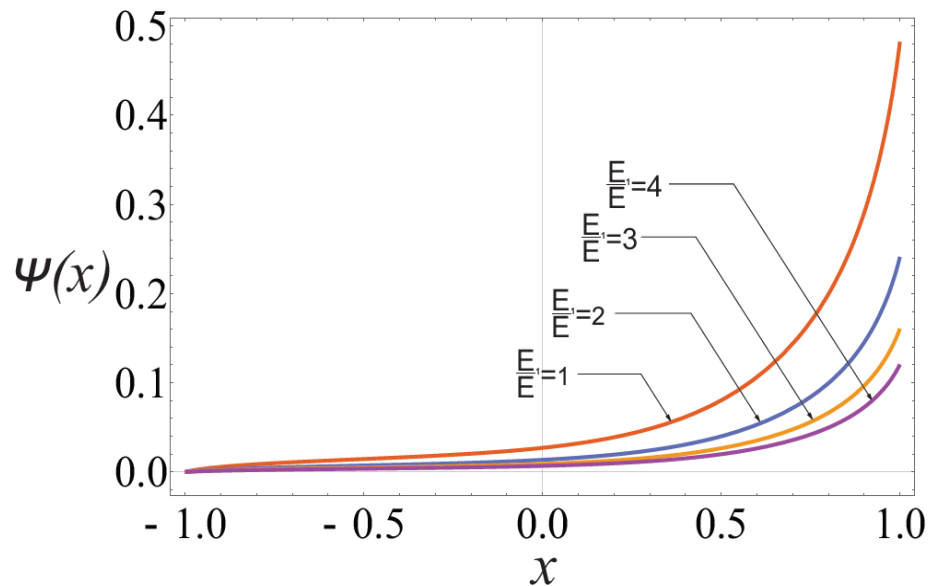


Рис. 2.4.7. Поведение нормальных напряжений, возникающих в упругих конечных стрингерах при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$

На рис. 2.4.7 изображено поведение безразмерной функции, описывающей интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах, при разных значениях отношения $\frac{E_1}{E}$. Выявлено, что при возрастании этого отношения интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах, убывает, что и следовало ожидать.

2.5. Математическое моделирование контактной задачи для однородной бесконечной упругой пластины, усиленной одним конечным и двумя бесконечными упругими стрингерами

Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой однородной бесконечной пластины малой постоянной толщины h на линиях $y = -b$ и

$y = b$ ($b > 0$) своей верхней поверхности содержит два параллельных бесконечных, а на линии $y = 0$ отрезка $-a \leq x \leq a$ ($a > 0$) – один конечный стрингер с разными упругими свойствами и достаточно малыми одинаковыми прямоугольными поперечными сечениями. Предполагается, что относительно горизонтальной оси симметрично расположенные упругие бесконечные стрингеры имеют одинаковые упругие свойства, а конечный стрингер – другие упругие свойства, и они жестко сцеплены с упругой сплошной изотропной однородной бесконечной пластиной.

Цель работы заключается в определении закона распределения интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий вдоль линий сцепления бесконечных и конечного стрингеров с пластиной и, тем самым, определении взаимовлияния упругих бесконечных и конечного стрингеров, когда контактирующая пара (пластина-стрингер) деформируется осевой сосредоточенной силой P , приложенной к концу упругого конечного стрингера (см рис. 2.5.1).

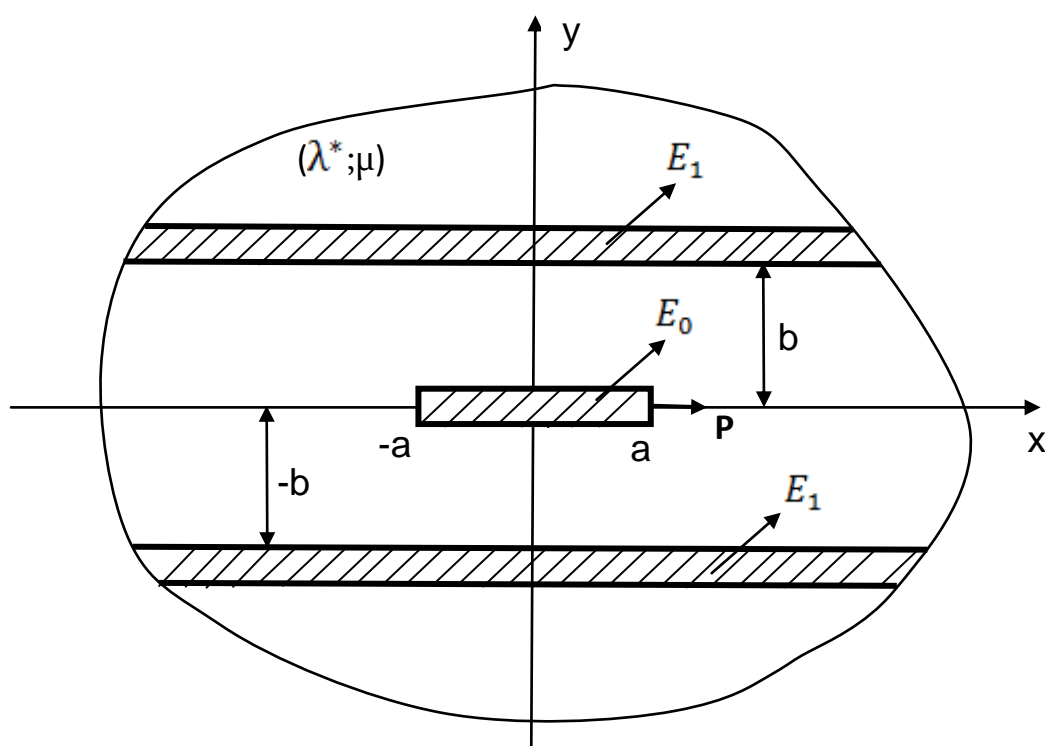


Рис. 2.5.1. Схема рассматриваемой контактной задачи

В рассматриваемой контактной задаче для бесконечного и конечного упругих стрингеров принимается модель одноосного напряженного состояния в сочетании с моделью контакта по линии. Иначе говоря, считается, что распределения интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий сосредоточены вдоль средних линий контактных участков. Предполагается также, что стрингеры не подвергаются изгибу, а относительно пластины считается справедливой модель обобщенного плоского напряженного состояния, вследствие чего она деформируется как плоскость [87].

Обращаясь теперь к выводу разрешающих функциональных уравнений поставленной контактной задачи, заметим, что бесконечный и конечный стрингеры в горизонтальном направлении растягиваются или сжимаются, находясь в одноосном напряженном состоянии.

Теперь известно, что если в любой точке пластины приложена осевая сосредоточенная сила, то трансформанта Фурье горизонтальных перемещений пластины будет иметь представление (2.2.6).

Поступив аналогичным образом, как в разделе 2.3, для трансформантов Фурье горизонтальных перемещений на линиях $y = 0$ и $y = b$ соответственно получим

$$\begin{aligned} \bar{u}(\sigma; b) = & \frac{\bar{\tau}(\sigma; b)}{h} \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot 2b \right] e^{-2b|\sigma|} + \\ & + \frac{\bar{\tau}(\sigma; 0)}{h} \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot b \right] e^{-b|\sigma|} + \\ & + \frac{\bar{\tau}(\sigma; b)}{h} \cdot \frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|}, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\sigma; 0) = & \frac{\bar{\tau}(\sigma; b)}{h} \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot b \right] e^{-b|\sigma|} + \\ & + \frac{\bar{\tau}(\sigma; 0)}{h} \cdot \frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)} \cdot \frac{1}{|\sigma|} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty).$$

На основе дифференциальных уравнений равновесия конечного и бесконечных стрингеров (ср. (2.3.8), (2.3.9)), условий контакта (ср. (2.3.14)), а также связи (2.5.1) после некоторых алгебраических преобразований получим связь между трансформантами Фурье тангенциальных контактных напряжений $\bar{\tau}(\sigma; b)$ и $\bar{\tau}(\sigma; 0)$ на линиях контакта $y = b$ и $y = 0$ в виде следующего функционального соотношения:

$$\bar{\tau}(\sigma; b) = \frac{kb\sigma^2 - |\sigma|}{T_1 e^{b|\sigma|} + 2|\sigma| \operatorname{ch}(b|\sigma|) - 2bk\sigma^2 e^{-b|\sigma|}} \bar{\tau}(\sigma; 0) \quad (2.5.3)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty).$$

Тогда на основе (2.5.2) и (2.5.3) между трансформантами Фурье функций горизонтальных перемещений пластины и тангенциальных контактных напряжений $\bar{u}(\sigma; 0)$ и $\bar{\tau}(\sigma; 0)$ получим следующее функциональное соотношение:

$$\bar{u}(\sigma; 0) = \frac{1}{T_1} \left[-\frac{2(1 - bk|\sigma|)^2 e^{-b|\sigma|}}{T_1 e^{b|\sigma|} + 2|\sigma| \operatorname{ch}(b|\sigma|) - 2bk\sigma^2 e^{-b|\sigma|}} + \frac{1}{|\sigma|} \right] \frac{1}{E_1 F} \bar{\tau}(\sigma; 0) \quad (2.5.4)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty).$$

На линии скрепления конечного стрингера с пластиной должно выполняться условие контакта

$$\frac{du(x; 0)}{dx} = \frac{du_s(x; 0)}{dx} \quad (-a \leq x \leq a). \quad (2.5.5)$$

Теперь, применяя обратное преобразование Фурье на (2.5.4) и учитывая условие контакта (2.5.5), относительно интенсивности тангенциальных контактных усилий $\tau(x; 0)$, возникающих в конечном стрингере, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{s-x} + R_1(s-x) \right] \tau(s;0) ds = T_0 \int_{-a}^x \tau(s;0) ds \quad (-a < x < a), \quad (2.5.6)$$

где

$$R_1(x) = - \int_0^{\infty} \frac{2(1 - bk|\sigma|)^2 e^{-b|\sigma|}}{T_1 e^{b|\sigma|} + 2|\sigma| \operatorname{ch}(b|\sigma|) - 2bk\sigma^2 e^{-b|\sigma|}} \sin(\sigma x) d\sigma. \quad (2.5.7)$$

Отметим, что сингулярное интегральное уравнение (2.5.6) надо решать при наличии условия равновесия конечного стрингера:

$$\int_{-a}^a \tau(s;0) ds = P. \quad (2.5.8)$$

Следует отметить также, что ядро сингулярного интегрального уравнения (2.5.6) состоит из сингулярной (ядро Коши) и регулярной ($R_1(s-x)$) частей.

2.6. Вычисление касательных и нормальных напряжений в конечном стрингере

В этом разделе проводится численный анализ контактной задачи, изложенной в разделе 2.5. Для этого перейдем к безразмерным координатам и величинам

$$\frac{x}{a}, A_0 = \frac{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}{\lambda^* + 3\mu} \frac{ha}{FE_0}, \varphi(s) = \frac{a}{P} \tau(s;0).$$

Тогда из (2.5.6) – (2.5.8) получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-x} + R(x-s) \right] \varphi(s) ds = A_0 \int_{-1}^x \varphi(s) ds \quad (-1 < x < 1), \quad (2.6.1)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi(s) ds = 1, \quad (2.6.2)$$

где

$$R(x) = - \int_0^{\infty} \frac{2 \left(1 - \frac{b}{a} k \sigma a \right)^2 e^{-\frac{b}{a} \sigma a}}{T e^{\frac{b}{a} \sigma a} + 2 \sigma a \operatorname{ch} \left(\frac{b}{a} \sigma a \right) - 2 \frac{b}{a} k (\sigma a)^2 e^{-\frac{b}{a} \sigma a}} \sin \left(\sigma a \frac{x}{a} \right) d(\sigma a). \quad (2.6.3)$$

Для решения сингулярного интегрального уравнения (2.6.1) при условии (2.6.2), как и в разделе 2.4, применим метод дискретных особенностей [75, 76, 118].

Для сравнения приближенного решения были выбраны три характерных значения: значения регулярной части решения $\varphi(x)$ на концах отрезка интегрирования $x = -1$ и $x = 1$ и среднеквадратичное отклонение двух решений, найденных при разных порядках аппроксимации в точках $x_i = \frac{i-1}{m}$ ($i = 1, m$), определяемых формулой

$$\Delta_n = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{[\phi_n^*(x_i) - \phi_j^*(x_i)]^2}{(m-1)m}} \quad (j < n).$$

В качестве признака стремления приближенного решения к точному примем стремление среднеквадратичного отклонения Δ_n к нулю при увеличении порядка аппроксимации n . Результаты, полученные при $m = 20$ для значений $\nu = 0,33$; $\frac{ha}{F} = 10$; $\frac{b}{a} = 1$; $\frac{E_0}{E} = 1,5$; $\frac{E_1}{E} = 2$, представлены в табл. 2.6.1.

Таблица 2.6.1

Среднеквадратичное отклонение Δ_n и значения $\varphi(-1)$ и $\varphi(1)$ при разных порядках аппроксимации n

n	Δ_n	$\varphi(-1)$	$\varphi(1)$
10	0,0908641	0,0429901	2,05506
16	0,00537	0,0491524	2,17843
20	0,0007742	0,0501816	2,20694
24	0,0004345	0,0506631	2,22222
28	0,000205705	0,0509265	2,23134
32	0,000110035	0,0510866	2,2372
36	0,0000723	0,0511916	2,2412
40	0,00004112	0,0512643	2,24404
44	0,00003308	0,0513167	2,24614
48	0,000023241	0,0513559	2,24773
52	0,000012288	0,051386	2,24896

В первом столбце указан порядок аппроксимации, в следующих трех столбцах приведены отклонения Δ_n от решения по предыдущей (согласно строкам таблицы) аппроксимации, причем в первой строчке приводится среднее значение $\varphi(-1)$ и $\varphi(1)$ функции $\varphi(x)$ на интервале $(-1,1)$.

При помощи вышеизложенного алгоритма были вычислены тангенциальные контактные напряжения и нормальные напряжения, возникающие в конечном стрингере. Поведение касательных напряжений в контактной зоне между конечным стрингером и пластиной для различных соотношений между геометрическими и физическими параметрами рассматриваемой контактной задачи изображено на рис.

2.6.1–2.6.4. В качестве геометрического параметра рассматривается величина $\frac{b}{a}$, описывающая отношение расстояния между конечным и бесконечными стрингерами к полудлине конечного стрингера. В качестве физических параметров рассматриваются величины $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$, характеризующие отношение модулей упругости конечного стрингера и бесконечных стрингеров к модулю упругости пластины, соответственно.

Из рис. 2.6.1 видно, что поведение безразмерной функции $\varphi(x)$, описывающей тангенциальные контактные напряжения на линии $y = 0$ контакта между конечным стрингером и пластиной, особо не отличается при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$, когда $-1 \leq x \leq 0,3$ и $0,8 \leq x \leq 1$. Это означает, что в окрестности точки приложения сосредоточенной силы P , а также в левой половине конечного стрингера отношение $\frac{b}{a}$ в интервале $[0,05;1]$ не влияет на значения тангенциальных контактных напряжений на линии $y = 0$ контакта между конечным стрингером и пластиной. С другой стороны, в зоне $0,3 \leq x \leq 0,8$, где поведение тангенциальных контактных напряжений отличается при разных значениях отношения $\frac{b}{a}$, наблюдается отличие

между поведением функции $\varphi(x)$ лишь при малых значениях отношения $\frac{b}{a}$, а именно, $\frac{b}{a} = 0,05$ и $\frac{b}{a} = 0,1$. При $\frac{b}{a} = 0,5$ и $\frac{b}{a} = 1$ поведение функции $\varphi(x)$ также почти совпадает. Это явление также наблюдается при $\frac{b}{a} > 1$. На рис. 2.6.2 приводится поведение безразмерной функции $\varphi(x)$ при $0,3 \leq x \leq 0,8$.

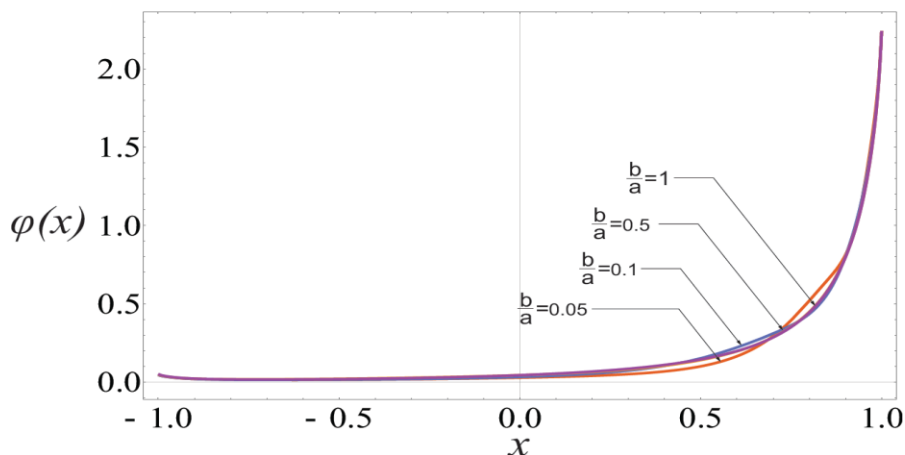


Рис. 2.6.1. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = 0$ контакта между конечным стрингером и пластиной при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$

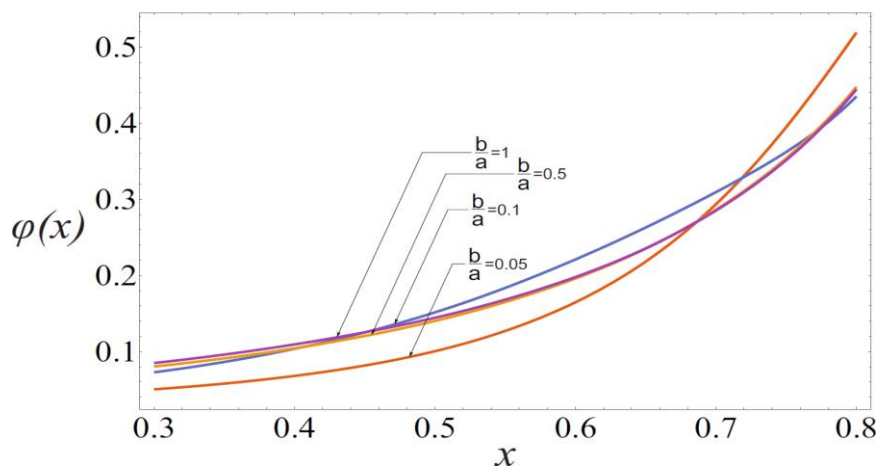


Рис. 2.6.2. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = 0$ контакта между конечным стрингером и пластиной при $0,3 \leq x \leq 0,8$, где наблюдается явное различие между случаями $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$

На рис. 2.6.3 и 2.6.4 изображено поведение безразмерной функции $\varphi(x)$, описывающей тангенциальные контактные напряжения на линии $y=0$ контакта между конечным стрингером и пластиной при различных значениях физических параметров $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$, характеризующих отношение модулей упругости конечного стрингера и бесконечных стрингеров к модулю упругости пластины, соответственно.

Из рис. 2.6.3 видно, что поведение безразмерной функции $\varphi(x)$ одинаково при $\frac{E_0}{E} = 1$ и $\frac{E_0}{E} = 2$, однако при переходе от $\frac{E_0}{E} = 2$ к $\frac{E_0}{E} = 3$ оно меняется существенно. Несмотря на это, при $\frac{E_0}{E} = 3$ и $\frac{E_0}{E} = 4$ поведение безразмерной функции $\varphi(x)$ меняется несущественно. Это явление наблюдается и при $\frac{E_0}{E} > 4$.

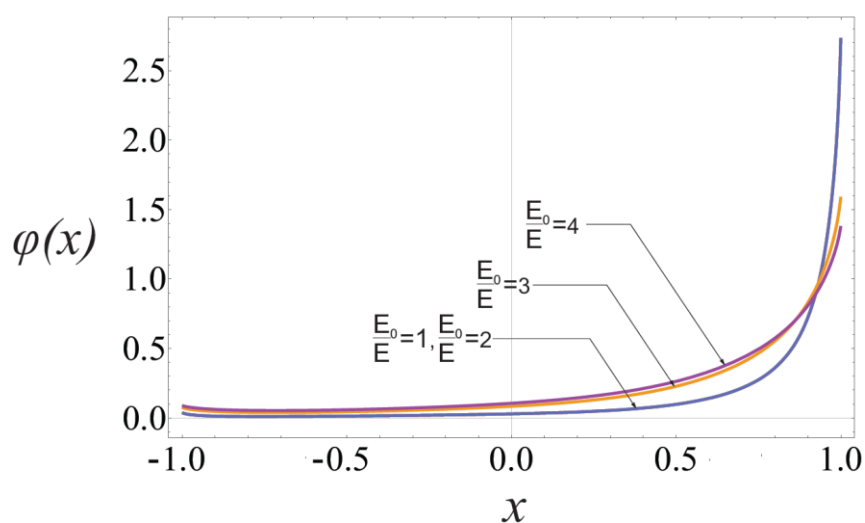


Рис. 2.6.3. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y=0$ контакта между конечным стрингером и пластиной при $\frac{E_0}{E} = 1; 2; 3; 4$

Следует также отметить, что нагрузка, обусловленная сосредоточенной силой P , приложенной к правому концу $(a,0)$ конечного стрингера, почти не передается его левой половине. Более того, поведение тангенциальных контактных напряжений

при $-1 \leq x \leq 0$ не зависит от значений отношения $\frac{E_0}{E}$ существенным образом. Однако в окрестности точки приложения сосредоточенной силы P поведение контактных тангенциальных напряжений идентично только при $\frac{E_0}{E} = 1$ и $\frac{E_0}{E} = 2$. В остальных случаях поведение контактных тангенциальных напряжений существенно зависит от величины $\frac{E_0}{E}$.

Рис. 2.6.4 показывает, что поведение безразмерной функции $\varphi(x)$, описывающей тангенциальные контактные напряжения на линии $y = 0$ контакта между конечным стрингером и пластиной при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$, полностью идентично, т.е. отношение модулей упругости бесконечного стрингера и пластины $\frac{E_1}{E}$ никак не влияет на распределение тангенциальных контактных напряжений в зоне контакта между конечным стрингером и пластиной.

