ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Խաչատրյան Հրանտ Հարությունի

Գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների հետազոտում

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Երևան - 2017

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Хачатрян Грант Арутюнович

Исследование интервальных реберных раскрасок графов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван - 2017

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Պ. Ա. Պետրոսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Է. Մ. Պողոսյան
	ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Հ. Ց. Հակոբյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Հայ-ռուսական (սլավոնական) համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2017թ. հունիսի 9-ին, ժ. 14^{30}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2017թ. մայիսի 6-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ.գիտ. դոկտոր՝ Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:	кандидат физ.-мат. наук П. А. Петросян
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук Э. М. Погосян
	кандидат физ.-мат. наук Г. Ц. Акопян
Ведущая организация:	Российско-Армянский (Славянский) университет

Защита состоится 9-го июня 2017г. в 14^{30} часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 044 "Математическая кибернетика", по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 6-го мая 2017г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

Աշխատանքի ընդհանուր նկարագիրը

Թեմայի արդիականությունը: Դիսկրետ մաթեմատիկայում մեծ ուշադրություն է հատկացվում ներկումների խնդիրների հետազոտություններին: Պատմականորեն ներկումների հանդեպ հետաքրքրությունը պայմանավորված էր «Չորս գույների հիպոթեզ» հանրահայտ խնդրով, համաձայն որի ամեն մի աշխարհագրական քարտեզ հնարավոր է ներկել չորս գույների միջոցով այնպես, որ յուրաքանչյուր երկրի տարածք ներկված լինի մեկ գույնով, իսկ ընդհանուր սահման ունեցող երկրները ներկված լինեն տարբեր գույներով: Դիսկրետ մաթեմատիկայի հետագա զարգացումը ցույց տվեց, որ դա պայմանավորված է ինչպես ներկումների խնդիրների՝ մի շարք կարևոր կիրառական խնդիրների հետ առկա սերտ կապով, այնպես էլ նրանով, որ դիսկրետ մաթեմատիկայում առկա են բազմաթիվ խնդիրներ, որոնք կարելի է ձևակերպել որպես ներկումների խնդիրներ (ֆակտորիզացիայի խնդիրներ, տրոհման խնդիրներ, Ռամսեյի տեսության խնդիրներ և այլն): Մասնավորապես, նշանակալի փոխադարձ կապ կա կարգացուցակների տեսության խնդիրների և գրաֆների ներկումների խնդիրների միջև: Օրինակ, քննաշրջանի օպտիմալ կարգացուցակ կառուցելու խնդիրը բերվում է գրաֆի քրոմատիկ թվի որոշմանը: Գրաֆի քրոմատիկ դասը գտնելու խնդրին բերվում է սպորտային մրցումների կարգացուցակ կազմելու խնդիրը:

Կարգացուցակների տեսության բազմաթիվ խնդիրներ կարելի է բերել ոչ միայն գրաֆների դասական ներկումների խնդիրներին, այլև լրացուցիչ պայմաններով ճիշտ գագաթային և կողային ներկումների գոյության ու կառուցման խնդիրներին: Օրինակ, Ջ. Ֆոլկմանը և Դ. Ֆալկերսոնը[1] դիտարկել են երկկողմանի մուլտիգրաֆը r գույներով ճիշտ կողային ներկման գոյության խնդիրը, երբ i գույնով ներկված կողերի քանակը n_i է, $i = 1, \ldots, r$: Այս խնդիրը համապատասխանում է r ժամ ընդհանուր տևողություն ունեցող այնպիսի ուսումնական դասացուցակի կառուցմանը, երբ i-րդ ժամի ընթացքում զբաղված է ճիշտ n_i լսարան, $i = 1, \ldots, r$: Իվենի, Իտայի և Շամիրի կողմից[2] դիտարկվել է այնպիսի ուսումնական դասացուցակների կառուցումը, որտեղ հաշվի են առնվում ուսուցիչների նախապատվությունները: Ցույց է տրվել, որ ընդհանուր դեպքում խնդիրը NP-լրիվ է: Գրաֆների տեսության տերմիններով այս խնդիրը համապատասխանում է G երկկողմանի մուլտիգրաֆի այնպիսի ճիշտ կողային ներկման կառուցմանը, որտեղ G-ի կողմերից մեկի յուրաքանչյուր գագաթի համար տրված են գույների բազմություններ, որոնցից պետք է ընտրվեն այդ գագաթին կից կողերի գույները: Դե Վերրայի կողմից[3] դիտարկվել են երկկողմանի մուլտիգրաֆների կողային ներկումների գոյության և կառուցման խնդիրները, երբ յուրաքանչյուր գագաթի համար այդ գագաթին կից ցանկացած երկու գույնով ներկված կողերի քանակների տարբերությունը մեծ չէ մեկից: Ցույց է տրվել, որ կամայական G երկկողմանի մուլտիգրաֆի և k բնական թվի համար G-ի կողերը կարելի է ներկել k գույներով՝ բավարարելով նշված պայմանին: Այս խնդիրը համապատասխանում է այնպիսի դասացուցակներին, երբ ուսուցիչների և դասարանների ծանրաբեռնվածությունները

[1] J. Folkman, D.R. Fulkerson, Edge colourings in bipartite graphs, in Combinatorial Mathematics and its Applications, University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1969, pp. 561-577.

[2] S. Even, A. Itai, A. Shamir, On the complexity of timetable and multicommodity flow problems, SIAM J. Comput. 5 (4), 1976, pp. 691-703.

[3] D. de Werra, Balanced schedules, INFOR. N9, 1971, pp. 230-237.

բաշխվում են հավասարաչափ: «Պատուհան» չունեցող դասացուցակների գոյության և կառուցման խնդիրներին համապատասխանող գրաֆների ներկումների խնդիրների հետազոտման նպատակով Ա. Հասրաթյանի և Ռ. Քամալյանի կողմից[4] սահմանվել է գրաֆի միջակայքային կողային ներկման գաղափարը: G գրաֆի ճիշտ կողային ներկումը $1,\dots,t$ գույներով կոչվում է G-ի միջակայքային կողային t-ներկում, եթե յուրաքանչյուր գագաթին կից կողերը ներկված են հաջորդական գույներով: Մի շարք աշխատանքներում հետազոտվել են երկկողմանի գրաֆների որոշ դասերի միջակայքային կողային ներկումները, որոնցից են լրիվ երկկողմանի գրաֆները, ծառերը, n-չափանի խորանարդը, ցանցերը, երկակի ուռուցիկ երկկողմանի գրաֆները, արտաքին հարթ երկկողմանի գրաֆները և (a,b)-երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆները: Հայտնի է, որ ոչ բոլոր երկկողմանի գրաֆները ունեն միջակայքային կողային ներկում: Այդ փաստը առաջին անգամ նշվել է Ա. Միրումյանի կողմից: Հետագայում այդպիսի օրինակներ կառուցվել են Ս. Սևաստյանովի, Պ. Էրդյոշի, Ա. Հերցի, Դ. դե Վերրայի, Կ. Գիարրոյի, Մ. Կուբալի և Մ. Մալաֆիյսկու, ինչպես նաև Քամալյանի կողմից: Սևաստյանովը ապացուցել է, որ երկկողմանի գրաֆների դասում միջակայքային կողային ներկման գոյության խնդիրը հանդիսանում է NP-լրիվ խնդիր[5]: Նշենք նաև, որ Ջենսենի և Տոֆտի կողմից[6] առաջարկվել է հիպոթեզ, համաձայն որի բոլոր (a,b)-երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆները ունեն միջակայքային կողային ներկում: Այս հիպոթեզի ապացույցի ուղղությամբ Ա. Հասրաթյանը, Կ. Կասսելգրենը, Պ. Պետրոսյանը, Ջ. Վանդենբուշեն, Դ. Վեստը, Ա. Պյատկինը, Բ. Տոֆտը, Ֆ. Յանգը և Ք. Լին հասել են որոշ հաջողությունների:

Կիրառական խնդիրների մոդելավորման ժամանակ հաճախ հետազոտման օբյեկտներ են հանդիսանում ոչ միայն հասարակ գրաֆները, այլև մուլտիգրաֆները: Այսպես, օրինակ, ուսումնական դասացուցակների կառուցման խնդիրներում հաճախ առաջանում են իրավիճակներ, երբ ուսուցիչը միևնույն խմբի հետ անցկացնում է մեկից ավելի դասաժամ: Միջակայքային կողային ներկումներին նվիրված հետազոտությունները վերջին երեք տասնամյակներում հիմնականում վերաբերում էին պատիկ կողեր չպարունակող գրաֆներին, մինչդեռ մուլտիգրաֆները մնում են քիչ հետազոտված: Մյուս կողմից՝ վերոհիշյալ աշխատանքներում հիմնականում ուսումնասիրվել են միջակայքային ներկումների գոյության և կառուցման խնդիրները, սակայն քիչ է անդրադարձ կատարվել ներկումների թվային պարամետրերի գնահատման հարցերին: Միջակայքային ներկումների հետազոտություններում անարդարացիորեն քիչ է ուշադրություն հատկացված այդպիսի ներկումների կայունության հարցերին տարբեր գրաֆային գործողությունների նկատմամբ, ինչպիսիք են, օրինակ, գրաֆների գումարումը, դեկարտյան արտադրյալը, գրաֆից գագաթների, կողերի կամ զուգակցումների հեռացումը, կողերի տրոհումը և այլն: Նման դրվածքով խնդիրների կարևորությունը հատկապես մեծ է այնպիսի համակարգերի մոդելավորման դեպքում, որոնցում ժամանակի ազդեցության տակ կարող են կատարվել նկարագրող գրաֆի (մուլտիգրաֆի) չնախատեսված փոփոխություններ:

---

[4] А.С. Асратян, Р.Р. Камалян, Интервальные раскраски ребер мультиграфа, Прикладная математика, вып. 5, 1987, стр. 25-34.

[5] С.В. Севастьянов, Об интервальной раскрашиваемости ребер двудольного графа, Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач, вып. 50, 1990, стр. 61-72.

[6] T.R. Jensen, B. Toft, Graph coloring problems, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1995.

Աշխատանքի հիմնական նպատակը և նրանում դիտարկված խնդիրները: Աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների և մուլտիգրաֆների միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման, ինչպես նաև այդպիսի ներկումների՝ գրաֆային տարբեր գործողությունների նկատմամբ կայունության խնդիրներ: Աշխատանքում նաև դիտարկվել են այդ ներկումների տարբեր բնույթի ընդհանրացումներ և ուսումնասիրվել են դրանց պարամետրերը: Աշխատանքի հիմնական նպատակն է վերոհիշյալ խնդիրների հետազոտումը գրաֆների և մուլտիգրաֆների տարբեր դասերի համար:

Հետազոտության օբյեկտները: Աշխատանքում հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում գրաֆների և մուլտիգրաֆների տարբեր դասեր, գրաֆների հատուկ տիպի ֆակտորիզացիաներ, միջակայքային կողային ներկումներ, այդպիսի ներկումներում մասնակցող գույների քանակներ: Հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում նաև միջակայքային ներկումներ չունեցող գրաֆներ և մուտլիգրաֆներ, ինչպես նաև այդպիսի գրաֆների՝ միջակայքային ներկվող գրաֆների դասից հեռավորության որոշ տեսակներ:

Հետազոտության մեթոդները: Հետազոտությունն իրականացվել է դիսկրետ մաթեմատիկայի, գրաֆների տեսության և դիսկրետ օպտիմիզացիայի մեթոդների օգնությամբ: Որոշ արդյունքների ստացման համար կիրառվել են համակարգչային հաշվարկների բաշխված համակարգեր:

Գիտական նորույթը: Աշխատանքում առաջին անգամ ուսումնասիրվել են մուլտիգրաֆների միջակայքային կողային ներկումների պարամետրեր, ներմուծվել է լրիվ գրաֆների հատուկ տիպի ֆակտորիզացիա (բաժանված) և նշվել է դրա կապը լրիվ գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների հետ, տրվել է սեպարաբել միջակայքային կողային ներկման սահմանումը և կիրառվել է գրաֆների արտադրյալների վերաբերյալ մի շարք արդյունքների ստացման համար, ներմուծվել է միջակայքային ներկում չունեցող գրաֆների կառուցման ենթատրոհումների վրա հիմնված եղանակ, որի օգնությամբ կառուցվել է մինչ այժմ հայտնի այդպիսի ներկում չունեցող ամենափոքր գրաֆը:

Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը: Աշխատանքում օգտագործված հետազոտության մեթոդները և նրանում ստացված արդյունքներն ունեն ոչ միայն տեսական կարևոր նշանակություն գրաֆների քրոմատիկ հատկությունների հետազոտման համար, այլև կարող են ունենալ գործնական կիրառություններ: Մասնավորապես, գրաֆների միջակայքային ներկումները կիրառվում են կոմպակտ կարգացուցակների գոյության և կառուցման, համակարգիչների և ծրագրերի հիշողության օպտիմալ բաշխման, անընդհատ պրոցեսների մաթեմատիկական մոդելավորման խնդիրներում և այլն:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները: Պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական դրույթները.

1. Միջակայքային ներկումներ ունեցող գրաֆների և մուլտիգրաֆների պարամետրերի ընդհանուր գնահատականներ և որոշ դասերի գրաֆների համար այդ պարամետրերի ճշգրիտ արժեքներ,

2. Լրիվ գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների և այդ գրաֆների հատուկ տիպի ֆակտորիզացիաների համարժեքության հիման վրա ստացված արդյունքներ այդպիսի ներկումներում մասնակցող գույների հնարավոր քանակի վերաբերյալ,
3. Լրիվ, լրիվ բազմակողմանի, արտաքին հարթ գրաֆների, ցանցերի, գլանների, տոռերի և Հեմինգի գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատականներ և ճշգրիտ արժեքներ,
4. Կապակցված գրաֆների, համասեռ գրաֆների և երկկողմանի գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների, ինչպես նաև հարթ դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման, պարամետրերի գնահատման վերաբերյալ մի շարք արդյունքներ,
5. Միջակայքային կողային ներկումների ընդհանրացումների հետ կապված որոշ պարամետրերի հասանելի գնահատականներ,
6. Փոքրաթիվ գագաթներով երկկողմանի գրաֆների միջակայքային ներկումների կառուցման վերաբերյալ արդյունքներ, ինչպես նաև այդպիսի ներկում չունեցող փոքրագույն երկկողմանի գրաֆների և մուլտիգրաֆների կառուցման մի շարք եղանակներ, Ջենսեն-Տոֆտի միջակայքային ներկում չունեցող փոքրագույն երկկողմանի գրաֆի մասին պրոբլեմի մասնակի լուծում,
7. Միջակայքային կողային ներկում չունեցող որոշ գրաֆների դեֆիցիտի ճշգրիտ արժեքներ, Բորովիցկա-Օլշևսկայի, Դրգաշ-Բուրչարդտի և Հալուշչակի հիպոթեզի ապացույց:

Ստացված արդյունքների գրաքննությունը և փործարկումը: Ստացված արդյունքները զեկուցվել են մի շարք գիտաժողովներում Հայաստանում և եվրոպական երկրներում.

1. Пятая годичная научная конференция РАУ, Ереван, Армения, 6-10 декабря 2010г.,
2. 14th Workshop on Graph Theory, Colourings, Independence and Domination, Szklarska Poreba, Poland, September 18-23, 2011,
3. 8th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 26-30, 2011,
4. 15th Workshop on Graph Theory, Colourings, Independence and Domination, Szklarska Poreba, Poland, September 15-20, 2013,
5. 9th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 23-27, 2013,
6. 7th Cracow Conference on Graph Theory, Rytro, Poland, September 14-19, 2014,
7. 5th Polish Combinatorial Conference, Bedlewo, Poland, September 22-26, 2014,
8. 8th Slovenian Conference on Graph Theory, Kranjska Gora, Slovenia, June 21-27, 2015,
9. 10th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 28 - October 2, 2015:

Աշխատանքի առանձին հատվածները մանրամասն քննարկվել են ավելի քան մեկ տասնյակ սեմինարների ընթացքում՝ Երևանի պետական համալսարանում, ՀՀ ԳԱԱ ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում և Յագիլոնյան համալսարանում:

Հրապարակումները: Ատենախոսության թեմայի վերաբերյալ տպագրվել են 15 գիտական աշխատանքներ:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը: Աշխատանքի ծավալը կազմում է 146 էջ: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից (83 անուն): Աշխատանքը ներառում է 31 նկար և 7 աղյուսակ:

Աշխատանքի պարունակությունը

Աշխատանքում դիտարկվում են ոչ կողմնորոշված հասարակ գրաֆներ՝ առանց պատիկ կողերի և օղերի, ինչպես նաև մուլտիգրաֆներ, որտեղ թույլատրվում են պատիկ կողեր: G գրաֆի (մուլտիգրաֆի) գագաթների և կողերի բազմությունները նշանակենք, համապատասխանաբար, $V(G)$-ով և $E(G)$-ով: Ցանկացած $v \in V(G)$-ի համար $d_G(v)$-ով նշանակենք այդ գագաթի աստիճանը G-ում, $\delta(G)$-ով և $\Delta(G)$-ով նշանակենք գրաֆի (մուլտիգրաֆի) նվազագույն և առավելագույն աստիճանները:

Ցանկացած $u, v \in V(G)$ գագաթների համար $d(u,v)$-ով նշանակենք u և v գագաթների միջև հեռավորությունը G գրաֆում (մուլտիգրաֆում): $v \in V(G)$ գագաթի համար սահմանենք $\epsilon(v)$ թիվը հետևյալ կերպ. $\epsilon(v) = \max_{u \in V(G)} d(u,v)$, իսկ G գրաֆի (մուլտիգրաֆի) տրամագիծը՝ $\mathrm{diam}(G) = \max_{v \in V(G)} \epsilon(v)$:

$\alpha'(G)$-ով կնշանակենք G մուլտիգրաֆի ամենաշատ կողեր պարունակող զուգակցման հզորությունը: $\mathfrak{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ կատարյալ զուգակցումների բազմությունը կանվանենք G մուլտիգրաֆի 1-ֆակտորիզացիա, եթե G-ի կամայական կող պատկանում է $\mathfrak{F}$-ի զուգակցումներից ճիշտ մեկին:

$\alpha : E(G) \to \mathbb{N}$ ֆունկցիան կոչվում է G մուլտիգրաֆի ճիշտ կողային ներկում, եթե $\forall v \in V(G)$ գագաթին կից կողերը ներկված են զույգ առ զույգ տարբեր գույներով: Եթե α ճիշտ կողային ներկումը օգտագործում է միայն $1, \ldots, t$ գույները, ընդ որում՝ $\forall i (1 \leq i \leq t)$ համար $\exists e_i \in E(G)$ այնպիսին, որ $\alpha(e_i) = i$, α-ն կանվանենք G մուլտիգրաֆի ճիշտ կողային t-ներկում: Եթե α-ն G-ի ճիշտ կողային ներկում է, ապա կամայական v գագաթի սպեկտրը՝ $S(v,\alpha)$, այդ գագաթին կից կողերի գույների բազմությունն է: Սպեկտրի նվազագույն և առավելագույն թվերը կնշանակենք հետևյալ կերպ. $\underline{S}(v,\alpha) = \min S(v,\alpha)$, $\overline{S}(v,\alpha) = \max S(v,\alpha)$:

Տրված G մուլտիգրաֆի ճիշտ կողային ներկումներում անհրաժեշտ գույների նվազագույն քանակը կոչվում է քրոմատիկ դաս և նշանակվում է $\chi'(G)$-ով: Ըստ Վիզինգի հայտնի թեորեմի, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$, որտեղ $\mu(G)$-ն G գրաֆում կողերի առավելագույն պատիկությունն է:

α ճիշտ կողային t-ներկումը կանվանենք միջակայքային կողային t-ներկում, եթե ցանկացած $v \in V(G)$ գագաթի համար $S(v,\alpha)$ բազմությունը միջակայք է: Նշանակենք $\mathfrak{N}_t$-ով այն գրաֆների բազմությունը, որոնք ունեն միջակայքային կողային t-ներկում, իսկ $\mathfrak{N}$-ով՝ $\mathfrak{N} = \bigcup_{t \geq 1} \mathfrak{N}_t$ բոլոր միջակայքային կողային ներկելի գրաֆների բազմությունը: Երբ $G \in \mathfrak{N}$, G-ի միջակայքային կողային ներկման մեջ օգտագործվող գույների նվազագույն և առավելագույն քանակները նշանակենք, համապատասխանաբար, $w(G)$-ով և $W(G)$-ով[7]:

Առաջին գլխի 1.1 պարագրաֆը նվիրված է միջակայքային ներկելիության անհրաժեշտ

[7] Չսահմանված հասկացությունների և նշանակումների համար տես D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

պայմաններին: Հասրաթյանը և Քամալյանը[8] ցույց են տվել, որ եթե G մուլտիգրաֆը ունի միջակայքային ներկում, ապա $\chi'(G) = \Delta(G)$: Երբ G-ն համասեռ մուլտիգրաֆ է, այս պայմանը հանդիսանում է նաև բավարար պայման: Աշխատանքում ստացվել է միջակայքային ներկելիության մեկ այլ անհրաժեշտ պայման:

Թեորեմ 1.1.3. *Եթե G մուլտիգրաֆի համար գոյություն ունի d թիվ, որը G-ի բոլոր գագաթների աստիճանների ընդհանուր բաժանարար է, սակայն $|E(G)|$-ի բաժանարար չէ, ապա $G \notin \mathfrak{N}$:*

Հետևանք 1.1.4. *Եթե G-ն էյլերյան մուլտիգրաֆ է և $|E(G)|$ կենտ է, ապա $G \notin \mathfrak{N}$:*

1.2 պարագրաֆը նվիրված է $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի հետազոտմանը: Հասրաթյանի, Քամալյանի կողմից ստացվել են հետևյալ գնահատականները.

Թեորեմ 1.2.1. *Եթե G-ն եռանկյուն չպարունակող գրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա $W(G) \leq |V(G)| - 1$:*

Քամալյանը[9] ցույց է տվել, որ եթե G-ն կապակցված գրաֆ է, $G \in \mathfrak{N}$ և $|V(G)| \geq 2$, ապա $W(G) \leq 2|V(G)| - 3$: Հետագայում, Գիառոյի, Կուբալի և Մալաֆիյսկու կողմից[10] այս գնահատականը լավացվել է. $W(G) \leq 2|V(G)| - 4$, երբ $|V(G)| \geq 3$: Պետրոսյանը ցույց է տվել, որ այս գնահատականները հնարավոր չէ էապես լավացնել: Աքսենովիչը[11] ցույց է տվել, որ եթե G-ն կապակցված հարթ գրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա $W(G) \leq \frac{11}{6}|V(G)|$: Նույն աշխատանքում Աքսենովիչը առաջարկել է հիպոթեզ, համաձայն որի կապակցված հարթ գրաֆների համար ճիշտ է $W(G) \leq \frac{3}{2}|V(G)|$ գնահատականը: Աշխատանքում ապացուցվել են հետևյալ գնահատականները.

Թեորեմ 1.2.8. *Եթե G-ն 2-կապակցված մուլտիգրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{c(G)}{2} \right\rfloor (\Delta(G) - 1),$$

որտեղ $c(G)$-ն G-ի ամենամեծ պարզ ցիկլի երկարությունն է:

Հետևանք 1.2.9. *Եթե G-ն 2-կապակցված մուլտիգրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor (\Delta(G) - 1):$$

Նաև ցույց է տրվել, որ նշված վերին գնահատականները հասանելի են:

Հետևանք 1.2.11. *Եթե G-ն 2-կապակցված հարթ գրաֆ է, ընդ որում $\Delta(G) \leq 4$ և $G \in \mathfrak{N}$, ապա $W(G) \leq \frac{3}{2}|V(G)|$:*

Վերջին հետևանքը հաստատում է Աքսենովիչի հիպոթեզը միջակայքային ներկելի 2-կապակցված հարթ գրաֆների համար, որոնց առավելագույն աստիճանը չի գերազանցում 4-ը: Հաջորդ արդյունքները վերաբերում են $w(G)$ պարամետրին.

Թեորեմ 1.2.15. *Եթե G-ն կապակցված մուլտիգրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

---

[8] A.S. Asratian, R.R. Kamalian, Investigation on interval edge-colorings of graphs, J. Combin. Theory Ser. B 62, 1994, pp. 34-43.

[9] Р.Р. Камалян, Интервальные реберные раскраски графов, канд. дисс., Новосибирск, 1990.

[10] K. Giaro, M. Kubale, M. Malafiejski, Consecutive colorings of the edges of general graphs, Discrete Math. 236, 2001, pp. 131-143.

[11] M.A. Axenovich, On interval colorings of planar graphs, Congressus Numerantium 159, 2002, pp. 77-94.

$$w(G) \geq \left\lceil \frac{|V(G)|}{2 \cdot \alpha'(G)} \right\rceil \delta(G):$$

Հետևանք 1.2.16. *Եթե G կապակցված մուլտիգրաֆը չունի կատարյալ զուգակցում և $G \in \mathfrak{N}$, ապա $w(G) \geq \max\{\Delta(G), 2\delta(G)\}$:*

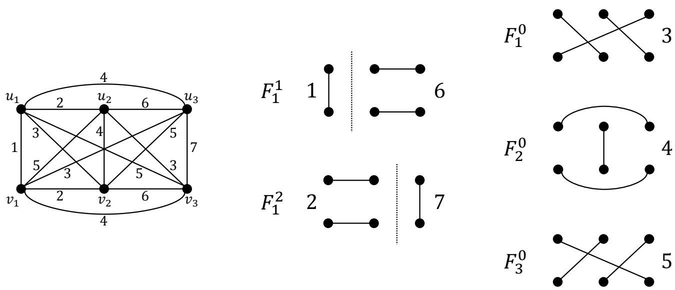
$w(G)$-ի այս գնահատականը ապացուցվել է նաև այնպիսի միջակայքային ներկելի G մուլտիգրաֆների համար, որոնց բոլոր գագաթների աստիճանները կենտ են և որոնց համար $|E(G)| - \frac{|V(G)|}{2}$ թիվը ևս կենտ է:

1.3 և 1.4 պարագրաֆները նվիրված են լրիվ գրաֆների միջակայքային ներկումների ուսումնասիրությանը: Հայտնի է, որ լրիվ գրաֆը ունի միջակայքային ներկում այն և միայն այն դեպքում, երբ գագաթների քանակը զույգ է: Հայտնի է նաև, որ $w(K_{2n}) = 2n-1$: Քամալյանը ստացել է $W(K_{2n}) \geq 2n - 1 + \lfloor \log_2(2n-1) \rfloor$ գնահատականը, որը հետագայում լավացվել է Պետրոսյանի կողմից[12].

Թեորեմ 1.3.4. *Եթե $n = p2^q$, որտեղ p-ն կենտ է, իսկ $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ապա*

$$W(K_{2n}) \geq 4n - 2 - p - q:$$

$W(K_{2n})$-ի հայտնի լավագույն վերին գնահատականը ստացել էին Գիառոն, Կուբալը և Մալաֆիյսկին. $W(K_{2n}) \leq 4n - 4$, երբ $n \geq 2$:



Նկ. 1.3: K_6-ի միջակայքային 7-ներկումը և համապատասխան 1-ֆակտորիզացիան՝ $\mathfrak{F} = \left\{F_1^1, F_1^2, F_1^0, F_2^0, F_3^0\right\}$

K_{2n} լրիվ գրաֆի գագաթների կամայական ֆիքսված $\mathbf{v} = (u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n)$ համարակալման համար $H_{\mathbf{v}}^{[i,j]}$-ով, $i \leq j$, նշանակենք K_{2n}-ի $u_i, v_i, u_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, u_j, v_j$ գագաթներով ծնված ենթագրաֆը:

Դիցուք $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_{2n-1}\}$ բազմությունը K_{2n}-ի 1-ֆակտորիզացիա է: Յանկացած $F \in \mathfrak{F}$ զուգակցման համար սահմանվում են իր *ձախ և աջ մասերը* գագաթների $\mathbf{v}$ համարակալման նկատմամբ՝

$$l_{\mathbf{v}}^i(F) = F \cap E\left(H_{\mathbf{v}}^{[1,i]}\right) \text{ և } r_{\mathbf{v}}^i(F) = F \cap E\left(H_{\mathbf{v}}^{[i+1,n]}\right):$$

Եթե որևէ i թվի համար, $1 \leq i \leq n-1$, $F = l_{\mathbf{v}}^i(F) \cup r_{\mathbf{v}}^i(F)$, ապա F-ը կոչվում է *i-բաժանված* կատարյալ զուգակցում $\mathbf{v}$ համարակալման նկատմամբ (օրինակ՝ F_1^1 և F_1^2 կատարյալ զուգակցումները Նկ. 1.3-ում): Մի շարք լեմմաների օգնությամբ հաջողվել է

[12] P.A. Petrosyan, Interval edge-colorings of complete graphs and n-dimensional cubes, Discrete Math. 310, 2010, pp. 1580-1587.