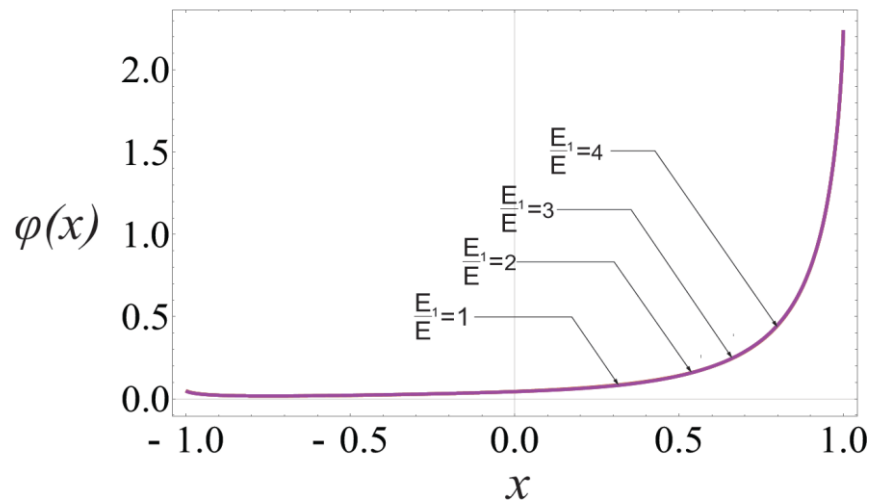


Рис. 2.6.4. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = 0$ контакта между конечным стрингером и пластиной при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$

Исследуем теперь поведение интенсивности нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах. Для этого введем безразмерную функцию интенсивности нормальных напряжений:

$$\psi(x) = \frac{\sigma_x^{(1)}(x;0) F_S^{(1)}}{P}.$$

Согласно формуле (2.5.4) и обозначению $\varphi(x)$ имеем

$$\psi(x) = \frac{E_0}{E_1} \int_{-1}^x \varphi(\xi) d\xi.$$

Поведение функции $\psi(x)$, описывающей интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечном стрингере при разных значениях геометрических и физических параметров, изображено на рис. 2.6.5–2.6.7. В качестве геометрического параметра рассматривается величина $\frac{b}{a}$, описывающая отношение расстояния между конечными и бесконечным стрингерами к полудлине конечного стрингера, а в качестве физических параметров рассматриваются величины $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$, характеризующие отношение модулей упругости конечных стрингеров и бесконечного стрингера к модулю упругости пластины, соответственно.

Как следует из рис. 2.6.5, значение геометрической характеристики $\frac{b}{a}$ не влияет на передачу нагрузки конечным стрингерам в окрестности точки приложения сосредоточенной силы P .

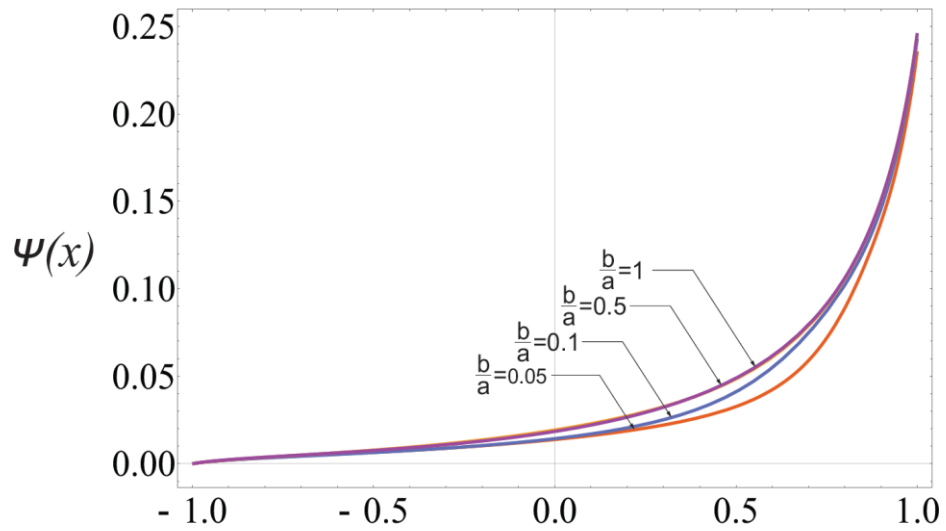


Рис. 2.6.5. Поведение нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах

$$\text{при } \frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$$

Из рис. 2.6.6, где изображено поведение безразмерной функции $\psi(x)$, описывающей интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах, приходим к заключению, что при возрастании отношения $\frac{E_0}{E}$ интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах, возрастает. С другой стороны, при всех значениях отношения $\frac{E_0}{E}$ интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах, убывает при удалении от точки приложения сосредоточенной силы P к другому концу стрингера, что и следовало ожидать.

На рис. 2.6.7 изображено поведение безразмерной функции $\psi(x)$, описывающей интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах при разных значениях отношения $\frac{E_1}{E}$. Выявлено, что при возрастании отношения $\frac{E_1}{E}$ интенсивность нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах, убывает, что и следовало ожидать.

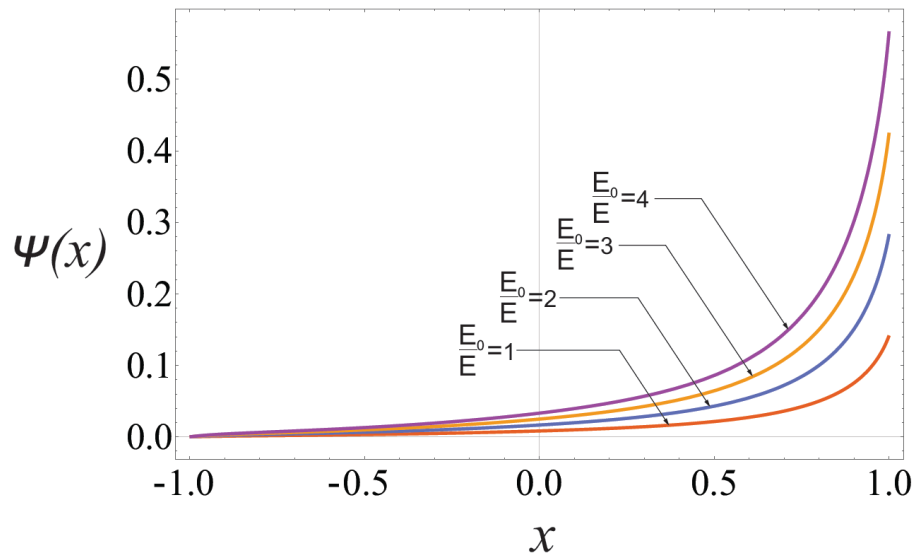


Рис. 2.6.6. Поведение нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах

при $\frac{E_0}{E} = 1; 2; 3; 4$

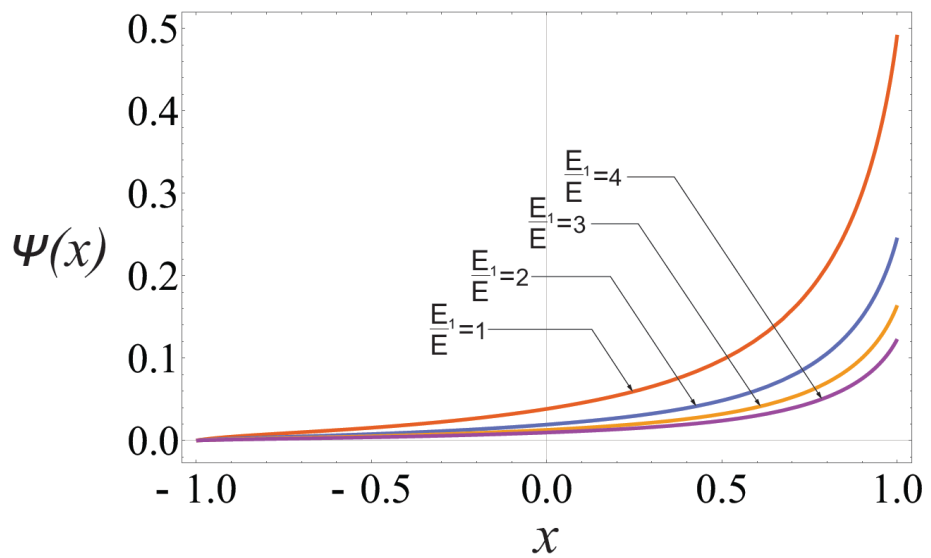


Рис. 2.6.7. Поведение нормальных напряжений, возникающих в конечных стрингерах

при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$

2.7. Выводы по второй главе

Из проведенных в предыдущих разделах вычислений, в частности, заключаем:

1. Нагрузка, обусловленная сосредоточенной силой, приложенной к правому концу конечного стрингера, почти не передается левой половине стрингера независимо от расстояния между стрингерами и жесткостей стрингеров.
2. Поведение тангенциальных контактных напряжений в окрестности точки приложения сосредоточенной силы не меняется при увеличении расстояния между стрингерами.
3. Увеличение жесткости бесконечных стрингеров почти не влияет на поведение тангенциальных контактных напряжений на линии контакта между конечными стрингерами и пластиной. Увеличение жесткости конечного стрингера приводит к увеличению в нем нормальных напряжений, а увеличение жесткости бесконечных стрингеров – к уменьшению нормальных напряжений.

ГЛАВА 3. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ И БЕСКОНЕЧНЫМИ УПРУГИМИ СТРИНГЕРАМИ

3.1. Математическое моделирование контактной задачи для упругой бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными бесконечными и полубесконечными стрингерами

Вследствие компоновки различных агрегатов в крыле (рис. 3. 1. 1 и 1.1.4) и фюзеляже самолета панели представляют собой пластину, подкрепленную стрингерами различной длины, что можно математически моделировать двумя модельными задачами о контакте между бесконечной пластиной и неограниченными стрингерами, в частности, бесконечными и полубесконечными.

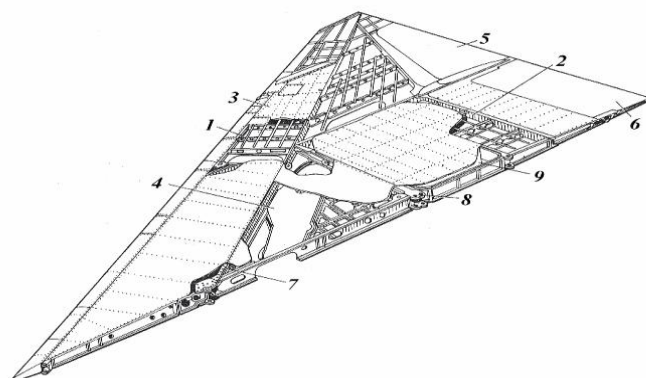


Рис. 3. 1. 1. Схема крыла самолета треугольной формы: 1 – передний стрингер, 2 – задний стрингер, 3 – обшивка, 4 – ниша шасси, 5 – элерон, 6 – закрылок, 7 – лонжерон, 8 – главная балка, 9 – топливные баки

Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой, однородной бесконечной пластины малой постоянной толщины h на линиях $y = -b$ и $y = b$ ($b > 0$) своей верхней поверхности усилен двумя параллельными бесконечными стрингерами с одинаковыми достаточно малыми прямоугольными поперечными сечениями F и модулями упругости E_1 , а на линии $y = 0$ – двумя полубесконечными упругими стрингерами с модулями упругости E_0 . Задача заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль линии соединения стрингеров с пластиной и осевых (нормальных) напряжений, возникающих в стрингерах, когда на концах полубесконечных стрингеров действуют сосредоточенные силы P (см. рис. 3.1.2).

В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для пластины справедлива модель обобщённого плоского напряженного состояния [79].

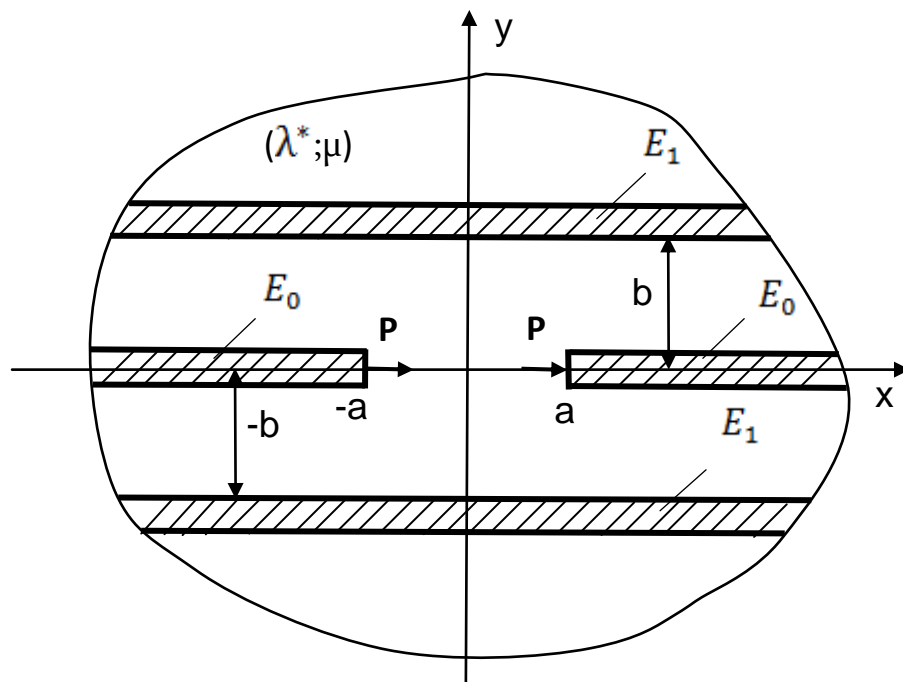


Рис. 3.1.2. Схема рассматриваемой контактной задачи

Тогда для трансформантов Фурье горизонтальных перемещений получим задачу, аналогичную (2.3.6) – (2.3.11), решение которой приводит к следующему функциональному соотношению между трансформантами Фурье интенсивностей тангенциальных контактных напряжений $\bar{\tau}(\sigma;0)$ и $\bar{\tau}(\sigma;b)$ на линиях контакта $y=0$ и $y=b$

$$\bar{\tau}(\sigma;b) = \frac{kb\sigma^2 - |\sigma|}{T_1 e^{|\sigma|b} + 2|\sigma| \operatorname{ch}(|\sigma|b) - 2k\sigma^2 e^{-|\sigma|b}} \bar{\tau}(\sigma;0) \quad (3.1.1)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty),$$

а между трансформантами Фурье функции горизонтальных перемещений пластины и интенсивности тангенциальных контактных напряжений $\bar{u}(\sigma;b)$ и $\bar{\tau}(\sigma;b)$ на линии контакта $y=0$ получим следующее функциональное соотношение:

$$\bar{u}(\sigma;0) = \frac{1}{T_1} \left[-\frac{2(1-bk|\sigma|)^2 e^{-b|\sigma|}}{T_1 e^{-b|\sigma|} + 2|\sigma| \operatorname{ch}(b|\sigma|) - 2bk\sigma^2 e^{b|\sigma|}} + \frac{1}{|\sigma|} \right] \frac{1}{E_1 F} \bar{\tau}(\sigma;0) \quad (3.1.2)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty).$$

К этим представлениям нужно еще добавить дифференциальные уравнения равновесия стрингеров:

$$\frac{d^2 u_s(x;b)}{dx^2} = \frac{1}{E_1 F} \tau(x;b) \quad (-\infty < x < \infty), \quad (3.1.3)$$

$$\frac{d^2 u_s(x;0)}{dx^2} = \frac{1}{E_0 F} \tau(x;0) \quad (-a \leq x \leq a), \quad (3.1.4)$$

решение которых должно удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \left. \frac{du_s(x;0)}{dx} \right|_{x=a} &= -\frac{P}{E_0 F}, \\ \left. \frac{du_s(x;0)}{dx} \right|_{x=-a} &= \frac{P}{E_0 F}, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

а также условию контакта:

$$\frac{du(x;0)}{dx} = \frac{du_s(x;0)}{dx} \quad (|x| \geq a). \quad (3.1.6)$$

Применив обратное преобразование Фурье к (3.1.2) и учитывая условие контакта (3.1.6), получим

$$U_1(x) + U_2(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \cdot \bar{u}(\sigma;0) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (3.1.7)$$

где

$$U_1(x) + U_2(x) = -\frac{du(x;0)}{dx}, \quad (3.1.8)$$

причем

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \begin{cases} \frac{du}{dx}; & |x| \leq a, \\ 0; & |x| > a; \end{cases} \\ U_2(x) &= \begin{cases} \frac{du}{dx}; & |x| > a, \\ 0; & |x| \leq a. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Применив к (3.1.4) преобразование Фурье, с учетом граничных условий (3.1.5) получим

$$\frac{1}{E_0 F} \bar{\tau}(\sigma;0) = \frac{2P}{E_0 F} \cos(\sigma a) - i\sigma \bar{U}_2(\sigma). \quad (3.1.10)$$

С другой стороны,

$$u(x;0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\sigma;0) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

откуда

$$\frac{du(x;0)}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\sigma) \bar{u}(\sigma;0) e^{-i\sigma x} d\sigma. \quad (3.1.11)$$

Применив к (3.1.11) преобразование Фурье, с учетом (3.1.2) и (3.1.9) получим

$$\bar{U}_1(\sigma) + \bar{U}_2(\sigma) = -i\sigma \bar{K}_1(\sigma) \bar{\tau}(\sigma;0), \quad (3.1.12)$$

где

$$\bar{K}_1(\sigma) = \frac{1}{T_1 E_1 F} \left[-\frac{2(1-bk|\sigma|)^2 e^{-b|\sigma|}}{T e^{b|\sigma|} + 2|\sigma| \operatorname{ch}(b|\sigma|) - 2bk\sigma^2 e^{-b|\sigma|}} + \frac{1}{|\sigma|} \right].$$

Подставляя выражение функции **из** $\bar{U}_2(\sigma)$ (3.1.12) в (3.1.10), окончательно для $\bar{\tau}(\sigma;0)$ получим

$$\bar{\tau}(\sigma;0) = \frac{2P}{\sigma E_0 F} \cos(\sigma a) \bar{K}(\sigma) + 2\bar{K}(\sigma) \bar{U}_1(\sigma), \quad (3.1.13)$$

где

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{\sigma}{\frac{1}{E_0 F} + \sigma^2 \bar{K}_1(\sigma)}.$$

Применив к (3.1.13) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau(x;0) = \frac{P}{\pi E_0 F} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a K(x-s) U_1(s) ds \quad (3.1.14)$$

при условии

$$\frac{P}{E_0 F} \int_{-a}^a \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) e^{-i\sigma x} d\sigma + \int_{-a}^a K(x-s) U_1(s) ds = 0. \quad (3.1.15)$$

Далее, поскольку функция $\bar{K}_1(\sigma)$ является четной, следовательно, функция $\bar{K}(\sigma)$ является нечетной. Поэтому подынтегральное выражение первого слагаемого в (3.1.14) (следовательно, и в (3.1.15)):

$$\frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a)$$

является четным. Тогда, как известно, действительное обобщенное интегральное преобразование этой функции эквивалентно его обобщенному действительному косинус-преобразованию Фурье, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) e^{-i\sigma x} d\sigma = 2 \int_0^{\infty} \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) \cos(\sigma x) d\sigma. \quad (3.1.16)$$

С другой стороны, из условия (3.1.15) имеем

$$\int_{-a}^a K(x-s) U_1(s) ds = -\frac{P}{E_0 F} \int_{-a}^a \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Подставив полученное равенство в (3.1.14) с учетом (3.1.16) будем иметь

$$\begin{aligned}\tau(x;0) &= \frac{2}{\pi} \frac{P}{E_0 F} \int_0^{\infty} \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) \cos(\sigma x) d\sigma - \frac{1}{\pi} \frac{P}{E_0 F} \int_{-a}^a \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) e^{-i\sigma x} d\sigma = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{P}{E_0 F} \left[\int_0^{\infty} \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) \cos(\sigma x) d\sigma - \int_0^a \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) \cos(\sigma x) d\sigma \right].\end{aligned}$$

Разложив первый интеграл на два слагаемых

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) \cos(\sigma x) d\sigma &= \int_0^a \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) \cos(\sigma x) d\sigma + \\ &+ \int_a^{\infty} \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) \cos(\sigma x) d\sigma,\end{aligned}$$

окончательно будем иметь

$$\tau(x;0) = \frac{2}{\pi} \frac{P}{E_0 F} \int_a^{\infty} \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) \cos(\sigma x) d\sigma. \quad (3.1.17)$$

Аналогичным образом из (3.1.3), (3.1.7), (3.1.8) можно получить контактные напряжения, действующие под бесконечным стрингером.

3.2. Количественный анализ напряжений, возникающих в полубесконечных стрингерах

Программная реализация численного алгоритма решения контактной задачи, математически исследованной в разделе 3.1 на основе явного решения (3.1.17), выполнена в среде Wolfram Mathematica 11.0, которая приводится в приложении 2.

В результате получаются графики, изображенные на рис. 3.2.1–3.2.4, показывающие поведение касательных напряжений в контактной зоне между полубесконечным стрингером и пластиной для различных соотношений между геометрическими и физическими параметрами рассматриваемой контактной задачи. Вычислены также нормальные напряжения, возникающие в полубесконечных стрингерах, которые графически изображены на рис. 3.2.5–3.2.7. В качестве геометрического параметра рассматривается величина $\frac{b}{a}$, описывающая отношение расстояния между бесконечным и полубесконечным упругими стрингерами к половине расстояния между полубесконечными упругими стрингерами. В качестве физических параметров рассматриваются величины $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$, характеризующие отношение модулей упругости полубесконечных упругих стрингеров и бесконечных стрингеров к модулю упругости пластины соответственно.

Из рис. 3.2.1 видно, что поведение безразмерной функции $\varphi(x)$, описывающей тангенциальные контактные напряжения на линии $y=0$ контакта между полубесконечным стрингером и пластиной, довольно быстро стремится к нулю при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$. В частности, уже при $x=1,5 - \varphi(1,5) = 7 \cdot 10^{-5}$. Следует отметить также, что при $\frac{b}{a} = 0,05$ и $\frac{b}{a} = 0,1$, а также при $\frac{b}{a} = 0,5$ и $\frac{b}{a} = 1$ $\varphi(x)$ проявляет идентичное поведение.

Из рис. 3.2.1 также очевидно, что при переходе от значения геометрической характеристики $\frac{b}{a} = 0,1$ к $\frac{b}{a} = 0,5$ поведение тангенциальных контактных напряжений существенно отличается вблизи точки приложения сосредоточенной силы P .

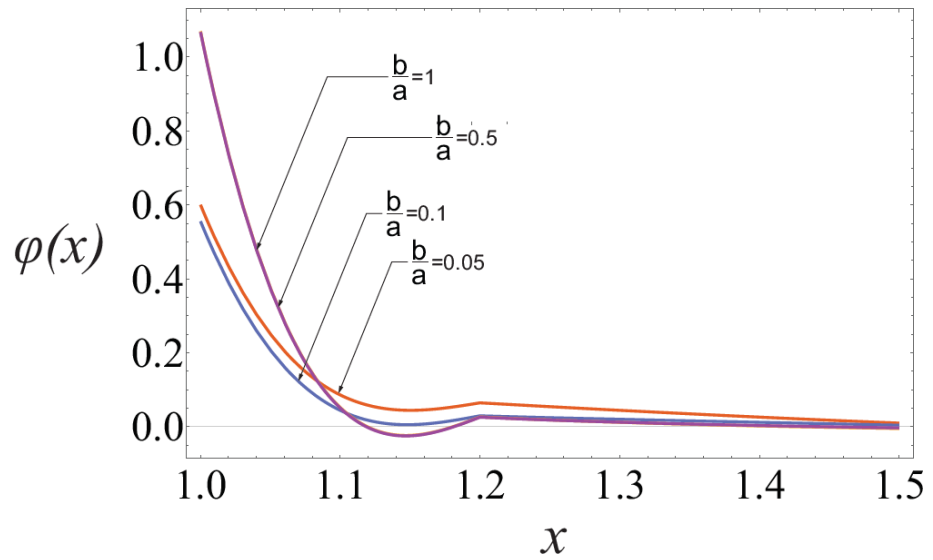


Рис. 3.2.1. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = 0$

контакта между полубесконечным стрингером и пластиной при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и

$$\frac{E_0}{E} = 2, \frac{E_1}{E} = 1$$

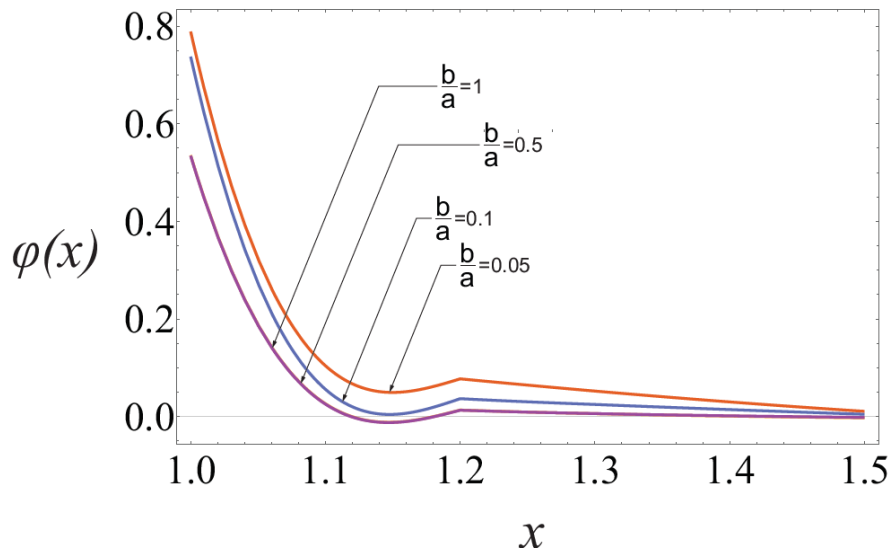


Рис. 3.2.2. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = 0$

контакта между полубесконечным стрингером и пластиной при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и

$$\frac{E_0}{E} = \frac{3}{2}, \frac{E_1}{E} = 2$$

На рис. 3.2.2 и 3.2.3 изображено поведение безразмерной функции $\varphi(x)$ в зависимости от геометрической характеристики $\frac{b}{a}$ при $\frac{E_0}{E} = \frac{3}{2}, \frac{E_1}{E} = 2$ и $\frac{E_0}{E} = 3, \frac{E_1}{E} = 2$ соответственно. Очевидно, что возрастание отношений физических параметров $\frac{E_1}{E}$ (от 1 к 2) и $\frac{E_0}{E}$ (от 1,5 к 3) приводит к убыванию функции $\varphi(x)$. Численное исследование показало, что это явление характерно также для $\frac{E_1}{E} > 2, \frac{E_0}{E} > 3$.

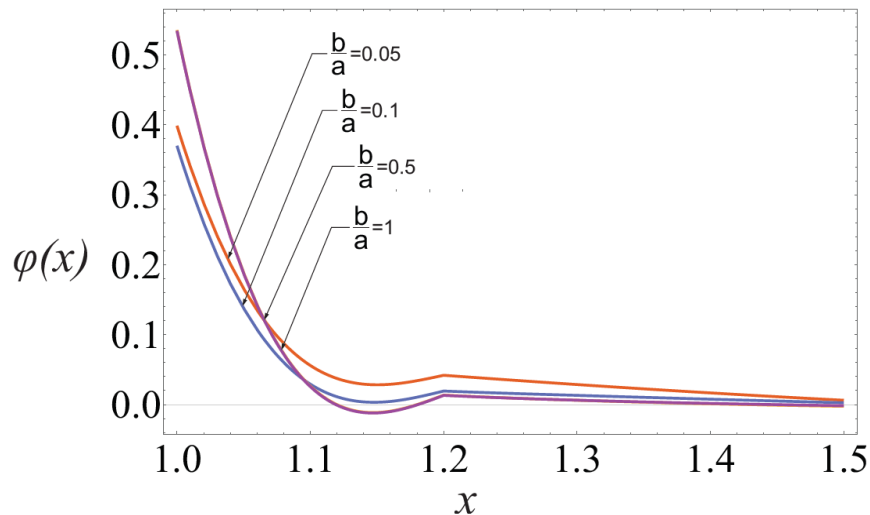


Рис. 3.2.3. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = 0$

контакта между полубесконечным стрингером и пластиной при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и

$$\frac{E_0}{E} = 3, \frac{E_1}{E} = 2$$

На рис. 3.2.4 и 3.2.5 изображено поведение безразмерной функции $\varphi(x)$ при различных значениях физических параметров $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$. В результате вычислений

обнаружено, что поведение функции $\varphi(x)$ при изменении физических параметров $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$ не зависит от геометрической характеристики $\frac{b}{a}$, в связи с чем во всех

вычислениях принято $\frac{b}{a} = 0,5$.

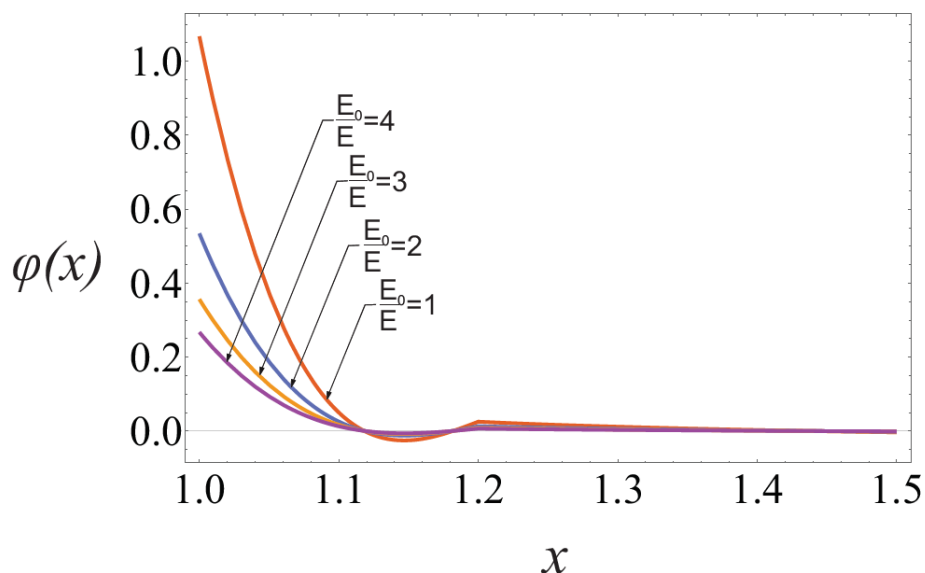


Рис. 3.2.4. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = 0$ контакта между полубесконечным стрингером и пластиной при $\frac{E_0}{E} = 1; 2; 3; 4$

Из рис. 3.2.4 видно, что безразмерная функция $\varphi(x)$ убывает при возрастании физического параметра $\frac{E_0}{E}$ (от 1 до 4). Это явление наблюдается и при $\frac{E_0}{E} > 4$.

Рис. 3.2.5 показывает, что поведение безразмерной функции $\varphi(x)$, описывающей тангенциальные контактные напряжения на линии $y = 0$ контакта между полубесконечным стрингером и пластиной, при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$ полностью идентично, т.е. отношение модулей упругости бесконечного стрингера и пластины никак не влияет на распределение тангенциальных контактных напряжений в зоне контакта между полубесконечным стрингером и пластиной.

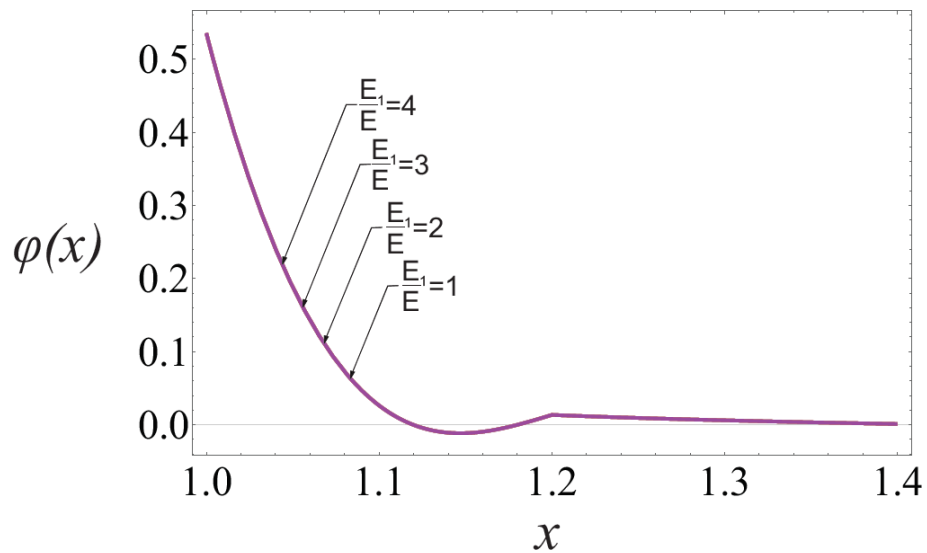


Рис. 3.2.5. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = 0$ контакта между полубесконечным стрингером и пластиной при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$

Исследуем теперь поведение интенсивности нормальных напряжений, возникающих в упругих полубесконечных стрингерах. Для этого введем безразмерную функцию интенсивности нормальных напряжений:

$$\psi(x) = \frac{\sigma_x^{(1)}(x; b) F_S^{(1)}}{P}.$$

Согласно формуле (3.1.4) и обозначению $\varphi(x)$, имеем

$$\psi(x) = \frac{E_0}{E_1} \int_{-1}^x \varphi(\xi) d\xi.$$

Поведение функции $\psi(x)$, описывающей интенсивность нормальных напряжений, возникающих в упругих полубесконечных стрингерах при разных значениях геометрических и физических параметров, изображено на рис. 3.2.6–3.2.10.

В качестве геометрического параметра рассматривается величина $\frac{b}{a}$, описывающая

отношение расстояния между полубесконечными и бесконечным стрингерами к половине расстояния между полубесконечными стрингерами. В качестве физических параметров рассматриваются величины $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$.

Как следует из рис. 3.2.6, при малых значениях геометрической характеристики $\frac{b}{a}$ поведение безразмерной функции $\psi(x)$ почти одинаково. Зависимость поведения безразмерной функции $\psi(x)$ от геометрического параметра $\frac{b}{a}$ была исследована также при $\frac{E_0}{E} = \frac{3}{2}, \frac{E_1}{E} = 2$ и $\frac{E_0}{E} = 3, \frac{E_1}{E} = 2$.

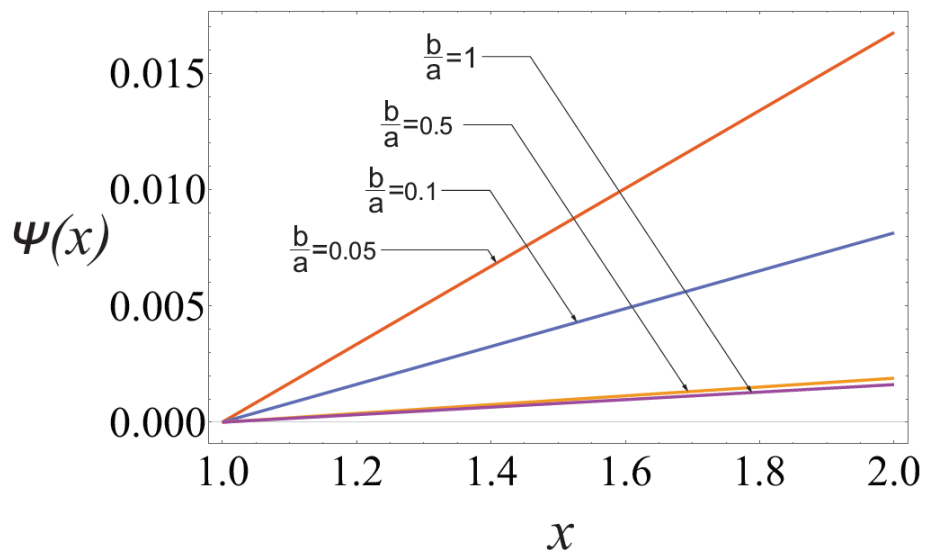


Рис. 3.2.6. Поведение нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных

стрингерах при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и $\frac{E_0}{E} = \frac{3}{2}, \frac{E_1}{E} = 1$

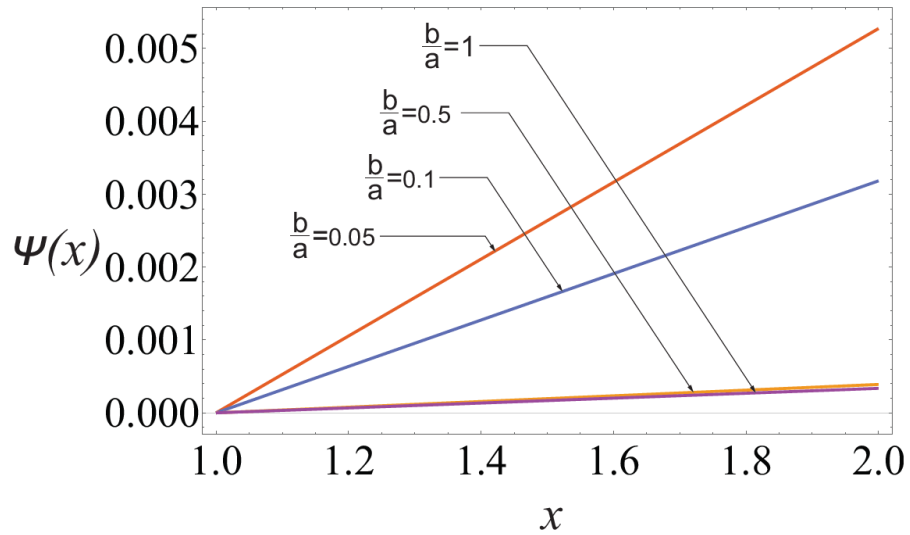


Рис. 3.2.7. Поведение нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных

стрингерах при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и $\frac{E_0}{E} = \frac{3}{2}, \frac{E_1}{E} = 2$

Было установлено (см. рис. 3.2.7 и 3.2.8), что $\psi(x)$ убывает при возрастании как отношения $\frac{E_0}{E}$, так и отношения $\frac{E_1}{E}$ (независимо друг от друга).

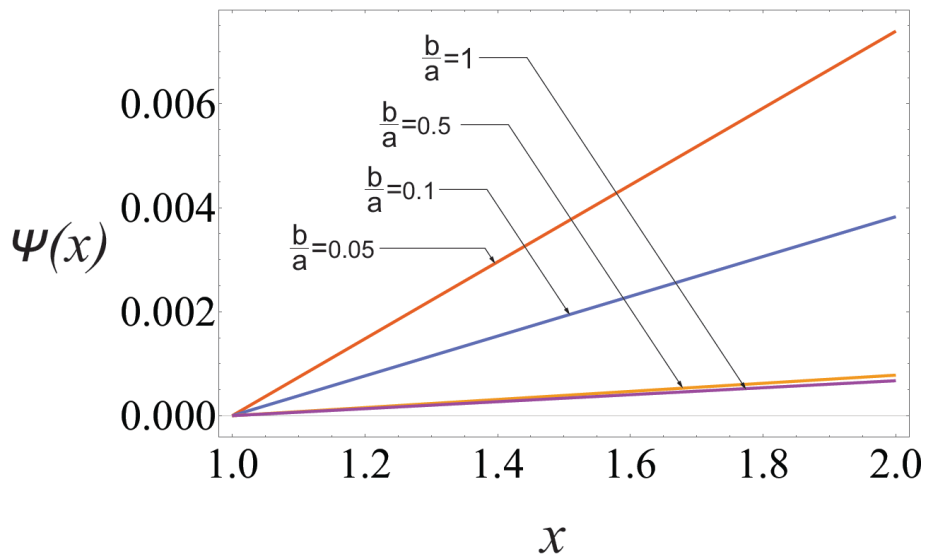


Рис. 3.2.8. Поведение нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных

стрингерах при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и $\frac{E_0}{E} = 3, \frac{E_1}{E} = 2$

Из рис. 3.2.9, где изображено поведение безразмерной функции $\psi(x)$, описывающей интенсивность нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных струнгерах, приходим к заключению, что при возрастании отношения $\frac{E_0}{E}$ $\psi(x)$ возрастает.

На рис. 3.2.10 изображено поведение безразмерной функции $\psi(x)$ при разных значениях отношения $\frac{E_1}{E}$. Выявлено, что при возрастании отношения $\frac{E_1}{E}$ интенсивность нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных струнгерах, убывает, что и следовало ожидать.

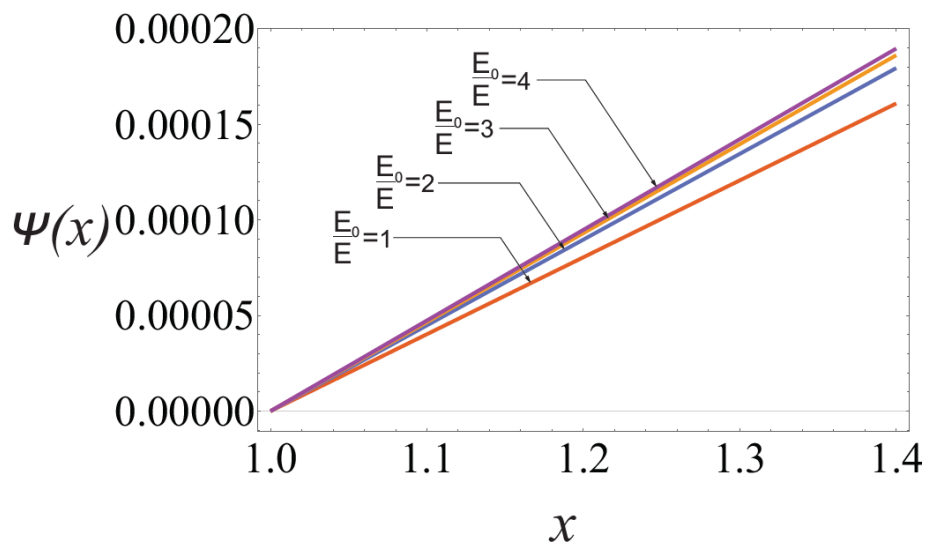


Рис. 3.2.9. Поведение нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных

струнгерах при $\frac{E_0}{E} = 1; 2; 3; 4$

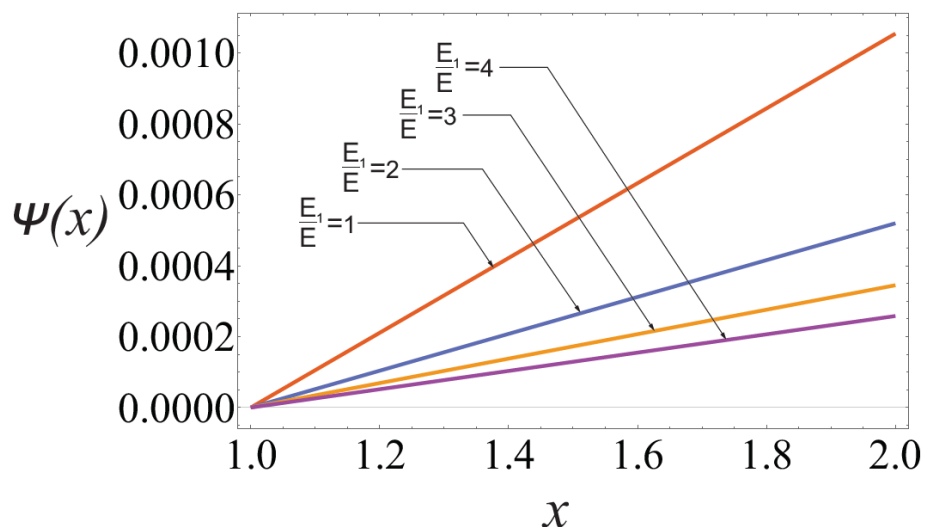


Рис. 3.2.10. Поведение нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных

стрингерах при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$

3.3. Математическое моделирование контактной задачи для упругой бесконечной пластины, усиленной четырьмя параллельными полубесконечными и бесконечными стрингерами

Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой однородной бесконечной пластины достаточно малой постоянной толщины h на линиях $y = -b$ и $y = b$ ($b > 0$) своей верхней поверхности усилен четырьмя параллельными полубесконечными стрингерами с одинаковыми достаточно малыми прямоугольными поперечными сечениями F и модулями упругости E_0 , а на линии $y = 0$ – одним бесконечным упругим стрингером с модулем упругости E_1 . Задача заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль линии соединения стрингеров с пластиной и осевых (нормальных) напряжений, возникающих в

стрингерах, когда на концах полубесконечных стрингеров действуют сосредоточенные силы P (см. рис. 3.3.1).

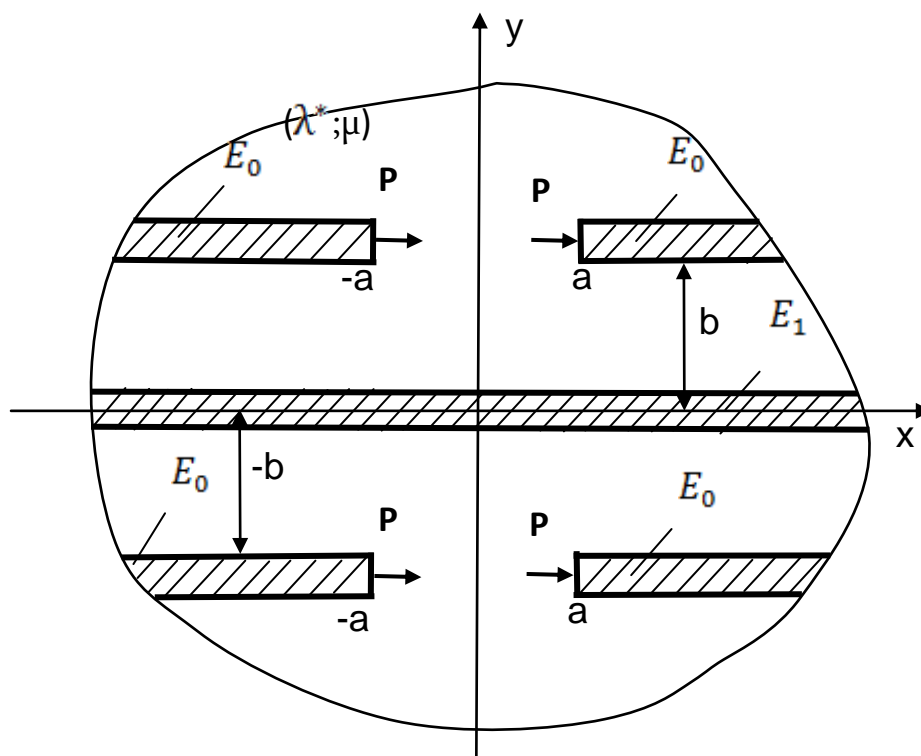


Рис. 3.3.1. Упругая однородная бесконечная пластина, усиленная четырьмя полубесконечными и одним бесконечным упругими стрингерами

В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для пластины справедлива модель обобщённого плоского напряженного состояния [80].