ապացուցել լրիվ գրաֆի բաժանված կատարյալ զուգակցումներով ֆակտորիզացիաների և միջակայքային ներկումների համարժեքության լեմմա, որից բխում է հետևյալ արդյունքը.

Հետևանք 1.3.12. *Ցանկացած $n \in \mathbb{N}$-ի համար K_{2n}-ը ունի միջակայքային t-ներկում այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ունի այնպիսի 1-ֆակտորիզացիա, որտեղ առնվազն $t-2n+1$ կատարյալ զուգակցումներ բաժանված են:*

Այս հետևանքի հիման վրա 1.4 ենթագլխում ապացուցվել են $W(K_{2n})$-ի մի շարք նոր ստորին և վերին գնահատականներ:

Թեորեմ 1.4.2. *Եթե $n \geq 2$, ապա $W(K_{2n}) \geq \lfloor 3.5n \rfloor - 3$:*

Թեորեմ 1.4.4. *Ցանկացած $m, n \in \mathbb{N}$ թվերի համար*

$$W(K_{2mn}) \geq W(K_{2m}) + W(K_{2n}) + 4(m-1)(n-1) - 1:$$

Վերը նշված թեորեմների ապացույցներում մշակված մեթոդներով հաջողվել է գնահատել նաև $W(G)$ պարամետրը, երբ G-ն ստացվում է լրիվ գրաֆից մեկ կատարյալ զուգակցում հանելով:

Թեորեմ 1.4.6. *Եթե G գրաֆը ստացվում է K_{2n} լրիվ գրաֆից մեկ կատարյալ զուգակցում հանելով, ապա $W(G) \geq W(K_{2n}) - 1$:*

Թեորեմ 1.4.17. *Եթե $n \geq 3$, ապա*

$$W(K_{2n}) \leq \begin{cases} 4n-5, & \text{երբ } n \geq 3, \\ 4n-6, & \text{երբ } n \geq 5, \\ 4n-7, & \text{երբ } n \geq 9: \end{cases}$$

1.4 պարագրաֆի վերջում որոշվել են նաև $W(K_{2n})$ պարամետրի ճշգրիտ արժեքները, երբ $n \leq 12$ և $n = 16$ (Աղյուսակ 1.2): Այս արդյունքների համադրմամբ ստացվել է հետևյալ ստորին գնահատականը.

Թեորեմ 1.4.19. *Եթե $n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{\alpha_i}$, որտեղ p_i-ն i-րդ պարզ թիվն է, $\pi(n)$-ը՝ n-ը չգերազանցող պարզ թվերի քանակը, իսկ $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ապա $W(K_{2n}) \geq 4n - 3 - A_n$, որտեղ $A_n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 4\alpha_5 + \frac{1}{2}\sum_{i=6}^{\pi(n)} \alpha_i(p_i+1)$:*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$W(K_{2n}) \geq$	1	4	7	11	14	18	21	26	29	33	37	41	42	46	52	57
$W(K_{2n}) =$	1	4	7	11	14	18	21	26	29	33	37	41				57
$W(K_{2n}) \leq$	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57

Աղյուսակ 1.2: Առաջին տողում բերված են $W(K_{2n})$-ի ստորին գնահատականները ըստ Թեորեմ 1.4.19-ի, երկրորդ տողում՝ հայտնի ճշգրիտ արժեքները, իսկ երրորդ տողում՝ վերին գնահատականները ըստ Թեորեմ 1.4.17-ի:

1.5 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային ներկումները: Քամալյանը[13] ցույց է տվել, որ $K_{m,n}$ լրիվ երկկողմանի

[13] Р.Р. Камалян, Интервальные раскраски полных двудольных графов и деревьев, Препринт ВЦ АН Арм. ССР и ЕГУ, Ереван, 1989, 11 стр.

գրաֆը ունի միջակայքային t-ներկում այն և միայն դեպքում, երբ $m+n-(m,n) \leq t \leq m+n-1$: Լրիվ երեք կողմանի գրաֆների վերաբերյալ Ֆենգը և Հուանգը[14] ցույց են տվել, որ ցանկացած $n \in \mathbb{N}$ թվի համար, $K_{1,1,n} \in \mathfrak{N}$ այն և միայն դեպքում, երբ n-ը զույգ է: Աշխատանքում հաջողվել է ընդհանրացնել այս արդյունքը.

Թեորեմ 1.5.6. *$K_{1,m,n}$ գրաֆը միջակայքային ներկելի է այն և միայն դեպքում, երբ $(m+1,n+1)=1$: Ավելին, եթե $(m+1,n+1)=1$, ապա $W(K_{1,m,n}) \leq m+n+1$:*

Մասնավոր դեպքում ցույց է տրվել, որ $w(K_{1,m,m+1}) = W(K_{1,m,m+1}) = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$: Այնուհետև ապացուցվել է, որ $K_{l,m,l+m}$ և $K_{2n,2n+1,2n+2}$ լրիվ երեք կողմանի գրաֆները միջակայքային ներկելի են, իսկ երբ l,m,n թվերը կենտ են, ապա $K_{l,m,n} \notin \mathfrak{N}$: Պարագրաֆի վերջում ցույց է տրվել, որ $W(K_{2n})$ պարամետրի համար ստացված գնահատականների միջոցով կարելի է լավացնել լրիվ հավասարակշռված բազմակողմանի գրաֆների համար $W(G)$ պարամետրի հայտնի գնահատականները.

Թեորեմ 1.5.13. *Եթե $r,n \in \mathbb{N}$ և nr արտադրյալը զույգ է, ապա*

$$W\left(K_{\underbrace{n,\dots,n}_{r}}\right) \geq \begin{cases} nW(K_r)+n-1, & \text{երբ } r\text{-ը զույգ է,} \\ \frac{n}{2}W(K_{2r})-1, & \text{երբ } n\text{-ը զույգ է:} \end{cases}$$

Աշխատանքի երկրորդ գլուխը նվիրված է գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային ներկումներին: G և H գրաֆների $G\Box H$ դեկարտյան արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$V(G\Box H) = V(G)\times V(H),$$
$$E(G\Box H) = \{(u_1,v_1)(u_2,v_2) : (u_1=u_2 \text{ և } v_1v_2 \in E(H)) \text{ կամ } (v_1=v_2 \text{ և } u_1u_2 \in E(G)\} :$$

Հայտնի է[15], որ եթե $G,H \in \mathfrak{N}$, ապա $G\Box H \in \mathfrak{N}$, ընդ որում, $w(G\Box H) \leq w(G)+w(H)$ և $W(G\Box H) \geq W(G)+W(H)$:

2.1 պարագրաֆում ուսումնասիրվել է միջակայքային ներկում չունեցող գրաֆների մասնակցությամբ դեկարտյան արտադրյալների ներկելիության հարցը: Ստացված արդյունքները ամփոփված են Աղյուսակ 2.1-ում:

	$G\Box H \in \mathfrak{N}$	$G\Box H \notin \mathfrak{N}$
$G \in \mathfrak{N}$, $H \in \mathfrak{N}$	$G=H=K_2$	հնարավոր չէ
$G \in \mathfrak{N}$, $H \notin \mathfrak{N}$	$G=K_2$, $H=K_3$	$G=$ , $H=K_3$
$G \notin \mathfrak{N}$, $H \notin \mathfrak{N}$	$G=H=P_{10}$	$G=H=K_3$

Աղյուսակ 2.1: Գրաֆների դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային ներկելիության հարաբերությունը առանձին բաղադրիչների միջակայքային ներկելիության հետ՝ օրինակներով:

2.2 պարագրաֆում $W(G\Box H)$-ի հայտնի գնահատականը լավացվել է այն դեպքում, երբ գրաֆներից մեկը համասեռ է:

[14] Y. Feng, Q. Huang, Consecutive edge-coloring of the generalized θ-graph, Discrete Appl. Math. 155, 2007, pp. 2321-2327.

[15] K. Giaro, M. Kubale, Compact scheduling of zero-one time operations in multi-stage systems, Discrete Appl. Math. 145, 2004, pp. 95-103.