Тогда на основе вышесказанного трансформанты Фурье касательных напряжений на линии $y=0$ и горизонтальных перемещений на линии $y=b$ аналогично (3.1.1) выразятся трансформантой Фурье тангенциальных касательных напряжений на линии $y=b$:

$$\bar{\tau}(\sigma; 0) = \frac{2(kb\sigma^2 - |\sigma|)e^{-|\sigma|b}}{T_1 + |\sigma|} \bar{\tau}(\sigma; b),$$

$$\bar{u}(\sigma; b) = \frac{1}{T_1} \left[\frac{T_1 - 2bkT_1|\sigma| - b^2k^2|\sigma|^3}{|\sigma|(T_1 + |\sigma|)} e^{-2b|\sigma|} + \frac{1}{|\sigma|} \right] \frac{1}{E_1F} \bar{\tau}(\sigma; b),$$

$$(-\infty < \sigma < \infty).$$

Поступив аналогичным образом, как и в разделе 3.1 окончательно будем иметь

$$\tau(x; b) = \frac{2P}{\pi E_0 F} \int_a^\infty \frac{\bar{K}(\sigma)}{\sigma} \cos(\sigma a) \cos(\sigma x) d\sigma, \quad (3.3.1)$$

где

$$\bar{K}_1(\sigma) = \frac{1}{T_1} \left[\frac{T_1 - 2bkT_1|\sigma| - b^2k^2|\sigma|^3}{|\sigma|(T_1 + |\sigma|)} e^{-2|\sigma|b} + \frac{1}{|\sigma|} \right] \quad (-\infty < \sigma < \infty).$$

3.4. Расчет нормальных и касательных напряжений в полубесконечных стрингерах

Численный алгоритм решения контактной задачи, математически исследованной в разделе 3.3, на основе замкнутого решения (3.3.1), реализован в среде Wolfram Mathematica 11.0 и приводится в приложении 3.

В результате получаются графики, изображенные на рис. 3.4.1–3.4.4, показывающие поведение касательных напряжений в контактной зоне между полубесконечным стрингером и пластиной для различных соотношений между геометрическими и физическими параметрами рассматриваемой контактной задачи. Вычислены также нормальные напряжения, возникающие в полубесконечных

стрингерах, которые графически изображены на рис. 3.4.5–3.4.7. В качестве геометрического параметра рассматривается величина $\frac{b}{a}$, описывающая отношение расстояния между бесконечным и полубесконечными стрингерами к половине расстояния между полубесконечными стрингерами. В качестве физических параметров рассматриваются величины $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$, характеризующие отношение модулей упругости полубесконечных и бесконечного стрингеров к модулю упругости пластины, соответственно.

Из рис. 3.4.1 видно, что поведение безразмерной функции $\varphi(x)$, описывающей тангенциальные контактные напряжения на линии $y=b$ контакта между полубесконечным стрингером и пластиной, довольно быстро стремится к нулю при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$. В частности, уже при $x=1,5$ – $\varphi(1,5) = 7 \cdot 10^{-5}$. Следует отметить также, что при $\frac{b}{a} = 0,05$ и $\frac{b}{a} = 0,1$, а также $\frac{b}{a} = 0,5$ и $\frac{b}{a} = 1$ $\varphi(x)$ проявляет идентичное поведение.

Из рис. 3.4.1 также очевидно, что при переходе от значения геометрической характеристики $\frac{b}{a} = 0,1$ к $\frac{b}{a} = 0,5$, поведение тангенциальных контактных напряжений существенно отличается вблизи точки приложения сосредоточенной силы P .

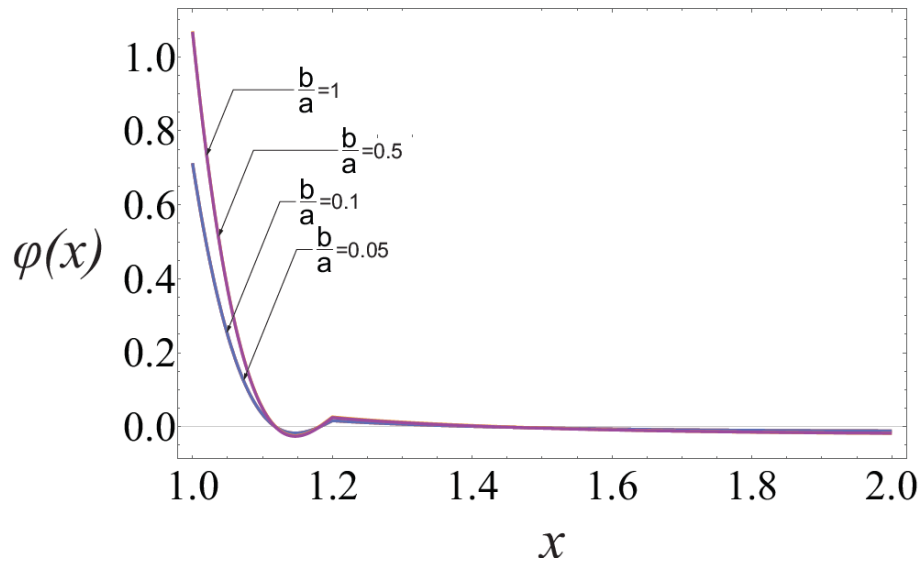


Рис. 3.4.1. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$ контакта между полубесконечным стрингером и пластиной при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и

$$\frac{E_0}{E} = \frac{3}{2}, \frac{E_1}{E} = 1$$

На рис. 3.4.2 и 3.4.3 изображено поведение безразмерной функции $\varphi(x)$ в зависимости от геометрической характеристики $\frac{b}{a}$ при $\frac{E_0}{E} = \frac{3}{2}, \frac{E_1}{E} = 2$ и

$\frac{E_0}{E} = 3, \frac{E_1}{E} = 2$ соответственно. Очевидно, что возрастание отношений физических параметров $\frac{E_1}{E}$ (от 1 к 2) и $\frac{E_0}{E}$ (от 1,5 к 3) приводит к убыванию функции $\varphi(x)$.

Численное исследование показало, что это явление характерно также для $\frac{E_1}{E} > 2,$

$$\frac{E_0}{E} > 3.$$

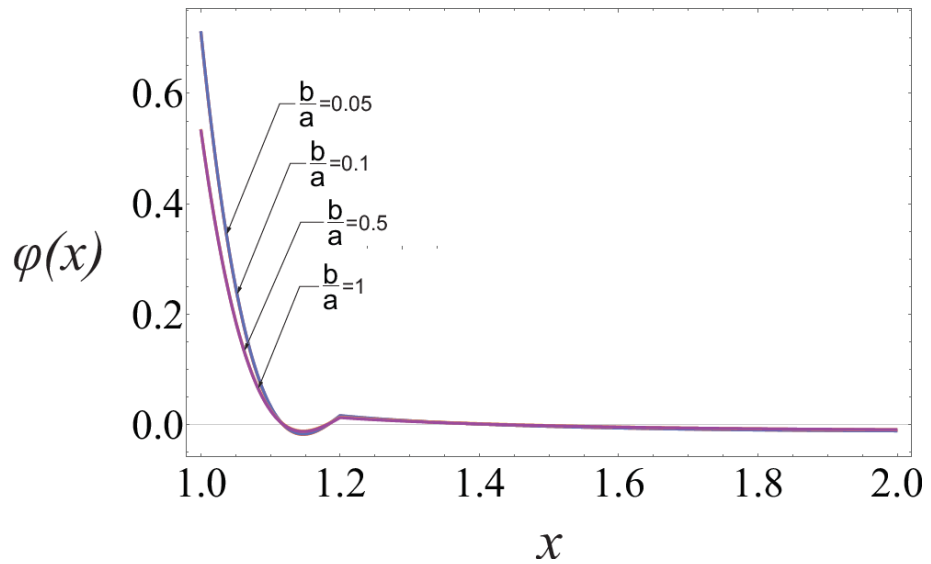


Рис. 3.4.2. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$ контакта между полубесконечным стрингером и пластиной при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и

$$\frac{E_0}{E} = \frac{3}{2}, \frac{E_1}{E} = 2$$

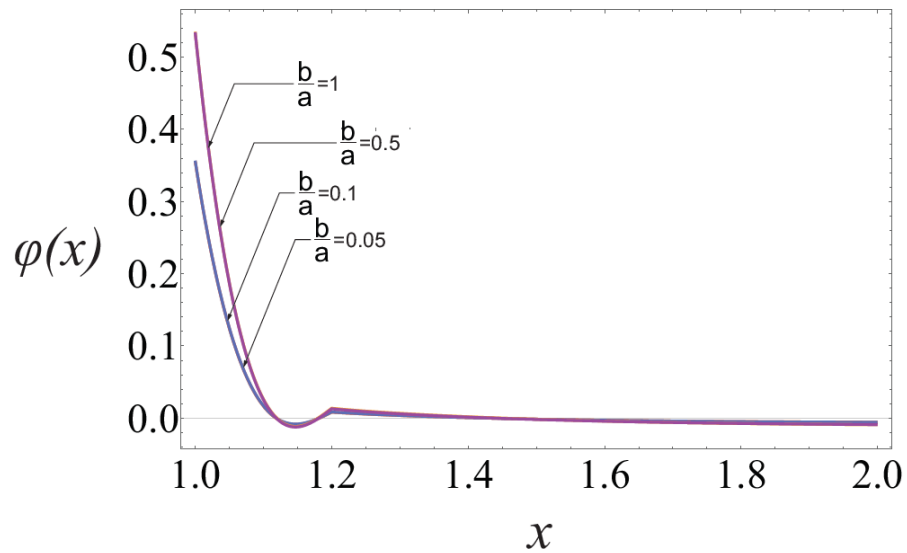


Рис. 3.4.3. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$ контакта между полубесконечным стрингером и пластиной при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и

$$\frac{E_0}{E} = 3, \frac{E_1}{E} = 2$$

На рис. 3.4.4 и 3.4.5 изображено поведение безразмерной функции $\varphi(x)$ при различных значениях физических параметров $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$, характеризующих отношение модулей упругости полубесконечных стрингеров и бесконечного стрингера к модулю упругости пластины соответственно. В результате вычислений было обнаружено, что поведение функции $\varphi(x)$ при изменении физических параметров $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$ не зависит от геометрической характеристики $\frac{b}{a}$, в связи с чем во всех вычислениях принято $\frac{b}{a} = 0,5$.

Из рис. 3.4.4 видно, что безразмерная функция $\varphi(x)$ убывает при возрастании физического параметра $\frac{E_0}{E}$ (от 1 до 4). Это явление наблюдается и при $\frac{E_0}{E} > 4$.

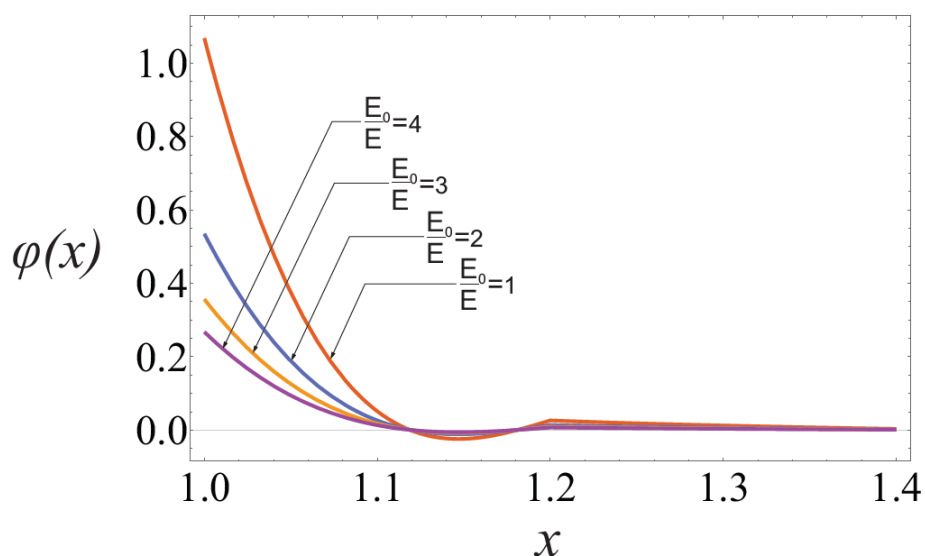


Рис. 3.4.4. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$ контакта между конечным стрингером и пластиной при $\frac{E_0}{E} = 1; 2; 3; 4$

Рис. 3.4.5 показывает, что поведение безразмерной функции $\varphi(x)$, описывающей тангенциальные контактные напряжения на линии $y = b$ контакта между полубесконечным стрингером и пластиной при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$, полностью идентично, т.е. отношение модулей упругости бесконечного стрингера и пластины никак не влияет на распределение тангенциальных контактных напряжений в зоне контакта между полубесконечным стрингером и пластиной.

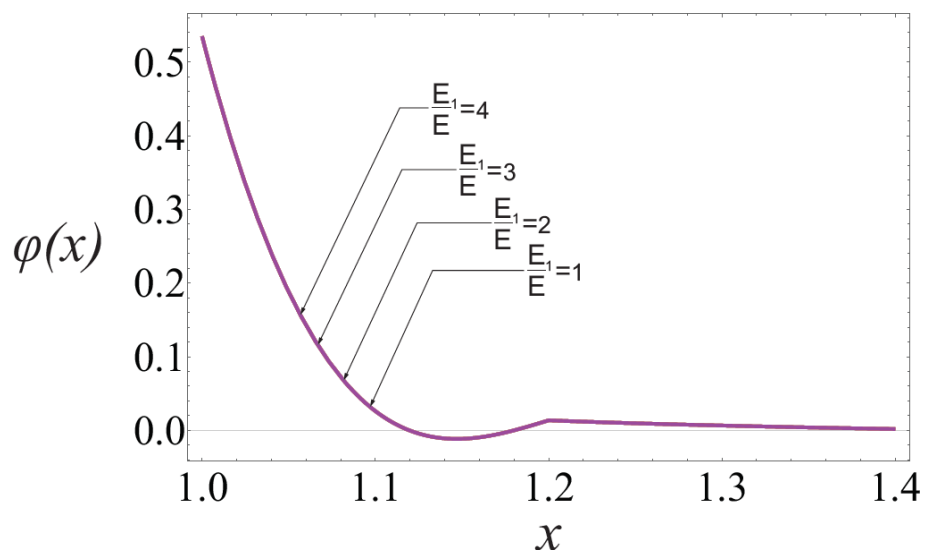


Рис. 3.4.5. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$ контакта между конечным стрингером и пластиной при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$

Исследуем теперь поведение интенсивности нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных стрингерах. Для этого введем безразмерную функцию интенсивности нормальных напряжений:

$$\psi(x) = \frac{\sigma_x^{(1)}(x; b) F_S^{(1)}}{P}.$$

Согласно формуле (3.1.4) и обозначению $\varphi(x)$, имеем

$$\psi(x) = \frac{E_0}{E_1} \int_{-1}^x \varphi(\xi) d\xi.$$

Поведение функции $\psi(x)$, описывающей интенсивность нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных стрингерах при разных значениях геометрических и физических параметров, изображено на рис. 3.4.6–3.4.10. В качестве геометрического параметра рассматривается величина $\frac{b}{a}$, описывающая отношение расстояния между полубесконечными и бесконечным стрингерами к половине длины расстояния между полубесконечными стрингерами, а в качестве физических параметров рассматриваются величины $\frac{E_0}{E}$ и $\frac{E_1}{E}$, характеризующие отношение модулей упругости полубесконечных и бесконечного стрингеров к модулю упругости пластины.

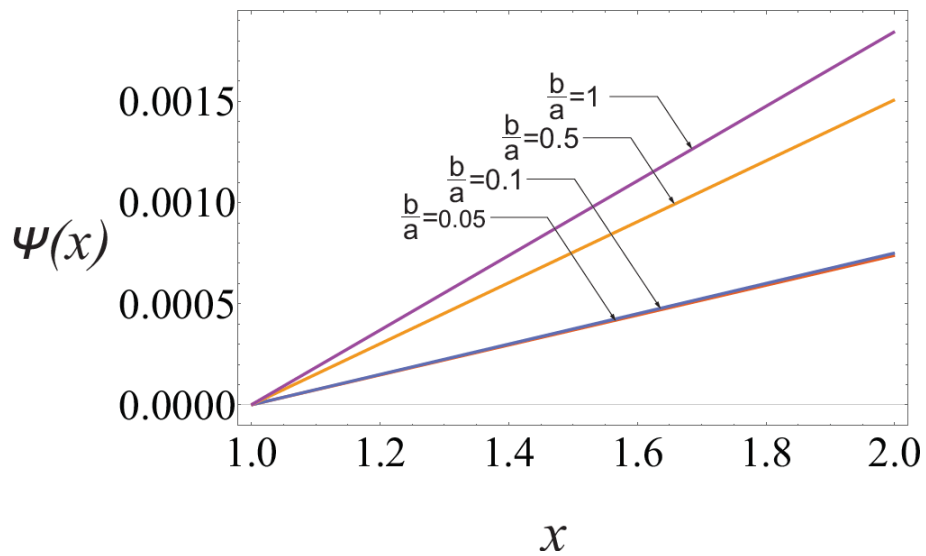


Рис. 3.4.6. Поведение нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных

стрингерах при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и $\frac{E_0}{E} = \frac{3}{2}, \frac{E_1}{E} = 1$

Как следует из рис. 3.4.6, при малых значениях геометрической характеристики $\frac{b}{a}$ поведение безразмерной функции $\psi(x)$ почти одинаково. Зависимость поведения безразмерной функции $\psi(x)$ от геометрического параметра $\frac{b}{a}$ была исследована также при $\frac{E_0}{E} = \frac{3}{2}, \frac{E_1}{E} = 2$ и $\frac{E_0}{E} = 3, \frac{E_1}{E} = 2$. Было установлено (см. рис. 3.4.7 и 3.4.8), что $\psi(x)$ убывает при возрастании как отношения $\frac{E_0}{E}$, так и отношения $\frac{E_1}{E}$ (независимо друг от друга).

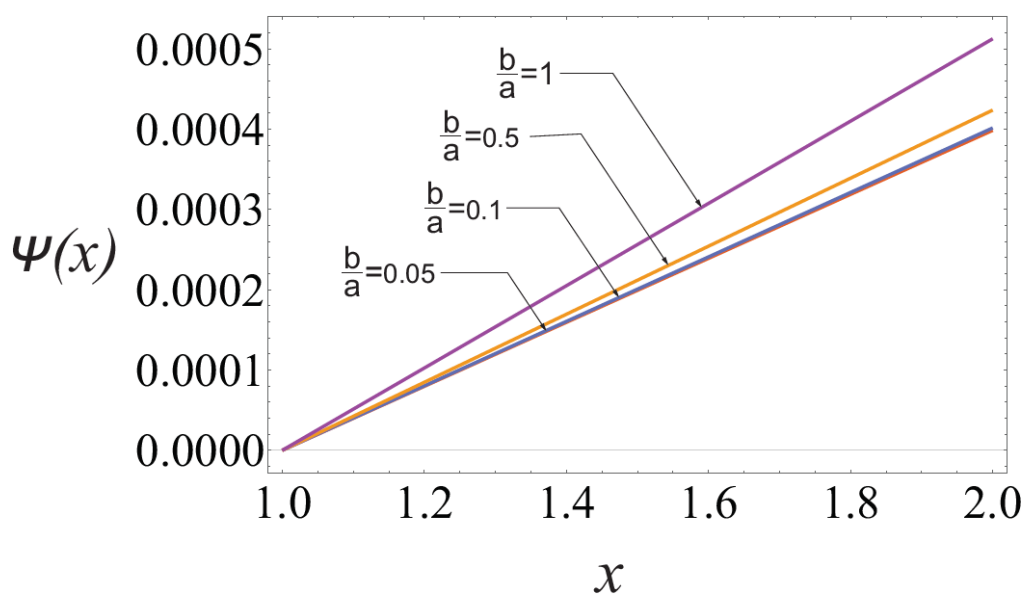


Рис. 3.4.7. Поведение нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных

стрингерах при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и $\frac{E_0}{E} = \frac{3}{2}, \frac{E_1}{E} = 2$

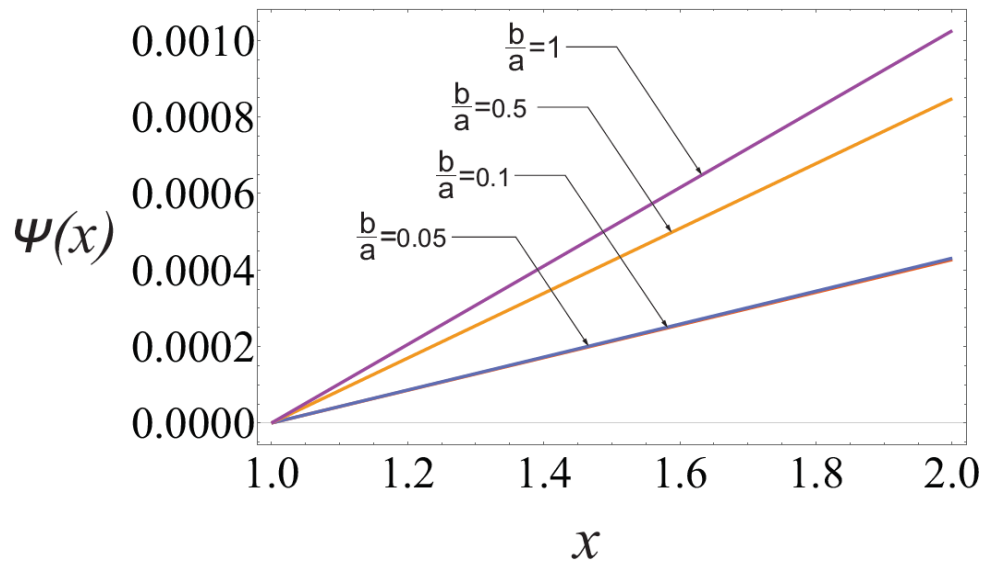


Рис. 3.4.8. Поведение нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных

стрингерах при $\frac{b}{a} = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ и $\frac{E_0}{E} = 3, \frac{E_1}{E} = 2$

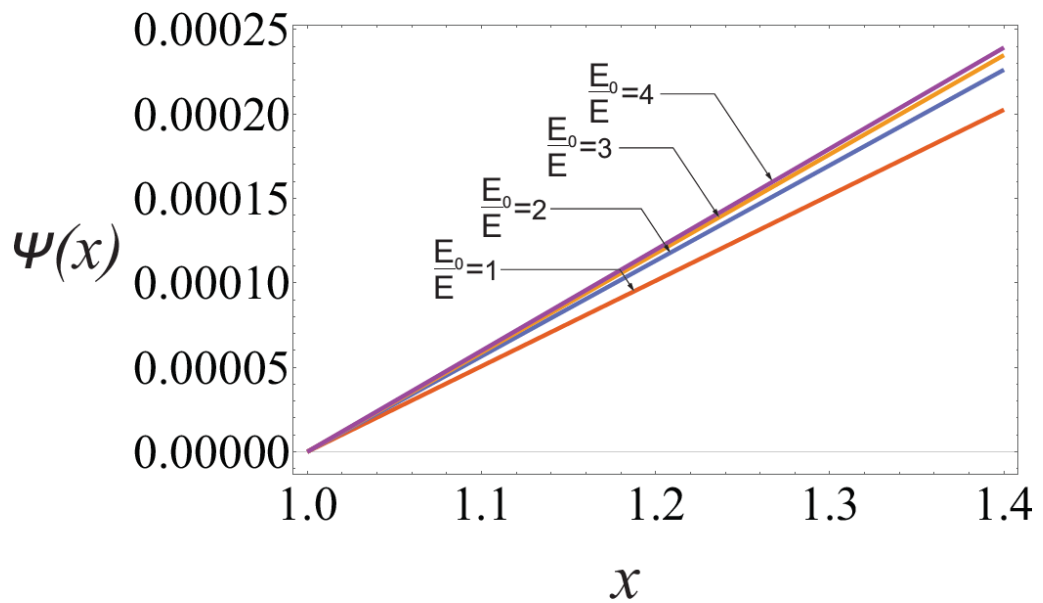


Рис. 3.4.9. Поведение нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных

стрингерах при $\frac{E_0}{E} = 1; 2; 3; 4$

Из рис. 3.4.9, где изображено поведение безразмерной функции $\psi(x)$, описывающей интенсивность нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных стрингерах, приходим к заключению, что при возрастании отношения $\frac{E_0}{E}$ $\psi(x)$ возрастает.