Թեորեմ 2.2.1. *Եթե $G, H \in \mathfrak{N}$, ընդ որում H-ը r-համասեռ է, ապա.*

$$W(G\square H) \geq W(G) + W(H) + r:$$

Այնուհետև ցույց է տրվել, որ Թեորեմ 2.2.1-ի գնահատականը կարելի է էլ ավելի լավացնել, եթե ավելացնենք G գրաֆի ներկման վրա որոշակի պայմաններ: Ֆիքսված $x \in V(G)$ գագաթի համար G կապակցված գրաֆի գագաթների և կողերի բազմությունները տրոհենք մակարդակների՝ ըստ x գագաթից ունեցած հեռավորության.

$$V(G) = \bigcup_{i=0}^{\epsilon(x)} N_i(x), \text{ որտեղ } N_i(x) = \{v \in V(G) : d(v,x) = i\},\ i = 0, \dots, \epsilon(x):$$

Բոլոր $v \in N_i(G)$, $i = 1, \dots, \epsilon(x)$, գագաթների սպեկտրները տրոհենք երկու մասի.

$$S(v,\alpha) = S_x^-(v,\alpha) \cup S_x^+(v,\alpha), \text{ որտեղ}$$
$$S_x^-(v,\alpha) = \{\alpha(vu) : u \in N_{i-1}(x) \cup N_i(x)\},$$
$$S_x^+(v,\alpha) = \{\alpha(vu) : u \in N_{i+1}(x)\}:$$

Կասենք, որ G կապակցված գրաֆի α միջակայքային ներկումը *սեպարաբել* է x գագաթի նկատմամբ, եթե ցանկացած $\forall v \in V(G)$ գագաթի համար $\max S_x^-(v,\alpha) < \min S_x^+(v,\alpha)$ (այն դեպքում, երբ $S_x^-(v,\alpha) = \varnothing$, կհամարենք, որ $\max S_x^-(v,\alpha) = -\infty$, իսկ երբ $S_x^+(v,\alpha) = \varnothing$, կհամարենք, որ $\min S_x^+(v,\alpha) = +\infty$):

Թեորեմ 2.2.4. *Դիցուք G կապակցված գրաֆը ունի սեպարաբել միջակայքային t_G-ներկում որևէ $x \in V(G)$ գագաթի նկատմամբ, ընդ որում գոյություն ունի $y \in N_{\epsilon(x)}(x)$ գագաթ, որի սպեկտրը պարունակում է t_G գույնը, իսկ $1 \in S(x,\alpha)$: Եթե H գրաֆը r-համասեռ է և ունի միջակայքային t_H-ներկում, ապա*

$$W(G\square H) \geq t_G + t_H + \epsilon(x)r:$$

Հետևանք 2.2.5. *Դիցուք G-ն հանդիսանում է զույգ երկարությամբ ցիկլ, շղթա, n-չափանի խորանարդ, թրթուրաձառ կամ լրիվ երկկողմանի գրաֆ, իսկ H-ը միջակայքային ներկելի r-համասեռ գրաֆ է: Այդ դեպքում,*

$$W(G\square H) \geq W(G) + W(H) + \mathrm{diam}(G)r:$$

Հայտնի է, որ երկկողմանի գրաֆների միջակայքային ներկելիությունը պարզելը NP-լրիվ խնդիր է: Մինչ այժմ բաց է մնում 4 առավելագույն աստիճան ունեցող երկկողմանի գրաֆների միջակայքային ներկելիության հարցը: 2.3 պարագրաֆում դիտարկվել են K_2 գրաֆի և փոքր առավելագույն աստիճանով երկկողմանի գրաֆների դեկարտյան արտադրյալներ: Ցույց է տրվել, որ եթե G-ն երկկողմանի գրաֆ է, ապա $G\square K_2 \in \mathfrak{N}$, երբ $\Delta(G) = 4$, $\Delta(G) = 5$ և G-ն չունի երեք աստիճան ունեցող գագաթ, $\Delta(G) = 5$ և G-ն ունի կատարյալ զուգակցում, կամ $\Delta(G) = 6$ և G-ն ունի 2-ֆակտոր:

2.4 պարագրաֆում անդրադարձ է կատարվել հարթ դեկարտյան արտադրյալներին: Բեհզադը և Մահմուդիանը[16] ցույց են տվել, որ $G\square H$ դեկարտյան արտադրյալը հարթ է այն և միայն դեպքում, եթե $G\square H \cong P_m\square P_n$, $G\square H \cong P_m\square C_n$ կամ $G \cong K_2$, իսկ H-ը արտաքին հարթ գրաֆ է: Գիառոն և Կուբալը ապացուցել են, որ եթե $G = P_{n_1}\square P_{n_2}\square \dots \square P_{n_k}$, $G = P_m\square C_{2n}$, $m \in \mathbb{N}, n \geq 2$, կամ $G = C_{2m}\square C_{2n}$, $m,n \geq 2$, ապա $G \in \mathfrak{N}$ և $w(G) = \Delta(G)$: Աշխատանքում ստացվել են k-չափանի ցանցերի և տոռերի, ինչպես նաև գլանների ներկելիության, $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի վերաբերյալ մի շարք արդյունքներ: Մասնավորապես.

[16] M. Behzad, E.S. Mahmoodian, On topological invariants of the product of graphs, Canad. Math. Bull., 12, 1969, pp. 157-166.

Թեորեմ 2.4.6. *Եթե $m \geq 3, n \in \mathbb{N}$, ապա $C(m, 2n+1) \in \mathfrak{N}$ և*

$$w\left(C(m, 2n+1)\right) = \begin{cases} 4, & \text{երբ } m\text{-ը զույգ է,} \\ 6, & \text{երբ } m\text{-ը կենտ է:} \end{cases}$$

Եթե α-ն G-ի ճիշտ կողային ներկում է, ապա $v \in V(G)$ գագաթի դեֆիցիտը հետևյալ թիվն է. $def(v, \alpha) = \overline{S}(v, \alpha) - \underline{S}(v, \alpha) - |S(v, \alpha)| + 1$: G մուլտիգրաֆի ճիշտ α ներկման դեֆիցիտը բոլոր գագաթների դեֆիցիտների գումարն է. $def(G, \alpha) = \sum_{v \in V(G)} def(v, \alpha)$: G մուլտիգրաֆի *դեֆիցիտը*[17] G-ի բոլոր ճիշտ ներկումների դեֆիցիտներից փոքրագույնն է. $def(G) = \min_{\alpha} def(G, \alpha)$, որտեղ մինիմումը վերցվում է ըստ G-ի բոլոր ճիշտ ներկումների: Մուլտիգրաֆի՝ միջակայքային ներկելիությունից «հեռավորության» մեկ այլ չափ է *անցքերի թիվը*: Եթե α-ն G-ի ճիշտ կողային ներկում է, ապա $gn(G, \alpha) = \max_{v \in V(G)} def(v, \alpha)$: G մուլտիգրաֆի անցքերի թիվը G-ի բոլոր ճիշտ ներկումների անցքերի թվերից փոքրագույնն է. $gn(G) = \min_{\alpha} gn(G, \alpha)$, որտեղ մինիմումը վերցվում է ըստ G-ի բոլոր ճիշտ կողային ներկումների:

Գիառոն, Կուբալը և Մալաֆիյսկին ցույց են տվել, որ գոյություն ունի գրաֆների $\{G_n\}$ հաջորդականություն այնպես, որ $\lim_{n \to \infty} \frac{def(G_n)}{|V(G_n)|} = 1$: Գրաֆների դեֆիցիտի վերաբերյալ կարևորագույն բաց խնդիրներից է հետևյալ հիպոթեզը.

Հիպոթեզ 2.1. *Յանկացած G գրաֆի համար $def(G) \leq |V(G)|$:*

2.4.1 պարագրաֆում դիտարկվել են արտաքին հարթ գրաֆների ներկումները: $f_i(G)$-ով, $i = 3, 4, \ldots, |V(G)|$, նշանակենք հարթության վրա պատկերված G արտաքին հարթ գրաֆում i կողեր ունեցող սահմանափակ նիստերի քանակը:

Թեորեմ 2.4.15. *Եթե G-ն արտաքին հարթ գրաֆ է, ապա*

$$def(G) \leq \sum_{i \geq 3, \text{կենտ } i} f_i(G) \text{ և } gn(G) \leq f_3(G) + \min\{1, \sum_{i \geq 5, \text{կենտ } i} f_i(G)\}.$$

Հետևանք 2.4.18. *Եթե G-ն արտաքին հարթ գրաֆ է, ապա $def(G) \leq \frac{|V(G)|-2}{og(G)-2}$, որտեղ $og(G)$-ն G-ի կարճագույն կենտ ցիկլի երկարությունն է:*

Սա նշանակում է, որ արտաքին հարթ գրաֆները բավարարում են Հիպոթեզ 2.1-ին:

Երկրորդ գլխի վերջում դիտարկվել են Հեմմինգի գրաֆները՝ k լրիվ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալները. $H(n_1, n_2, \ldots, n_k) = K_{n_1} \square K_{n_2} \square \ldots \square K_{n_k}$: Պետրոսյանը ցույց է տվել, որ Հեմմինգի գրաֆները ունեն միջակայքային ներկում այն և միայն այն դեպքում, երբ բաղադրիչներից գոնե մեկը զույգ գագաթանի լրիվ գրաֆ է: Երբ $H(n_1, \ldots, n_k) \in \mathfrak{N}$, $w(H(n_1, \ldots, n_k)) = \Delta(H(n_1, \ldots, n_k)) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$: Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 2.6.2. *Եթե $G = H(2n_1, \ldots, 2n_k)$, որտեղ $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, ապա*

$$W(G) \geq \sum_{i=1}^{k} W(K_{2n_i}) + \sum_{i=1}^{k-1} i\,(2n_i - 1):$$

Թեորեմ 2.6.5. *Եթե $G = H(2n_1, \ldots, 2n_k)$, որտեղ $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, ապա*

$$W(G) \leq \frac{1}{2}(k+1) \sum_{i=1}^{k} (4n_i - 3):$$

[17] K. Giaro, M. Kubale, M. Malafiejski, On the deficiency of bipartite graphs, Discrete Appl. Math. 94, 1999, pp. 193-203.