На рис. 3.4.10 изображено поведение безразмерной функции $\psi(x)$ при разных значениях отношения $\frac{E_1}{E}$. Выявлено, что при возрастании отношения $\frac{E_1}{E}$ интенсивность нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных стрингерах, убывает, что и следовало ожидать.

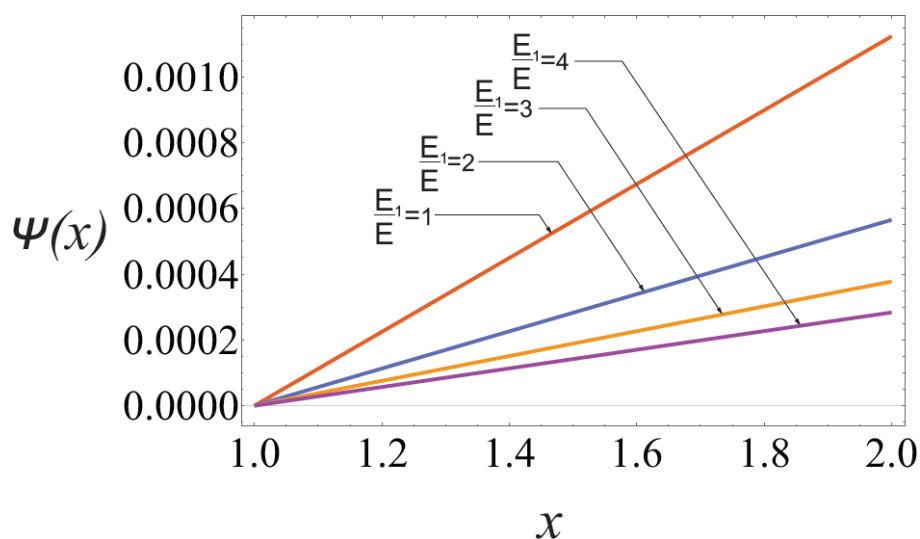


Рис. 3.4.10. Поведение нормальных напряжений, возникающих в полубесконечных стрингерах при $\frac{E_1}{E} = 1; 2; 3; 4$

3.5. Выводы по третьей главе

На основе численного анализа, проведенного в предыдущих разделах, заключаем:

1. Тангенциальные контактные напряжения, возникающие на линии контакта между полубесконечными стрингерами и пластиной, довольно быстро стремятся к нулю при удалении от концов стрингеров. Расстояние между стрингерами не влияет на зависимость контактных напряжений от отношения модулей упругости стрингеров и пластины.
2. При возрастании отношения модулей упругости полубесконечного стрингера и пластины контактные напряжения убывают, в то время как отношение модулей упругости бесконечного стрингера и пластины не влияет на поведение контактных напряжений.
3. Увеличение отношения жесткостей полубесконечного стрингера и пластины приводит к возрастанию нормальных напряжений в полубесконечном стрингере, а увеличение отношения жесткостей бесконечного стрингера и пластины – к убыванию нормальных напряжений.

ГЛАВА 4. ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ УПРУГИХ БЕСКОНЕЧНОГО И КОНЕЧНОГО СТРИНГЕРОВ К УПРУГОЙ ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ

4.1. Математическое моделирование контактной задачи о передаче нагрузки от двух параллельных упругих бесконечного и конечного стрингеров к упругой однородной бесконечной пластине

Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде однородной бесконечной тонкой пластины малой постоянной толщины h на линиях $y = a$ и $y = -c$ ($a; c > 0$) своей верхней поверхности содержит два параллельных стрингера – бесконечный и конечный – с разными упругими свойствами и достаточно малыми прямоугольными поперечными сечениями. Предполагается, что упругие бесконечный и конечный стрингеры жестко прикреплены к упругой сплошной изотропной однородной бесконечной пластине (см. рис. 4.1.1).

Цель исследования заключается в определении закона распределения интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий вдоль линий скрепления упругих бесконечного и конечного стрингеров с пластиной и нормальных (осевых) напряжений, возникающих в упругих бесконечном и конечном стрингерах, и, тем самым, определении взаимовлияния бесконечного и конечного стрингеров, когда контактирующая пара (пластина-стрингер) деформируется сосредоточенными силами $P\delta(x)\delta(y-a)$ и $Q\delta(x-d)\delta(y+c)$ ($d > 0$), приложенными к бесконечному и конечному стрингерам, а также равномерно распределенными

растягивающими горизонтальными напряжениями постоянной интенсивности σ_0 , действующими на пластину в бесконечности.

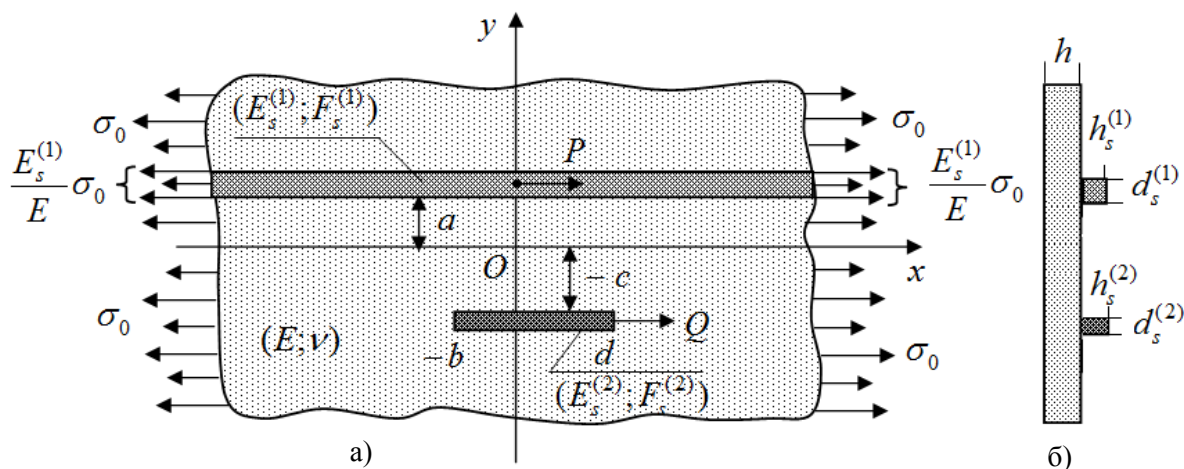


Рис. 4.1.1. Однородная бесконечная пластина, усиленная конечным и бесконечным упругими однородными стрингерами (а) и поперечное сечение вдоль линии $x = 0$ (б)

В рассматриваемой контактной задаче для бесконечного и конечного стрингеров принимается модель одноосного напряженного состояния в сочетании с моделью контакта по линии, т.е. считается, что распределения интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий сосредоточены вдоль средних линий контактных участков, и предполагается, что стрингеры не подвергаются изгибу, а для пластины считается справедливой модель обобщенного плоского напряженного состояния, вследствие чего она деформируется как плоскость [110].

Обращаясь теперь к выводу разрешающих уравнений поставленной контактной задачи, заметим, что бесконечный и конечный стрингеры в горизонтальном направлении растягиваются или сжимаются, находясь в одноосном напряженном состоянии. Тогда, в силу вышесказанного, дифференциальные уравнения равновесия будут иметь соответственно следующий вид:

$$\frac{du_s^{(1)}(x; a)}{dx} = -\frac{1}{2E_s^{(1)}F_s^{(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(s-x)\tau^{(1)}(s)ds - \frac{P\delta(x)}{2E_s^{(1)}F_s^{(1)}} + \frac{\sigma_0}{E} \quad (4.1.1)$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x; -c)}{dx} = -\frac{1}{2E_s^{(2)}F_s^{(2)}} \int_{-b}^d \operatorname{sgn}(u-x)\tau^{(2)}(u)du + \frac{Q}{2E_s^{(2)}F_s^{(2)}} \quad (4.1.2)$$

$$(-b < x < d),$$

решения, которых должны удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \left. \frac{du_s^{(1)}(x; a)}{dx} \right|_{|x| \rightarrow \infty} &= \frac{\sigma_0}{E_s^{(1)}}; \\ \left. \frac{du_s^{(2)}(x; -c)}{dx} \right|_{x=-b+0} &= 0; \quad \left. \frac{du_s^{(2)}(x; -c)}{dx} \right|_{x=d-0} = \frac{Q}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}}, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

а также условиям равновесия стрингеров:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{(1)}(s)ds = P; \quad \int_{-b}^d \tau^{(2)}(u)du = Q. \quad (4.1.4(a;б))$$

В формулах (4.1.1)–(4.1.4) $u_s^{(1)}(x; a)$ и $u_s^{(2)}(x; -c)$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров на линиях $y = a$ и $y = -c$; $\tau^{(1)}(x) = d_s^{(1)}\tau^{(1)}(x; a)$, где $\tau^{(1)}(x; a)$ – неизвестные тангенциальные контактные напряжения, возникающие под бесконечным стрингером на линии $y = a$; $\tau^{(2)}(x) = d_s^{(2)}\tau^{(2)}(x; -c)$, где $\tau^{(2)}(x; -c)$ – неизвестные тангенциальные контактные напряжения, возникающие под конечным стрингером на линии $y = -c$; $E_s^{(k)}$ ($k = 1, 2$) – модули упругости; $F_s^{(k)} = d_s^{(k)}h_s^{(k)}$ – площади поперечных сечений, а $h_s^{(k)}$ и $d_s^{(k)}$ – высота и ширина бесконечного и конечного стрингеров соответственно; P и Q – интенсивности осевых сосредоточенных сил, приложенных к бесконечному и конечному стрингерам соответственно в точках $(0; a)$ и $(d; -c)$; E – модуль упругости пластины.

С другой стороны, для горизонтальных деформаций пластины на линиях $y = a$ и $y = -c$, когда на эти же линии действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностями $\tau^{(1)}(x)$ ($-\infty < x < \infty$) и $\tau^{(2)}(x)$ ($-b \leq x \leq d$), а на бесконечности – равномерно распределенные растягивающие горизонтальные напряжения постоянной интенсивности σ_0 , соответственно будем иметь

$$hl \frac{du^{(1)}(x;a)}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^{(1)}(s)}{s-x} ds + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^d K(u-x) \tau^{(2)}(u) du + \frac{hl}{E} \sigma_0,$$

$$hl \frac{du^{(2)}(x;-c)}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \frac{\tau^{(2)}(u)}{u-x} du + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(s-x) \tau^{(1)}(s) ds + \frac{hl}{E} \sigma_0$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

где

$$K(t) = \frac{t}{t^2 + (a+c)^2} - \frac{2A(a+c)^2 t}{[t^2 + (a+c)^2]^2}; \quad l = \frac{4E}{(3-\nu)(1+\nu)}; \quad A = \frac{1+\nu}{3-\nu},$$

$u^{(1)}(x;a)$ и $u^{(2)}(x;-c)$ – горизонтальные перемещения точек пластины соответственно на линиях $y = a$ и $y = -c$; ν – коэффициент Пуассона материала пластины.

Удовлетворяя условиям контакта

$$\frac{du_s^{(1)}(x;a)}{dx} = \frac{du^{(1)}(x;a)}{dx} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x;-c)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x;-c)}{dx} \quad (-b < x < d),$$

получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{s-x} + \frac{\lambda^{(1)}}{2} \pi \operatorname{sgn}(s-x) \right] \tau^{(1)}(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^d K(u-x) \tau^{(2)}(u) du =$$

$$= -\frac{\lambda^{(1)}}{2} P \operatorname{sgn} x$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \left[\frac{1}{u-x} + \frac{\lambda_1}{2} \pi \operatorname{sgn}(u-x) \right] \tau^{(2)}(u) du + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(s-x) \tau^{(1)}(s) ds =$$

$$= \frac{\lambda_1}{2} Q - \frac{hl}{E} \sigma_0$$

$$(-b < x < d),$$

где $\lambda^{(1)} = \frac{hl}{E_s^{(1)} F_s^{(1)}}; \lambda^{(2)} = \frac{hl}{E_s^{(2)} F_s^{(2)}}.$

Следует отметить, что решение рассматриваемой контактной задачи при принятых выше предположениях сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений первого рода с подвижной особенностью (4.1.5) и (4.1.6) при интегральных условиях (4.1.4).

С целью решения системы (4.1.5) и (4.1.6) при наличии интегральных условий (4.1.4) применим к уравнению (4.1.5) действительное интегральное преобразование Фурье, и в результате чего после некоторых преобразований, пользуясь формулой свертки, относительно трансформанта Фурье функции $\tau^{(1)}(x)$ ($-\infty < x < \infty$) получим следующее функциональное уравнение:

$$[\lambda + |\sigma|] \bar{\tau}^{(1)}(\sigma) = \lambda P + H(|\sigma|) \varphi(\sigma) \quad (-\infty < \sigma < \infty), \quad (4.1.7)$$

где

$$\bar{\tau}^{(1)}(\sigma) = F\left[\tau^{(1)}(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{(1)}(s) e^{i\sigma s} ds; \quad \varphi(\sigma) = \int_{-b}^d \tau^{(2)}(u) e^{i\sigma u} du,$$

$$H(|\sigma|) = \left[A(a+c)\sigma^2 - |\sigma| \right] e^{-(a+c)|\sigma|}.$$

Следует отметить, что решение функционального уравнения (4.1.7) должно удовлетворять еще условиям (4.1.4), которые теперь преобразуются к виду $\bar{\tau}^{(1)}(0) = P$ и $\varphi(0) = Q$. Решая функциональное уравнение (4.1.7) относительно $\bar{\tau}^{(1)}(\sigma)$, получим

$$\bar{\tau}^{(1)}(\sigma) = \frac{\lambda P}{\lambda + |\sigma|} + \frac{\varphi(\sigma)}{\lambda + |\sigma|} H(|\sigma|) \quad (-\infty < \sigma < \infty). \quad (4.1.8)$$

Целесообразно также определить трансформанту Фурье нормальных (осевых) напряжений $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ ($-\infty < x < \infty$), возникающих в бесконечном стрингере, которая равна:

$$\bar{\sigma}_x^{(1)}(\sigma; a) = -\frac{P}{F_s^{(1)}} \frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda + |\sigma|} + \frac{\varphi(\sigma)}{F_s^{(1)}} \frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda + |\sigma|} H_0(|\sigma|) + \frac{E_s^{(1)}}{E} 2\pi\sigma_0 \delta(\sigma) \quad (4.1.9)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty).$$

Здесь

$$H_0(|\sigma|) = \left[A(a+c)|\sigma| - 1 \right] e^{-(a+c)|\sigma|}; \quad \bar{\sigma}_x^{(1)}(\sigma; a) = F\left[\sigma_x^{(1)}(x; a)\right].$$

При получении формул (4.1.7) и (4.1.9) использованы значения следующих интегралов [74]:

$$F\left[\frac{t}{t^2 + y^2}\right] = \frac{i\pi \operatorname{sgn} \sigma}{e^{|\sigma y|}}; \quad F\left[\frac{t}{(t^2 + y^2)^2}\right] = \frac{i\pi\sigma}{2|y|e^{|\sigma y|}},$$

$$F[\operatorname{sgn} t] = \frac{2i}{\sigma}; \quad F[1] = 2\pi\delta(\sigma) \quad (-\infty < \sigma; y; t < \infty).$$

Если применить к равенствам (4.1.8) и (4.1.9) обратное обобщенное интегральное преобразование Фурье, то получим функциональную зависимость между искомыми функциями $\tau^{(1)}(x)$, $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ ($-\infty < x < \infty$) и $\tau^{(2)}(x)$ ($-b \leq x \leq d$), характеризующую взаимовлияние бесконечного и конечного стрингеров:

$$\tau^{(1)}(x) = \frac{\lambda}{\pi} P H_c(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^d H_{oc}(u-x) \tau^{(2)}(u) du, \quad (4.1.10)$$

$$\sigma_x^{(1)}(x;a) = -\frac{P}{\pi F_s^{(1)}} H_s(x) - \frac{1}{\pi F_s^{(1)}} \int_{-b}^d H_{os}(u-x) \tau^{(2)}(u) du + \frac{E_s^{(1)}}{E} \sigma_0 \quad (4.1.11)$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{bmatrix} H_c(x) \\ H_s(x) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \cos(\sigma x) \\ \sin(\sigma x) \end{bmatrix} \frac{d\sigma}{\lambda + \sigma}; \quad \begin{bmatrix} H_{oc}(x) \\ H_{os}(x) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} H(\sigma) \cos(\sigma x) \\ H_o(\sigma) \sin(\sigma x) \end{bmatrix} \frac{d\sigma}{\lambda + \sigma}.$$

Таким образом, распределение неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностью $\tau^{(1)}(x)$ ($-\infty < x < \infty$) и нормальные (осевые) напряжения $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ ($-\infty < x < \infty$), возникающие в бесконечном стрингере, в итоге выражаются через распределение интенсивности $\tau^{(2)}(x)$ ($-b \leq x \leq d$) неизвестных тангенциальных контактных усилий в конечном стрингере формулами (4.1.10) и (4.1.11).

Для определения распределения тангенциальных контактных усилий $\tau^{(2)}(x)$ ($-b \leq x \leq d$) подставим в (4.1.6) значение функции $\tau^{(1)}(x)$ ($-\infty < x < \infty$), определенной формулой (4.1.10). Тогда после некоторых алгебраических

преобразований и упрощений для $\tau^{(2)}(x)$ ($-b \leq x \leq d$) получим следующее сингулярное интегральное уравнение первого рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \left[\frac{1}{u-x} + \frac{\lambda_1}{2} \pi \operatorname{sgn}(u-x) + M(u;x) \right] \tau^{(2)}(u) du = \frac{\lambda_1}{2} Q - \frac{hl}{E} \sigma_0 - \frac{\lambda}{\pi} PN(x) \quad (4.1.12)$$

$$(-b < x < d),$$

где введены следующие обозначения:

$$M(u;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(s-x) H_{oc}(u-s) ds; \quad N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(s-x) H_c(s) ds.$$

Очевидно, что решение уравнения (4.1.12) должно удовлетворять еще и первому условию из (4.1.4).

Имея в виду, что вблизи концов участка контакта распределения тангенциальных контактных усилий $\tau^{(2)}(u)$ имеют особенности квадратного корня, представим решение уравнения (4.1.12) при наличии интегрального условия (4.1.4(b)) в форме разложения бесконечного ряда по многочленам Чебышева первого рода:

$$\tau^{(2)}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-g^2(u)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n[g(u)]; \quad g(u) = \frac{2u+b-d}{b+d}; \quad |g(u)| < 1. \quad (4.1.13)$$

Здесь $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ($|x| \leq 1; n = \overline{0; \infty}$) – многочлены Чебышева первого рода, а X_n ($n = \overline{0; \infty}$) – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя представление (4.1.13) для функции $\tau^{(2)}(u)$ в уравнение (4.1.12) и пользуясь следующими известными спектральными интегральными соотношениями:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \frac{1}{u-x} \frac{T_n[g(u)]}{\sqrt{1-g^2(u)}} du = \begin{cases} 0; & n=0, \\ U_{n-1}[g(x)]; & (n=\overline{1;\infty}) \end{cases} \quad (-b < x < d),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \sqrt{1-g^2(u)} U_{n-1}[g(u)] U_{m-1}[g(u)] du = \begin{cases} 0; & n \neq m, \\ \frac{b+d}{4}; & n=m \end{cases} \quad (n; m = \overline{1;\infty}),$$

для нахождения неизвестных коэффициентов X_n ($n = \overline{1;\infty}$) традиционным способом [14, 35] получим следующую вполне квазирегулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$X_m + \sum_{n=1}^{\infty} H_{nm} X_n = \alpha_m \quad (m = \overline{1;\infty}). \quad (4.1.14)$$

Здесь ядра при неизвестных и свободные члены бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (4.1.14) определяются формулами:

$$H_{nm} = H_{nm}^{(1)} + H_{nm}^{(2)}; \quad \alpha_m = \alpha_m^{(1)} + \alpha_m^{(2)} - X_0 H_{0m},$$

$$\alpha_m^{(1)} = \begin{cases} 0; & m \neq 1, \\ \frac{\lambda_1}{2} Q - \frac{hl}{E} \sigma_0; & m = 1, \end{cases}$$

$$\alpha_m^{(2)} = -\frac{4\lambda P}{\pi^2(b+d)} \int_{-b}^d \sqrt{1-g^2(x)} U_{m-1}[g(x)] N(x) dx,$$

$$H_{nm}^{(1)} = -\frac{\lambda_1(b+d)}{\pi} \begin{cases} 0; & |m-n|=1, \\ \frac{2m[1+(-1)^{m+n}]}{[(m+n)^2-1][(m-n)^2-1]}; & |m-n| \neq 1, \end{cases}$$

$$H_{nm}^{(2)} = \frac{4}{\pi^2(b+d)} \int_{-b}^d \int_{-b}^d \frac{\sqrt{1-g^2(x)}}{\sqrt{1-g^2(u)}} T_n[g(u)] U_{m-1}[g(x)] M(u;x) du dx$$

$$(n; m = \overline{1;\infty}).$$

Отметим, что в бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (4.1.14) характерным является то, что коэффициент X_0 не фигурирует в левой части, следовательно, остальные коэффициенты X_n ($n = \overline{1; \infty}$) будут зависеть от X_0 линейно. При этом неизвестный коэффициент X_0 определяется из интегрального условия равновесия конечного стрингера (4.1.4(b)) и имеет следующий вид:

$$X_0 = \frac{2Q}{\pi(b+d)}.$$

Имея в виду (4.1.13), нормальные (осевые) напряжения, возникающие в конечном стрингере, можно вычислить по формуле:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(2)}(x; -c) = & \frac{Q}{\pi F_s^{(2)}} [\pi - \arccos g(x)] - \\ & - \frac{b+d}{2F_s^{(2)}} \sqrt{1-g^2(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X_n U_{n-1}[g(x)] \quad (-b \leq x \leq d). \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Отметим, что на основе представления (4.1.13) нормальные (осевые) напряжения, возникающие в бесконечном стрингере, определяются по формуле (4.1.11).

Исследуем поведение функций $\tau^{(1)}(x)$ ($-\infty < x < \infty$) интенсивности распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий и нормальных напряжений $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ ($-\infty < x < \infty$), возникающих в бесконечном стрингере, которые характеризуют их поведение вблизи и вдали от точки приложения сосредоточенной силы P . Сначала получим асимптотические формулы для функций $\tau^{(1)}(x)$ и $\sigma_x^{(1)}(x; a)$, когда $|x| \rightarrow 0$. При $|\sigma| \rightarrow \infty$ имеют место следующие асимптотические представления:

$$\frac{\lambda}{\lambda + |\sigma|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left| \frac{\sigma}{\lambda} \right| \right)^{-2n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^{-2n-2},$$

$$\frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda + |\sigma|} = \frac{i}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^{-2n-1} - \frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^{-2n-2}.$$

После применения обратного преобразования Фурье с учетом свойств интегралов Фурье для функций $\tau^{(1)}(x)$ и $\sigma_x^{(1)}(x; a)$, когда $|x| \rightarrow 0$, получим следующие асимптотические формулы:

$$\tau^{(1)}(x) = \frac{\lambda P}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\pi |\lambda x|^{2n+1}}{2(2n+1)!} + \frac{(\lambda x)^{2n}}{(2n)!} \left(\psi(2n+1) + \ln \frac{1}{|\lambda x|} \right) \right], \quad (4.1.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}(x; a) = \frac{P}{\pi F_s^{(1)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[-\frac{\pi (\lambda x)^{2n}}{2(2n)!} \operatorname{sgn}(\lambda x) + \right. \\ \left. + \frac{(\lambda x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\psi(2n+2) + \ln \frac{1}{|\lambda x|} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Из представлений (4.1.16) и (4.1.17) легко заметить, что функция при $|x| \rightarrow 0$ имеет логарифмическую особенность, а функция $\sigma_x^{(1)}(x; a)$ при $|x| \rightarrow 0$ имеет конечный скачок, который обусловлен наличием сосредоточенной силы P .

Теперь исследуем поведение функций $\tau^{(1)}(x)$ и $\sigma_x^{(1)}(x; a)$, когда $|x| \rightarrow \infty$. Имея в виду, что при $|\sigma| \rightarrow 0$ имеют место следующие асимптотические представления:

$$\frac{\lambda}{\lambda + |\sigma|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left| \frac{\sigma}{\lambda} \right| \right)^{2n+1},$$

$$\frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda + |\sigma|} = \frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^{2n} - \frac{i}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^{2n+1},$$

после применения обратного преобразования Фурье, для функций $\tau^{(1)}(x)$ и $\sigma_x^{(1)}(x; a)$, когда $|x| \rightarrow \infty$, получим следующие асимптотические формулы:

$$\tau^{(1)}(x) = \frac{\lambda P}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{(\lambda x)^{2n+2}}, \quad (4.1.18)$$

$$\sigma_x^{(1)}(x; a) = -\frac{P}{\pi F_s^{(1)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(\lambda x)^{2n+1}} + \frac{E_s^{(1)}}{E} \sigma_0. \quad (4.1.19)$$

Из формул (4.1.18) и (4.1.19) видно, что при $|x| \rightarrow \infty$ — $\tau^{(1)}(x) = O(x^{-2})$, $\sigma_x^{(1)}(x; a) = O(x^{-1})$. Выше при получении асимптотических формул были использованы значения следующих интегралов [74]:

$$F^{-1}[\sigma^n] = i^n \delta^{(n)}(x); \quad F^{-1}[i \operatorname{sgn} \sigma \cdot \sigma^{2n}] = \frac{(-1)^n (2n)!}{\pi x^{2n+1}},$$

$$F^{-1}[|\sigma|^{-2n-1}] = \frac{(-1)^n x^{2n}}{\pi (2n)!} \left[\psi(2n+1) + \ln \frac{1}{|x|} \right],$$

$$F^{-1}[i \operatorname{sgn} \sigma \cdot \sigma^{-2n-2}] = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{\pi (2n+1)!} \left(\psi(2n+2) + \ln \frac{1}{|x|} \right),$$

$$F^{-1}[|\sigma|^{2n+1}] = \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)!}{\pi x^{2n+2}}, \quad F^{-1}[\sigma^{-2n-2}] = \frac{(-1)^{n+1} |x|^{2n+1}}{2(2n+1)!},$$

$$F^{-1}[i \operatorname{sgn} \sigma \cdot |\sigma|^{-2n-1}] = \frac{(-1)^n x^{2n}}{2(2n)!} \operatorname{sgn} x \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

Следует отметить, что ряды (4.1.16), (4.1.17), (4.1.18) и (4.1.19) сходятся для всех значений x .

4.1.1. Некоторые частные случаи

Теперь рассмотрим некоторые частные случаи рассматриваемой контактной задачи:

а) Пластина, усиленная только бесконечным стрингером. В этом случае на основе (4.1.8) – (4.1.11) соответственно будем иметь

$$\bar{\tau}^{(1)}(\sigma) = \frac{\lambda P}{\lambda + |\sigma|}, \quad (4.1.20)$$

$$\bar{\sigma}_x^{(1)}(\sigma; a) = -\frac{P}{F_s^{(1)}} \frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{\lambda + |\sigma|} + \frac{E_s^{(1)}}{E} 2\pi \sigma_0 \delta(\sigma) \quad (4.1.21)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty),$$

$$\tau^{(1)}(x) = \frac{\lambda P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\sigma x)}{\lambda + \sigma} d\sigma, \quad (4.1.22)$$

$$\sigma_x^{(1)}(x; a) = -\frac{P}{\pi F_s^{(1)}} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sigma x)}{\lambda + \sigma} d\sigma + \frac{E_s^{(1)}}{E} \sigma_0 \quad (4.1.23)$$

$$(-\infty < x < \infty).$$

Отметим, что формулы (4.1.22) и (4.1.23) при $\sigma_0 = 0$ совпадают с результатами работы [77].

б) Пластина, усиленная только бесконечным стрингером и $P = 0$. Тогда из формул (4.1.20) – (4.1.23) соответственно будем иметь:

$$\bar{\tau}^{(1)}(\sigma) = 0, \quad (4.1.24)$$

$$\bar{\sigma}_x^{(1)}(\sigma; a) = \frac{E_s^{(1)}}{E} 2\pi\sigma_0 \delta(\sigma) \quad (4.1.25)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty),$$

$$\tau^{(1)}(x) = 0, \quad (4.1.26)$$

$$\sigma_x^{(1)}(x; a) = \frac{E_s^{(1)}}{E} \sigma_0 \quad (4.1.27)$$

$$(-\infty < x < \infty).$$

Формулы (4.1.24) – (4.1.27) показывают, что, несмотря на то, что пластина находится в напряженном состоянии под воздействием напряжения σ_0 , напряженное состояние от пластины не передается бесконечному стрингеру, т.е. имеем постоянное напряженное состояние.

в) Если $a + c \rightarrow \infty$, то из системы сингулярных интегральных уравнений (4.1.5) и (4.1.6) будем иметь два независимых сингулярных интегральных уравнения, характеризующие воздействие бесконечного и конечного стрингеров на пластину:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{s-x} + \frac{\lambda^{(1)}}{2} \pi \operatorname{sgn}(s-x) \right] \tau^{(1)}(s) ds = -\frac{\lambda^{(1)} P}{2} \operatorname{sgn} x \quad (4.1.28)$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \left[\frac{1}{u-x} + \frac{\lambda^{(2)}}{2} \pi \operatorname{sgn}(u-x) \right] \tau^{(2)}(u) du = \frac{\lambda^{(2)} Q}{2} - \frac{hl}{E} \sigma_0 \quad (4.1.29)$$

$$(-b < x < d).$$

Это означает, что бесконечный и конечный стрингеры не действуют друг на друга, а их воздействие на пластину определяется отдельно. Действительно,

уравнение (4.1.28) допускает решения, представленные в виде формул (4.1.20)–(4.1.23), а решение уравнения (4.1.29) определяется из бесконечной системы (4.1.14) при $H_{mn}^{(2)} = 0$ и $\alpha_m^{(2)} = 0$ ($n; m = \overline{1; \infty}$).

г) Рассмотрим предельный случай, когда одновременно $a \rightarrow 0$ и $c \rightarrow 0$. Тогда на основе (4.1.8)–(4.1.11) соответственно будем иметь

$$\bar{\tau}^{(1)}(\sigma) = \frac{\lambda^{(1)}P}{\lambda^{(1)} + |\sigma|} + \frac{\lambda^{(1)}\varphi(\sigma)}{\lambda^{(1)} + |\sigma|} - \varphi(\sigma),$$

$$\bar{\sigma}_x^{(1)}(\sigma; a) = -\frac{i \operatorname{sgn} \sigma}{F_s^{(1)}} \left[\frac{P}{\lambda^{(1)} + |\sigma|} + \frac{\varphi(\sigma)}{\lambda^{(1)} + |\sigma|} \right] + \frac{E_s^{(1)}}{E} 2\pi\sigma_0 \delta(\sigma)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty),$$

$$\tau^{(1)}(x) = \frac{\lambda^{(1)}P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\sigma x)}{\lambda + \sigma} d\sigma + \frac{\lambda^{(1)}}{\pi} \int_{-b}^d H_c(u-x) \tau^{(2)}(u) du - \tau^{(2)}(x),$$

$$\sigma_x^{(1)}(x; a) = -\frac{P}{\pi F_s^{(1)}} \int_0^\infty \frac{\sin(\sigma x)}{\lambda + \sigma} d\sigma + \frac{1}{\pi F_s^{(1)}} \int_{-b}^d H_s(u-x) \tau^{(2)}(u) du + \frac{E_s^{(1)}}{E} \sigma_0$$

$$(-\infty < x < \infty).$$

Таким образом, решение поставленной контактной задачи при принятых выше предположениях сводится к решению вполне квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (4.1.14) с ядрами H_{mn} ($n; m = \overline{1; \infty}$) и свободными членами α_m ($m = \overline{1; \infty}$).

Следует также отметить, что исследование бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (4.1.14) проводится аналогичным образом, как и в работах [12, 30, 37, 78].

4.2. Вычисление основных характеристик напряженно-деформированного состояния конечного и бесконечного струнгеров

В этом разделе проводится численный анализ контактной задачи, рассмотренной в разделе 4.1. Поскольку в этом случае анализируются тангенциальные и нормальные напряжения, возникающие в обоих струнгерх, то результаты вычислений приведем в отдельных подразделах.

4.2.1. Анализ напряженно-деформированного состояния в упругом бесконечном струнгер

Для удобства численных расчетов перейдем в (4.1.16)–(4.1.19) к безразмерным переменным и величинам

$$x_* = \frac{x}{a}, \quad \varphi(x) = \frac{a\tau^{(1)}(x)}{P},$$

$$x_* = \frac{x}{a}, \quad \varphi(x) = \frac{a\tau^{(1)}(x)}{P}, \quad \psi(x) = \frac{\sigma_x^{(1)}(x;a)F_s^{(1)}}{P},$$

$$\lambda = \lambda^{(1)}a = \frac{4}{(3-\nu)(1+\nu)} \cdot \frac{ha}{F_s^{(1)}} \cdot \frac{E}{E_s^{(1)}}.$$

При $|x| \rightarrow 0$, т.е. вблизи приложения сосредоточенной силы с интенсивностью P , поведение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, описывающих интенсивности тангенциальных контактных усилий и нормальных напряжений, возникающих в бесконечном струнгере, изображено на рис. 4.2.1 и 4.2.2 при различных значениях параметра λ .

В выражении λ фигурируют:

- геометрический параметр $\frac{ha}{F_s^{(1)}}$, описывающий отношение толщины пластины, умноженной на расстояние бесконечного струнгера от горизонтальной оси, на площади поперечного сечения бесконечного струнгера;
- физический параметр $\frac{E}{E_s^{(1)}}$, описывающий отношение модулей упругости пластины и бесконечного струнгера.

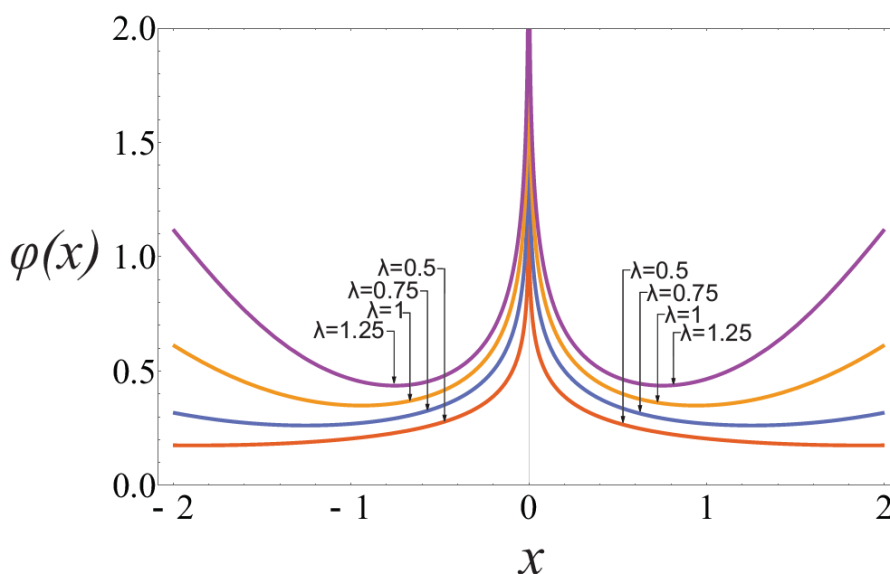


Рис. 4.2.1. Поведение тангенциальных контактных напряжений вблизи точки приложения сосредоточенной силы P при $\lambda = 0,5; 0,75; 1; 1,25$

Фиксируя один из вышеперечисленных параметров, можно свободно варьировать вторым.

Из рис. 4.2.1 очевидно, что при возрастании параметра λ функция $\varphi(x)$ тоже возрастает. С другой стороны, из рис. 4.2.2 следует, что в малой окрестности точки приложения сосредоточенной силы P при возрастании параметра λ функция $\psi(x)$ убывает. Однако при удалении от точки приложения сосредоточенной силы P абсолютное значение функции $\psi(x)$ возрастает при возрастании параметра λ .

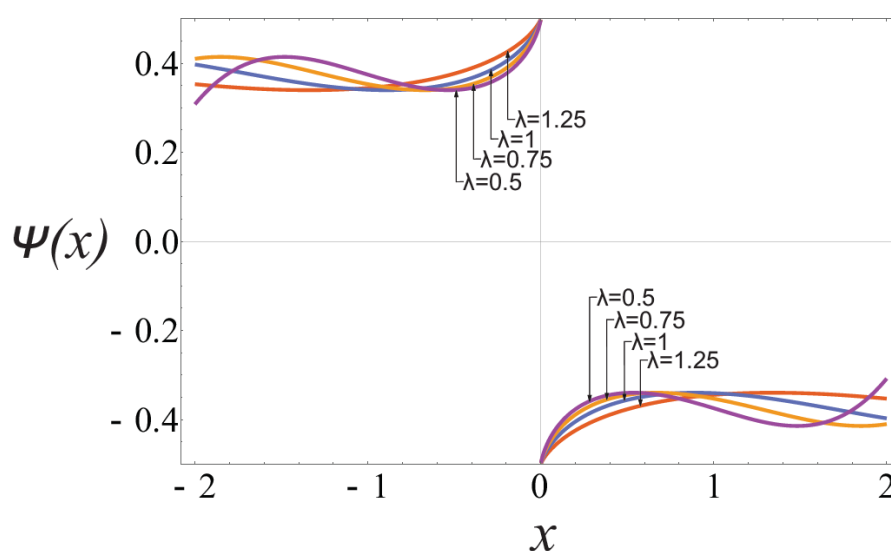


Рис. 4.2.2. Поведение нормальных напряжений вблизи точки приложения сосредоточенной силы P при $\lambda = 0,5; 0,75; 1; 1,25$

На рис. 4.2.3 и 4.2.4 изображено поведение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вдали от точки приложения сосредоточенной силы P в зависимости от параметра λ . Очевидно, что при возрастании параметра λ функция $\varphi(x)$ убывает, а функция $\psi(x)$, наоборот, возрастает. Конечный скачок при $x \rightarrow 0$ равен 0,5.

Следует отметить, что поскольку отношение $\frac{E_s^{(1)}}{E} \cdot \frac{\sigma_0}{P}$, получаемое в результате перехода в (4.1.19) к безразмерным переменным и величинам, влияет лишь на значение функции $\psi(x)$, а не на ее поведение, его значение было задано равным 20-и.

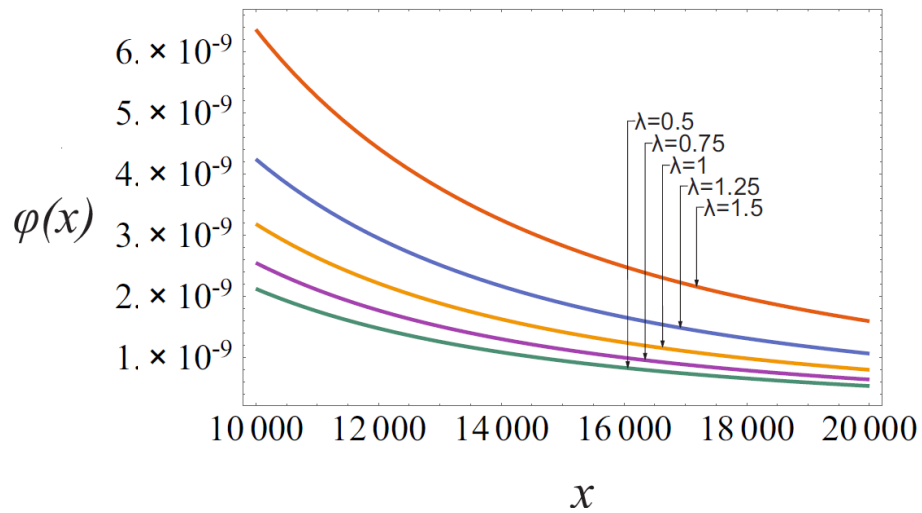


Рис. 4.2.3. Поведение тангенциальных контактных напряжений вдали от точки приложения сосредоточенной силы P при $\lambda = 0,5; 0,75; 1; 1,25$

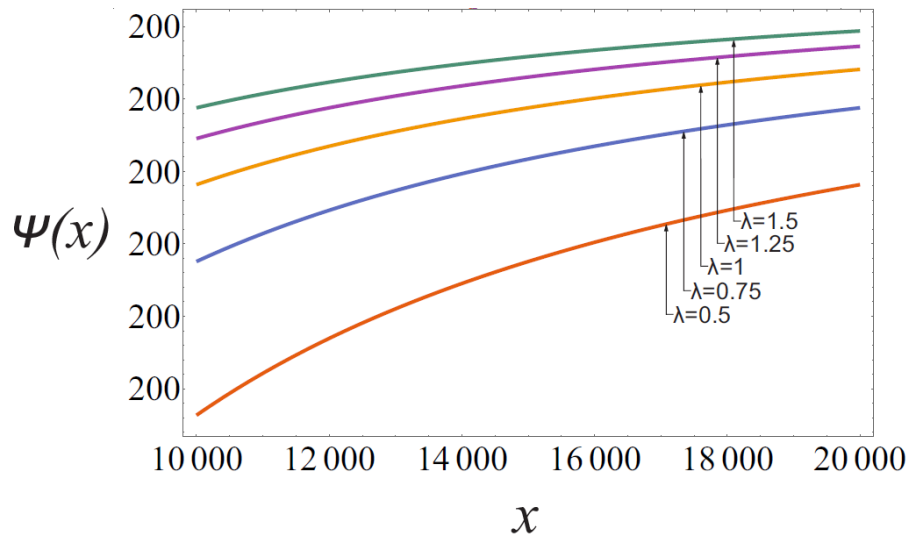


Рис. 4.2.4. Поведение нормальных напряжений вдали от точки приложения сосредоточенной силы P при $\lambda = 0,5; 0,75; 1; 1,25$

4.2.2. Анализ напряженно-деформированного состояния в упругом конечном стрингере

Для удобства численных расчетов перейдем в (4.1.13)–(4.1.15) к безразмерным переменным и величинам

$$x_* = \frac{x}{b+d}, \quad \varphi(x) = \frac{(b+d)\tau^{(2)}(x)}{Q}, \quad \psi(x) = \frac{\sigma_x^{(2)}(x;a)F_s^{(2)}}{Q}, \quad \alpha = \frac{h(b+d)\sigma_0}{Q},$$

$$\lambda = \lambda^{(2)}(b+d) = \frac{4}{(3-\nu)(1+\nu)} \cdot \frac{h(b+d)}{F_s^{(2)}} \cdot \frac{E}{E_s^{(2)}}.$$

На основе аналитических формул, полученных в результате перехода в (4.1.13)–(4.1.15), численно исследовано поведение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, описывающих интенсивности тангенциальных контактных усилий и нормальных напряжений, возникающих в бесконечном стрингере. Результаты представлены на рис. 4.2.5–4.2.8 при различных значениях параметра λ .

В выражении λ фигурируют:

- геометрический параметр $\frac{h(b+d)}{F_s^{(2)}}$, описывающий отношение толщины пластины, умноженной на длину конечного стрингера, к площади поперечного сечения конечного стрингера,
- физический параметр $\frac{E}{E_s^{(2)}}$, описывающий отношение модулей упругости пластины и конечного стрингера.

Фиксируя один из этих параметров, можно свободно варьировать вторым. При расчетах значение отношения $\frac{h(b+d)}{F_s^{(2)}}$ было задано равным 50-ти.

В расчетах также фигурирует силовой параметр α , характеризующий отношение растягивающих усилий, обусловленных напряжениями σ_0 , к сосредоточенной силе, приложенной к концу конечного стрингера.