Ստացված ստորին և վերին գնահատականները համընկնում են, երբ Հեմմինգի գրաֆը իզոմորֆ է n-չափանի խորանարդին[18]՝ $W(Q_n) = \frac{n(n+1)}{2}$:

Աշխատանքի երրորդ գլուխը նվիրված է միջակայքային ներկում չունեցող մուլտիգրաֆներին: Կամայական G մուլտիգրաֆի համար $w_{def}(G)$-ով և $W_{def}(G)$-ով նշանակենք t-ի ամենափոքր և ամենամեծ արժեքները, որոնց համար G-ն ունի α ճիշտ կողային t-ներկում $def(G,\alpha) = def(G)$ դեֆիցիտով: Ալտինակարը, Կապորոսսին և Հերցը[19] ցույց են տվել, որ եթե $|V(G)| \geq 3$, ապա $W_{def}(G) \leq 2|V(G)| - 4 + def(G)$: Երրորդ գլխի առաջին պարագրաֆում ապացուցվել են համանման գնահատականներ գրաֆների մի շարք դասերի համար:

Թեորեմ 3.1.1. *Դիցուք $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, իսկ $\mathfrak{C}$-ն գրաֆների որևէ փակ դաս է կախված կող ավելացնելու գործողության նկատմամբ: Եթե $W(G') \leq f(|V(G')|)$ պայմանը տեղի ունի կամայական $G' \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{N}$ գրաֆի համար, ապա ցանկացած $G \in \mathfrak{C}$ գրաֆի համար $W_{def}(G) \leq f(|V(G)| + def(G))$*

Այս թեորեմից մասնավորապես հետևում է, որ եթե G-ն եռանկյուն չպարունակող գրաֆ է, ապա $W_{def}(G) \leq |V(G)| + def(G) - 1$: Կատարյալ զուգակցում չունեցող գրաֆների $w_{def}(G)$-ի համար ստացվել է ստորին գնահատական, որն ընդհանրացնում է Հետևանք 1.2.16-ը:

Թեորեմ 3.1.7. *Եթե G-ն չունի կատարյալ զուգակցում, ապա $w_{def}(G) \geq 2\delta(G) - def(G)$:*

Այս թեորեմը ընդհանրացնում է Բուշարի, Հերցի և Դեսոլնյեի կողմից[20] ստացված արդյունքը, համաձայն որի, եթե G-ն կենտ թվով գագաթներ ունեցող գրաֆ է, ապա $w_{def}(G) \geq 2\delta(G) - def(G)$:

Քամալյանը ապացուցել է, որ կամայական $l \in \mathbb{N}$ թվի համար գոյություն ունի G գրաֆ այնպիսին, որ $G \in \mathfrak{N}$ և $W(G) - w(G) \geq l$: Հաջորդ թեորեմն ընդլայնում է այս արդյունքը դրական դեֆիցիտով գրաֆների համար:

Թեորեմ 3.1.10. *Ցանկացած $l \in \mathbb{N}$ թվի համար գոյություն ունի G գրաֆ այնպիսին, որ $def(G) > 0$ և $W_{def}(G) - w_{def}(G) \geq l$:*

Հայտնի է, որ եթե G-ն համասեռ մուլտիգրաֆ է, $G \in \mathfrak{N}$, իսկ $w(G) \leq t \leq W(G)$, ապա G-ն ունի միջակայքային t-ներկում: Հաջորդ թեորեմն ընդլայնում է այս արդյունքը դրական դեֆիցիտով մուլտիգրաֆների համար:

Թեորեմ 3.1.11. *Դիցուք α_0-ն G համասեռ մուլտիգրաֆի ճիշտ ներկում է t_0 գույներով, իսկ $D \subseteq V(G)$ նրա գագաթների որևէ ենթաբազմություն է: Եթե կամայական $v \in V(G) \setminus D$ գագաթի համար $def(v,\alpha_0) = 0$, ապա ցանկացած t թվի համար, $\overline{S}(D,\alpha_0) - \underline{S}(D,\alpha_0) + 1 \leq t \leq t_0$, G-ն ունի α ճիշտ t-ներկում այնպես, որ $def(v,\alpha) = def(v,\alpha_0)$ կամայական $v \in V(G)$ գագաթի համար:*

Գիառոն, Կուբալեն և Մալաֆիյսկին ցույց են տվել, որ $def(K_{2n+1}) = n$, $n \in \mathbb{N}$: 3.2 պարագրաֆում հաստատվել է Բորովիցկա-Օլշեվսկայի, Դրգաշ-Բուրչարդտի և

[18]P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, H.G. Tananyan, Interval edge-colorings of Cartesian products of graphs I, Discuss. Math. Graph Theory 33(3), 2013, pp. 613-632.

[19]H.S. Altinakar, G. Caporossi, A. Hertz, A comparison of integer and constraint programming models for the deficiency problem, Computers and Oper. Res. 68, 2016, pp. 89-96.

[20]M. Bouchard, A. Hertz, G. Desaulniers, Lower bounds and a tabu search algorithm for the minimum deficiency problem, J. Comb. Optim. 17, 2009, pp. 168-191.

Հալուշչակի հիպոթեզը[21], համաձայն որի $def(K_{2n+1}-e)=n-1$: Նաև ցույց է տրվել, որ $w_{def}(K_{2n+1}-e)=3n-1$, $n\in\mathbb{N}$:

Փոքր առավելագույն աստիճանով երկկողմանի գրաֆների միջակայքային ներկելիության վերաբերյալ հայտնի են մի շարք արդյունքներ: Մասնավորապես, եթե G-ն երկկողմանի գրաֆ է, որի համար $\Delta(G)\leq 3$, ապա $G\in\mathfrak{N}$ և $w(G)\leq 4$[22]: Երբ $\Delta(G)\leq 4$ և G-ն չունի 3 աստիճան ունեցող գագաթ, ապա $G\in\mathfrak{N}$ և $w(G)=4$: Նաև հայտնի է, որ G երկկողմանի գրաֆի համար միջակայքային $\Delta(G)$-ներկման գոյությունը կարելի է պարզել բազմանդամային ժամանակում, երբ $\Delta(G)\leq 4$, և NP-լրիվ է, եթե $\Delta(G)\geq 5$[23]: Միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի գրաֆների օրինակներ կառուցվել են Միրումյանի, Սևաստյանովի, Էրդյոշի, Հերցի, դե Վերրայի և Մալաֆիյսկու կողմից: Ջենսենը և Տոֆտը առաջարկել են հետևյալ խնդիրը.

Խնդիր 3.1. *Գոյություն ունի՞ երկկողմանի G գրաֆ, որի համար $4\leq\Delta(G)\leq 12$ և $G\notin\mathfrak{N}$:*

3.3 պարագրաֆում նկարագրվել են միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի գրաֆների մի քանի ընտանիքներ՝ հիմնված Շեննոնի մուլտիգրաֆների, վերջավոր պրոյեկտիվ երկրաչափությունների, ծառերի և գրաֆների ենթատրոհումների վրա:

Դիցուք G-ն գրաֆ է, $V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$: Սահմանենք $S(G)$ և $\widehat{G}$ գրաֆները հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned}
V(S(G)) &= \{v_1,\dots,v_n\}\cup\{w_{ij}: v_iv_j\in E(G)\},\\
E(S(G)) &= \{v_iw_{ij}, v_jw_{ij}: v_iv_j\in E(G)\},\\
V(\widehat{G}) &= V(S(G))\cup\{u\},\ \text{որտեղ}\ u\notin V(S(G)),\\
E(\widehat{G}) &= E(S(G))\cup\{uw_{ij}: v_iv_j\in E(G)\}:
\end{aligned}$$

$S(G)$ գրաֆը կոչվում է G-ի ենթատրոհում:

Պնդում 3.3.13. *Եթե G-ն երկկողմանի գրաֆ է և $G\in\mathfrak{N}$, ապա $S(G)\in\mathfrak{N}$:*

Հայտնի է[24,25], որ եթե G-ն համասեռ գրաֆ է, ապա $S(G)\in\mathfrak{N}$: Պետրոսյանը և Խաչատրյանը 2011-ին առաջարկել էին հիպոթեզ, համաձայն որի, եթե $G\in\mathfrak{N}$, ապա $S(G)\in\mathfrak{N}$: Այս հիպոթեզը հաստատվել է Պյատկինի կողմից[26]:

Թեորեմ 3.3.14. *Եթե G-ն կապակցված գրաֆ է, և*

$$|E(G)|>1+\max_{P\in\mathbf{P}}\sum_{v\in V(P)}\big(d_{\widehat{G}}(v)-1\big),$$

որտեղ $\mathbf{P}$-ն $S(G)$-ում w_{ij} գագաթները միացնող ամենակարճ շղթաների բազմությունն է, ապա $\widehat{G}\notin\mathfrak{N}$:

[21] M. Borowiecka-Olszewska, E. Drgas-Burchardt, M. Hałuszczak, On the structure and deficiency of k-trees with bounded degree, Discrete Appl. Math. 201, 2016, pp. 24-37.

[22] H.M. Hansen, Scheduling with minimum waiting periods, Master's Thesis, Odense University, Odense, Denmark, 1992 (դանիերեն).

[23] K. Giaro, The complexity of consecutive Δ-coloring of bipartite graphs: 4 is easy, 5 is hard, Ars Combin. 47, 1997, pp. 287-298.

[24] D. Hanson, C.O.M. Loten, B. Toft, On interval colorings of bi-regular bipartite graphs, Ars Combin. 50, 1998, pp. 23-32.

[25] Р.Р. Камалян, А.Н. Мирумян, Интервальные реберные раскраски двудольных графов одного класса, Доклады НАН РА, том 97, N 4, 1997, стр. 3-5.

[26] А.В. Пяткин, Об интервальной (1,1)-раскраске инциденторов интервально раскрашиваемых графов, Дискретн. анализ и исслед. опер. 22:2, 2015, стр. 63-72.

3.3 պարագրաֆում կառուցվել են երեք գրաֆներ, որոնք մասնակիորեն պատասխանում են Ջենսենի և Տոֆտի խնդրին. $\widehat{K}_{3,4} \notin \mathfrak{N}$, որտեղ $\Delta(\widehat{K}_{3,4}) = 12$, $|V(\widehat{K}_{3,4})| = 20$, $\widehat{K}_{2,2,2} \notin \mathfrak{N}$, որտեղ $\Delta(\widehat{K}_{2,2,2}) = 12$, $|V(\widehat{K}_{2,2,2})| = 19$, և $\widehat{K}'_{3,4} \notin \mathfrak{N}$, որտեղ $\widehat{K}'_{3,4}$ գրաֆը ստացվում է $\widehat{K}_{3,4}$ գրաֆից՝ առավելագույն աստիճան ունեցող գագաթին կից կողերից մեկը հեռացնելով ($\Delta(\widehat{K}'_{3,4}) = 11$, $|V(\widehat{K}'_{3,4})| = 20$):

Գիարոն[27] համակարգչային ծրագրի օգնությամբ ցույց է տվել, որ բոլոր երկկողմանի գրաֆները, որոնք ունեն առավելագույնը 14 գագաթ միջակայքային ներկելի են: 3.4 պարագրաֆում նկարագրված են համակարգչային բաշխված համակարգերի միջոցով կատարված հաշվարկներ, որոնց միջոցով ցույց է տրվել, որ բոլոր 15 և 16 գագաթ ունեցող երկկողմանի գրաֆները միջակայքային ներկելի են: Ստացված արդյունքներից հետևում է, որ նվազագույն թվով գագաթներով միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի գրաֆի գագաթների քանակը կարող է լինել 17, 18 կամ 19:

Աշխատանքի վերջին՝ 3.5 պարագրաֆում դիտարկվել են միջակայքային ներկում չունեցող երկկողմանի մուլտիգրաֆները:

Թեորեմ 3.5.1. *Եթե G-ն կապակցված երկկողմանի մուլտիգրաֆ է, ընդ որում $|V(G)| \leq 4$, ապա $G \in \mathfrak{N}$: Մյուս կողմից՝ ցանկացած դրական $n \geq 5$ թվի համար գոյություն ունի G կապակցված երկկողմանի մուլտիգրաֆ, որի համար $|V(G)| = n$ և $G \notin \mathfrak{N}$:*

Թեորեմ 3.5.2. *Եթե G-ն երկկողմանի մուլտիգրաֆ է, որի համար $\Delta(G) \leq 3$, ապա $G \in \mathfrak{N}$ և $w(G) \leq 4$: Մյուս կողմից՝ ցանկացած դրական $\Delta \geq 9$ թվի համար գոյություն ունի G կապակցված երկկողմանի մուլտիգրաֆ, որի համար $\Delta(G) = \Delta$ և $G \notin \mathfrak{N}$:*

Հիմնական արդյունքներն ու հետևությունները

Աշխատանքում դիտարկվել են մուլտիգրաֆների տարբեր դասերի՝ $\mathfrak{N}$ դասին պատկանելու խնդիրներ, այդ դասին պատկանող մուլտիգրաֆների համար՝ $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի գնահատման և ճշգրիտ արժեքների որոշման խնդիրներ, միջակայքային ներկումներում մասնակցող գույների հնարավոր քանակի որոշման խնդիրներ, գրաֆների տարբեր գործողությունների նկատմամբ միջակայքային ներկելիության կայունության խնդիրներ, ինչպես նաև ուսումնասիրվել են միջակայքային ներկում չունեցող գրաֆների դեֆիցիտը և $w_{def}(G)$ ու $W_{def}(G)$ պարամետրերը:

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները:

1. Միջակայքային ներկումներ ունեցող գրաֆների և մուլտիգրաֆների $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի, ինչպես նաև միջակայքային ներկում չունեցող գրաֆների $w_{def}(G)$ և $W_{def}(G)$ պարամետրերի համար տրվել են հասանելի գնահատականներ,
2. K_{2n} լրիվ գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների և այդ գրաֆների հատուկ տիպի ֆակտորիզացիաների համարժեքության հիման վրա ստացվել են $W(K_{2n})$ պարամետրի նոր ստորին և վերին գնահատականներ, գտնվել են այդ պարամետրի ճշգրիտ արժեքները $n \leq 12$ արժեքների համար,
3. Ստացվել են լրիվ բազմակողմանի գրաֆների, արտաքին հարթ գրաֆների, ցանցերի, գլանների, տոռերի և Հեմինգի գրաֆների միջակայքային կողային

[27] K. Giaro, Compact task scheduling on dedicated processors with no waiting periods, PhD thesis, Technical University of Gdansk, EIT faculty, Gdansk, 1999 (լեհերեն).

ներկումների գոյության վերաբերյալ արդյունքներ, $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի գնահատականներ, որոշ դեպքերում՝ նաև ճշգրիտ արժեքներ,

4. Ցույց է տրվել գրաֆների միջակայքային ներկելիության կապը այդ գրաֆների մասնակցությամբ դեկարտյան արտադրյալների միջակայքային ներկելիություն հետ, էապես ուժեղացվել են համասեռ գրաֆների մասնակցությամբ դեկարտյան արտադրյալների համար $W(G\Box H)$ պարամետրի հայտնի գնահատականները, ապացուցվել է երկկողմանի գրաֆների մասնակցությամբ դեկարտյան արտադրյալների մի շարք դասերի միջակայքային ներկելիությունը,
5. Գտնվել են որոշ գրաֆների դեֆիցիտի ճշգրիտ արժեքները, հաստատվել է Բորովիցկա-Օլշեվսկայի, Դրգաշ-Բուրչարդտի և Հալուշչակի հիպոթեզը, ցույց է տրվել, որ արտաքին հարթ գրաֆները բավարարում են դեֆիցիտի մասին հիպոթեզին, համաձայն որի ցանկացած G գրաֆի համար $def(G) \leq |V(G)|$,
6. Մասնակի լուծում է տրվել միջակայքային ներկում չունեցող փոքրագույն երկկողմանի գրաֆների մասին Ջենսեն-Տոֆտի խնդրին, կառուցվել են այդպիսի գրաֆների և մուլտիգրաֆների հայտնի փոքրագույն օրինակները, համակարգչային հաշվարկների միջոցով ցույց է տրվել, որ ոչ ավել, քան 16 գագաթ պարունակող բոլոր երկկողմանի գրաֆները ունեն միջակայքային ներկումներ:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրապարակված աշխատանքների ցանկ

1. P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, Further results on the deficiency of graphs, Discrete Applied Mathematics, 2017, http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2017.04.005.
2. H.H. Khachatrian, Deficiency of outerplanar graphs, Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences, 2017, 51 (1), pp. 22-28.
3. H.H. Khachatrian, P.A. Petrosyan, Interval edge-colorings of complete graphs, Discrete Mathematics 339, 2016, pp. 2249-2262.
4. P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, T.G. Mamikonyan, On interval edge-colorings of bipartite graphs, 2015 Computer Science and Information Technologies (CSIT), Yerevan, 2015, pp. 71-76.
5. H.H. Khachatrian, P.A. Petrosyan, Interval edge-colorings of Hamming graphs, 8th Slovenian Conference on Graph Theory, Kranjska Gora, Slovenia, 2015, p. 134.
6. P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, Interval non-edge-colorable bipartite graphs and multigraphs, Journal of Graph Theory 76, Issue 3, 2014, pp. 200-216.
7. A. Grzesik, H.H. Khachatrian, Interval edge-colorings of $K_{1,m,n}$, Discrete Applied Mathematics 174, 2014, pp. 140-145.
8. H.H. Khachatrian, P.A. Petrosyan, Interval edge-colorings of complete graphs, 7th Cracow Conference on Graph Theory, Rytro, Poland, 2014, pp. 35-36.
9. A. Grzesik, H.H. Khachatrian, P.A. Petrosyan, On interval edge-colorings of complete multipartite graphs, 5th Polish Combinatorial Conference, Bedlewo, Poland, 2014, p. 29.

10. P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, H.G. Tananyan, Interval edge-colorings of Cartesian products of graphs I, Discussiones Mathematicae Graph Theory 33(3), 2013, pp. 613-632.
11. A. Grzesik, H. Khachatrian, On interval edge-colorings of complete tripartite graphs, 9th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Revised Selected Papers, Yerevan, 2013, pp. 1-3.
12. P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, On a generalization of interval edge colorings of graphs, 15th Workshop on Graph Theory, Colourings, Independence and Domination, Szklarska Poreba, Poland, 2013, p. 44.
13. P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, H.G. Tananyan, Interval edge-colorings of Cartesian products of graphs, 14th Workshop on Graph Theory, Colourings, Independence and Domination, Szklarska Poreba, Poland, 2011, p. 44.
14. P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, L.E. Yepremyan, H.G. Tananyan, Interval edge-colorings of graph products, Proceedings of the CSIT Conference, Yerevan, 2011, pp. 89-92.
15. П.А. Петросян, Г.А. Хачатрян, Интервальные реберные раскраски декартовых произведений регулярных графов, Пятая годичная научная конференция РАУ (Сборник научных работ), 2010, стр. 241-248.