Из рис. 4.2.5 следует, что при возрастании отношения $\frac{E_s^{(2)}}{E}$ функция $\varphi(x)$ убывает. С другой стороны, рис. 4.2.6 показывает, что при переходе от значения $\alpha = 0,5$ к $\alpha = 1$ функция $\varphi(x)$ убывает, а при дальнейшем возрастании параметра α функция $\varphi(x)$ возрастает.

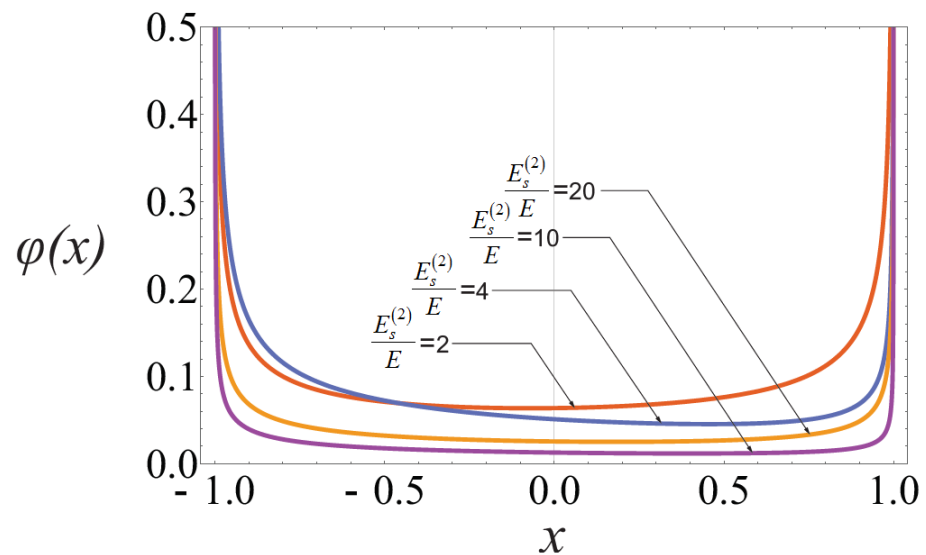


Рис. 4.2.5. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии контакта

между пластиной и конечным стрингером при $\frac{E_s^{(2)}}{E} = 2; 4; 10; 20$

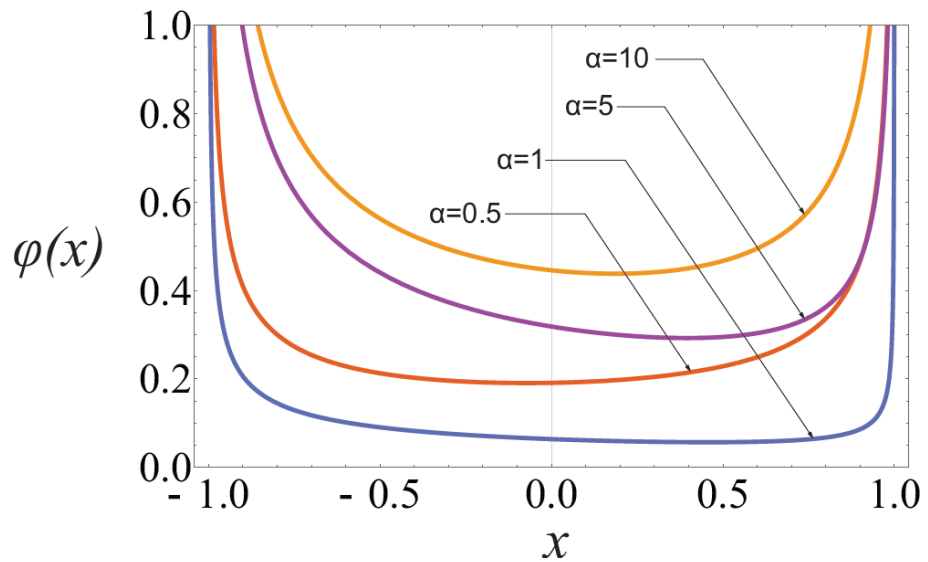


Рис. 4.2.6. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии контакта между пластиной и конечным стрингером при $\alpha = 0,5; 1; 5; 10$

На рис. 4.2.7 и 4.2.8 изображено поведение функции $\psi(x)$ в зависимости от физического $\frac{E_s^{(2)}}{E}$ и силового α параметров.

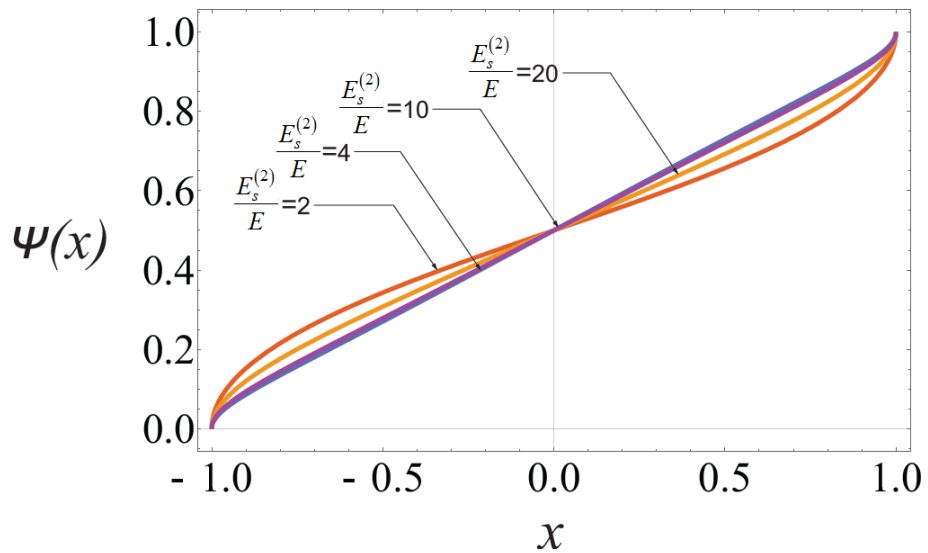


Рис. 4.2.7. Поведение нормальных напряжений на линии контакта между пластиной и конечным стрингером при $\frac{E_s^{(2)}}{E} = 2; 4; 10; 20$

Из рисунков видно, при возрастании параметра $\frac{E_s^{(2)}}{E}$ функция $\psi(x)$ стремится к линейной функции. С другой стороны, при возрастании силового параметра α функция $\psi(x)$ убывает.

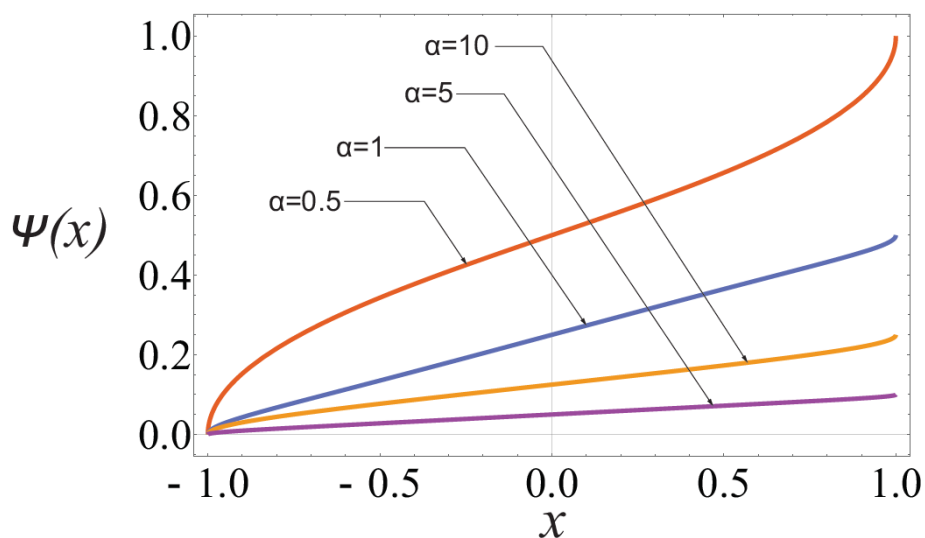


Рис. 4.2.8. Поведение нормальных напряжений на линии контакта между пластиной и конечным стрингером при $\alpha = 0,5; 1; 5; 10$

Проведен также сравнительный анализ решения сингулярного интегрального уравнения (4.1.12), искомого в форме разложения в бесконечный ряд (4.1.13) по многочленам Чебышева первого рода, и решения, полученного непосредственно из уравнения (4.1.12) с использованием метода последовательных приближений. Были сравнены также соответствующие нормальные напряжения, возникающие в упругом конечном стрингере. Оказалось, что разница между обоими решениями очень мала (см. рис. 4.2.9 и 4.2.10), а именно – касательные напряжения наиболее различаются друг от друга в зоне $[-0,8; -0,5]$. Более того, максимальная разница наблюдается при $x = -0,7$ и составляет 4,5%. С другой стороны, нормальные напряжения наиболее различаются в зоне $[0,8; 1]$, причем максимальная разница наблюдается при $x = 1$ и составляет 5,2%.

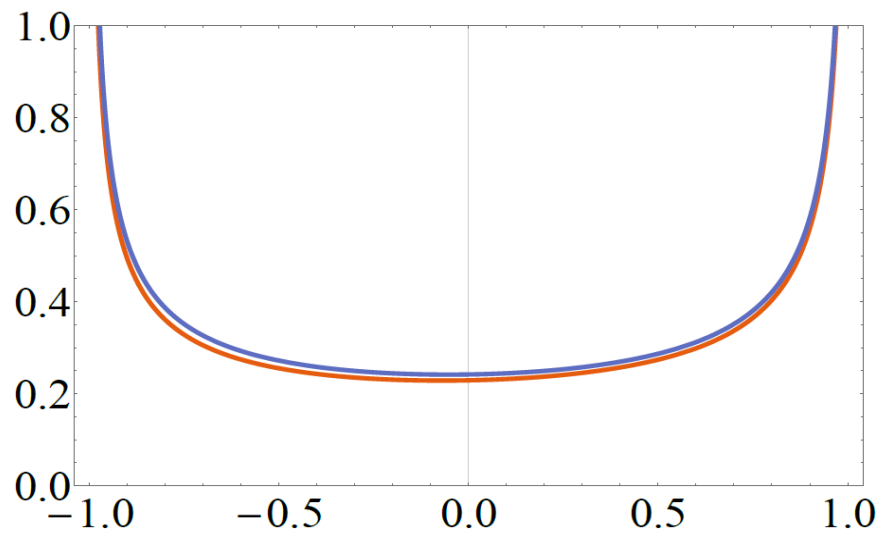


Рис. 4.2.9. Разница между решением сингулярного интегрального уравнения (4.1.12) в форме (4.1.13) и решением, полученным методом последовательных приближений

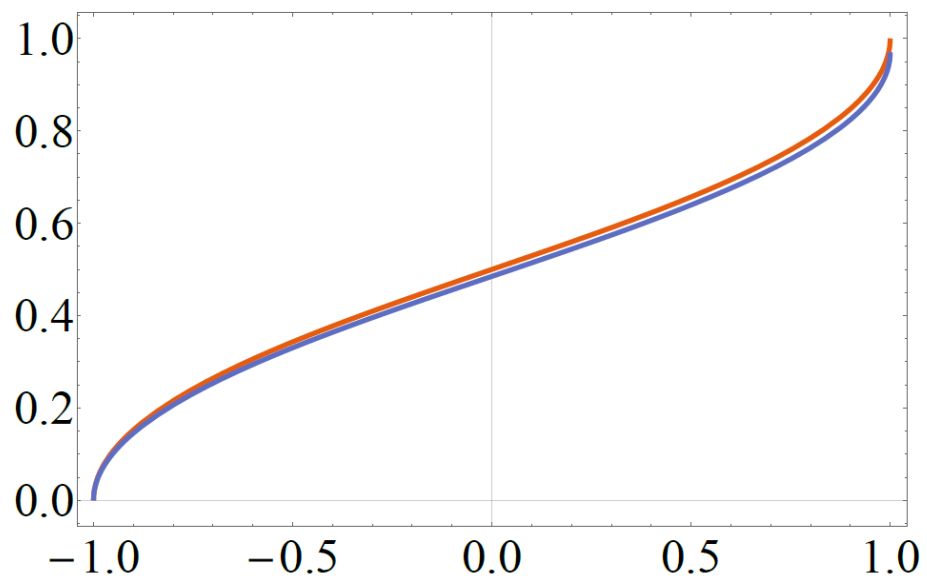


Рис. 4.2.10. Разница между соответствующими нормальными напряжениями

4.3. Методы прочностного расчета элементов конструкций

Одним из наиболее важных критериев пригодности летательного аппарата является так называемая оценка прочности конструкции аппарата. Для расчета аппарата на прочность следует сначала исследовать его напряженно-деформированное состояние и определить сечения с максимальными нормальными и касательными напряжениями. Результаты, полученные в настоящей диссертационной работе, которые описывают поведение касательных и нормальных напряжений в стрингерах и пластинах, дают возможность проведения прочностных расчетов элементов конструкции самолетов при их проектировании и проверочных расчетах. С помощью введенных критериев прочности устанавливается мера напряженно-деформированного состояния, по достижении которой происходит переход от упругого состояния к предельному. Предельное напряженное состояние, обусловленное механическими характеристиками материала и условиями эксплуатации конструкции, устанавливается проектным заданием. Для расчета и проектирования стрингеров нами предлагается использование теории наибольших касательных напряжений [17, 94], в соответствии с которой опасное состояние материала (текучесть или разрушение) наступает при условии, что наибольшее касательное напряжение достигнет некоторой величины, определяемой опытным и расчетным путем для данного материала и условий нагружения. Данные различных экспериментов свидетельствуют о том, что максимальные касательные напряжения часто принимаются в качестве критерия для анализа предельных состояний конструкций. Безопасное состояние определяется следующим условием прочности по тангенциальным контактным напряжениям на линии контакта между конечными стрингерами и пластиной:

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad (4.3.1)$$

где $[\tau]$ – допускаемое напряжение; τ_{\max} – максимальное касательное напряжение, которое является экстремумом функции $\tau(x)$, определяемой формулой

$$\tau(x) = \varphi(x) \frac{P}{a}, \quad (4.3.2)$$

Таким образом: $\max \varphi(x) \rightarrow \max \tau(x)$.

Имея численные результаты для безразмерной функции $\varphi(x)$, для различных физических и геометрических параметров пластины и стрингеров с помощью формулы (4.3.2) определяются места накопления максимальных касательных напряжений на линии контакта и проверяется условие прочности (4.3.1), либо с его помощью производится проектный расчет элементов конструкции.

Для нормальных напряжений, возникающих в стрингерах, предлагается использование теории наибольших нормальных напряжений [17, 94], в соответствии с которой причиной достижения предельного состояния является наибольшее нормальное напряжение. Исходя из этой теории прочности, разрушение происходит, когда наибольшее нормальное напряжение достигает некоторого предельного значения, полученного экспериментальными методами исследования данного материала. Условие прочности по данной теории записывается формулой

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_p, \quad (4.3.3)$$

где $[\sigma]_p$ – допустимое нормальное напряжение, а σ_{\max} – максимальное нормальное напряжение в конечных стрингерах, которое является экстремумом функции $\sigma(x)$, определяемой формулой:

$$\sigma(x) = \psi(x) \frac{P}{F_s}, \quad (4.3.4)$$

Таким образом: $\max \psi(x) \rightarrow \max \sigma(x)$.

Имея численные результаты для безразмерной функции $\psi(x)$, для различных физических и геометрических параметров пластины и стрингеров с помощью

формулы (4.3.4) определяем места накопления максимальных нормальных напряжений и проверяем условие прочности (4.3.3).

Таким образом, разработанные в работе методы и программные средства решения задач исследования напряженно-деформированного состояния и определения напряжений в конструкциях типа пластин, усиленных различными стрингерами, обеспечивают адекватный подбор теорий прочности и проведение прочностного расчета, наиболее соответствующие конкретным случаям нагружения, механическим характеристикам материалов и геометрии элементов конструкции.

4.4. Выводы по четвертой главе

На основе проведенного выше численного анализа контактной задачи, рассмотренной в разделе 4.1, в частности, можно заключить:

а) для бесконечного стрингера:

1. В малой окрестности точки приложения сосредоточенной силы при возрастании параметра λ контактные напряжения возрастают, а нормальные – убывают. Нормальные напряжения имеют конечный скачок в точке приложения сосредоточенной силы.
2. При удалении от точки приложения сосредоточенной силы по мере возрастания параметра λ возрастают как контактные, так и нормальные напряжения, а на бесконечности контактные напряжения убывают, тогда как нормальные напряжения, наоборот, возрастают.

б) для конечного стрингера:

1. При возрастании отношения модулей упругости конечного стрингера и пластины контактные напряжения убывают, а нормальные напряжения стремятся к линейной функции.

2. При возрастании отношения растягивающих усилий, приложенных к бесконечности пластины, и сосредоточенной силы, приложенной к концу конечного стрингера, контактные напряжения возрастают, в то время как нормальные напряжения убывают.

Сравнительный анализ решения задачи предложенным методом и методом последовательных приближений выявил высокую эффективность предложенного метода.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Обшивка фюзеляжа, крыла и оперения самолета смоделированы в виде бесконечных пластин, усиленных стрингерами разных длин, даны математические формулировки соответствующих контактных задач и выбраны эффективные методы для их решения. Исследовано поведение основных механических характеристик (контактные напряжения, осевые напряжения в стрингерах, коэффициенты интенсивности у концентраторов напряжений) в зависимости от искомых параметров каждой задачи.
2. Выявлены характерные закономерности и особенности взаимодействия контактирующих тел: стрингеров и пластин, в частности, слабое влияние вариации геометрических параметров и существенное уменьшение нормальных напряжений в конечных стрингерах, имеющие место при увеличении жесткости бесконечного стрингера.
3. Получены аналитическое решение и его графические иллюстрации для структур, смоделированных в виде бесконечных пластин, усиленных различными сочетаниями бесконечных и конечных, а также бесконечных и полубесконечных стрингеров. Выявлено, что увеличение жесткости бесконечных стрингеров, например, в 4 раза приводит к снижению в 5 раз нормальных напряжений в полубесконечных стрингерах, что может быть использовано как при расчетах на прочность, так и для оценки результатов экспериментальных исследований и технических испытаний структурных элементов самолета.
4. На основе анализа влияния стрингеров на распределение интенсивностей тангенциальных сил и напряженно-деформированное состояние пластин в широком диапазоне варьирования физических и геометрических параметров, в соответствии с конкретным проектным заданием, предлагается наиболее эффективная подборка физических и геометрических параметров для конструирования устойчивых и прочных панелей самолета.
5. Полученные простые расчетные формулы по определению контактных сил, действующих в пластинах под стрингерами, и разработанные вычислительные

методы и алгоритмы могут быть непосредственно использованы при проектировании панелей самолетов для прочностных расчетов элементов конструкций и выбора оптимальных геометрических параметров подкрепляющих стрингеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамян Б.Л. Контактные (смешанные) задачи теории упругости // Известия АН СССР. МТТ. - 1969. - № 4. - С. 181-197.
2. Абрамян Б.Л. О некоторых результатах, полученных армянскими исследователями в области теории упругости и пластичности // Известия АН АрмССР. Механика. - 1976. - Т. 29, № 1. - С. 12-26.
3. Авдонин А.С., Фигуровский В.И. Расчет на прочность летательных аппаратов: Учебное пособие для авиац. спец. вузов. - М.: Машиностроение, 1985. - 439 с.
4. Агабекян П.В. Контактная задача для полубесконечной пластины с конечной и полубесконечной накладками // В сб.: «Механика деформируемого твердого тела». - Ереван: Изд. АН АрмССР, 1989. - С. 17-23.
5. Агабекян П.В., Гулян К.Г. Контактная задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными накладками // Известия НАН Армении. Механика. - 2009. - Т. 62, № 4. - С. 7-15.
6. Агаян К.Л. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками // Известия АН СССР. МТТ. - 1972. - № 5. - С. 34-45.
7. Агаян К.Л. Периодическая контактная задача для бесконечной пластины с упругими накладками // Известия АН АрмССР. Механика. - 1975. - Т. 28, № 3. - С. 3-12.
8. Агаян К.Л. Периодическая задача о контактном взаимодействии полубесконечных стрингеров с бесконечной пластиной // В сб.: «Исследования по механике твердого деформируемого тела». - Ереван: Изд. АН АрмССР, 1981. - С. 29-35.

9. Агаян К.Л., Закарян В.Г. Контактная задача для упругого полупространства с трещинами и накладками при антиплоской деформации // Известия НАН Армении. Механика. - 2016. - Т. 69, № 1. - С. 6-15.
10. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 240 с.
11. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. – Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА, 2014. - 322 с.
12. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. - М.: Наука, 1983. - 487 с.
13. Александров В.М., Сметанин В.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. - М.: Наука, 1993. - 234 с.
14. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением // Прикладная математика и механика. - 1968. - Т. 32, № 4. - С. 632-646.
15. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками // Прикладная математика и механика. – 1969. - Т. 33, № 5. - С. 813-843.
16. Багдасарян Р.А. Задача для кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными стрингерами // Известия НАН Армении. Механика. - 2005. - Т. 58, № 2. - С. 65-72.
17. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1976. - 607 с.
18. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 1992. - 392 с.
19. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН. Механика твердого тела. - 2005. - № 1. - С. 45-87.

20. Войт Е.С., Ендогур А.И., Мелик-Саркисян З.А., Алявдин И.М. Проектирование конструкций самолетов. - М.: Машиностроение, 1987. - 415 с.
21. Воробьев Б.Л., Попов Г.Я. Контактная задача для упругой полуплоскости и сцепленного с ней полубесконечного упругого стержня // Прикладная математика и механика. - 1970. - Т. 34, № 2. - С. 354-360.
22. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
23. Гиммельфарб А.Л. Основы конструирования самолетов. – М.: Машиностроение, 1980. - 367с.
24. Гребеньков О.А. Конструкция самолетов. - М.: Машиностроение, 1984. - 236 с.
25. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Передача усилий от стрингера переменного сечения к пластине // Проблемы прочности. - 1971. - № 9. - С. 71-74.
26. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. - М.: Машиностроение, 1980. - 411 с.
27. Григорян М.С. О передаче нагрузок от системы разнородных стрингеров к упругому полупространству или слою при антиплоской деформации // Известия НАН РА. Механика. - 2014. - Т. 67, № 3. - С. 3-16.
28. Григорян Э.Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины // Прикладная математика и механика. - 1974. - Т. 38, № 2. - С. 321-330.
29. Григорян Э.Х. Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости // Ученые записки ЕГУ. Естественные науки. - 1979. - № 2. - С. 62-71.
30. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости // Ученые записки ЕГУ. Естественные науки. - 1979. - № 3. - С. 29-34.