Abstract

Many important problems in scheduling theory are reduced to edge colorings of graphs with various restrictions. In particular, the problems of existence and construction of school timetables without gaps are modeled using interval edge-colorings of graphs and multigraphs. This dissertation is devoted to investigation of such colorings and their generalizations.

We consider finite undirected graphs without loops and multiple edges, and multigraphs, which can have multiple edges. Let $V(G)$ and $E(G)$ denote the sets of vertices and edges, respectively. A proper edge-coloring of multigraph G is a mapping $\alpha : E(G) \to \mathbb{N}$ such that $\alpha(e) \neq \alpha(e')$ for every pair of adjacent edges e and e'. If α is a proper edge-coloring of G and $v \in V(G)$, then $S(v,\alpha)$ denotes the set of colors adjacent to the vertex v. $\underline{S}(v,\alpha)$ and $\overline{S}(v,\alpha)$ denote the smallest and the largest colors used in $S(v,\alpha)$, respectively.

A proper edge-coloring $\alpha : E(G) \to \{1,\dots,t\}$ is called interval t-coloring of G, if all colors are used and for each $v \in V(G)$ the set $S(v,\alpha)$ is an interval of integers. A multigraph G is interval colorable if it has an interval t-coloring for some positive integer t. The set of all interval colorable multigraphs is denoted by $\mathfrak{N}$. For a multigraph $G \in \mathfrak{N}$, the least and the greatest values of t for which G has an interval t-coloring are denoted by $w(G)$ and $W(G)$, respectively.

Let G be a multigraph. For every proper edge-coloring α of G, the deficiency of α is defined as follows: $def(G,\alpha) = \sum\limits_{v \in V(G)} \left(\overline{S}(v,\alpha) - \underline{S}(v,\alpha) - |S(v,\alpha)| + 1\right)$. The deficiency of G, denoted by $def(G)$, is the minimum deficiency over all proper edge-colorings of G. For a multigraph G, the smallest and the largest values of t for which it has a proper edge-coloring α with t colors and deficiency $def(G,\alpha) = def(G)$ are denoted by $w_{def}(G)$ and $W_{def}(G)$, respectively.

The Cartesian product $G\Box H$ of graphs G and H is defined as follows:

$$V(G\Box H) = V(G) \times V(H)$$
$$E(G\Box H) = \{(u_1,v_1)(u_2,v_2) : (u_1 = u_2 \text{ and } v_1v_2 \in E(H)) \text{ or } (v_1 = v_2 \text{ and } u_1u_2 \in E(G)\}$$

In the dissertation we consider the problems of the existence, construction and estimation of numerical parameters of interval edge-colorings for various classes of multigraphs, as well as the problems of stability of interval edge-colorings under some operations. In addition, special attention is paid to the problems of determining and estimating $def(G)$, $w_{def}(G)$ and $W_{def}(G)$ parameters for interval non-edge-colorable graphs. In particular, the following results were obtained.

1. For interval colorable multigraphs and interval non-colorable graphs, general bounds are obtained on the parameters $w(G)$, $W(G)$ and $w_{def}(G)$, $W_{def}(G)$, respectively.

2. New lower and upper bounds for $W(K_{2n})$ are given based on the equivalence of interval edge-colorings of complete graphs K_{2n} and special type of factorizations of these graphs. Moreover, the exact values of $W(K_{2n})$ are determined for $n \leq 12$.

3. New results are obtained on interval colorability of several classes of graphs, and new bounds for $w(G)$ and $W(G)$ parameters are obtained for complete multipartite graphs, outerplanar graphs, grids, cylinders, tori and Hamming graphs. Moreover, exact values of these parameters are determined for some cases.

4. The connections between interval colorability of Cartesian products and their factors are shown, all known bounds on $W(G\Box H)$ are significantly improved for regular graphs, interval colorability is proved for several classes of Cartesian products of bipartite graphs.

5. Deficiencies of some graphs are determined, a conjecture by Borowiecka-Olszewska, Drgas-Burchardt and Hałuszczak is proved, all outerplanar graphs are shown to satisfy a conjecture on graph deficiency, according to which $def(G) \leq |V(G)|$ for every graph G.

6. A partial solution is given to the problem by Jensen and Toft on the smallest interval non-colorable bipartite graphs, the smallest known examples of such graphs are constructed, and it is shown that all bipartite graphs having at most 16 vertices are interval colorable.

Резюме

Многие задачи составления расписаний сводятся к реберным раскраскам графов с различными ограничениями. В частности, задачи существования и построения расписаний без "окон" моделируются с помощью интервальных реберных раскрасок графов и мультиграфов. Настоящая диссертация посвящена исследованию интервальных реберных раскрасок и их обобщений.

В диссертационной работе рассматриваются конечные неориентированные графы без кратных ребер и петель, а также мультиграфы, которые допускают наличие кратных ребер. Пусть $V(G)$ — множество вершин мультиграфа G, а $E(G)$ — множество ребер мультиграфа G. Функция $\alpha : E(G) \to \mathbb{N}$ называется правильной реберной раскраской мультиграфа G, если смежные ребра окрашены в различные цвета. Если α — правильная реберная раскраска мультиграфа G и $v \in V(G)$, то через $S(v,\alpha)$ обозначим множество цветов ребер, инцидентных v. Обозначим через $\underline{S}(v,\alpha)$ и $\overline{S}(v,\alpha)$ наименьший и наибольший цвет из множества $S(v,\alpha)$, соответственно.

Правильная реберная раскраска $\alpha : E(G) \to \{1,\dots,t\}$ называется интервальной t-раскраской мультиграфа G, если каждый из t цветов использован и для любой вершины $v \in V(G)$ множество $S(v,\alpha)$ образует интервал целых чисел. Мультиграф G называется интервально раскрашиваемым, если он обладает интервальной t-раскраской для некоторого t. Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество интервально раскрашиваемых мультиграфов. Для мультиграфа $G \in \mathfrak{N}$ через $w(G)$ и $W(G)$ обозначим, соответственно, наименьшее и наибольшее t, при котором G обладает интервальной t-раскраской.

Пусть G — произвольный мультиграф. Для любой правильной реберной раскраски α мультиграфа G определим дефицит раскраски α следующим образом: $def(G,\alpha) = \sum\limits_{v \in V(G)} \left(\overline{S}(v,\alpha) - \underline{S}(v,\alpha) - |S(v,\alpha)| + 1\right)$. Дефицитом мультиграфа G называется число $def(G)$, определяемое следующим образом: $def(G) = \min_{\alpha} def(G,\alpha)$, где минимум берется по всевозможным правильным реберным раскраскам G. Для мультиграфа G через $w_{def}(G)$ и $W_{def}(G)$ обозначим, соответственно, наименьшее и наибольшее t, при котором G обладает правильной реберной раскраской α в t цветов с дефицитом $def(G,\alpha) = def(G)$.

Декартовым произведением графов G и H называется граф $G\square H$, определяемый следующим образом:

$$V(G\square H) = V(G) \times V(H)$$
$$E(G\square H) = \{(u_1,v_1)(u_2,v_2) : (u_1 = u_2 \text{ и } v_1v_2 \in E(H)) \text{ или } (v_1 = v_2 \text{ и } u_1u_2 \in E(G)\}$$

В настоящей работе исследованы задачи существования, построения и оценки числовых параметров интервальных реберных раскрасок различных классов мультиграфов, а также задачи устойчивости интервальных реберных раскрасок относительно некоторых графовых операций. Кроме того, особое внимание в работе уделено задачам определения и оценивания числовых параметров $def(G)$, $w_{def}(G)$ и $W_{def}(G)$ для интервально не раскрашиваемых графов. В частности, получены следующие результаты:

1. общие оценки параметров $w(G)$ и $W(G)$ ($w_{def}(G)$ и $W_{def}(G)$) интервально раскрашиваемых (не раскрашиваемых) мультиграфов;

2. новые нижние и верхние оценки параметра $W(K_{2n})$, основанные на эквивалентности интервальных реберных раскрасок полного графа K_{2n} и специального типа факторизации этого графа, а также точные значения $W(K_{2n})$ при $n \leq 12$;

3. новые результаты, касающиеся интервальной раскрашиваемости некоторых классов графов, а также новые оценки параметров $w(G)$ и $W(G)$ для полных многодольных графов, внешнепланарных графов, сеток, цилиндров, торов и графов Хэмминга (в некоторых случаях точные значения этих параметров);

4. возможные связи между интервальной раскрашиваемостью декартовых произведений графов и их факторов, существенно улучшенные оценки параметра $W(G\square H)$ для регулярных графов, а также интервальная раскрашиваемость некоторых классов декартовых произведений двудольных графов;

5. дефициты некоторых графов, подтверждение гипотезы Боровецка-Олшевской, Дргаш-Буршардт и Халушчака, а также справедливость гипотезы о дефиците графа ($def(G) \leq |V(G)|$ для произвольного графа G) в случае внешнепланарных графов;

6. частичное решение проблемы Дженсена и Тофта о наименьшем интервально не раскрашиваемом двудольном графе, построение наименьших известных таких графов, а также интервальная раскрашиваемость всех двудольных графов с числом вершин не превосходящим 16.