31. Григорян Э.Х. Задача для кусочно-однородной бесконечной пластины с полубесконечным стрингером // Ученые записки ЕГУ. Естественные науки. - 1983. - № 1. - С. 34-37.
32. Григорян Э.Х. Об одном подходе решения задач для упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным включением // Ученые записки ЕГУ. Естественные науки. -1985. - № 2. - С. 35-40.
33. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Полубесконечная пластина, усиленная полубесконечным стрингером, параллельным границе пластины // В сб.: «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести». - Ереван, Издательство “Гитутюн” НАН Армении, 2006. - С. 138-143.
34. Григорян Э.Х., Мелтоян Б.А. Об одной задаче для упругой бесконечной пластины, усиленной полубесконечными стрингерами // Ученые записки ЕГУ. Естественные науки. - 1984. - № 3. - С. 45-49.
35. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами // Известия НАН Армении. Механика. - 2009. - Т. 62, № 3. - С. 29-43.
36. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами // Известия НАН Армении. Механика. - 2004. - Т. 57, № 2. - С. 3-10.
37. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя полубесконечными стрингерами // Известия НАН Армении. Механика. - 2005. - Т. 58, № 2. - С. 16-27.
38. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя параллельными кусочно-однородными бесконечными стрингерами // В сб. трудов V Российской конференции с международным участием «Смешанные задачи механики деформируемого тела». - Саратов: Изд. Саратовского университета, 2005. - С. 108-110.

39. Громов В.Ф., Макаров А.Ф., Корзун А.В. Общая расчетная модель составного стержня и анализ бокового изгиба стрингеров на панели крыла // Вестник Московского авиационного института. - 2010. - Т. 17, № 4. - С. 44-47.
40. Громов В.Ф., Макаров А.Ф., Корзун А.В., Строгова О.В. Дифференциальные уравнения бокового изгиба стрингера как стержень на непрерывном эксцентричном шве // Вестник Московского авиационного института. - 2010. - Т. 17, № 4. - С. 192-196.
41. Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. Напряженное состояние упругой плоскости с полубесконечным абсолютно жестким включением, перпендикулярно выходящим на трещину конечной длины // В трудах VIII Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт. - Ереван: Чартарагет, 2014. - С. 217-221.
42. Дуплякин В.М., Хивинцев А.В. Поверочный расчет прочности крыла // Учебно-методич. указания. - Самара: СГАУ, 1995. - 26 с.
43. Ефимова М.Г. Основы авиации. Конструкция и основные функциональные системы летательных аппаратов: Учебное пособие. - М.: МГТУГА, 2005. - 52 с.
44. Житомирский Г.И. Конструкция самолетов: Учебник для студентов авиационных специальностей ВУЗ-ов. 3-е издание, перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 2005. - 406 с.
45. Зарецкий М.В. Напряженно-деформированное состояние конструкции авиационного изделия при действии полетных нагрузок // Тезисы докладов Московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике - 2012», 17-20 апреля 2012. - М.: ООО «Принт-салон», 2012. - С. 267-268.
46. Зарецкий М.В. Численное моделирование напряжённо-деформированного состояния конструкций авиационных изделий при совместной эксплуатации носителем // Дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук / МАИ. - М., 2014. - 102 с.
47. Каландия А.И. Замечание о креплении полуплоскости стрингером конечной длины // Сб. статей «Механика деформируемых тел и конструкций», посвященный 60-летию академика Ю.Н. Работнова. - М.: Машиностроение, 1975. - С. 211-215.

48. Кан С.Н., Свердлов И.А. Расчет самолета на прочность. Издание 5-е, перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1966. - 518 с.
49. Карпов В.В., Семенов А.А. Устойчивость тонкостенных оболочек при учете различных способов закрепления контура // Материалы международной научной конференции «Новые идеи нового века» / ФАД ТОГУ. - 2013. - Т. 2. - С. 309-314.
50. Кац А.М. Теория упругости. 2-е издание. - СПб.: Лань, 2002. - 208 с.
51. Кичеев В.Е. Проектирование сжатых панелей легких самолетов с использованием критерия подобия // Труды МАИ. - 2007. - № 27. - 11 с.
52. Комков В.А., Кокорева О.Г., Курсаков А.В. Исследование возможностей упрочнения поверхностей тонкостенных элементов летательных аппаратов методом поверхностной пластической деформации // Вестник Московского авиационного института. - 2015. - Т. 22, № 2. - С. 132-136.
53. Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Медведский А.Л. Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Труды МАИ. - 2013. - № 71. - 21 с.
54. Лавров Б.А. Расчет прочности фюзеляжа. - Куйбышев: КуАИ, 1982. - 51 с.
55. Ларкин Ю.И. О передаче нагрузки от ребра конечной длины упругой пластине // Строительная механика и расчет сооружений. - 1968. - № 5. - С. 18-21.
56. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. - М.: Мир, 1974. - 319 с.
57. Механика контактных взаимодействий / Под редакцией И.И. Воровича, В.М. Александрова. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 672 с.
58. Митрофанов О.В. Проектирование панелей крыла минимальной массы из композитных материалов с учетом закритического поведения обшивки // Вестник Московского авиационного института. - 2002. - Т. 9, № 1. - С. 35-42.
59. Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. - Киев: Наукова думка, 1985. - 175 с.
60. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от краевого ребра жесткости к листу (пересмотр задачи Мелана) // ПМ. Труды Амер. общ. инж.-мех. Сер. Е. - 1967. - № 3. - С. 233-242.

61. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине // ПМ. Труды Амер. общ. инж.-мех. Сер. Е. - 1968. - №4. - С. 124-135.
62. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 511 с.
63. Оболенский Е.И., Сахаров Б.И., Сибиряков В.А. Прочность летательных аппаратов и их агрегатов: Учебник для студентов авиационных специальностей ВУЗ-ов. - М.: Машиностроение, 1995. - 504 с.
64. Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. Строительная механика летательных аппаратов: Учебник для авиационных специальностей ВУЗ-ов. - М.: Машиностроение, 1986. - 536 с.
65. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. - М.: Высшая школа, 1985. - 392 с.
66. Оганисян Г.В. Контактные задачи для упругой неоднородной (кусочно-однородной) бесконечной пластины со стрингерами: Дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук / ЕГУ. - Ереван, 1986. - 172 с.
67. Оганисян Г.В. Контактная задача для кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной конечным и полубесконечным стрингерами // Межвузовский сборник научных трудов «Механика». - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1986. - № 4. - С. 136-145.
68. Осипов Д.Н., Шапкин В.С. Расчет параметров нагружения элементов "обшивки-стрингер" конструкции вертолета МИ-26т при усталостных испытаниях // Научный Вестник Московского государственного технического университета Гражданской авиации. - 2010. - № 153. - С. 70-76.
69. Патент на изобретение RUS 2144487. Стрингер летательного аппарата / В.П. Лобко, И.В. Торицын. - 06.07.1999.
70. Патент на изобретение RUS 2143365. Стрингер судна / В.П. Лобко, И.В. Торицын. - 06.07.1999.

71. Патент на изобретение RUS 2243525. Способ моделирования напряженно-деформированного состояния авиационной панели / М.Ф. Бабурченков, Н.М. Бородачев. - 04.08.2003.
72. Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого тела. - Одесса: Астропринт, 2013. - 424 с.
73. Проектирование самолетов / С.М. Егер, В.Ф. Мишин, Н.К. Лисейцев и др. - М. : Голос, 2005. - 648 с.
74. Прудников Ю.А., Брычков А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. - М.: Наука, 1977. - 288 с.
75. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью // Известия НАН Армении. Механика. - 2000. - Т. 53, № 3. - С. 12-19.
76. Саакян А.В. Квадратурные формулы для вычисления интеграла с переменным верхним пределом // Труды II Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 4-8 октября 2010г. Дилижан, Армения, 2010. - С. 107-111.
77. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1983. - 260 с.
78. Саркисян К.С., Оганисян Г.В., Мелтонян Б.А. Контактная задача для упругой бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными бесконечными и полубесконечными стрингерами // Известия НАН Армении. Механика. - 2013. - Т. 66, № 1. - С. 5-13.
79. Саркисян К.С., Сукиасян Дж.С. Контактная задача упругой бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными бесконечными и полубесконечными стрингерами // Вестник НПУА. Механика, Машиноведение, Машиностроение. - 2016. - №2. - С. 38-44.
80. Саркисян К.С., Сукиасян Дж.С. Контактная задача упругой бесконечной пластины, усиленной четырьмя параллельными полубесконечными и одним

- бесконечным стрингерами // Известия НАН РА и НПУА. Серия технических наук. - 2017. - №1. - С. 3-10.
81. Сафронов В.С. Аналитическая оценка устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки с отверстием при комплексном нагружении // Вестник Московского авиационного института. - 2009. - Т. 16, № 5. - С. 255-263.
 82. Смирнов А.В. Напряженное состояние пластины, усиленной кусочно-однородным стрингером // XXXIV Гагаринские чтения: Научные труды Международной молодежной научной конференции. - М.: МАТИ, 2008. - Т. 1. - С. 195-196.
 83. Смирнов А.В. Напряженное состояние кусочно-однородной пластины, подкрепленной двумя полубесконечными стрингерами // Труды II Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». - Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2010. - Т. 2. - С. 155-159.
 84. Снеддон И. Преобразования Фурье. - М.: ИЛ, 1955. - 668 с.
 85. Справочник по специальным функциям / Под редакцией М. Абрамовица, И. Стиган. - М.: Наука, 1979. - 832 с.
 86. Стригунов В.М. Расчет самолета на прочность. - М.: Машиностроение, 1984. - 373 с.
 87. Сукиасян Дж.С. Контактная задача для однородной бесконечной упругой пластины, усиленной двумя конечными и одним бесконечным упругими стрингерами // Труды Международной школы конференции молодых ученых «Механика-2016», 3-7 октября 2016г. Цахкадзор, Армения, 2016. - С.132-136.
 88. Тарасов Ю.Л., Лавров Б.А. Расчет на прочность элементов конструкций самолета: Учебное пособие. Изд. 3-е, переработанное. - Самара, СГАУ, 2000. - 112 с.
 89. Тарасов Ю.Л., Миноранский Э.Н., Дуплякин В.М. Надежность элементов конструкций летательных аппаратов. Методология обеспечения. - М.: Машиностроение, 1992. - 224 с.
 90. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1975. - 576 с.
 91. Толкачев В.М. Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине // Доклады Академии наук СССР. - 1964. - Т. 154, № 4. - С. 806-808.

92. Туркина К.Д. Конструкция летательных аппаратов. В 2-х ч. - М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1985. - 524 с.
93. Ушаков А.Е., Гришин В.И. Методы расчета местной прочности авиационных конструкций. - М.: Артика, 1999. - 254 с.
94. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Изд. 10-е. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. - 592 с.
95. Фирсанов В.В. Расчетные модели напряженного состояния тонкостенных авиационных конструкций с дискретными соединениями // Известия ТулГУ. - Тула, 2014. - Т. 11, № 1. - С. 300-306.
96. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 327с.
97. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2003. - 448 с.
98. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. - М.,Л.: Гостехтеориздат, 1949. - 270 с.
99. Albas J.B., Kuypers W. J.J. On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate // Applied Scientific Research. Ser. A. - 1966. - Vol. 15, issue 6. - P. 429-439.
100. Arutiunian N.K., Mkhitarian S.M. Certain contact problems for a half-space reinforced by elastic gussets // Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM). - 1972. - Vol. 36, issue 5. - P. 770-787.
101. Arutiunian N.K., Mkhitarian S.M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners // Trends in Elasticity and Thermoelasticity. - Witold Nawacki Anniversary. – Wolters-Nordhoff Publishing, 1971. - P. 3-20.
102. Bescoter S.U. Analysis of a single stiffener on an infinite sheet // Journal of Applied Mechanics. - 1949. - Vol. 16, issue 3. - P. 242-246.
103. Benthem J.P. On the diffusion of a load from a semi-infinite stringer bonded to sheet // Contribution to the Theory of Aircraft Structures. - Delft University Press, 1973. - P. 117-134.
104. Bloom J.M., Sanders J.L. The effect of a riveted stringer on the stress in a cracked sheet // Trans ASME, Ser. E. - 1966. - Vol. 33, issue 3. - P. 561-570.

105. Brown E.H. The diffusion of load from a stiffener into an infinite elastic sheet // Proceedings of the Royal Society. Ser. A. - 1957. - Vol. 239. - P. 296-310.
106. Buell E.L. On the distribution of plane stress in a semi-infinite plate with partially stiffened edge // Journal of Mathematics and Physics. - 1948. - Vol. 26, issue 4. - P. 223-233.
107. Buffler H. Zur krafteinleitung un scheiben uber geschweisste oder gehleble verbindungen // Usterreichisches Ingenieur Archiw. - 1964. - Vol. 18, issue 3-4. - S. 284.
108. Hovhannisyan H.V. Contact problem for an infinite composite elastic (piecewise-homogeneous) plate with an Infinite elastic stringer glued to the plate surface // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. - 2012. - Vol. 1 (227). - P. 27-32.
109. Hovhannisyan H.V. Contact problem for a piecewise-homogeneous infinite plate with stacked elastic piecewise-homogeneous infinite stringer // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. - 2012. - Vol. 3 (229). - P. 34-43.
110. Hovhannisyan H.V., Sargsyan K.S., Sukiasyan J.S. Load transfer from two parallel elastic infinite and finite stringers to elastic homogeneous infinite plate // Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. - 2017, Vol. 70, issue 1. - P.83-93.
111. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. - 1955. - Vol. 8, issue 2. - P. 164-178.
112. Megson T.H.G. Aircraft Structures for Engineering Students. 6th edn. - Oxford: Butterworth-Heinemann, 2016. - 910 p.
113. Melan E. Ein beitrag zur theorie geschweißter verbindungen // Ingenieur - Archiv. - 1932. - Vol. 3, issue 2. - P. 123-129.
114. Mkhitarian S.M. On the application of the M.G. Krein method for the solution of integral equations in contact problems in elasticity theory // In “Modern Analysis and Applications” / Edited by V.M. Adamyan, et al. - Birkhauser Verlag, Basel, 2009. - P. 155-171.
115. Mkhitarian S.M. On complex potentials and on the application of related to them M.G. Krein`s two integral equations in mixed problems of continuum mechanics // Proceeding of A. Razmadze Mathematical Institute. - 2011. - Vol. 155. - P. 55-72.

116. Mkhitaryan S.M., Melik-Adamyanyan P.E. On a class of contact problems of elasticity theory, solvable by the integral equations method // Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. - 2016. - Vol. 69, issue 4. - P. 3-19.
117. Reissner E. Note on the problem of the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet // Proceedings of the National Academy of Sciences. - 1940. - Vol. 26. - P. 300-305.
118. Sahakyan A.V. Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. - 2011. - Vol. 156. - P. 101-111.
119. Sanders J., Lyell Jr. Effect of a stringer on the stress concentration due to a crack in a thin sheet // NASA Technical Note 4207. - 1958. - P.1-19.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Текст внутри скобок (**) выражает смысл данной части алгоритма.

filast1=Table[0,{i,20}];

filast2=Table[0,{i,20}];

filast3=Table[0,{i,20}];

filast4=Table[0,{i,20}];

(*Создаются таблицы с нулевыми вводами для определения приближенного решения*) n=36; (*Число узлов интерполяции*)

n2=IntegerPart[(n+1)/2]; (*Целая часть узлов интерполяции*)

nju=0.33; (*Коэффициент Пуассона, свойственный металлам*)

ba1=0.05; ba2=0.1; ba3=0.5; ba4=1; (*Соотношения полудлин конечных стрингеров и расстояний между стрингерами и горизонтальной осью*)

HaF=10; (*Соотношение произведения толщины пластины и полудлины конечных стрингеров к площади поперечного сечения стрингеров*)

E0E=1.5; (*Соотношение модулей упругости бесконечного стрингера и пластины*)

E1E=2; (*Соотношение модулей упругости конечного стрингера и пластины*)

k=2/(3-4 nju);

A=4(1-nju)/(1+nju)/(3-4nju)/E0E*HaF;

T=4(1-nju)/(1+nju)/(3-4nju)/E1E HaF ;

```

w=Table[Pi/n,{i,n}]/N;

ksi=Table[-Cos[(2i-1)Pi/2/n],{i,n}]/N; (*Узлы многочленов Чебышева первого рода*)

dzi=Table[-Cos[i Pi/n],{i,n-1}]/N; (*Узлы многочленов Чебышева первого рода*)

DD=1/n Table[ArcSin[dzi[[kk]]]+Pi/2-2Sqrt[1-dzi[[kk]]^2]Sum[ChebyshevU[m-
1,dzi[[kk]]]ChebyshevT[m,ksi[[i]]]/m,{m,n-1}},{kk,n-1},{i,n}]; (*Таблица
численного решения, приближаемого многочленами Чебышева*)

fprodint1[s_]:= (T-2*k*T*ba1*s-k^2*ba1^2*s^2)Exp[-2ba1 s]/(T+s) (*Ядро
разрешающего интегрального уравнения (см. (2.4.3))*

R11[x_?NumberQ,y_?NumberQ]:= NIntegrate[fprodint1[s]Sin[s (x-y)],{s,0,2000}]

ar1=Table[R11[ksi[[i]],dzi[[kk]]],{kk,n-1},{i,n2}];

R1=Table[If[i<=n2,ar1[[kk,i]],-ar1[[n-kk,n-i+1]]],{kk,n-1},{i,n}];

m1[i_,kk_]:=Which[kk==n,w[[i]],kk<n,w[[i]](1/(ksi[[i]]-dzi[[kk]])+R1[[kk,i]])-A Pi
DD[[kk,i]]]; (*Дискретизация вышеупомянутого интегрального уравнения*)

matr1=Table[m1[i,kk],{kk,n},{i,n}];

free=Table[If[kk==n,1,0],{kk,n}];

kkk1=LinearSolve[matr1,free]; (*Решение линейных алгебраических уравнений*)

fi1[x_]:=1/n Sum[kkk1[[i]](1+2Sum[ChebyshevT[m,x]ChebyshevT[m,ksi[[i]]],{m,n-
1}]),{i,n}]; (*Приближенное решение интегрального уравнения*)

xdiv=Table[(i-1)0.05,{i,20}]/N;

fipred1=filast1;

filast1=Table[fi1[xdiv[[i]]],{i,20}];

plot1=Plot[fi1[x],{x,-1,1},PlotRange->{0,1.5},PlotStyle->Blue]; (*Графическая
иллюстрация численного решения*)

```


Данный алгоритм повторяется для всех групп вводных данных. Численная процедура заканчивается командой

```
Plot[{fi1[x],fi2[x]...},{x,-1,1}]
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для простоты приведем реализацию алгоритма вычислений только в случае изменения геометрической характеристики, рассмотренной ниже. Аналогичным образом строятся алгоритмы вычислений в случае изменения физических характеристик.

$$v=0.33;$$

$$k=2/(3-4v);$$

HaF=10; (*Соотношение произведения толщины пластины и полудлины между полубесконечными стрингерами к площади поперечного сечения стрингеров*)

$$T=(2k(1-v))/((1+v)E1E HaF);$$

E1E=2; (*Соотношение модулей упругости бесконечного стрингера и пластины*)

E0E=1.5; (*Соотношение модулей упругости полубесконечного стрингера и пластины*)

(**)

ba1=0.05; ba2=0.1; ba3=0.5; ba4=1; (*Отношение расстояния между полубесконечным и бесконечным стрингерами на половину расстояния между полубесконечными стрингерами*)

$$ba1=0.05;$$

$$K11[\sigma_]:= \frac{2(1-kba1\sigma)^2 \text{Exp}[-2ba1\sigma]}{2ba1k\sigma^2 \text{Exp}[-2ba1\sigma] - 2\sigma \text{Exp}[-ba1\sigma] \text{Cosh}[ba1\sigma] + T} + \frac{1}{\sigma}$$

$$K21[\sigma_]:= (1 + \sigma^2 1/T E0E/E1E K11[\sigma])^{-1}$$

$$F1[\sigma_]:= 2 K21[\sigma] \text{Cos}[\sigma]/\sigma$$

$$\phi1[x_]:= 1/\text{Pi} \text{NIntegrate}[F1[s] \text{Cos}[s x], \{s, 1, \infty\}, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 6, \text{MaxRecursion} \rightarrow 500]$$

```
 $\psi_1[x_] := E^{0E/E1E} \text{Integrate}[\varphi_1[s], \{s, 1, x\}]$ 
```

Данный алгоритм повторяется для каждого значения ba_1, ba_2, ba_3, ba_4 . Затем вычисляются интегралы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$. Поскольку эти несобственные интегралы трудно вычислить аналитически, мы используем команду численного интегрирования `NIntegrate`. Далее вычисляются интерполяционные многочлены

```
pol1 = Interpolation[Table[{x, N[\varphi_1[x]]}, {x, 1, 15, 0.1}]];
```

а численная процедура заканчивается командой

```
Plot[{pol1[x], pol2[x]...}, {x, 1, 2}]
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Для простоты приведем реализацию алгоритма вычислений только в случае изменения геометрической характеристики, рассмотренной ниже. Аналогичным образом строятся алгоритмы вычислений в случае изменения физических характеристик.

$$v=0.33;$$

$$k=2/(3-4v);$$

$NaF=10$; (*Соотношение произведения толщины пластины и полудлины между полубесконечными стрингерами к площади поперечного сечения стрингеров*)

$$T=(2k(1-v))/((1+v)E1E NaF);$$

$E1E=1$; (*Соотношение модулей упругости полубесконечного стрингера и пластины*)

$E0E=1.5$; (*Соотношение модулей упругости бесконечного стрингера и пластины*)

$ba1=0.05$; $ba2=0.1$; $ba3=0.5$; $ba4=1$; (*Отношение расстояния между полубесконечным и бесконечным стрингерами на половину расстояния между полубесконечными стрингерами*)

$$ba1=0.05;$$

$$K11[\sigma_]:= (T-2ba1 k T \sigma-k^2 ba1^2 \sigma^2)/(\sigma(T+\sigma)) \text{Exp}[-2ba1 \sigma]+1/\sigma$$

$$K21[\sigma_]:= (1+\sigma^2 1/T E0E/E1E K11[\sigma])^{-1}$$

$$F1[\sigma_]:= 2 K21[\sigma] \text{Cos}[\sigma]/\sigma$$

$$\phi1[x_]:= 1/\text{Pi} \text{NIntegrate}[F1[s] \text{Cos}[s x], \{s, 1, \infty\}, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 6, \text{MaxRecursion} \rightarrow 500]$$

$$\psi1[x_]:= E0E/E1E \text{Integrate}[\phi1[s], \{s, 1, x\}]$$

Данный алгоритм повторяется для каждого значения ba_1, ba_2, ba_3, ba_4 . Затем вычисляются интегралы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$. Поскольку эти несобственные интегралы трудно вычислить аналитически, мы используем команду численного интегрирования `NIntegrate`. Далее вычисляются интерполяционные многочлены

```
pol1 = Interpolation[Table[{x, N[\varphi1[x]]}, {x, 1, 15, 0.1}]];
```

а численная процедура заканчивается командой

```
Plot[{pol1[x], pol2[x]...}, {x, 1, 2}]
```